数学辞海

MATHEMATICS DICTIONARY

第三卷

山 西 教 育 出 版 社
东 南 大 学 出 版 社
中国科学技术出版社

山西省人民政府资助出版

如果你有数学问题，
而不好意思发问，
你可从本书获得解答。
一九八八年八月书祝
数学辞海成功
陳省身



学习、研究、运用、发展数学，让中国数学赶上国际先进水平，促进社会主义現代化建设

吴大任

数学的进步和完美与国家的繁荣和昌隆是紧密相连的

杨乐 八八·七

長江納众水百
折不回頭碧海
能容物滔滔向
海流

數學辭海出版紀念

李國平並書





《数学辞海》总编辑委员会

《数学辞海》第三卷编辑委员会

《数学辞海》第三卷各分支学科编辑委员会

序

当我们向着日益临近的21世纪走去的时候，一部巨著——《数学辞海》将要面世了。这是我国200余所高等院校、科研机构，数以千计的数学家、数学工作者共同劳动的结晶，是一件影响深远的大事。

还是在本世纪同上一世纪交接的1900年，希尔伯特就以23个数学问题作为送旧迎新的礼物，高瞻远瞩地指引着20世纪数学发展的若干重要进程。如今，20世纪的帷幕行将落下，我们惊喜地看到，在这百年间，数学已经发生了多么巨大的变化！人们对数学的认识更深刻了，数学的分支更多了，数学的广度和深度，都远远超出了本世纪初的预料。异军突起的新科学和新技术，诸如计算机科学、航天技术、生命工程、数字通信以及新能源的开发、新材料的应用等，无不需要数学，社会科学和人文科学的经济、教育、语言、考古等领域，也开始与数学结下不解之缘。所有这些学科在向数学索取的同时，也都在某一方面推动和改变着数学。数学已经发展成为内涵广泛的数学科学。数学是大自然的语言，又是人类社会生活中各种关系的高度概括。数学在现实世界中获取模型，扩大了自己的外延，同时展现了新的内涵、新的抽象。如果说古希腊和古代中国的数学只是涓涓细流，那么，今天之数学已经汇成了波流浸灌的长江大河。

一个人可以学贯中西，但无法懂得现代数学的方方面面，而社会变革的进程和新技术的浪潮却迫使人们学习和应用更多的数学。解决这个矛盾的办法之一，自然是编纂一部大型的数学工具书。《数学辞海》正是在这样的时代需求背景之下应运而生的。有了这种巨大的推动力量，它才能克服种种艰难曲折，从第一页稿纸，发展成为我们所见到的这部别具一格的鸿篇巨制。

为什么这本书能使作者们激动，愿意竭诚为之构筑，又能吸引读者，使之企足而待呢？这是由于数学自身的地位和价值，它在实践中的巨大作用和自身的美。

数学首先是人们生活和生产的工具。马克思非常赞同康德的这样一句话："一门科学，只有当它成功地应用数学时，才算达到了完善的地步。"事实上，数学被使用的程度，往往反映了一个国家、一个民族的科学进步和经济发展水平。很难设想，在一个低技术的国家，会产生高深的数学，而高技术的社会形态，必有与之相适应的数学水平。毫无疑问，在科学技术飞速发展的当今世界，对数学的需求将与日俱增。

其次，数学又是一种文化形态。古往今来，人们在数学这块沃土上耕耘，收获了许多硕果。这些美好的硕果，本身就是一首首动人的诗篇，闪耀着智慧的光芒。一般人都会欣赏艺术，然而，当一个人只要具有基础的数学知识，同样可以对一道经典的数学名题和某个优美的解法叹为观止。人们还概括了大量实际模型的抽象数学，通过形式推演，以得出

系统的理论，再应用到更广泛的总体上去。数学的这种以简驭繁的本领决定于它的高度概括性。正是由于概括，数学形成了包含各个学科的优美结构。数学的发展推动了自然结构观的发展，它有力地带动了其他学科，大大加速了人类文明史的进程。

数学的作用，还在于它有着独特的培育人的功能。数学是每个人必须学习的基础学科。从小学到中学，数学的学时最多，除了因为数学是一切科学的基础和工具之外，更因为数学有着独特的思维教育和智力开发的作用。数学的高度抽象、遵从逻辑规则和不断创新的特征，集中而突出地表现了人类思维的概括性、逻辑性和探索性。所以，学习数学对人才的培养是一种基本的思维训练，被称为"思想的体操"。

为了全面地反映古今中外的数学成果、体现数学的多种功能，本书既兼顾传统数学和现代数学，又兼顾抽象的基础数学和具体的应用数学。考虑到广大数学教育工作者的需求，本书还将初等数学和高等数学相对地进行了划分，并按习惯将某些分支学科集中列卷，此外还编纂了包含数学史与数学教育等分支学科的专卷，也系统地介绍了中国的古算。这样编纂的《数学辞海》将会充分地显示数学的工具意义、文化意义和教育意义。愿这部国人自编的《数学辞海》既能为国家经济建设服务，又能在民族文化建设中起到应有的作用。

《数学辞海》是改革开放的产物，又将为改革开放服务。人们或许没有想到，这部巨著竟出自民办的编写组织。编纂者来自大江南北、长城内外、海峡两岸，在历时 10 余年间，数百所大专院校、科研机构的千余名专家学者日夜辛劳、自愿奉献，在《数学辞海》中编织着自己的理想和愿望。社会各界积极赞助，有识之士慷慨捐赠，海外同胞亦纷纷来电来函表示支持，用他们的心意渲染着文化建设的宏图。在这个民办写作团体中，人们互相信任、互相支持、互相勉励，充满了成就事业的认同感、紧迫感。这一写作经验也清楚地说明：在共同的愿望下，民办科研也是一条坦途。这是《数学辞海》编写过程中给我们的一个十分有益的启示。

像一切事物一样，《数学辞海》还不会达到绝对完善的境界。相反，这部反映浩如烟海的数学知识，动员了如此巨大力量而编纂的大型著作，首次面世时，一定会有许多不足之处，例如整体结构、条目收集、词义诠释、词类归属等，都还会有需要进一步推敲、商榷的地方。数学是极为严谨的科学，《数学辞海》必将在众多专家的严谨尺度之下，逐版改进。我们今天为之高兴的是，将来可能成为传世之作的《数学辞海》已有了良好的雏形，我们准备将它作为迎接新世纪的礼物，奉献给关心它、需要它的广大读者。

程民德

1998 年 6 月

凡　例

一、编　排

1. 全书包括数学科学的100余个分支学科或专题项目，按照从初等数学到高等数学，从古典数学到现代数学，从理论数学到应用数学的原则，将整个数学科学划分为6卷编辑出版(参见《数学辞海》六卷本内容划分方案)。

2. 各卷正文均按数学知识的结构体系编排，同一分支学科(或同一专题项目)的条目相对集中，一般按知识本身的结构、层次、逻辑等关系确定其先后顺序，而数学史部分，如数学家、数学名著、数学期刊、数学团体等，则分别按其出生、出版、创刊、成立的年代先后顺序编排。

3. 各卷目录标题分为三级：一级标题为一个分支学科或一个知识门类。一级标题之下，则按知识构成设若干个二级标题。例如，第一卷中的“数学分析”为一级标题，下设六个二级标题——“实数理论”、“变量与函数”、“极限理论”、“微分学”、“积分学”和“无穷级数”；又如，第六卷中的“中国数学史”为一级标题，下设四个二级标题——“中国古代数学史”、“中国古代数学著作”、“中国古算名词术语”和“中国数学家”。三级标题为具体条目名称。

4. 同一卷中不同分支学科之间的内容有重复时，其知识主题一般地只在一处设条目；不同卷中的学科内容有重复时，其知识主题在各相关部分均设条目，但在释文内容上各有侧重。

二、条　目

1. 条目的标题一般为一个词，如“圆”、“群”、“环”、“函数”、“矩阵”、“向量”、“方程”等，也有的是一个词组，如“勾股定理”、“常微分方程的通解”、“哥德巴赫猜想”、“希尔伯特第6问题”等。

2. 条目设立的条件：1)独立的知识主题或已形成的固定概念；2)能够应用准确的、人们习惯和易于理解的词标引；3)便于读者快速查阅。

3. 条目的分类：条目按其释文的长短分为五类：特长条目(3000字左右)、长条目(1000—3000字)、中条目(300—1000字)、短条目(300字以内)和参见条目。

4. 本书所收的数学名词术语，力求与“全国自然科学名词审定委员会”公布的《数学名词》(科学出版社，1993)保持一致。外国人名的中文译名，力求与《中国大百科全书·数学卷》和梁宗巨主编的《数学家传略词典》(山东教育出版社，1989)中的译名保持一致。未出现在上述著作中的外国人名的中文译名，则采用数学界的约定译名或用习惯译法译出的译名。

三、释　文

1. 本书条目的释文，以文字叙述为主，并采用规范化的现代汉语，力求科学、准确、简明、通俗，杜绝教材式语言和口语，释文开头不再重复条目的标题。

2. 释文开头一般要求破题，然后给出严格的数学定义，并尽量阐明该条目内容的历史沿革及其在本分支学科或知识门类中的地位、作用、发展趋势等，以增强释文的科学性和可读性。

3. 一词多义的释文，用①…②…③…分项叙述，某个条目的释文需由其他条目释文补充说明的，采

用“参见”的方式，被参见的条目标题需加引号，条目标题前加“参见”字样，并置于圆括号之内。

4. 对常见的异名同义词，只给出一种条目标题的释文，其余异名条目亦列入正文，但不再写释文，给出释文的条目标题加引号，条目标题前加“即”字样。例如：矢量(vector)即“向量”；全纯函数(holomorphic function)即“解析函数”；正则函数(regular function)即“解析函数”。

5. 每一个条目标题后，一般在圆括号内标注有对应的英文。凡外国人名(日本人除外)在条目的释文中第一次出现时，在其中文译名后的圆括号内标注有相应的外文原名的姓和名的首字母，并用逗号隔开。例如，欧几里得(Euclid)、牛顿(Newton,I.)、高斯(Gauss,C.F.)。同一外国人名在条目的释文中第二次出现时，不再标注外文。在日本人名、中国人名、中国古代数学史、中国古代数学著作、中国古算名词术语等条目标题后，一般在圆括号内标注汉语拼音。

6. 如果条目乙的基本定义已经完全包括在条目甲的释文之中，那么条目乙只作为“参见条目”保留，所参见的条目标题需加引号，并在条目标题前加“见”字样，而释文不再重复。例如，在条目“线性变换”的释文中，已给出“单位变换”、“恒等变换”和“零变换”的定义，则上述三个条目就作为“参见条目”予以保留，并分别表示为：单位变换(unit transformation)见“线性变换”；恒等变换(identity transformation)见“线性变换”；零变换(null transformation)见“线性变换”。

四、索　引

1. 本书每一卷正文之后，均附有三种索引，即条目笔画索引、条目音序索引和条目西文索引。索引中条目标题后面的数字，表示该条目在正文中的页码。

2. 在条目笔画索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按一(横)、丨(竖)、丿(撇)、丶(点)、乛(折)五种笔形顺序排列，其中，㇀(提)归为一(横)，亅(竖钩)归为丨(竖)，㇏(捺)归为丶(点)，各种笔形带钩或曲折的笔画(除竖钩“亅”外)归为乛(折)。第一字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 在条目音序索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

4. 在条目笔画索引和条目音序索引中，凡第一字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在两种索引的最后。西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画或音序排列。

5. 在条目西文索引中，按条目标题的起首西文字母顺序排列；条目标题的西文缩写，按一个词排列。凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。没有西文译名的条目，未收进条目西文索引。

6. 在各卷索引之后，还附有本卷涉及到的中外人名译名对照表，以供读者查阅。

目　录

《数学辞海》六卷本内容划分方案

第一卷

数学
算术
初等代数
平面几何
平面三角
立体几何
球面几何
平面解析几何
空间解析几何
初等数论
高等代数
高等几何
数学分析
集合论
形式逻辑
布尔代数
概率论与统计学初步
数学符号表

第二卷

数学
组合学
线性与多重线性代数
群及其推广
李群与李代数
环与代数
模与同调代数
序与格
范畴论与代数 K 理论
域论与伽罗瓦理论
数论
代数几何
微分几何学
凸集几何与距离几何
一般拓扑学
代数拓扑学与流形拓扑学
奇点理论与突变理论
数学符号表

第三卷

数学
实变函数论
复变函数论
多复变函数论
测度论
泛函分析
变分法
函数逼近论
调和分析
流形上的分析
位势论
凸分析
非标准分析
小波分析
分形几何
常微分方程
偏微分方程
积分方程
动力系统
特殊函数
数学符号表

第四卷

数学
数学基础
数理逻辑
计算数学
概率论
随机过程
统计学
经济数学
生物数学
数学物理与理论物理
模糊数学
数学符号表

第五卷

数学
运筹学
系统理论
控制理论
通信与信息理论
画法几何与工程图学
计算机科学
数理语言学
力学
天文学
测绘学
数学符号表

第六卷

数学
中国数学史
外国数学史
数学符号史
数学团体与研究机构
数学竞赛与数学奖
数学期刊
数学教育
数学哲学
数学名题与猜想
珠算
数学发展史年表

第三卷条目目录

说明：该目录由本卷所属各分支学科或专题项目的全部条目(包括给出释文的条目及其参见条目)组成，按知识结构顺序编排，即按条目在正文中出现的先后顺序排列.

实变函数论

欧氏空间中的点集

勒贝格测度

连续函数与可测函数

勒贝格积分

R 中的微分与积分

函数空间

复 变 函 数 论

复平面 C 的拓扑

解析函数

复积分

级 数 展 开

几何函数论

调 和 函 数

整函数与亚纯函数

黎曼曲面

解析函数空间

广义解析函数与边值问题

复变函数的应用

多复变函数论

测　度　论

集　类

测度和积分

向量值测度和积分

几何测度论

泛 函 分 析

拓扑线性空间

巴拿赫空间与希尔伯特空间

广义函数

有序线性空间

线性算子

算子半群

算子代数

非线性算子

非线性分析拓扑与变分方法

微分算子与积分算子

变　分　法

函 数 逼 近 论

实变函数逼近论

复变函数逼近论

抽象逼近

调 和 分 析

一元傅里叶分析

多元傅里叶分析

奇异积分算子

抽象调和分析

流 形 上 的 分 析

流形上的微积分

莫尔斯理论

积分周期理论

示性类理论

层论

流形上的微分算子

霍奇理论

位　势　论

一般位势论与广义核

位势论与函数论

群上的位势论

公理化位势论

位势论与概率论

凸　分　析

凸　集

凸 函 数

非 标 准 分 析

非标准全域

非标准微积分

非标准拓扑

非标准测度论

非标准泛函分析

小 波 分 析

分　形　几　何

测度与维数

几类重要的分形集

函数图象的维数

测度的分形结构

常微分方程

常微分方程基础

线性常微分方程

常微分方程初值问题

常微分方程的边值问题

常微分方程解析理论

常微分方程定性理论

常微分方程稳定性理论

泛函微分方程

概周期常微分方程

抽象空间中的微分方程

随机微分方程

偏 微 分 方 程

偏微分方程的基本概念

一阶偏微分方程

高阶偏微分方程

双曲型方程

椭圆型方程

抛物型方程

混合型方程

线性偏微分算子

格 林 函 数

变分解法与变分不等式

偏微分方程基本解法

积 分 方 程

动　力　系　统

拓扑动力系统

一维动力系统

微分动力系统

复动力系统

遍历性理论

特殊函数

附录　特殊函数公式

伽马函数及其他相关函数

超几何函数

球函数

汇合型超几何函数

柱函数

椭圆积分和椭圆函数

拉梅函数

马蒂厄函数

正交多项式

其　　他

数　　学

数学（mathematics）　数学一词来自希腊文 μαθηματιχη'，其字根 μα'θημα 意义为知识、科学，它非常恰当地反映这个领域的广泛性与普遍性．从历史上看，数学常常用其某个侧面来表示：中国古代用算学来强调其计算技术方面，而西方多用几何学一词代表数学，以显示欧几里得（Euclid）的《几何原本》传统，而实际上，其中也包括数论和量论的内容．随着时间的流逝，数学的内容不断地扩大，在 17—18 世纪直至 19 世纪，被包括在数学领域内的许多学科和分支已经独立出去，而在各学科的边界又不断创造和衍生出一系列新的学科，这些新学科现在已融合而成面向 21 世纪的庞大的数学科学领域，它是一个具有内在统一性的科学技术群．以下从四个方面进行论述：

1．数学的对象和特点．数学中最原始的对象是数与形．自然数已经是相当抽象的概念，它不仅要从一个苹果、一间房子、一堆沙土中抽象出数 1 来，而且还要由数 1 得出更一般数的概念．有了自然数的概念还会遇到基数和序数的矛盾．至于记数法和位值制都是中国对人类文明的伟大创造，这种伟大创造绝不仅仅是对自然界的认识和对哲学思辨的产物，它真正体现数学的成就．数学另一个原始对象是形，它更为直观，甚至长期以来人们也把它当成自然科学的对象，尽管柏拉图（Plato）早就说过，三角形属于理念的世界．当然现在数学的空间远远超出现实的空间，数学中的“形”也不限于人们感官能摸得着、看得见的东西，它是更抽象的概念，如高维空间、无穷集合、群、拓扑等是任何其他学科都不研究的对象．数学作为一门模式科学，应该归入更广泛的符号和形式科学类．这一类似乎应该介于哲学类与具体科学，即自然科学与社会科学之间．它的姊妹学科包括一般符号学、语言学、逻辑学、方法学以及还未成型的一般系统学．有意思的是，有些数学家也认为“数学是一种语言”、“数学可还原为逻辑”、“数学是一种普遍方法”等，这些说法尽管有些偏颇，但毕竟触到数学与自然科学的本质差别以及数学与符号科学的亲缘关系．数学的本质特征是：

1）数学是一种普遍语言．这种观点可以追溯到莱布尼茨（Leibniz，G. W.），他首先提出科学与哲学的两大目标，其中第一个就是找出一种普遍文字，首先是一种符号及变元表示的符号语言．正如吉布斯（Gibbs，J. W.）所说的“数学是一种语言”．吉布斯不仅是 19 世纪最伟大的统计热力学大师之一，而且也是向量分析的开创者及传播者．在 19 世纪 90 年代，英国著名的杂志《自然》上掀起的一场大辩论中，向量最终取代四元数而成为物理学普遍使用的概念．19 世纪和 20 世纪之交，向量分析成为数学、物理学的有效工具，更确切地说，成为描述各种现象的语言．数学概念的产生及其符号化反映了数学的进步，算术运算的符号化及向符号代数过渡，几何学的代数化，微分、积分运算的符号化，函数的符号及行列式、矩阵、向量、张量等概念的符号化，复数的表示，算子演算以及符号逻辑等都是数学的重要进展．在这个意义下数学对象是一个符号集合．单纯的符号集合，正如裸的集合一样，没有结构，没有什么可说的，没有什么意思，而只有它具有形式结构（语法学），有一定的解释（模型——语义学），有一定变换、生成、操作、运用方式（语用学），它才能变得丰富多彩起来．数学作为一种普遍语言有自己的特点，比起纯逻辑语言来有内涵的丰富性，而比起通常语言来有外延的确定性．数学不仅是一种语言，它还是一种精密语言．正因为如此，它常被称为精密科学．数学之所以精密，不单是因为其数量表示，还在于它越来越深入那些以前所无法表示的或非实在的概念，如瞬时速度、加速度、位势、熵、谱等．对于许多直观概念，也只有在数学上才能得到很好处理，如连续性、对称性、随机性乃至信息控制、策略、对策、决策等．数学还明确了一些对立的范畴，如有穷与无穷、连续与离散、局部与整体、确定与偶然等．还有重要的元概念：如结构、构造、存在、模型、等价等．这些语言越来越深入到科学乃至日常生活之中，使论述确切及精密．许多常用概念也只有在数学上得到澄清才算有深刻的认识．

2）数学是一种普遍方法．从古到今，对许多问题求出解答的过程中，人们或多或少产生一种方法的意识．而这种方法概念，又以数学中的算法概念为摹本．在这个意义下，数学充分显示其作为操作技术的特性．虽然精确的算法概念一直到 20 世纪 30 年代才有确切定义，但模糊的概念很早就有，而且也是数学追寻的主要目标之一．中国的数值运算及方程求解、欧几里得辗转相除法以及印度、阿拉伯的一些算法，都使人认识到算法是一种有限的指令，可以机械地运行，从而对一类问题得出确定的解答．许多几何作图问题以及求积问题也要求发现广义的“算法”来求解问题．笛卡儿（Descartes，R.）把算法推向普遍方法论的高度，他十分明确地考虑造出普遍方法

来解决科学问题，特别是数学问题，对此他称为普遍数学．正是这种对方法的普遍考虑使他发明代数方法研究几何问题，从而创立解析几何学．波利亚(Polya，G．)把笛卡儿的方案总结如下：

任意问题

$\xrightarrow{①}$数学问题

$\xrightarrow{②}$代数问题

$\xrightarrow{③}$解方程组 $\begin{cases} P_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0, \\ P_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0 \end{cases}$

$\xrightarrow{④}$ 解方程 $P(x) = 0$，

其中第③，④步无非是数学，第②步并没有一般方法，第①步则困难更大．莱布尼茨也把找出能求解任何数学问题的普遍算法列为他第二大目标．笛卡儿在几何方面实现这个目标，而莱布尼茨则在逻辑上制定一个方案．数学作为一种普遍方法，总是不断跨越已有的领域，深入到未知的世界中去，并且不断创造新的数学对象．17—18 世纪，无穷及无穷小进入数学，把代数运算规则向无穷领域推广，这就导致数学分析的形式，并且构成方法上的大飞跃．19 世纪由实分析向复分析过渡，再次加大分析方法的威力．

3）数学是一种普遍思想原则．数学发展过程中由于不断一般化、不断抽象化造成自己的普遍思想原则．对称性原则、不变性原则、守恒律三者统一是 1918 年诺特(Noether，(A．)E．)首先提出的，而群论方法在量子力学、原子-分子结构、核结构、基本粒子理论中的适用性也是外尔(Weyl，C．H．H．)首先得出的．群论方法至今仍广泛应用在科学的各方面，而不仅仅是上述领域及固体物理．数学中另一个重要原则是极值原则或变分原理，最早除了哲学的思辨之外，首先提出的是费马(Fermat，P．de)，这些原则也是其后许多物理理论的基础，如哈密顿原理．

4）数学是一种理性思维框架．20 世纪之前，科学的支柱主要是理论和实验(包括观察和测量)，数学和计算包括在理论当中．实际上，17 世纪的科学革命推动近代科学的产生，完全依赖于理性与经验的结合．它们的哲学根源是笛卡儿的唯理主义与培根(Bacon，R．)的经验主义，他们也是近代哲学之父．确切地讲，笛卡儿把认识论置于本体论之上，把哲学从神学的奴仆地位解放出来，成功地实行思想的解放，直接推动近代科学的产生，其中，理论概念、数学工具与观察实验结合在一起是牛顿(Newton，I．)科学革命的催生婆．牛顿成就其伟业不仅在于他提出正确的理论概念(特别是力)，而且在于他提供了数学工具(微积分)及分析框架，尽管当时还是用欧几里得的几何系统．其后科学的重大进步，理论概念及数学表述和计算的结合仍是不可缺少的一环．第二次世界大战以后，计算机的发展与计算技术的进步使得科学计算与理论和实验鼎足而三，并列为科学的三大支柱．近年来，由于数学的发展，从数学出发的理论越来越多地成为科学理论形成的始作俑者．这特别表现在 1974 年，纤维丛理论成为规范场理论的标准表述．其后越来越多的前沿数学领域进入物理学及其他科学领域，形成新兴理论框架，实际上数学已成为科学发展第四根支柱．对于生命科学、心理科学、社会科学，这种现象早已不是新事物．数理经济学以及对策论是这方面的最典型的例子．

2．数学的分科及其主要问题．数学不是一般意义上的自然科学或社会科学，它的对象及研究目标不像这些学科那样明确和集中．从古到今，数学中所包含的对象、学科及分支变化多端．中世纪除了算术及几何学之外，天文学及乐理也是数学的分支．到 17 世纪，木工、石工、建筑、火器、占星术等都是数学的内容．从那时起，静力学、动力学、光学、地图绘制法等仍然被看成大数学的一部分，尽管它们早已成为独立学科．数学内容的庞杂也可以说是数学的一大特征了．除此之外，许多基础的数学学科，它们的内容也有很大的改变，甚至于面目全非了．经典代数学主要研究代数方程的求解，而经过几次变化，现代代数学主要研究代数结构．这样一来，数学的统一尽管多次被提起，但是总难以概括全部数学．因此，时至今日，数学仍然是具有多样性对象也具有多种目标的学科，尽管它们之间有着千丝万缕的联系．人们把数学归结为相互关联的六大范畴，其中前三个可以说是数学的技术方面，后三个可以说是数学的理论方面．

1）操作技术．大部分最早的数学问题属于解决“如何”的技术问题．最初的问题包括计数、计算、测量、作图等方面，后来逐步形成特殊的及一般的数学问题．在解决这些问题的过程中，形成了算法以及操作步骤的概念．在计算过程中，形成了算术，特别是解数值代数方程的算法．到近代，这推动符号代数学、求解代数方程的技术以及把这些技术推广到无穷算法以及代数综合方法的代数方法，从而形成无穷小演算及解析几何学．其后各个数学分支也提出相应的算法问题，例如拓扑学中计算同调群、同伦群等．从这个意义上讲，数学在本来意义上是一种计算技术，或更广一点讲是操作技术．而研究这种技术的目标就是发明算法或解题的步骤，以求得问题的解决．应该说，这是一种富有创造性的研究工作．以计算为例，就是由精确计算到近似解析计算到数值计算到计算机软件，它一直是数学研究的重要内容．除计算之外，还有测量、绘图、统计、运筹等操作，以及相应的和衍生的各种问题．例如古典几何有许多几何作图问题，特别是用圆规、直尺的几何三大问题，

以及更一般的作图方法.为了解决这些问题,还要发明许多技术,如各种投影技术,它们至少在过去都属于大数学范围之内.在数学分析的范围内,级数求和、渐近展开、积分变换等都是高级的计算技术.

2)技术理论.对数学操作的对象,应该有些认识,其中包括表示问题、操作规则与规律问题、可计算性问题、无穷级数收敛与发散问题、收敛速度问题、方程可解性问题、逼近的程度及可能性问题、作图的可能性问题,特别是方法的评价问题等.这样就形成与操作技术有关但又高一层次的学科,如数值分析、误差理论、函数逼近论、丢番图逼近理论、可解性及稳定性理论等.

3)操作对象理论.它的目标不是指向对象本身,而是指向技术,指向求解的方法.例如丢番图方程论、代数方程论、代数方程组理论、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论等.它们涉及的不是单个方程,而是一类的对象,因此首要问题是分类问题.然后再对每一类研究解的数目、解的性质、根与系数的关系、某类解的存在性问题等,微分方程的定性理论也属于这一范畴.

以上三大范畴是解决"如何"的技术问题,而以下三大范畴才是解决"什么"的理论问题.

4)对象理论.理论是对确切定义的对象的性质、关系、刻画、分类等的研究.典型的数学理论有数论、函数论、算子论以及各种几何对象理论、过程理论等.以数论为例,重要的分支按对象分有整数论、代数数论、超越数论等.按方法分有初等数论、解析数论、概率数论等.按问题的性质分有型的算术理论、几何数论等,也包括数论中的丢番图方程理论.函数论与算子论一开始也是表示问题,特别是无穷级数及无穷乘积表示,然后是积分表示等,其次涉及值分布等可以说是计数问题,另外还有刻画及分类问题.几何图形有许多性质与关系方面的问题,如度量性质以及相交、属于等关系,也有刻画及分类问题.

5)结构理论.结构理论与对象理论之间并没有一条不可逾越的鸿沟,这样划分是因为结构理论必须建立在集合的基础之上.按照布尔巴基学派的观点,原始的结构可以划为三大类,研究它们各自的结构就形成结构数学的主要分支:① 代数结构:主要是群、环、域、模,它们分别构成群论、环论、域论、模论;② 序结构:主要是格,它们构成格论;③ 拓扑结构:主要是拓扑空间,它们构成一般拓扑学的研究对象.这些抽象的研究对象有两个来源:一是从过去研究的具体对象抽象化,特别是公理化而成,如群、域以及拓扑空间这些抽象结构衍生出来.新结构的产生有如下的几种途径:① 增减公理;② 复合结构;③ 多重结构;④ 混合结构.研究这些抽象对象的目标是搞清楚它们的结构并加以分类.所谓结构,就是元素(或它们的集合)和元素之间的关系.结构数学的主要问题大致可分为互相关联的四类问题:① 刻画问题;② 分类问题;③ 结构问题;④ 实现问题.

6)元理论.元数学理论是对数学本身进行反思的产物,长期属于哲学的范畴.它讨论数学概念、数学理论的合理性以及数学方法的合法性问题.19世纪末之前,对于数是什么以及非欧几何问题,特别是数学分析的严格性的争论均属于这个范畴.19世纪末,集合论的建立,现代公理方法的提出,符号逻辑的形成,以及关于数学基础问题的论战,最终导致作为一门数学分支的数理逻辑的形成.由于哥德尔(Gödel,K.)的工作,数理逻辑成为包括模型论、公理集合论、递归论和证明论(原始的和狭义的元数学)四大分支的数学领域,其后分别形成构造性数学和计算复杂性理论等新兴学科.除了以集合论为基础的现代数学之外,范畴论也成为一门元理论,在数学中有着有效的应用.

3.数学的发展和演化.数学的内容及范围随时间不同而不同,因此有言:"数学无非就是它的历史."数学史大致可如下分期:前史时期;古代及中世纪时期(从公元前4世纪到16世纪末);近代前期(17—18世纪);近代后期(19世纪);现代时期(20世纪).每一个时期的特点简要分析如下:

1)前史时期.前史时期的数学主要是民族数学或文化数学,在各种文化的发展过程中,各民族都或多或少掌握一些简单的数学技术,包括计数、计算、测量、土木建筑、绘图等,基本上属于实用技术.这些知识是零散的,而且反映出较大的文化差异.另外,也出现了神秘的占星术、数秘术、占卜术等,其中有个别涉及数学的内容,如二进制等.各种建筑上的对称图案以及正多面体的列举包含群的观念的萌芽.

2)古代及中世纪时期.数学经过长时期的发展之后,正式成为一门学科,其主要标志是:① 建立数的表示及计算方法;② 对于一些问题有较系统的方法.这使数学技术部分初步形成.而欧几里得《几何原本》的问世,则使理论数学有了一个原型.各国数学发展状况有所不同,古代数学的主要领域是算术与几何,希腊具有初等的数论及量论以及一些基本的几何问题及数论问题.这些问题对以后的数学发展有很大的影响,但不一定很重要,比较重要的数学是计算,特别是解方程.中国、印度、阿拉伯的数学,偏重于计算及实际问题的解决.

3)近代前期.近代数学诞生的标志是符号化的普遍算法的建立以及无穷进入数学.它一下子使建立在几何及算术上的算法登上了一个新台阶,不仅使它的应用范围大大扩大,成为发展科学技术的有力工具,而且也向理论提出一系列问题.这就导致

19 世纪操作理论、操作对象理论、对象理论的产生，出现数学多样化和理论化的时代. 17 世纪符号代数、解析几何学及微积分的建立，虽然大大扩大了数学技术库，但是并没有改变数学主要是一门实用的计算及操作技术的状态. 数学作为一门计算技术进步惊人，特别是微积分的完成，解决了许多天文、力学及物理学的问题. 微积分本身只不过是一种更有效的演算方法，即所谓无穷小演算. 接着是常微分方程及数学物理方程的出现，以及变分法的诞生，使数学工具更为有效.

4）近代后期. 19 世纪数学是近代数学的成熟时期，也是数学真正作为自为的理论科学产生的时期，但是伴随操作理论（如最小二乘法及误差理论、级数求和理论、函数逼近理论及丢番图逼近理论）、操作对象理论（如代数方程理论、常微分方程理论），数学技术本身也大有提高，特别是傅里叶展开、积分变换，尤其是复分析的建立. 19 世纪的数学可以说是数学对象化与多样化时期，一方面把数学由主要是操作技术转变为理论的时期，另一方面也为 20 世纪现代数学奠定了基础. 这样，数学对象理论真正形成，数学成为一种自为的科学而不再仅是自然科学或技术的语言和工具了.

5）现代时期. 20 世纪的数学是从 19 世纪数学多样性时期趋于统一的时期，其统一的基础是集合论. 一方面集合论之上产生了结构数学的庞大领域，另一方面集合论的基础问题产生了元数学. 数学新对象的形成，产生结构的多样性，导致理论的多样性，并且 19 世纪末以前的四大范畴的数学仍有新的发展，加上新的应用数学、计算数学等领域，数学日趋专门化、多样化. 但意想不到的是，从 20 世纪 70 年代起，各个领域之间新关系不断发现，新一轮的统一性正在形成之中. 当代数学前沿的大多数学科是 20 世纪上半叶形成的，其中主要是抽象代数学（包括群论、环及代数理论、域论、格论、整体李群理论、代数群论、同调代数以及各种衍生结构）、一般拓扑学、测度和积分理论、泛函分析（包括线性拓扑空间理论、算子代数理论等）、组合及代数拓扑学、整体微分几何、多复变函数论、动力系统理论、随机过程理论等. 对于 19 世纪开创的新领域——代数数论、代数几何学、黎曼几何学和局部李群理论，也在结构数学的框架中获得重大突破，成为当代数学的前沿.

20 世纪后期形成的一些领域，如微分拓扑学、大范围分析、*K* 理论、非交换几何等，也可在其中看到其萌芽. 除了纯粹数学领域的扩大与深化之外，20 世纪的应用数学和计算数学的面貌也发生了根本的改变. 一方面数学应用的范围已从 20 世纪之前的经典力学、天文学与测地学以及数学物理等领域扩展到几乎所有自然科学、工程技术、社会科学、人文科学的分支，并越来越起着举足轻重的作用；另一方面，一批新的应用数学领域产生出来，成为具有相对独立的分支，构成大数学科学的组成部分. 它们一方面与实际问题有密切的关系，另一方面它们也形成独立的数学研究方向，其中最典型的是 19 世纪末 20 世纪初形成的数理统计，它们同应用概率一起在近半个世纪已经成为与经典数学平起平坐的学科领域. 另外一个数学领域——组合数学几乎与数学的历史一样悠久，但只是近半个多世纪才逐步成熟及独立. 第二次世界大战之后，一些新的应用数学领域独立出来，特别是运筹学诸分支，后来纳入管理科学的学科群中. 与工程技术密切相关的系统科学、控制理论与自动化科学、信息科学也得到空前的发展.

20 世纪科学技术史中头等重要的事件是电子计算机的诞生. 它对整个社会的冲击是怎么估计也不过分的. 从计算机的设计制造到大规模应用，处处离不开数学，同时也开辟了新的数学领域. 它们可以归纳成两大部分：一是计算机科学，它指未来计算机的发展；一是计算数学，它指计算机在科学计算和工程技术中的大规模计算. 计算机的不断普及和改进对数学也造成不可忽视的影响. 它给数学家提出一系列算法问题，并形成一套行之有效的算法，如单纯形方法及其种种改进，有限元方法及其衍生算法等，对算法的分析，如收敛速度、误差传播及稳定性等问题形成数值分析分支. 近年来，计算机由数值运算过渡到符号运算，形成计算机代数重要分支，特别是吴文俊的机械化数学纲领在机器证明方面是一大突破.

4. 数学的社会功能. 数学是最古老的科学部门，它的诞生和发展反映人类文明的进步. 数学从一开始就与社会实践活动密切相关，从计数、土地丈量、器物制造、产品分配，一直到商业贸易、宗教活动等都向数学提出问题，并要求逐步解决和方法逐渐进步，最后形成相对定型的数学方法和学科. 从此，各种社会活动与数学的应用密不可分. 随着社会的进步，特别是近代科学技术的进步和新兴产业日新月异，数学也越来越成为科学技术发展的基础. 从 17 世纪到 19 世纪，数学与力学、天文学、物理学、大地测量学、航海术就密不可分，互相促进地平行发展着. 对于机械工程、建筑工程设计、电机工程等技术领域的发展，数学也起着决定性的作用. 20 世纪数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更加令人信服地确立了数学作为整个科学技术的基础地位. 数学物理、数学化学、生物数学、数理经济学、数理地质学、数理语言学、数值天气预报、数学考古等一系列边缘学科的出现，表明数学的应用已突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 随着科学数值化趋势的增长，数学在提高全民素质，培养适应现代化需

要的各级人才方面还具有特殊的教育功能. 数学科学,已成为推进人类文明的不可缺少的重要因素,数学正越来越直接地为人类生活与物质生产做出更大的贡献. 数学应用具有以下特点:

1) 纯粹数学几乎所有的分支都获得应用. 在20世纪60年代,像拓扑学这样的抽象数学分支离实际应用似乎还很遥远,而今拓扑学(特别是扭结理论)已成为生物学中了解 *DNA* 结构的有效工具. 在物理学中,拓扑不变量正在成为物理的量,正如一些群的不变量是物理的量一样. 数论也曾被认为是最纯粹、最缺乏应用的数学分支,但如今数论方法在计算机科学、密码技术、卫星信号传输、p 进量子场论等许多方面发挥着重要的有时甚至是关键的作用,并通过与数值分析相结合开辟着更广的应用途径. 事实上,仅就在理论物理中的应用而言,涉及的数学除了经典的分支与方法(如数学物理方程、傅氏分析、无穷维空间论、群论、概率统计等),还包括了微分拓扑、微分几何、大范围分析、代数几何、李群与李代数、算子代数、代数数论、非交换数学、非线性数学、计算数学等,几乎覆盖了核心数学的整个领域.

2) 几乎所有的科技领域都在应用数学,并越来越多地应用更高深的数学. 数学在力学、物理学中的应用是经受了历史考验的,而当今数学的应用则早已突破这一传统的范围,正在向包括从粒子物理到生命科学,从航空技术到地质勘探在内的一切科技领域进军. 除了自然科学,经济学及过去认为不适用数学的社会学、历史学等社会科学领域,数学方法也都在崭露头角. 随机分析应用于金融决策而引起的经济学理论的进展,提供了特别令人鼓舞的例证. 与以往时代不同的是,数学在向外渗透过程中越来越多地与其他领域相结合而形成交叉学科. 与数学有关的词大量出现在各门学科之前后,如"数学的"、"数理的"、"计量的"、"统计的"、"计算的"以及"……数学"、"……统计学"等. 学科成熟的社会标志是学会、协会的建立,期刊与连续出版物的问世,以及课程的设置,专业会议的召开等. 例如,《数学化学杂志》于20世纪80年代创刊,《数理经济学杂志》于20世纪70年代创刊,生物数学的期刊出现更早. 次一级的学科如"数学分类学"的著作早在20世纪80年代就问世了. 值得注意的是纯粹数学中的一些前沿与其他科学的许多前沿领域的快速结合,这反映了科技领域中数学渗透的空前深度. 可以这样说,没有这些前沿数学就没有当代理论物理学的一些前沿领域,如超弦理论、超引力理论等. 事实上,仅仅像弦理论这样的物理学热门分支所用到的数学,就涉及微分拓扑学、代数几何学、微分几何、群论与无穷维代数、复分析与黎曼曲面的模理论等. 凝聚态物理中分类晶体结构中的"缺陷"以及液晶理论,都用到某些齐性空间中同伦群的计算,而这即使对代数拓扑学家来说也是极难的问题. 数理经济学中一般均衡理论的建立、发展,也用到了微分拓扑学的基本定理与彻底的公理化方法. 经济学家德布鲁因(de,Bruijn,N. G.)这方面的工作获得了诺贝尔奖.

3) 数学在生产技术中的应用变得日趋直接. 以往数学工具直接用于生产技术的例子虽有发生,但数学与生产技术的关系基本上是间接的. 常常是先应用于其他科学,再由这些科学提供技术进步的基础. 近半个世纪来,数学科学与生产技术的相互作用方式正在悄悄地改变,数学提供的工具直接影响和推动技术进步的频率正在加大,并在许多情况下产生巨大的经济效益. 例如,以计算流体力学为基础的数值模拟已成为飞行器设计的有效工具,类似的数值模拟方法正被应用于许多技术部门以替代耗资巨大的试验;以调和分析为基础发展起来的小波分析直接应用于通信与石油勘探等广泛的技术领域,这在20年前是不能想象的;现代医学扫描技术(*CT* 扫描、核磁共振成像等)主要也是建立在拉东积分理论的基础之上,这方面的例子举不胜举. 此外,现代大规模生产的管理决策、产品质量控制也密切依赖于数学中的线性规划算法(单纯形法与新兴的内点法)及统计方法. 近年来,以数学建模为核心的工业数学成为一个蓬勃发展的应用数学领域也绝不是偶然的,产业部门的工程技术人员与数学工作者携手合作,解决影响甚至决定生产过程的形形色色的数学问题,反之,许多挑战性问题也刺激纯数学的发展.

4) 数学在学科发展中的份额及力度越来越大. 一些著名的数学家认为,数学是一种关键的、普遍适用的、赋予人以能力的技术. 从某种意义上来讲,"高技术本质上是一种数学技术". 对此,一般人还只在科学计算的层面来理解. 而实际上,数学方法是不同于理论方法及计算方法的第四个普遍适用的方法和技术. 这种情况从20世纪70年代以来已初露端倪,在21世纪将成为科学研究的重要组成部分,而且也许是最富创造性的部分,这特别表现在形成概念及理论框架方面. 实际上,当前的动力系统的研究(分叉、吸引子)、孤立子、混沌等已成为许多领域的通用语言及工具,而更艰深的数学将在未来更为普及.

执　笔　胡作玄
审　阅　吴文俊　程民德　徐利治

分析学(analysis)　数学的一个分支学科. 它是以微积方法为基本工具,以函数为主要研究对象的众多数学经典分支及其现代拓展的统称. 简称分析.

20世纪初年以前,一般将全部数学分为三大基本分支:分析学、几何学和代数学. 当然,对于现代数

学,已难于做如此的概括.象微分方程和概率论等学科,它们的创立都与分析密切相关,但由于它们各有独特的研究对象,从而发展了各自的庞大系统,不能继续将它们归属于分析学.一般而论,现代分析可分为实分析、复分析和包括泛函分析在内的抽象分析三大部分,它的研究对象已不限于函数,研究方法也日益综合.在本辞海中,由于复分析和泛函分析已专门论述,这里主要对实分析方面作一概括介绍.分析这个学科名称,大约是由牛顿(Newton,I.)最早引入数学的,因当时微积分被看做代数的扩张,"无穷"的代数,而"分析"与"代数"同义.今天它所指虽然更广,但仍然只是对所含学科方法上共同特点的概括,而且愈来愈不容易与几何、代数的方法完全分清了.

分析学中最古老和最基本的部分是数学分析.它是在17世纪为了解决当时生产和科学提出的问题,经过许多数学家的努力,最终由牛顿和莱布尼茨(Leibniz,G.W.)创立的.但是为分析建立严格逻辑基础的工作却迟至19世纪方才完成.此后,数学分析才成为一个完整的数学学科.数学分析是最早系统研究函数的学科,它所研究的虽说基本上只是一类性质相当好的函数——区间上的连续函数,但无论在理论上或应用方面至今都有重要意义.在理论方面,数学分析是分析学科的共同基础,也是它们的发源地.现代分析的诸多分支中,有一些在其发展初期曾经是数学分析的一部分(例如变分法、傅里叶分析以至复变函数论等),而另一些则是在数学分析的完整体系建立以后,由于各种需要,在对数学分析中的某些问题的深入研究和拓广之中发展起来的,像实变函数论、泛函分析和流形上的分析就属于这种情况.

19世纪末到20世纪初,由于某些数学分支(例如傅里叶分析)和物理等学科发展的需要,不但促使数学分析中函数可积的概念逐步明确,还进一步要求将积分推广到更广的函数类上去,希望积分运算更加灵活方便.同时,在对数学分析中各个基本概念之间的关系的继续探讨中(例如,微分和积分互为逆运算在一般意义上是否成立),人们也感到必须突破数学分析的限制.在这方面,20世纪初,由勒贝格(Lebesgue,H.L.)提出的积分理论有重大意义,而实变函数论的中心内容就是勒贝格积分的理论.作为黎曼积分的推广,勒贝格积分不仅可积函数类广,还具有可数可加性等良好性质,积分号下求极限的条件也较宽松,它的理论已经发展得充分完备,因而更适合数学各分支及物理的需要.由于勒贝格可积函数的空间(函数类)的完备性,使它在数学理论上占据黎曼积分所不可能有的重要地位.实变函数论同数学分析一样,也研究函数的连续性、可微性、可积性这些基本性态,但由于应用了集合论的方法,使它有可能研究一般点集上的函数,从而研究的结果比数学分析更广、更完善.因此,实变函数论也成为分析学各分支(特别是泛函分析等近代分支)的共同基础之一.在关于微分和积分是否互为逆运算的问题上,勒贝格积分的结果就比黎曼积分情形进了一步.但是,为了彻底解决这个问题,后来又有人提出过多种更广的积分理论,例如,当儒瓦积分和佩龙积分,最后由广义当儒瓦积分(1916年)对前述问题作了肯定的回答.然而,这些积分除了在特定的理论问题上有重要意义外,远不如勒贝格积分普遍适用.勒贝格积分是建立在勒贝格测度的基础之上的,后者向抽象方面进一步发展,又促使对于测度的系统研究形成独立的学科,这就是测度论.测度是面积、体积概念的推广,它和积分概念始终紧密相联,测度论的思想和理论在现代分析中是十分重要和很有用的.

分析学的诸多经典分支,或分析学各学科的经典部分中,数学分析、单复变函数论和实变函数论具有基础性质,它们全面研究所论函数的基本性态.除此以外,它的大多数分支主要从某个侧面去研究函数.例如,调和分析主要研究函数用傅里叶级数(或傅里叶变换)表示的问题,并利用这种表示去研究函数的性态.事实证明,这是研究函数重要而有效的途径,它的思想和方法在许多数学分支中用到.函数逼近论研究用某些性质良好的函数逼近一般函数的可能性及误差(逼近阶)等性质,以及反过来用这些性质去刻画函数.凸分析主要研究一类重要的非线性函数——凸函数.经典的变分法研究泛函的极值问题,这里的泛函一般限于含有变元函数的积分,因此也可以说它还是研究函数的.在今天,这些以函数为主要对象的经典学科,仍然是分析学的重要组成部分.

分析学的各经典学科多形成于17至19世纪之间,但除去数学分析、单复变函数论和实变函数论的基础内容已基本定型之外,其他的都在不断拓展它们的研究领域.象调和分析是从一元函数的傅里叶级数理论发展起来的,原来也称为傅里叶分析,但是现在它的主要内容却是多元(函数的)调和分析和群上的调和分析(抽象调和分析),从研究的问题到方法上都有很大变化.在一些问题中,傅里叶变换逐渐被别的由它演变来的更有力的工具替代,因而很难继续用后一名称来概括它的全部内容.函数逼近论在初期主要讨论用代数的或三角的多项式逼近连续函数的有关问题,而现在它所考虑的作为逼近工具的特殊函数和被逼近函数的类型都丰富多了.从这些学科的发展中可以看到,它们的研究对象正随之发生变化.与其说它们现在研究的仍然是函数,不如说主要是某些函数空间(函数类)和算子(变换)更为

恰当，有关研究已推广到了群、流形或其他抽象的基域上.位势论的发展有类似的情况.经典的位势论研究牛顿位势(一类偏微分方程边值问题的积分形式的解)，而现代位势论中所讨论的一般位势，实质上与牛顿位势相似，无非是关于某种测度对适当的核的特殊积分算子.群上的位势论也正在发展.对诸如此类的空间及算子抽象、系统的研究属于泛函分析.它是20世纪初发展起来的学科，是经典分析在近代的拓展.另一个新的分析学科是流形上的分析，一般认为它在20世纪中期才形成独立分支.它研究定义在流形上的函数，而流形上一般没有统一坐标，只在每点存在与欧氏空间中的开集同胚的邻域，因此，流形上的局部分析与经典的欧氏空间的分析相仿，整体分析则复杂得多，流形上的分析指的就是后者(或称大范围分析).它可以在流形这个全新背景之下，研究与各个经典分析学科相应的问题，是经典分析的现代拓展.例如，大范围变分法充实了大范围分析的内容，它既是变分法的现代发展，又可以看做流形上的分析的一部分.由于流形上的函数的性态与流形本身的几何、拓扑性质密切相关，从而可以认为，流形上的分析是分析学与几何、拓扑、代数互相综合的产物.这也反映了现代数学发展的特点.

各学科密切联系、相互渗透与综合是现代数学发展的重要特点.现代分析学的发展，除了依靠本身的基础之外，特别吸收和利用了集合论、代数以及拓扑的思想和方法.已经提到的泛函分析和流形上的分析的形成和发展就是如此.再如，抽象调和分析和大范围变分法等，它们的基本问题还属于经典分析的推广，可是方法上完全离不开代数和拓扑，并都已形成独立的分支.离散化的方法在分析中用得越来越多，一些抽象代数的概念和理论被用到过去与它无缘的分析问题中.至于分析学内部各学科的结合就更多了，特别是泛函分析与其他经典学科的结合，现在已很平常.广义函数理论已普遍成为许多经典分析领域的研究工具.前面提到过调和分析等学科对某些函数空间及算子的研究，这方面问题的提法和研究方法都有很多借鉴于泛函分析，并依赖于算子论的成果，又有各自的特点，代表了各自的发展方向，从而对泛函分析也是补充和发展.其次，实分析与复分析的结合，近年来也很引人注目.哈代空间理论的发展，可以作为这方面的典型例子.在20世纪初，它完全是复变函数论的一部分，20世纪60年代以后，在此基础上发展了多元哈代空间的实变理论，这又促进了多复变函数论在这方面的研究.分析学还与其他许多数学学科在内容上有复杂的交叉，思想和方法上联系密切.其中一些是长期存在而又有所发展的，如调和分析、变分法、位势论与微分方程的关系，而新近的则如调和分析、位势论与概率论的联系都是很突出的例子，这对双方学科的发展都很有影响.现在，这类相互间的联系、渗透和综合已经十分普遍和深入，这就使得分析学的研究者，或者只想学习和了解现代分析的人，都应有多方面的数学知识基础.

分析学属基础数学范畴.作为纯粹数学学科，分析学的发展虽不以在科学技术中的应用为直接目的，然而随着时代的发展，很多抽象的数学概念和理论都在物理以及现代科技中找到实际背景或应用.微积分的创立，本来就有物理方面的源泉，所以分析学与物理的紧密联系从牛顿时代就开始了.以后在不同时代建立的一些分析学科(如变分法、位势论等)发展了这种关系.现代分析中对于某些算子的研究以及流形上的分析理论等在物理中的应用就更深入了.同时，电子计算机的发展不仅扩大了数学的应用范围，另一方面，而且也为数学理论研究提供了有力工具.在分析学方面，函数逼近论的某些方向(如样条函数逼近等)曾显得十分活跃，就因为它在与计算机相联系的计算数学中有广泛的应用.又由于计算机使许多最优化问题有可能实际求解，进而推动了变分法和凸分析的某些方向的发展.傅里叶分析在图象和信号处理的应用中，一直是重要的工具，最近发展起来的小波分析借助于计算机，在许多科学分支(如天体物理和地球物理等)中得到更广泛的应用.其实，计算机对数学的影响，决不限于某些应用及与它直接相关的理论方面.计算机的发展已直接影响到数学教学，并将进一步影响到整个数学的发展.近年来由于机器证明有新的突破，人们日益注目于数学推理的构造性以及数学的机械化，这对于分析学这样的纯粹数学学科，无例外地将有越来越大的影响.

总之，分析学自微积分创立以来，历经三百余年的发展，至今形成一个庞大的分支体系.它影响和改变了整个数学的面貌.在现代科学技术的推动下，分析学仍在蓬勃地向前发展.

分析(analysis)　分析学的简称.

撰　稿　常心怡　**审　阅**　程民德

微分方程(differential equation)　常微分方程与偏微分方程的总称.包含未知函数的导数(或偏导数)的等式称为微分方程.未知函数只有一个自变量的微分方程称为常微分方程，例如等式

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-g$$

是描述大地上自由落体的常微分方程，其中 g 是重力加速度，未知函数 $z=z(t)$ 是物体在时刻 t 的铅直位置.未知函数有多个自变量，因而包含未知函数的

偏导数的微分方程称为偏微分方程，例如，弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

是人们最早研究的偏微分方程之一，其中 $a^2=T/P$，T 与 P 分别是弦的张力与线密度，未知函数 $u=u(x,t)$ 是弦上点 x 在时刻 t 的横向位移. 微分方程论（简称微分方程）是数学的一个重要的分支学科.

微分方程的研究开始于 17 世纪末，几乎与微积分同时出现. 牛顿（Newton，I.）和莱布尼茨（Leibniz，G. W.）创造微分与积分时，指出了它们是互逆运算，从而解决了最简单的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$$

的求解问题. 人们用微积分研究力学、物理、天文和几何问题时发现越来越多的微分方程，微分方程研究中的成果几乎都迅速地在相应学科中得到应用，从而促进这些学科的发展. 例如，牛顿研究天体运动的微分方程，从理论上得到了原来由开普勒（Kepler，J.）凭经验发现的行星运行规律. 1758 年，克莱罗（Clairaut，A. C.）用微分方程的级数解计算出哈雷彗星将在 1759 年出现在近地点的日期. 1846 年，勒维耶（Le Verrier，U. J. J.）根据对行星运行规律的微分方程作数值分析的结果预言，太阳系应该有海王星存在并确定出它在天空中的位置.

满足微分方程的函数，即使微分方程变为恒等式的函数称为微分方程的解. 人们对微分方程的研究自然是从求出解的显式表达开始. 从 17 世纪末到 18 世纪中期，在这一方面最重要的成果有：莱布尼茨提出的分离变量法，雅各布·伯努利（Bernoulli，J.）提出并解决了的一个特殊非线性常微分方程（现在称为伯努利方程）

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)y^{n-1},$$

欧拉（Euler，L.）等人得到的常系数线性常微分方程的一般解法，以及弦振动方程(1)的达朗贝尔解 $u=\phi(x-at)+\psi(x+at)$. 人们发现，微分方程总有无穷多个解. 常微分方程的解会含有一个或多个任意常数，而偏微分方程的解会含有一个或多个任意函数. 这种含有任意常数或任意函数的解称为微分方程的通解. 但是，微分方程中只有很小一部分可以求出用初等函数表示的显式通解. 考虑到力学、物理学中的实际微分方程问题并不在于求出通解，而是需要求出满足某些补充条件（称为定解条件）的解. 研究同时满足微分方程及定解条件的解的问题称为定解问题. 最早研究的定解问题有：常微分方程的初值问题及两点边值问题，弦振动方程及热传导方程的初-边值问题，以及用分离变量法解这两种初-边值问题得到的常微分方程的特征值问题. 由于得出初等函数显式解的可能性很小，人们转向用无穷级数方法求解或用没有积出的积分来表示解.

牛顿、莱布尼茨和欧拉都曾利用现在仍然采用的待定系数法求出过一些初等常微分方程的幂级数解. 1816 到 1824 年，德国哥尼斯堡天文台台长贝塞尔（Bessel，F. W.）在考查行星运动中，对现在所称的贝塞尔方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-n^2)y=0$$

进行了系统的研究，求出了它的一个解 $J_n(x)$（称为第一类贝塞尔函数）的积分表达式

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nu-x\sin u)\mathrm{d}u$$

及级数表达式

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\{1-\frac{x^2}{2^2\cdot 1!(n+1)}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!(n+1)(n+2)}-\cdots\},$$

并对整数 n 给出了递推公式

$$xJ_{n+1}(x)-2nJ_n(x)+xJ_{n-1}(x)=0.$$

当 n 不是整数时，贝塞尔方程第二个解是 $J_{-n}(x)$. 对于整数 n，汉克尔（Hankel，H.）于 1869 年求出了贝塞尔方程的第二个级数解 $Y_n(x)$（称为第二类贝塞尔函数）. 欧拉及高斯（Gauss，C. F.）发现的超几何函数及由发现者命名的勒让德函数、拉梅函数、埃尔米特多项式等特殊函数都在 19 世纪 40 年代以前，作为特殊常微分方程的解先后得到. 傅里叶（Fourier，J. B. J.）于 1822 年发表的《热的解析理论》，不仅根据物理原理推导出三维的热传导方程，而且由于他揭示出函数可以展开成三角函数、贝塞尔函数及勒让德多项式的无穷级数这个普遍事实，从而利用这些函数的级数展式解决了许多热传导问题. 19 世纪 40 年代，斯图姆（Sturm，C. F.）和刘维尔（Liouville，J.）系统研究了二阶常微分方程的特征值问题，得出了相当详尽的结果，由于对微分方程求出解的问题越来越困难，人们开始考虑给定的微分方程定解问题是否有解的问题. 1840 年，柯西（Cauchy，A. L.）利用欧拉早就提出的近似解法（所谓欧拉折线法）证明，对常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\\ y(0)=y_0,\end{cases}\tag{1}$$

当折线边数无限增加、边长无限缩小时，这些折线有一极限函数就是它的解. 1842 年，柯西进一步将常微分方程的研究由实数域扩展到复数域，在方程右端 $f(x,y)$ 是解析函数的条件下，对常微分方程初值问题(1)用幂级数求解，用强函数方法证明级

数收敛，从而建立了解的存在唯一性定理. 强函数方法又为柯西(在 1842 年)和柯瓦列夫斯卡娅(Ковалевская, С. В.)(在 1875 年)推广应用于复数域中的偏微分方程组的初值问题，证明了解析解的存在和唯一性，这就是现在所说的柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理. 对微分方程定解问题，一般需要研究下列三个问题：

1. 是否有解.
2. 有几个解.
3. 解是否连续依赖于定解条件.

微分方程的解存在、唯一、且解连续依赖于定解条件的定解问题称为适定的. 适定的定解问题可以进行近似计算求解并在实际中应用. 根据力学、物理实际对描述波传播的弦振动方程及描述不可逆过程的热传导方程一般研究初值问题或初-边值问题，对描述平衡现象的调和方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

一般研究边值问题. 这些定解问题的适定性都先后从数学理论上得到证明.

19 世纪末到 20 世纪初是微分方程发展的重要时期. 在对弦振动方程、热传导方程及调和方程这三个典型二阶偏微分方程有了较多研究之后，人们开始转向一般二阶线性偏微分方程. 利用特征这一重要概念，人们把方程分为双曲型、抛物型和椭圆型三种基本类型，上述三个典型方程分别是它们的代表. 研究表明，三个典型方程的定解问题的提法、解的性质及适定性理论基本上可以推广到它们所代表的三种类型方程. 1923 年，特里科米(Tricomi, F. G.)首先研究了混合型方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

这个方程当 $y>0$ 时是椭圆型的，而当 $y<0$ 时是双曲型的，接着人们结合空气动力学中跨音速流对混合型方程进行了许多研究. 受伽罗瓦(Galois, E.)创立群论处理代数方程的方法的影响，1881 年至 1886 年，庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)在研究太阳系中行星和卫星运动的稳定性问题中，对常微分方程不是研究一条积分曲线，而是考虑所有积分曲线和它们的关系，研究了常微分方程的解在四类奇点(焦点、鞍点、结点、中心)附近的性态，根据解对极限的关系判定解的稳定性，得出了一系列重要结果，开创了常微分方程的定性理论. 李亚普诺夫(Ляпунов, А. М.)于 1892 年开创了运动稳定性理论，提出了解决常微分方程组稳定性的两种方法，成为研究常微分方程定性理论的一个重要分支.

20 世纪中期以来，物理、力学、工程技术、生物学和化学，甚至一些社会科学(例如人口理论)不断提出大量微分方程的新问题. 同时，由于函数论、泛函分析等数学学科的发展，给微分方程提供了新的思想和研究方法. 微分方程的发展进入了新的阶段. 在工程控制论中提出了带有时滞的常微分方程或称微分差分方程、微分差分方程及更广义的泛函数分方有了很大的发展，由于广义函数和广义解概念的引进和各种泛函数分析方法的应用，偏微分方程从二阶各种类型线性方程一般理论的建立发展到各种非线性偏微分方程问题研究. 由于电子计算机的出现与发展，促进了各种微分方程近似解法的研究. 这些近似解法不仅在科学技术上得到了广泛的应用，也给微分方程理论研究提供了感性的新信息和论证的新途径. 微分方程理论研究还向抽象化发展，例如从普通空间的常微分方程到抽象空间的常微分方程，从分型的偏微分方程到一般的偏微分算子，从具体的微分动力系统到抽象动力系统，从普通有限维偏微分方程到流形上的偏微分方程.

从 20 世纪 50 年代起，中国研究微分方程理论和应用的队伍不断壮大，研究的领域日益广泛，在一些领域已经取得有国际影响的成果.

撰 稿 燕居让 **审 阅** 张芷芬

实 变 函 数 论

实变函数论(theory of functions of real variables)　在微积分学基础上,用集合论(特别是点集论)的方法,进一步研究实变函数的连续、可微和可积等基本性态及其间关系的数学学科. 勒贝格积分理论是实变函数论的中心内容. 围绕着它,实变函数论中还讨论点集和函数的可测性的有关问题,此外它还包含连续函数的贝尔类理论,以及与积分和微分关系问题直接有关的各种积分的理论. 俄国学者把实变函数的现代理论分为三个部分:描述性理论、度量理论和逼近理论. 这里,第一部分研究由极限过程得到的某些函数类(例如贝尔类)的性质;第二部分主要是建立在勒贝格测度与积分基础上的,函数的导数、积分和级数的性质;至于第三部分,现今一般把它归入独立的学科函数逼近论.

19 世纪末,在对微积分学中一些基本概念及其关系的深入研究,以及对于傅里叶级数的研究之中,出现许多性态奇特的函数的例子,像有的函数处处连续,但无处可微;有的函数处处可微,但其导数却不(黎曼)可积;有的函数序列,其中每个函数都(黎曼)可积,但其极限函数却不(黎曼)可积等,打破了对原有分析基本概念完美的设想,促使人们研究一般点集上的函数,并推广导数和积分的概念,这就是实变函数论的起源. 开始它是与微积分学交织在一起的,1902 年,勒贝格(Lebesgue,H. L.)提出了新的积分理论,标志着实变函数论已成为一个新的独立数学学科,这也是古典分析过渡到现代分析的转折点. 因此,实变函数论是微积分学的发展与提高,它又是现代分析(特别是泛函分析)的基础与起源,在分析数学中居于承上启下的地位. 相比于微积分学,实变函数论里研究的函数多半定义在一般的点集上,所以它的特性更依赖于作为函数定义域的点集的性质,对函数的研究往往归结为对一些点集的研究. 其次,从研究问题过程中的思想性和计算性这两方面关系来看,微积分学中是后者占了主要地位,而实变函数论则以前者为主,不多的计算往往成了集合的运算和推理. 在微分和积分这两大分析运算的关系方面,实变函数论不同于微积分学,它把积分作为第一位的,通过推广积分概念,推进了微分与积分的互逆关系.

实变函数论是分析学各学科的基础,与分析学以外的许多数学学科也有深刻的联系. 集合论可以说是与实变函数论同时诞生,并在紧密联系中发展起来的,而在它们之中又蕴含了点集拓扑的源流. 公理化以后的概率论,更是与实变函数的度量理论密不可分. 由于测度思想的广泛应用和勒贝格积分理论的重要地位,实变函数论还与其他许多学科有紧密联系,甚至通过其他数学学科(例如概率论和泛函分析),与力学和理论物理有间接的联系.

欧氏空间中的点集

R^n 中的点集(set of points in R^n)　以欧氏空间中的点为元素的集合. 一个集合,若它的元素均是 n 维欧几里得空间 R^n 中的点,则称它为 R^n 中的点集. R^n 中的点之间有距离的概念. 对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathrm{R}^n$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathrm{R}^n$,它们之间的距离

$$\rho(x,y)=|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}.$$

因而 R^n 是度量空间,而可以赋以拓扑使之成为拓扑空间,拓扑中的一些基本概念,如开集、闭集、内点、外点、聚点等,在 R^n 中都有意义. 同时,实数连续统的一些基本定理,如闭区间套定理、有限覆盖定理等,在 R^n 也都成立(参见《数学辞海》第一卷《数学分析》和第二卷《一般拓扑学》中的有关条目).

R^n 中开集的构造(structure of open sets in R^n)　R^n 中开集所具有的共同结构. $\mathrm{R}^n(n\geqslant 2)$中的任一非空开集均为可数多个互不相交的左开右闭($n$ 维)区间之并,但这种表示不惟一.

实直线上开集的构造(structure of open sets on the real line)　直线上的开集在构造方面的特点. 实直线上(R 内)的任何非空开集必能惟一表成可数个互不相交的开区间的并,这些开区间称为该开集的构成区间. 它们之中可能有形如$(-\infty,\alpha)$, $(\beta,+\infty)$ 或$(-\infty,+\infty)$的无穷开区间.

直线开集的构成区间(component interval of open sets on the real line)　见"实直线上开集的构造".

余区间(complementary interval)　直线上闭集的余集(为开集)的构成区间. 设 F 是实直线 R 上的闭集. 称 F 的余集(一个开集)$F^c=\mathrm{R}\backslash F$ 的构成区间为 F 的余区间.

点集的距离(distance between two point sets)　两点距离的推广. 设 A,B 是 R^n 中两个点集. 定义 A 与 B 的距离为

$$\rho(A,B)=\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\{\rho(x,y)\},$$

其中 $\rho(x,y)$表示点 x 与点 y 的距离.

特别地，当 $A=\{x_0\}$，即 A 由一点 x_0 构成时，则 A 与 B 的距离也称为点 x_0 到点集 B 的距离，记为 $\rho(x_0,B)$.

波莱尔集(Borel set) 一类重要的集. 凡从开集出发，用取余，取可数并、可数交运算所得的集，统称为波莱尔集. 例如，G_δ 型集，F_δ 型集都是波莱尔集. 波莱尔集的全体组成了波莱尔集类. 它是深入讨论函数的连续性、可微性、可积性时必不可少的重要集类. 上述定义与拓扑空间中的波莱尔集的定义(参见本卷《测度论》同名条)是一致的.

F_σ 型集(set of type F_σ) 可数个闭集的并集. 它是 R^n 中重要的集类.

G_δ 型集(set of type G_δ) 可数个开集的交集. 它是 R^n 中一类重要的集.

康托尔三分集(Cantor ternary set) 简称康托尔集. 它是用下面的方法做出的直线上的一个性质奇特的点集：从闭区间 $[0,1]$ 内去掉开区间 $(1/3,2/3)$；再从剩下的两个闭区间内分别去掉长为 $1/3^2$ 而中心在这两个闭区间的中点的两个开区间；然后再从剩下的四个闭区间内分别去掉长为 $1/3^3$ 而中心在这些闭区间中点的四个开区间，如此下去，在 $[0,1]$ 中去掉了上述作法中的所有开区间之后，剩下的点组成的集合，常记为 P，即

$$P=[0,1]\Big\backslash\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\cup\cdots\right).$$

康托尔集有一系列奇特的性质，例如，P 是完备集，基数与 R 相同，但 P 又是勒贝格意义下的零集，因此它常被用以构造各种反例，且是分形的典型例子. 它是康托尔(Cantor, M. B.)提出的.

康托尔集(Cantor set) 康托尔三分集的简称.

勒贝格测度

勒贝格外测度(Lebesgue outer measure) 为定义点集的勒贝格测度而建立的预备性概念. 简记为(L)外测度. 对于 R^n 中的任一点集 E，把覆盖 E 的可数个开区间的体积之和的下确界称为 E 的勒贝格外测度，简称 E 的外测度，记为 $m^*(E)$或$|E|_e$，即

$$m^*(E)=\inf\{\sum_{i\in\mathrm{N}}|I_i|\mid\{I_i\}\text{ 为覆盖 }E\text{ 的可数个开区间}\}.$$

在 R^n 中，区间 I 的外测度等于它的体积，即 $m^*I=|I|$，在 R 中，开集的外测度等于它的构成区间长度之和，并且对于 R^n 中任意点集 E，它的外测度等于包含 E 的开集 G 的外测度的下确界，即 $m^*(E)=\inf\{m^*(G)\mid G\text{ 是包含 }E\text{ 的开集}\}$. R^n 中点集的(L)外测度具有下列基本性质：

1. 非负性：$m^*(E)\geqslant 0, m^*(\varnothing)=0$.

2. 单调性：若 $E_1\subset E_2$，则 $m^*(E_1)\leqslant m^*(E_2)$.

3. 次可加性：

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k).$$

4. 若集 $E_1,E_2\subset\mathrm{R}^n$，它们的距离 $\rho(E_1,E_2)>0$ 则 $m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1)+m^*(E_2)$. 这是使开集为可测集的基础.

外测度概念是测度定义的基础.

勒贝格可测集(Lebesgue measurable set) 实变函数论的重要概念之一. 指勒贝格意义下可求"长度"、"面积"或"体积"的一类集合. 若 m^* 为 R^n 上的(L)外测度，$E\subset\mathrm{R}^n$ 且满足卡拉西奥多里条件，即对任意点集 $T\subset\mathrm{R}^n$，有

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c),$$

则集 E 称为勒贝格可测集，简称(L)可测集. 但这不是勒贝格(Lebesgue, H. L.)本人给出的. 勒贝格首先考虑直线上的点集，定义开区间(a,b)的测度为(a,b)的长度 $b-a$：$m((a,b))=b-a$；再定义有界开集 G 的测度为 G 的构成区间的长度之和，即若 $G=\bigcup\limits_k(a_k,b_k)$，$(a_k,b_k)$为 G 的构成区间，则

$$m(G)=\sum_k(b_k-a_k).$$

进而对有界闭集 $F\subset(a,b)$，令 $G=(a,b)\backslash F$，定义 F 的测度为 $m(F)=(b-a)-m(G)$，$m(F)$与区间(a,b)的选择无关；对一般的有界点集 E，把所有包含 E 的有界开集的测度的下确界称为 E 的外测度，记为 $m^*(E)$，即 $m^*(E)=\inf\{m(G)\mid G\text{ 为开集且 }G\supset E\}$；把所有含于 E 中的闭集的测度的上确界称为 E 的(勒贝格)内测度，记为 $m_*(E)$或$|E|_i$，即 $m_*(E)=\sup\{m(F)\mid F\text{ 为闭集且 }F\subset E\}$；显然，$m_*(E)\leqslant m^*(E)$；若 $m_*(E)=m^*(E)$，则称 E 为可测集，它的外测度与内测度所具有的共同值称为 E 的测度，记为 $m(E)=m_*(E)=m^*(E)$；若 E 为无界集，且它与任何有界开区间的交是可测集，则称 E 是可测集，其测度定义为

$$m(E)=\lim_{k\to\infty}m(I_k\cap E),$$

其中$\{I_k\}$为递增开区间列，且

$$\mathrm{R}=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k,$$

而且 $m(E)$可能为 $+\infty$. 上面关于 R 中点集的可测集与测度的概念，可以推广到 R^n 中的点集上去，而且这种推广并无实质性的困难.

勒贝格定义的可测集与测度的优点是自然、直观，然而定义中使用了内测度与外测度，这样，使用起来很不方便. 因此，人们希望寻求一个比较简洁的等价定义. 通过对外测度的深入研究，卡拉西奥多里(Carathéodory, C.)于 1914 年给出了前面所述的可

测集的定义.这个定义与勒贝格的定义是等价的,而且后来成为建立抽象测度论的有力工具.

勒贝格测度(Lebesgue measure) 集合的一种度量.它是线段长度、矩形面积和立体体积概念的推广,它只对于勒贝格可测集有意义.若 $E\subset \mathbf{R}^n$ 为勒贝格可测的,则 E 的勒贝格外测度称为 E 的勒贝格测度,记为 $m(E)$ 或 $|E|$.为了推广积分概念,勒贝格(Lebesgue,H. L.)于 1902 年在提出他的新型积分时,提出了这种测度概念.它是继若尔当(Jordan,M. E. C.)、波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)之后提出的最有意义的一种测度,现代一切抽象测度的概念都是仿照它的模式建立的.勒贝格测度和可测集的主要性质有:

1. 空集 $\varnothing$ 可测,且 $m(\varnothing)=0$,任何区间可测,且它的测度与长度(或面积、体积等)相等.

2. 若 $E\subset \mathbf{R}^n$ 可测,则它的余集 $E^c=\mathbf{R}^n\backslash E$ 也可测.

3. 若 E_1,E_2 可测,则 $E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2$ 以及 $E_1\backslash E_2$ 均可测.

4. (可列可加性)可列个可测集 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 的并集 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 仍为可测集;若进一步有各 E_i 两两不相交时,则

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i).$$

5. 若 E_1,E_2 可测,$E_1\subset E_2$,且 $m(E_2)<+\infty$,则

$$m(E_2/E_1)=m(E_2)-m(E_1).$$

6. 若 $\{E_n\}$ 是递增可测集合列,则

$$m(\lim_{n\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}m(E_n).$$

7. 若 $\{E_n\}$ 是递减可测集合列,且有 n_0 使 $m(E_{n_0})<+\infty$,则

$$m(\lim_{n\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}m(E_n).$$

8. (关于正交变换和平移的不变性)若 $E\subset \mathbf{R}^n$ 为勒贝格可测集,O 为 $\mathbf{R}^n$ 上的正交变换,对于 $x_0\in \mathbf{R}^n$,记 $x_0+E=\{x\in \mathbf{R}^n\mid x=x_0+y,y\in E\}$,则 OE 和 x_0+E 都可测,且 $m(OE)=m(x_0+E)=m(E)$.

其中的可列可加性和正交变换与平移下的不变性最为重要.前者是使勒贝格测度区别于若尔当和波莱尔的测度,并使勒贝格积分具有良好性质和重大理论意义的基础,也是一切抽象测度都具有的;而后者则是勒贝格测度区别于其他抽象测度的特征.

可测集(measurable set) 在不致与其他测度混淆时,勒贝格可测集的简称.

卡拉西奥多里条件(Carathéodory condition) 用以定义勒贝格可测集的一个条件(参见“勒贝格可测集”).由卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)于 1914 年给出,在抽象测度理论中起重要作用.

勒贝格可测集的结构(structure of Lebesgue measurable set) 对勒贝格可测集的一种刻画.从它与某些特殊集的关系的角度说明 (L) 可测集的构造:每个 (L) 可测集都近于开集或闭集,而与某个 G_δ 型集或 F_σ 型集相差一个零测度集(测度相等).下列五条都是集 E 可测的充分必要条件:

1. 对任意 $\varepsilon>0$,有开集 $G\supset E$,使 $m^*(G\backslash E)<\varepsilon$.

2. 对任意 $\varepsilon>0$,有闭集 $F\subset E$,使

$$m^*(E\backslash F)<\varepsilon.$$

3. 有 G_δ 型集 $G_0\supset E$,使 $m^*(G_0\backslash E)=0$.

4. 有 F_σ 型集 $F_0\subset E$,使 $m^*(E\backslash F_0)=0$.

5. 对任意 $\varepsilon>0$,有闭集 F 及开集 G,使 $F\subset E\subset G$,且 $m^*(G\backslash F)<\varepsilon$.

另外,若已知 E 为可测集,则还有:

6. 对任意 $\varepsilon>0$,存在开集或闭集 A,使

$$m(E\triangle A)<\varepsilon.$$

7. 存在波莱尔集 B,使 $m(E\triangle B)=0$,其中“$\triangle$”表示对称差.

勒贝格可测集类(Lebesgue measurable set family) 勒贝格可测集类作为集函数的定义域.它包括:

1. 一切区间(不论开、闭或有限、无限的).

2. 一切外测度为零之集.

3. 一切开集、闭集、F_σ 型、G_δ 型集、波莱尔集.

但存在不是波莱尔集的 (L) 可测集,苏斯林(Суслин,M. Я.)首先举出了这样的实例.因而 (L) 可测集类是比波莱尔集类更广的集类,但并非一切点集都是勒贝格可测的.

等测包(equi-measure hull) 反映点集外包等测逼近性质的集.若 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一点集,则存在包含 E 的 G_δ 型集 H,使得 H 的测度与 E 的外测度相等,即 $m(H)=m^*(E)$,此 H 称为 E 的等测包.

等测核(equi-measure kernel) 反映可测集内含等测逼近性质的集.若 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集,则存在含于 E 的 F_σ 型集 K,使得 K 与 E 两集的测度相等,即 $m(K)=m(E)$.此 K 称为 E 的等测核.

乘积空间中可测集的截口性质(section properties of a measurable set in a product space) 反映可测集与其笛卡儿乘积之间可测性和测度的关系的命题.设点集 $E\subset \mathbf{R}^{p+q}$.若 $x_0\in \mathbf{R}^p$,则 $\mathbf{R}^q$ 中点集 $\{y\in \mathbf{R}^q\mid (x_0,y)\in E\}$ 称为集 E 被超平面 $x=x_0$ 所截的截口,记为 E_{x_0},它有如下性质:

1. 若 A 与 B 分别是 $\mathbf{R}^p$ 与 $\mathbf{R}^q$ 中的 (L) 可测集,则 $C=A\times B$ 是 $\mathbf{R}^{p+q}$ 中的 (L) 可测集,且

$$m(C)=m(A)\cdot m(B).$$

2. 若 $E\subset \mathbf{R}^{p+q}$ 的 (L) 测度为零,则 $m(E_x)=0$ a. e. 于 $\mathbf{R}^p$.

3. 若 $E\subset \mathbf{R}^{p+q}$ 是 (L) 可测集,则对几乎所有的 x

$\in \mathrm{R}^p$，E_x 是 R^q 中的(L)可测集.

勒贝格内测度(Lebesgue inner measure)　勒贝格(Lebesgue, H. L.)提出他的测度定义时所用的一个辅助性概念. 简称(L)内测度. 若 $E \subset \mathrm{R}^n$ 为有界点集，I 为包含 E 的任一有界区间. 则 $|I| - m^*(I \setminus E)$称为 E 的勒贝格内测度，记为 $m_*(E)$或$|E|_i$，即

$$m_*(E) = |I| - m^*(I \setminus E),$$

其中$|I|$表示区间 I 的体积. 勒贝格最初引进勒贝格测度时，对有界集 E 定义，当 $m^*(E) = m_*(E)$时 E 可测，$m^*(E)$与 $m_*(E)$的公共值为 E 的测度(参见"勒贝格可测集").

全密点(point of density)　亦称密集点. 反映勒贝格可测集中的点在一点附近高度密集情况的概念. 设 E 是 R 中勒贝格可测集. 对于任意一点 x_0，记 $E(x_0, h) = E \cap [x_0 - h, x_0 + h]$ $(h > 0)$，如果极限

$$\lim_{h \to 0} \frac{mE(x_0, h)}{2h}$$

存在，则它称为 E 在点 x_0 处的密度. 如果 E 在点 x_0 处的密度等于 1，即

$$\lim_{h \to 0} \frac{mE(x_0, h)}{2h} = 1,$$

则称 x_0 为 E 的全密点. (L)可测点集 E 中几乎每个点都是它的全密点，当 $E \subset \mathrm{R}$ 的情形这是勒贝格(Lebesgue, H. L.)最早证明的.

密集点(point of density)　即"全密点".

稀薄点(point of rarity)　描述密度的另一个概念. 设 E 是 R 中的勒贝格可测集. 当 E 在点 x_0 处的密度等于零时，则 x_0 称为 E 的稀薄点(参见"全密点").

维塔利覆盖(Vitali cover)　以度量刻画的覆盖 R^n 中的点集的区间族. 设 $E \subset \mathrm{R}^n$，$\Gamma = \{I_\alpha\}$是区间族. 若对任意的 $x \in E$ 以及 $\varepsilon > 0$，存在 $I_\alpha \in \Gamma$，使得 $x \in I_\alpha$，$|I_\alpha| < \varepsilon$，则称 Γ 是 E 在维塔利意义下的覆盖，简称 E 的维塔利覆盖.

维塔利覆盖定理(Vitali's convering theorem)　阐明点集近于被其维塔利覆盖中有限个互不相交的区间覆盖的命题. 设 $E \subset W \subset \mathrm{R}^n$，且 $m^*(E) < +\infty$. 若 Γ 是 E 的一个维塔利覆盖，则对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在有限个互不相交的 $I_j \in \Gamma$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$，使得

$$m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j) < \varepsilon.$$

这是维塔利(Vitali, G.)于 1907 年试图将微积分基本定理推广到 R^2 情形时提出并证明的.

谢尔品斯基依测度覆盖定理(Sierpiński covering theorem in measure)　陈述了在一定条件下，直线上的有界点集，近于被有限个互不重叠的区间覆盖的命题. 设集 $M \subset (a, b)$，Δ 是一区间族. 若 M 中任一点必为 Δ 中某一区间的左端点，则对于任给 $\varepsilon > 0$，Δ 中有不相重叠的有限个区间 $I_1, I_2, \cdots, I_N$ 适合

$$m^*[M \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N)] < \varepsilon.$$

这是谢尔品斯基(Sierpiński, W.)于 1923 年得到的.

零集(null set)　测度为 0 的集. 在实变函数论中，特指勒贝格测度为 0 的集，为了明确，有时称为勒贝格意义下的零集. 由于这类集合在测度理论中的特殊重要地位，而有此专门名词. 对于勒贝格测度，一切可数集(例如有理点之集)都是零集，但是也有不可数的零集(例如康托尔集). 零集的任意子集，以及零集的可数并也都是零集，勒贝格可测集的定义可以通过先直接定义零集，然后将一般可测集定义成波莱尔集与勒贝格零集之并.

几乎处处(almost everywhere)　阐明一个可以逐点判断其真伪的命题在除一个零集之外处处成立的常用术语. 设有一个与集合 $E \subset \mathrm{R}^n$ 中的点 x 有关的命题 $P(x)$，若有零集 $E_0 \subset E$，对于任意 $x \in E \setminus E_0$，$P(x)$均成立，则说 $P(x)$在 E 上几乎处处成立. 简记为 $P(x)$a. e. (英文 almost everywhere 的简缩)于 E. 或 $P(x)$ p. p. (法文 presque partout 的缩写)于 E.

连续函数与可测函数

扩充实值函数(extended real-valuded function)　取扩充实数值的函数，即可取无穷值的函数. 实变函数论中的可测函数一般属于这种.

沿点集的极限(limit along a set)　通常极限概念的推广. 设 $f(x)$是定义在 $E \subset \mathrm{R}$ 上的实值函数，x_0 为 E 的聚点. 若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E \setminus \{x_0\}$时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则实数 A 称为 $f(x)$在点 x_0 沿 E 的极限，记为

$$A = \lim_{x \to x_0} {}_E f(x).$$

当 E 为区间时，即为通常的极限.

沿点集的上极限(upper limit along a set)　通常上极限概念的推广. 设 $f(x)$是定义在 $E \subset \mathrm{R}$ 上的实值函数，x_0 为 E 的聚点，分别称

$$\lim_{h \to 0} \sup_{x \in (x_0 - h, x_0 + h) \cap E \setminus \{x_0\}} f(x),$$

$$\lim_{h \to 0} \inf_{x \in (x_0 - h, x_0 + h) \cap E \setminus \{x_0\}} f(x)$$

为 $f(x)$在点 x_0 沿 E 的上极限和下极限，并记为

$$\overline{\lim_{x \to x_0}}{}_E f(x) \quad \text{和} \quad \underline{\lim_{x \to x_0}}{}_E f(x).$$

以下命题成立：

1. $\underline{\lim_{x \to x_0}}{}_E f(x) \leqslant \overline{\lim_{x \to x_0}}{}_E f(x)$.
2. $\lim_{x \to x_0} {}_E f(x)$存在的充分必要条件为$\underline{\lim_{x \to x_0}}{}_E f(x)$

$=\overline{\lim}_{E,x\to x_0} f(x)$且为有限数.

沿点集的下极限(lower limit along a point set) 见"沿点集的上极限".

集上的连续函数(continuous function on a set) 区间上的连续函数概念在集上的推广. 对于定义在集 E 上的函数 $f(x)$,当 $x_0\in E$ 且 $|f(x_0)|<+\infty$,下列三个定义是等价的.

1. 如果对任给 $\varepsilon>0$,存在 x_0 的一个 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$,只要 $x\in U(x_0,\delta)\cap E$,就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称 $f(x)$依柯西意义在 x_0 点相对于 E 是连续的.

2. 如果对于集合 E 中任一收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$,对应的函数值序列$\{f(x_n)\}$收敛于 $f(x_0)$,即

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$依海涅意义在 x_0 点相对于 E 是连续的.

3. 如果 $f(x)$在 x_0 点相对于 E 的振幅 $\omega(x_0)=0$,则称 $f(x)$依贝尔意义在 x_0 相对于 E 是连续的. 这里,$\omega(x_0)=M(x_0)-m(x_0)$,$M(x)$,$m(x)$分别表示 $f(x)$沿 E 的上极限和下极限(定义参见有关条目).

只要 $f(x)$在上述任意一种意义之下连续,则称它在 x_0 相对于 E 连续. 若对于每个 $x\in E$,$f(x)$都在 x 相对于 E 连续,则称 $f(x)$是集 E 上的连续函数. 若$\{f_n(x)\}$是集 E 上的连续函数列,且在 E 上一致收敛于 $f(x)$,则$f(x)$在 E 上也连续.

近似极限(approximate limit) 普通极限概念的一种推广. 对一切以 x_0 为全密点的点集 E,下(上)确界

$$\inf_{E} \overline{\lim}_{E,x\to x_0} f(x) \quad (\sup_{E} \underline{\lim}_{E,x\to x_0} f(x))$$

称为 $f(x)$在点 x_0 的近似上(下)极限,记为

$$\mathrm{ap}\,\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x) \quad (\mathrm{ap}\,\underline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)).$$

若

$$\mathrm{ap}\,\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)=\mathrm{ap}\,\underline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x),$$

则称它为$f(x)$在点 x_0 的近似极限,记为

$$\mathrm{ap}\lim_{x\to x_0} f(x).$$

以下命题成立:

1. $\mathrm{ap}\,\underline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)\leqslant \mathrm{ap}\,\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)$.

2. 设 x_0 为 E 的全密点,若

$$\underline{\lim}_{E,x\to x_0} f(x)=\overline{\lim}_{E,x\to x_0} f(x),$$

则 $\mathrm{ap}\,\underline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)=\mathrm{ap}\,\overline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)$.

3. 若 $f(x)$在点 x_0 有有限的

$$\mathrm{ap}\,\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) \quad (\mathrm{ap}\,\underline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)),$$

则存在以 x_0 为全密点的点集 E,使

$$\mathrm{ap}\,\overline{\lim_{x\to x_0}} f(x)=\overline{\lim}_{E,x\to x_0} f(x)$$

$$(\mathrm{ap}\,\underline{\lim_{x\to x_0}}\, f(x)=\underline{\lim}_{E,x\to x_0} f(x)).$$

4. $\mathrm{ap}\lim_{x\to x_0} f(x)=A$($A$ 为有限数)的充分必要条件为存在以 x_0 为全密点的点集 E,使

$$\lim_{E,x\to x_0} f(x)=A.$$

近似连续(approximate continuity) 通常的函数连续性概念的一种推广. 若 $f(x)$是定义在 $E\subset\mathbf{R}$ 上的实值函数,$x_0\in E$,$f(x_0)$有限且

$$\mathrm{ap}\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$在点 x_0 近似连续. 若 $f(x)$在 E 的每一点近似连续,则称 $f(x)$在 E 上近似连续. 以下命题成立:

1. 若 $f(x)$是$[a,b]$上的有限可测函数,则 $f(x)$在$[a,b]$上几乎处处近似连续.

2. $f(x)$在点 x_0 近似连续的充分必要条件为,存在以 x_0 为全密点的集合 E,使得

$$\lim_{E,x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

集上的一致连续函数(uniformly continuous function on a set) 区间上的一致连续函数概念在集上的推广. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,$f(x)$是定义在集合 E 上的函数. 若对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使对任意的 x_1,$x_2\in E$,只要距离 $\rho(x_1,x_2)<\delta$,恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,则称 $f(x)$为集 E 上的一致连续函数.

一致连续点集(uniformly continuous point set) 使得它上面的任何连续函数都一致连续的点集. 设 $E\subset\mathbf{R}$. 若 E 上每个连续函数都是一致连续的,则称 E 为一致连续点集. E 为一致连续点集的充分必要条件是 E 可表成 $E=E_1\cup E_2$,其中 E_1 是紧集,而 E_2 是一致孤立点集,即存在 $\varepsilon>0$,使得对于任何 $x_1,x_2\in E_2$,$x_1\neq x_2$,都有 $\rho(x_1,x_2)>\varepsilon$.

一致孤立点集(uniformly isolated point set) 见"一致连续点集".

紧集上的连续函数(continuous function on compact set) 类似于闭区间上连续函数的性态良好的函数. 若 $f(x)$是紧集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数,则:

1. $f(x)$是 E 上的有界函数.

2. $f(x)$在 E 上取到最大值和最小值.

3. $f(x)$在 E 上是一致连续的.

但是紧集上的连续函数未必具有介值性质.

近于连续的函数(nearly continuous function) 与勒贝格可测函数等价的一个概念. 这类函数是实变函数论的主要研究对象. 设 $f(x)$是定义在(L)可测集 E 上的函数,如果对于任意 $\varepsilon>0$,存在可测子集 $e\subset E$,满足:

1. $m(e)<\varepsilon$;

2. $f(x)$在$E\setminus e$上连续；

则称$f(x)$是集E上的一个近于连续函数. 可测函数都是近于连续的(参见“卢津定理”).

函数连续点集的结构(structure of continuous point set of a function)　用集合论语言叙述的函数连续的点的总体特征. 若$f(x)$是定义在$\mathbb{R}^n$中的开集G上的实值函数，则$f(x)$的连续点之集是G_δ型集. 因此，不可能构造出间断点集为无理数集的函数.

连续函数可微点集的结构(structure of differentiable point set of a continuous function)　函数可微的点的总体特征. 若$f(x)$是$\mathbb{R}$上的连续函数，则$f(x)$的可微点之集是$F_{\sigma\delta}$型集，即它是可数个F_σ型集的交集.

闭集上连续函数的延拓定理(theorem on extension of a continuous function on a closed set)　阐明闭集上的有界连续函数可以经过连续延拓后仍保持有界的命题. 若$f(x)$是定义在$\mathbb{R}^n$中闭集F上的连续函数，且$|f(x)|\leqslant M(x\in F)$，则存在$\mathbb{R}^n$上的连续函数$g(x)$，满足：

1. $g(x)=f(x)(x\in F)$.

2. $|g(x)|\leqslant M\ (x\in \mathbb{R}^n)$.

这是由豪斯多夫(Hausdorff, F.)于1919年得到的.

上极限函数(upper limit function)　为判断函数上半连续性而引进的一个概念. 设$f(x)$是定义在点集E上的扩充实值函数. 若在闭包$\overline{E}$内的点x的δ邻域与E的交内，函数f所取的值的上确界、下确界分别为$M(x,\delta)$，$m(x,\delta)$，则

$$M(x)=\lim_{\delta\to 0}M(x,\delta),$$

$$m(x)=\lim_{\delta\to 0}m(x,\delta)$$

分别称为$f(x)$沿E的上极限函数和下极限函数.

下极限函数(lower limit function)　为判断函数下半连续性而引进的一个概念(参见“上极限函数”).

半连续函数(semi-continuous function)　连续函数概念的推广. 设$f(x)$是定义在点集E上的扩充实值函数，$x_0\in E$. 如果对任意的$\varepsilon>0$，必存在x_0的一个邻域，使得在此邻域中的每个点$x\in E$，都有$f(x)\geqslant f(x_0)-\varepsilon$成立，则称$f(x)$在$x_0$处是下半连续的. 若$f(x)$在$E$上每一点是下半连续的，则称$f(x)$是$E$上的下半连续函数. 类似地，用不等式$f(x)\leqslant f(x_0)+\varepsilon$代替$f(x)\geqslant f(x_0)-\varepsilon$，可定义$f(x)$在$x_0$处上半连续，进而定义上半连续函数. 上半连续函数与下半连续函数，统称半连续函数. 若$f(x)$在点$x_0\in E$连续，则$f(x)$在x_0既为上半连续又为下半连续. 反之，若$f(x_0)$在x_0取有限值而且既为上半连续又为下半连续，则$f(x)$在x_0必定连续. $f(x)$在点x_0为上(下)半连续的等价定义有：

1. $f(x_0)$与其上(下)极限函数在x_0之值相等.

2. 关系式

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)\leqslant f(x_0)\quad(\underline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n)\geqslant f(x_0))$$

对于E中收敛于x_0的任何点列$\{x_n\}$都成立.

半连续函数的主要性质有：

1. 设$f(x)$与$g(x)$是E上的扩充实值函数，且$f(x)+g(x)$在E上也有定义. 若$f(x)$与$g(x)$在$x_0\in E$均为上(下)半连续，则$f(x)+g(x)$在x_0亦为上(下)半连续.

2. 若$f(x)$是E上的上(下)半连续函数，则$-f(x)$是E上的下(上)半连续函数.

3. 设$f(x)$与$g(x)$是E上的非负扩充实值函数，若$f(x)$与$g(x)$在$x_0\in E$上(下)半连续，则$f(x)g(x)$在x_0也必上(下)半连续.

4. 若$f(x)$与$g(x)$在$x_0\in E$上半连续，则$\max\{f(x),g(x)\}$在x_0亦必上半连续；同理，若$f(x)$与$g(x)$在$x_0\in E$下半连续，则$\min\{f(x),g(x)\}$在x_0亦必下半连续.

5. (保负性)上半连续有局部保负性，即若$f(x)$在点$x_0\in E$上半连续，$f(x_0)<0$，则存在$\delta>0$，当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap E$时，有$f(x)<0$；同理，下半连续有局部保正性.

6. 紧集上的上(下)半连续函数必能达到上(下)确界.

7. (保半连续性)若$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$都是E上的上(下)半连续函数，且$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots$ $(f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots)$，则

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

也是E上的上(下)半连续函数；特别地，单调减少(增加)的连续函数列，其极限函数是上(下)半连续函数.

8. 如果$f(x)$是E上的上(下)半连续函数，但不取值$+\infty(-\infty)$，则存在连续函数的单调减少(增加)列$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots(f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots)$，使

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x).$$

这个结果是由贝尔(Baire, R. L.)与蒂茨(Tietze, H.)得到的.

9. 设E为闭集，则$f(x)$在E上为上(下)半连续的充分必要条件为，对任意实数a，$\{x\,|\,f(x)\geqslant a,x\in E\}(\{x\,|\,f(x)\leqslant a,x\in E\})$是闭集.

半连续函数隔离定理(separation theorem on semi-continuous function)　陈述了可用连续函数将在各点有相同大小关系的上半连续函数与下半连续函数分隔开来的命题. 设在区间$[a,b]$上，$u(x)$为上半连续函数，$U(x)$为下半连续函数，且$u(x)\leqslant U(x)$. 若$u(x)<+\infty$，$U(x)>-\infty$，则必存在$[a,$

b]上的连续函数 $f(x)$,使得 $u(x)\leqslant f(x)\leqslant U(x)$. 这个定理是由哈恩(Hahn,H.)得到的.

集合的特征函数(characteristic function of a set) 亦称集合的示性函数.与集合一一对应并反映其组成、运算和可测性等特性的简单函数.可看做集合的函数表示法,该集合的元素由相应特征函数取值1的点所确定.设 X 是全集,对任意集合 $A\subset X$,把函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A),\\ 0 & (x\notin A)\end{cases}$$

称为集合 A 的特征函数或示性函数.特征函数与相应集合之间有如下关系:

1. $A=X\Rightarrow\chi_A(x)\equiv 1$, $A=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A(x)\equiv 0$.
2. $A\subset B\Leftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$,
   $A=B\Leftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x)$.
3. $\chi_{\cup A_n}(x)=\max\limits_{n\in\mathbf{N}}\chi_{A_n}(x)$,
   $\chi_{\cap A_n}(x)=\min\limits_{n\in\mathbf{N}}\chi_{A_n}(x)$.
4. 对一列集$\{A_n\}$,有

$$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \chi_{A_n}(x),$$

$$\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\ \chi_{A_n}(x).$$

5. $\chi_A(x)$为(L)可测函数$\Leftrightarrow A$ 为(L)可测集.

集合的示性函数(characteristic function of a set) 即"集合的特征函数".

简单函数(simple function) 阶梯函数的推广.设 $f(x)$是定义在可测集 E 上的函数.如果能把 E 表示成有限个互不相交的可测子集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 的并,且在每个 E_i 上 $f(x)$都是常数,则称 $f(x)$是 E 上的一个简单函数.凡简单函数都可表成

$$\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x)$$

的形式,即简单函数是有限个可测集的特征函数的线性组合.

勒贝格可测函数(Lebesgue measurable function) 简称(L)可测函数.比连续函数更广的一类函数.设 $f(x)$是定义在(L)可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的扩充实值函数.若对任意实数 α,点集$\{x\in E\mid f(x)>\alpha\}$是$(L)$可测集,则称$f(x)$是 E 上的勒贝格可测函数,简称$f(x)$是 E 上的可测函数.在这个定义中,不等式$f(x)>\alpha$ 可用$f(x)\geqslant\alpha$,$f(x)<\alpha$,$f(x)\leqslant\alpha$ 中的任何一个来替代.定义在(L)零测度集上的任何实值函数以及区间上的半连续函数都是(L)可测函数;定义在(L)可测集上的任何连续函数都是(L)可测函数;但可测函数不一定连续.勒贝格可测函数的主要性质有:

1. 若 $f(x)$与$g(x)$在 E 上(L)可测,且在 E 上几乎处处取有限值,则它们的和、差、积、商(分母不为零)均(L)可测.
2. 若$\{f_n(x)\}$是 E 上的(L)可测函数列,则下列函数都是 E 上的(L)可测函数:
   $\sup\limits_{n\geqslant 1}\{f_n(x)\}$, $\inf\limits_{n\geqslant 1}\{f_n(x)\}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$.
3. 若$\{f_n(x)\}$是 E 上的(L)可测函数列,且以 $f(x)$为极限,则$f(x)$在 E 上也(L)可测.
4. 若 $f(x)$与$g(x)$在 E 上几乎处处相等,则它们或都(L)可测,或都(L)不可测.
5. 若 $f(x)$在 E 上(L)可测,又 E_0 为 E 的(L)可测子集,则$f(x)$在 E_0 上也(L)可测.
6. 若 $f(x)$在每个 E_i 上都(L)可测,则 $f(x)$在 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 和$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 上也(L)可测.
7. 在可测集 E 上定义的函数可测的充分必要条件是,它可以表示成简单函数列的极限.

函数的正部(positive part of a function) 在给定函数取非负值时与它相等的非负函数.设$f(x)$是定义在集 E 上的实值函数.令

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\},$$

$$f^-(x)=\max\{-f(x),0\},$$

分别称它们为 $f(x)$的正部和负部.$f^+(x)$与$f^-(x)$均是非负函数,且$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$.对于可测集 E 上的扩充实值函数$f(x)$,它是 E 上的可测函数的充分必要条件是$f^+(x)$与$f^-(x)$均为 E 上的可测函数.

函数的负部(negative part of a function) 见"函数的正部".

可测函数的几何意义(geometric significance of a measurable function) 从几何图形角度给出的函数可测性的特征.对于$\mathbf{R}^n(n\geqslant 1)$中的可测集 E 上的非负函数 $f(x)$,它可测的充分必要条件是它的下方图形 $G(E;f)$是$\mathbf{R}^{n+1}$中的可测集.关于下方图形详见"勒贝格积分的几何意义".

几乎处处收敛(convergence almost everywhere) 处处收敛概念的推广.设$\{f_n(x)\}$为定义在可测集 E 上的函数列.若存在零集 $e\subset E$,使得$\{f_n(x)\}$在 $E\setminus e$ 上收敛于 $f(x)$,则说$\{f_n(x)\}$在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$,记为

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ \text{a. e. 于}\ E,$$

或 $f_n(x)\to f(x)$ a. e. 于 E.几乎处处收敛的可测函数列的极限函数是可测的.

依测度收敛(convergence in measure) 实变函数论中重要的收敛概念之一.设$\{f_n(x)\}$是定义在可测集 E 上几乎处处有限的可测函数列,$f(x)$是 E 上几乎处处有限的可测函数,若对任给 $\sigma>0$,

$$\lim_{n\to\infty}m\{x\in E\mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}=0,$$

则$\{f_n(x)\}$称为依测度收敛于 $f(x)$.这个概念经过

推广，在概率论中也有用.

近于一致收敛(nearly uniform convergence) 一致收敛概念的推广. 设$\{f_n(x)\}$为定义在可测集E上的可测函数列. 对任意$\sigma>0$，若存在可测子集$A\subset E$，使$m(A)<\sigma$，在$E\setminus A$上$\{f_n(x)\}$一致收敛于$f(x)$，则称$\{f_n(x)\}$在E上近于一致收敛于$f(x)$，或说$\{f_n(x)\}$在E上几乎一致收敛于$f(x)$.

几乎一致收敛(almost uniform convergence) 见"近于一致收敛".

勒贝格可测函数的结构(structure of Lebesgue measurable functions) 从它与一些常见函数类的关系看(L)可测函数的性态. (L)可测函数可用简单函数逼近，有界(L)可测函数可用简单函数一致逼近；(L)可测函数近于连续函数(参见"简单函数逼近定理"和"卢津定理").

渐近连续(asymptotic continuity) 从连续性角度，为进一步刻画可测函数性质而引进的概念. 设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的实函数，$x_0\in[a,b]$. 如果存在(L)可测集$E\subset[a,b]$，使得x_0是E的全密点，$f(x)$在E上以x_0为连续点，则$f(x)$在点x_0处称为渐近连续的. 对$[a,b]$上的几乎处处有限的实函数$f(x)$，它在$[a,b]$上可测的充分必要条件是$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处渐近连续.

卢津定理(Lusin theorem) 揭示可测函数与连续函数本质联系的定理. 它断言：若$f(x)$是可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上几乎处处有限的可测函数，则$f(x)$是近于连续函数. 即对任意$\varepsilon>0$，存在闭集$F_\varepsilon\subset E$，$m(E\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$，使得$f(x)$是$F_\varepsilon$上的连续函数. 等价地，对任意$\varepsilon>0$，存在$\mathbb{R}^n$上的连续函数$g(x)$，使得$m\{x\in E\mid f(x)\neq g(x)\}<\varepsilon$. 上述定理是卢津(Лузин, Н. Н.)于1912年得到的. 卢津定理的逆定理也成立，因此，它可以作为可测函数的定义.

叶戈罗夫定理(Egoroff theorem) 揭示几乎处处收敛与近于一致收敛之间本质联系的定理. 它断言：若$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$及$f(x)$是可测集E上几乎处处有限的可测函数，$m(E)<+\infty$，且函数列$\{f_n(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$，则$\{f_n(x)\}$在E上近于一致收敛于$f(x)$. 叶戈罗夫(Егоров, Д. Ф.)于1911年得到. 叶戈罗夫定理的逆定理也成立.

勒贝格定理(Lebesgue theorem) 揭示几乎处处收敛与依测度收敛之间关系的定理. 它断言：若$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$及$f(x)$是可测集E上几乎处处有限的可测函数，$m(E)<+\infty$，且函数列$\{f_n(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$，则$\{f_n(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$.

里斯定理(Riesz theorem) 给出依测度收敛与几乎处处收敛之间的关系的命题. 它断言：若可测函数列$\{f_n(x)\}$在可测集E上依测度收敛于$f(x)$，则$\{f_n(x)\}$必有子序列$\{f_{n_i}(x)\}$在E上几乎处处收敛于$f(x)$.

李特尔伍德三原则(Littlewood three principles) 李特尔伍德(Littlewood, J. E.)对实变函数论的部分基本概念间关系所做的三条概括性总结：

1. 每个(可测)集近于区间的有限并.
2. 每个(可测)函数近于连续函数.
3. 每个收敛的(可测)函数序列近于一致收敛.

后两个原则分别来自卢津定理与叶戈罗夫定理，第一个原则可理解为下列结论：对于$\mathbb{R}^n$中的可测集E，若$m(E)<+\infty$，则对任意$\varepsilon>0$，存在有限个开区间的并集H，使得两集对称差的测度$m(E\triangle H)<\varepsilon$.

贝尔函数(Baire functions) 在研究函数连续性的基础上对函数进行分类的结果. 具体分类方法如下：所有的连续函数称为"0类"函数；能表示成连续函数列的极限，但它本身不是连续函数的，则称其为"1类"函数；同样地，对于能表示成一列"1类"中函数的极限，而它不是"0类"或"1类"的函数，就称它是"2类"函数. 类似地，可以定义"3类"、"4类"……以及任意"n类"函数. 还可定义"ω类"函数(这里ω表示可列序数). 用如上方法定义的各类函数统称为贝尔函数. 例如，可微函数的导数如果不连续，就是1类贝尔函数. 贝尔函数的主要性质有：

1. 所有贝尔函数组成的集合具有连续统的基数，故贝尔分类并不包括所有的实函数.

2. 在n维欧氏空间中，贝尔函数与波莱尔可测函数相同.

3. 设$\{f_n(x)\}$是E上的贝尔函数列. 若

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\quad(x\in E),$$

则$f(x)$也是E上的贝尔函数.

4. 若$f(x)$是E上的α类贝尔函数，则对任意$E_0\subset E$，$f(x)$是E_0上的某个$\beta(\beta\leqslant\alpha)$类贝尔函数.

5. 对于E上所属类数小于等于α的两个贝尔函数，其和、差、积、商(假定在E上有定义)也是E上的小于等于α类的贝尔函数.

6. 若$f(x)$与$g(x)$是E上小于等于α类的贝尔函数，则$\max\{f(x),g(x)\}$，$\min\{f(x),g(x)\}$也是E上的小于等于α类的贝尔函数.

7. 若$f(x)$是$[a,b]$上小于等于α类的贝尔函数，$g(t)$是$[c,d]$上小于等于β类的贝尔函数，且$a\leqslant g(t)\leqslant b$，则$f[g(t)]$是$[c,d]$上小于等于$\alpha+\beta$类的贝尔函数.

8. 若$\{f_n(x)\}$是E上小于等于α类的贝尔函数列，且$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于$f(x)$，则$f(x)$也是E上小于等于α类的贝尔函数.

9. 若$\{f_n(x)\}$是E上小于等于α类的贝尔函数列，且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)=f(x)\quad(x\in E),$$

则 $f(x)$ 是 E 上小于等于 $\alpha+2$ 类的贝尔函数.

10.（勒贝格）设 $f(x)$ 是定义在 $E=[a,b]$ 上的函数，则 $f(x)$ 为所属类数不大于 1 的贝尔函数的充分必要条件为，对任一实数 α，$\{x\,|\,f(x)>\alpha,x\in E\}$ 与 $\{x\,|\,f(x)<\alpha,x\in E\}$ 都是 F_σ 型集.

11.（贝尔）若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 1 类贝尔函数，则对任一非空闭集 $F\subset[a,b]$，$f(x)$ 在 F 上的限制 $f(x|F)$ 在 F 上必有连续点.

12.（贝尔）设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数，若对任一非空点集 $F\subset[a,b]$，$f(x)$ 在 F 上的限制 $f(x|F)$ 在 F 上有连续点，则 $f(x)$ 或为 $[a,b]$ 上的连续函数，或为 1 类贝尔函数.

贝尔函数是贝尔（Baire，R. L.）于 1899 年提出的.

波莱尔可测函数（Borel measurable function）与波莱尔集相适应的可测函数. 设 $f(x)$ 是定义在波莱尔集 $B\subset\mathbf{R}^n$ 上的扩充实值函数. 若对任意实数 α，点集 $\{x\in B\,|\,f(x)>\alpha\}$ 是一波莱尔集，则称 $f(x)$ 是 B 上的波莱尔可测函数. 这类函数构成了勒贝格可测函数类的子类. $\mathbf{R}^n$ 中勒贝格可测函数与波莱尔函数的复合函数有如下关系

$$B\circ B=B,\ L\circ B=L,\ B\circ L=X,\ L\circ L=X,$$

其中 B,L 分别表示波莱尔可测、勒贝格可测，X 表示不一定可测.

勒贝格积分

勒贝格积分（Lebesgue integral） 黎曼积分的最有意义的推广和发展. 它是现代分析学中使用最广的重要工具. 简称 (L) 积分. 它只对 (L) 可测函数定义，通常分以下步骤：

1. 非负简单函数的 (L) 积分. 设

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}(x)$$

是 (L) 可测集 E 上的非负简单函数，

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,$$

$a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为非负有限实数. 称扩充实数

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot m(A_i)$$

为 $f(x)$ 在 E 上的 (L) 积分.

2. 非负 (L) 可测函数的 (L) 积分. 设 $f(x)$ 是 (L) 可测集 E 上的非负 (L) 可测函数，$\{f_n(x)\}$ 为任一非负简单函数的递增列且收敛于 $f(x)$. 称扩充实数

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的 (L) 积分.

3. 一般 (L) 可测函数的 (L) 积分. 设 $f(x)$ 为 (L) 可测集 E 上的 (L) 可测函数，$f^+(x)$ 与 $f^-(x)$ 分别为 $f(x)$ 的正部与负部，它们是 E 上非负 (L) 可测函数，且 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$. 当

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x,\quad \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

至少有一个是有限实数时，称

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的 (L) 积分，并说 $f(x)$ 在 E 上积分有定义或积分有意义. 当 $E=[a,b]$ 时，(L) 积分

$$\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x$$

可记为 $(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 关于勒贝格积分的意义详见“实变函数论”与“分析学”. 上述定义并不是勒贝格（Lebesgue，H. L.）本人给出的定义. 勒贝格针对 (R) 积分基本上是为连续函数（或间断点“不太多”的函数）而设计的局限性（参见“勒贝格的黎曼可积判别准则”），将 (R) 积分定义中分划被积函数的定义域改变为分划被积函数的值域，这样就避免了在分出的小集合内出现可积函数的振幅很大的情况，从而扩大了可积函数的范围. 勒贝格本人定义积分的步骤如下：

1. 有界可测函数的 (L) 积分. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的有界可测函数，且 $A<f(x)<B$，做分划 T：$A=y_0<y_1<\cdots<y_n=B$，令

$$e_k=\{x\,|\,y_k\leqslant f(x)<y_{k+1},x\in E\}\quad(k=0,1,\cdots,n-1),$$

$$s=\sum_{k=0}^{n-1}y_k m(e_k),\quad S=\sum_{k=0}^{n-1}y_{k+1}m(e_k),$$

分别称 s 与 S 为勒贝格小和与大和. 令

$$U=\sup_T\{s\},\quad V=\inf_T\{S\},$$

则可证 $U=V$. U 和 V 这个相同的值称为 $f(x)$ 在 E 上的 (L) 积分. 于是对于任何有界可测函数，其勒贝格积分都有意义，为有限数.

2. 非负可测函数的 (L) 积分. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数，n 是自然数. 令

$$[f(x)]_n=\begin{cases}f(x) & (f(x)\leqslant n),\\ n & (f(x)>n).\end{cases}$$

称极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_E[f(x)]_n\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的 (L) 积分. 若这个积分是一有限数，则称 $f(x)$ 在 E 上是 (L) 可积的.

3. 一般可测函数的 (L) 积分. 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，$f^+(x)$ 与 $f^-(x)$ 分别为 $f(x)$ 的正部与负部. 若 $f^+(x)$ 与 $f^-(x)$ 中有一个在 E 上为 (L) 可积，则称

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 在 E 上的 (L) 积分. 它可能是有限数，也可能为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

勒贝格积分的主要性质有：

1. 若 $m(E)=0$，则对 E 上的任意函数 $f(x)$，均有 $f(x)$ 可积且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

2. 设 $f(x)$ 是 E 上的可积函数，若 E_0 是 E 的可测子集，则 $f(x)$ 在 E_0 上也可积.

3. (积分的有限可加性) 若 $E=A\cup B, A\cap B=\varnothing$，$f(x)$ 在 A 与 B 上均可积，则 $f(x)$ 在 E 上也可积，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x + \int_B f(x)\mathrm{d}x.$$

4. (积分的保序性) 设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的可积函数，若 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

5. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，$g(x)$ 是 E 上的非负可积函数，若 $|f(x)|\leqslant g(x)$，则 $f(x)$ 在 E 上也可积.

6. (绝对可积性) 对于 E 上的可测函数 $f(x)$，它在 E 上可积的充分必要条件是 $|f(x)|$ 在 E 上可积.

7. 若 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限.

8. 设 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E，若 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $g(x)$ 在 E 上也可积，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

9. 若 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = 0$，则 $f(x)=0$ a.e. 于 E.

10. (积分的线性性) 若 $f(x), g(x)$ 为 E 上的可积函数，α 与 β 均为有限实数，则 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在 E 上可积，且

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_E f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

11. (积分的绝对连续性) 若 $f(x)$ 是 E 上的可积函数，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $e\subset E, m(e)<\delta$ 时，有

$$\int_e |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

12. (积分的可列可加性) 设 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i, E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，若 $f(x)$ 是 E 上的可积函数，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x.$$

13. 若 $f\in L([a,b])$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$，使得

$$\int_{[a,b]} |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

在以上各条中，"6"，"11"，"12"是使勒贝格积分区别于黎曼积分的重要性质. 因为"6"而可以说勒贝格积分是一类绝对积分. 勒贝格积分是黎曼积分的推广.

勒贝格可积函数 (integrable function in Lebesgue sense)　其勒贝格积分为有限数的函数，简称 (L) 可积函数. 若 $f(x)$ 是可测集 $E\subset \mathrm{R}^n$ 上的 (L) 可测函数，则当勒贝格积分

$$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

为有限数时，它称为勒贝格可积的，记为 $f\in L(E)$. 在 (L) 测度有限的集上，有界可测函数都是 (L) 可积函数. 对于一般的可测函数 $f(x)$，当且仅当

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x \quad 和 \quad \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

都是有限数，也就是 $|f|\in L(E)$ 时，$f(x)$ 在 E 上 (L) 可积(参见"勒贝格积分"). 勒贝格可积函数是平均连续的(参见"平均连续性"). 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必勒贝格可积，且两种积分值相等：

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

该命题之逆不真. 例如，狄利克雷函数 $D(x)$ (有理数集的特征函数) 在 $[0,1]$ 上勒贝格可积，但不黎曼可积.

绝对积分 (absolute integral)　使函数与其绝对值同时可积的那种积分. 否则称为非绝对积分. 勒贝格积分是绝对积分，黎曼积分是非绝对积分，当儒瓦积分、亨斯托克积分等也都是非绝对积分.

非绝对积分 (non-absolute integral)　见"绝对积分".

勒贝格积分的第一中值定理 (first mean value theorem of Lebesgue integral)　(R) 积分的第一中值定理在 (L) 积分情形的推广. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负 (L) 可积函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

勒贝格积分的第二中值定理 (second mean value theorem of Lebesgue integral)　(R) 积分的第二中值定理在 (L) 积分情形的推广. 它有两种形式：

1. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 (L) 可积函数，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设 $f(x)$是$[a,b]$上的(L)可积函数，若 $g(x)$是$[a,b]$上单调减小的正值有界函数，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x;$$

若 $g(x)$是单调增大的正值有界函数，则存在 $\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

博内(Bonnet ,P. -O.)首先就(R)积分证明了后一结果，故勒贝格积分的上述性质亦称博内中值定理.

博内中值定理(Bonnet mean value theorem) 见“勒贝格积分的第二中值定理”.

勒贝格积分的分部积分法(integration by parts of Lebesgue integral) (R)积分的分部积分法在(L)积分情形的推广. 若 $f(x)$，$g(x)$都是$[a,b]$上的绝对连续函数，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

勒贝格积分的换元积分法(integration by substitution of Lebesgue integral) (R)积分的换元积分法在(L)积分情形的推广. 设 $g(x)$在$[a,b]$上几乎处处可微，$f(x)$在$[c,d]$上(L)可积，且 $g([a,b])\subset[c,d]$，令

$$F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t,$$

则下述两个命题是等价的：

1. $F[g(t)]$是$[a,b]$上的绝对连续函数.

2. $f[g(t)]g'(t)$是$[a,b]$上的(L)可积函数，且有

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)\mathrm{d}t,$$

式中 $\alpha,\beta\in[a,b]$.

命题 2 给出勒贝格积分的换元法则.

列维定理(Levi theorem) 有关渐升的非负可测函数列积分号下取极限的定理. 设$\{f_n(x)\}$是可测集 E 上非负可测函数列，若：

1. $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)(n=1,2,\cdots)$；

2. $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ a. e. 于 E，

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

这是列维(Levi,B.)于 1906 年证明的.

法图引理(Fatou lemma) 以不等式形式给出的一个积分极限定理. 若$\{f_n(x)\}$为可测集 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

这是法图(Fatou,P. J. L.)于 1906 年得到的.

勒贝格控制收敛定理(Lebesgue dominated convergence theorem) 勒贝格积分在积分号下取极限的主要定理. 设$\{f_n(x)\}$是可测集 E 上的可测函数列，$F(x)$是 E 上的可积函数，若$|f_n(x)|\leqslant F(x)(n=1,2,\cdots)$；并且$\{f_n(x)\}$在 E 上几乎处处收敛于$f(x)$或依测度收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$在 E 上可积；且下述等式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

此式的意义是：对于 $f_n(x)$可以在积分号下求极限. 黎曼积分情形没有与此相应的结果. 它表明，对于勒贝格积分，积分号下求极限的条件宽松多了.

勒贝格有界收敛定理(Lebesgue bounded convergence theorem) 勒贝格控制收敛定理的一个有用的推论. 设$\{f_n(x)\}$是可测集 E 上的可测函数列，M 是非负实数，$m(E)<+\infty$，若在 E 上$|f_n(x)|\leqslant M$；并且$\{f_n(x)\}$在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$或依测度收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$在 E 上可积；且下述等式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

对于黎曼积分，阿尔泽拉(Arzelà,C.)于 1885 年、奥斯古德(Osgood,W. F.)于 1897 年证明过与此相应的结果. 勒贝格控制收敛定理和有界收敛定理正是在上述工作的基础上得到的.

勒贝格逐项积分定理(Lebesgue term by term integration theorem) 级数形式的积分极限定理之一. 若$\{f_n(x)\}$为可测集 E 上的非负可测函数列，则

$$\int_E\Big[\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\Big]\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

这从逐项积分角度，反映了勒贝格积分比黎曼积分运算更灵活.

积分的等度绝对连续性(equally absolute continuity of integral) 亦称积分的一致绝对连续性. 有关一列函数的积分绝对连续的程度的概念. 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots$ 是 E 上的一列可积函数. 若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对于 E 的任意可测子集 A，只要 $m(A)<\delta$，就有

$$\left|\int_A f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\ \ (n = 1,2,\cdots),$$

则称$\{f_n(x)\}$的积分具有等度绝对连续性. 它反映了一列变号函数在积分的绝对连续方面具有等度性或一致性这一性态.

积分的一致绝对连续性(uniformly absolute continuity of integral) 即“积分的等度绝对连续

性".

维塔利收敛定理(Vitali convergence theorem) 有关积分具有等度绝对连续性的一列函数积分号下取极限的定理.若 $m(E)<+\infty$,$\{f_n(x)\}$是 E 上可积函数列,且依测度收敛于 $f(x)$,又$\{f_n(x)\}$的积分具有等度绝对连续性,则 $f(x)$是可积函数,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

这是维塔利(Vitali,G.)于 1907 年得到的一个结果的推论.

勒贝格的黎曼可积判别准则(Lebesgue criterion for Riemann-integrability) 用测度论语言给出的黎曼可积函数的特征.它断言:若 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的有界函数,D 表示 $f(x)$在$[a,b]$上的间断点所组成的集合,则 $f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积当且仅当 D 的勒贝格测度 $m(D)=0$.这是由勒贝格(Lebesgue,H.L.)给出的.

勒贝格积分的几何意义(geometric significance of Lebesgue integral) 给出了非负函数的勒贝格积分与该函数的下方图形之间的关系.设 $f(x)$是 $E\subset\mathrm{R}^n$ 上的非负实值函数.称 $G(E;f)=\{(x,y)\in\mathrm{R}^{n+1}\mid x\in E,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$为 $f(x)$在 E 上的下方图形,则有:$f(x)$是 E 上的(L)可测函数的充分必要条件是它的下方图形 $G(E;f)$是 R^{n+1}中的(L)可测集.对 E 上的非负可测函数 $f(x)$,它的(L)积分恰好等于它的下方图形 $G(E;f)$的(L)测度,即

$$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x=mG(E;f).$$

这正是黎曼积分表示曲边梯形面积这个几何意义的推广.

富比尼定理(Fubini theorem) 给出在勒贝格意义下重积分与累次积分关系的命题.若 $f(x,y)$是 $\mathrm{R}^{p+q}=\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q$ 上的(L)可积函数,则:

1. 对几乎所有的 $x\in\mathrm{R}^p$,$f(x,y)$作为 y 的函数是(L)可积的.

2. 作为 x 的函数,

$$\int_{\mathrm{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$$

在 R^p 上几乎处处有定义,它在 R^p 上(L)可积,且有

$$\iint_{\mathrm{R}^{p+q}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathrm{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathrm{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

富比尼定理是由富比尼(Fubini,G.)于 1907 年提出的.若 $f(x,y)$是非负可测函数,则不论 $f(x,y)$ (L)可积与否,关于(L)积分,总有

$$\iint_{\mathrm{R}^{p+q}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathrm{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathrm{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathrm{R}^q}\mathrm{d}y\int_{\mathrm{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

这个结论通常称为托内利定理.但有的文献将上述富比尼定理也称为托内利定理.

托内利定理(Tonelli theorem) 见"富比尼定理".

平均收敛(convergence in mean) 实变函数中有关可积函数列的重要收敛概念.设$\{f_n(x)\}$是 E 上(L)可积函数列,若存在 E 上(L)可积函数 $f(x)$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0,$$

则称$\{f_n(x)\}$在 E 上平均收敛于 $f(x)$.若 $f(x)$是$[a,b]$上的(L)可积函数,则存在阶梯函数列$\{\varphi_n(x)\}$,连续函数列$\{u_n(x)\}$,使得$\{\varphi_n(x)\}$和$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$上都平均收敛于 $f(x)$;若$\{f_n(x)\}$在 E 上平均收敛于 $f(x)$,则$\{f_n(x)\}$必在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.有关它的推广与意义参见"L^p 中的强收敛".

R 中的微分与积分

单调函数(monotone function) 其值随自变量的值增大而增大(或减小)的一元函数.定义在 $E\subset\mathrm{R}$ 上的实值函数 $f(x)$,若对于任意 $x_1,x_2\in E$,当 $x_1<x_2$ 时总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,或总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则$f(x)$称为 E 上的单调函数.类似于数学分析,还可区分单调上升(递增)和单调下降(递减).闭区间$[a,b]$上处处有限的单调函数 $f(x)$有如下重要性质:

1. 它是有界变差的,是勒贝格可测的.

2. 只有至多可数个第一类间断点.

3. 它是几乎处处可微的,它的导数是勒贝格可积函数,当 $f(x)$递增时,

$$(L)\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a),$$

并且确实存在使"$<$"号成立的 $f(x)$(例如勒贝格-康托尔函数).这是勒贝格(Lebesgue,H.L.)于 1904 年首先证明的.关于单调函数的初等性质参见第一卷《数学分析》中有关条目.

富比尼逐项微分定理(Fubini term by term differential theorem) 有关级数逐项微分的定理.若$\{f_n(x)\}$是区间$[a,b]$上一列不减(或不增)的函数,使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=s(x)$$

在$[a,b]$上处处存在且有限,则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f'_n(x)\ \text{a.e. 于}[a,b].$$

这是由富比尼(Fubini,G.)于 1915 年得到的.此定

理中的 $f_n(x)$ 的条件明显可改为增函数之和，但不可改为增函数之差(有界变差函数).

有界变差函数(function of bounded variation) 亦称有限变差函数. 一类重要的函数. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上处处有限的函数. 对 $[a,b]$ 的分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$V_a^b(f,T)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

称为函数 f 关于分划 T 的变差. 若对于所有分划 T，变差 $V_a^b(f,T)$ 有界，即存在正数 M，使对 $[a,b]$ 的任何分划 T，都有 $V_a^b(f,T)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 一切 $V_a^b(f,T)$ 的上确界称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差，记为 $V_a^b(f)$，即

$$V_a^b(f)=\sup_T V_a^b(f,T).$$

单调函数是有界变差函数的特例，有界变差函数的主要性质有：

1. 有界变差函数是有界的.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处有限，$a<c<b$，则

$$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f).$$

3. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$1/f(x)(|f(x)|\geqslant c>0)$，$|f(x)|$，$\max\{f(x),g(x)\}$，$\min\{f(x),g(x)\}$ 都是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

4. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 (L) 可积的，又

$$V_a^x(f)=\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

1904 年，勒贝格(Lebesgue, H. L.)对连续的有界变差函数证明了这一结论，1932 年，里斯(Riesz, F.)推广到一般的有界变差函数情形.

5. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，且 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $V_a^x(f)$ 在 x_0 也连续.

在数学历史上，有界变差函数的概念是由研究曲线积分和曲线长度问题而引入的，后来它在实变函数、泛函分析、调和分析中都有广泛的应用. 例如，里斯于 1909 年证明了：Φ 是空间 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函的充分必要条件为：存在 $[a,b]$ 上的有界变差函数 $g(x)$，使对任意 $f(x)\in C[a,b]$，有

$$\Phi(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x),$$

上述积分是黎曼-斯蒂尔杰斯积分.

有限变差函数(function of finite variation) 即“有界变差函数”.

全变差(total variation) 见“有界变差函数”.

巴拿赫定理(Banach theorem) 表明函数的全变差与指标函数的 (L) 积分之间关系的定理. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，m 与 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，$N(y)(m\leqslant y\leqslant M)$ 是方程 $f(x)=y$ 的根的个数，称 $N(y)$ 为巴拿赫指标函数，则 $N(y)$ 在 $[m,M]$ 上 (L) 可测，且

$$\int_m^M N(y)\mathrm{d}y=V_a^b(f).$$

上述定理是巴拿赫(Banach, S.)于 1925 年得到的.

巴拿赫指标函数(Banach indicatrix) 见“巴拿赫定理”.

若尔当分解定理(Jordan decomposition theorem) 给出了有界变差函数的一种分解. $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数的充分必要条件是 $f(x)$ 可表示成两个非负递增(或递减)函数之差.

勒贝格分解定理(Lebesgue decomposition theorem) 有界变差函数的一种分解. 若 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $g(x)$ 必可分解为

$$g(x)=g_s(x)+g_c(x)+\varphi(x),$$

其中 $g_s(x)$ 是奇异函数，$g_c(x)$ 是绝对连续函数，$\varphi(x)$ 是跃度函数；若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的间断点为 $\{x_i\}$，则

$$\varphi(x)=\sum_{\{x|x_i\leqslant x\}}(f(x_i+0)-f(x_i-0)).$$

黑利定理(Helly theorem) 黎曼-斯蒂尔杰斯积分在积分号下取极限的定理. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，有界变差函数列 $\{g_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于有限函数 $g(x)$，且 $V_a^b(g_n)\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}g_n(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

黑利选择原理(Helly selection principle) 有界变差函数的一个重要性质. 设 $\{f_\alpha(x)\,|\,\alpha\in\Gamma\}$ 是 $[a,b]$ 上一族(无限个)一致有界的有界变差函数，它们的全变差也有界，则存在 $\{f_\alpha(x)\,|\,\alpha\in\Gamma\}$ 的一个子列，这个子列在 $[a,b]$ 上处处收敛于一个有界变差函数.

绝对连续函数(absolutely continuous function) 一类极为重要的函数. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数，若对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于在 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 (a_1,b_1)，(a_2,b_2)，$\cdots$，(a_n,b_n)，当

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$$

时，就有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon,$$

则 $f(x)$ 称为 $[a,b]$ 上的一个绝对连续函数. 令

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i),$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续的充分必要条件为：当

$\Delta \to 0$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}[f(b_i)-f(a_i)]$$

一致收敛于 0. 绝对连续函数的名称由维塔利(Vitali,G.)提出. 绝对连续函数的主要性质有：

1. 若$f(x)$与 $g(x)$都是$[a,b]$上的绝对连续函数，则

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0)$$

也是$[a,b]$上的绝对连续函数.

2. 若 $g(x)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的绝对连续函数，$a\leqslant g(x)\leqslant b$，$f(x)$在$[a,b]$上满足利普希茨条件，则$f[g(x)]$是$[\alpha,\beta]$上的绝对连续函数(但任意两个绝对连续函数的复合函数未必绝对连续).

3. 绝对连续函数一定是有界变差函数，但有界变差函数未必是绝对连续函数.

4. 若 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续，且 $f'(x)=0$ a.e. 于$[a,b]$，则 $f(x)$为一常数.

5. 若 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续，且 $f'(x)\geqslant 0$ a.e. 于$[a,b]$，则 $f(x)$为一单调增加函数.

6. 若 $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续，则 $f(x)$具有性质(N)，即对任何零集 $E\subset[a,b]$，$f(E)$仍为零集；性质(N)的名称由卢津(Лузин,Н. Н.)提出.

7.(巴拿赫-查列茨基定理)若$f(x)$是$[a,b]$上的连续的有界变差函数，且具有性质(N)，则$f(x)$是一绝对连续函数.

8. $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续的充分必要条件为 $V_a^x(f)$是绝对连续函数.

9. 绝对连续函数几乎处处可微，是它的导函数的广义原函数(参见“勒贝格不定积分”).

半绝对连续函数(semi-absolutely continuous function)　绝对连续函数概念的推广. 设 $f(x)$是$[a,b]$上的函数. 对$[a,b]$上任意有限个互不相交的开区间

$$I_1=(a_1,b_1),\ I_2=(a_2,b_2),\ \cdots,\ I_n=(a_n,b_n),$$

令

$$\Delta=\Delta(I_1,I_2,\cdots,I_n)=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i),$$

若

$$\varliminf_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(b_i)-f(a_i)]\geqslant 0$$

一致地成立，则称 $f(x)$在$[a,b]$上是下半绝对连续的. 若

$$\varlimsup_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(b_i)-f(a_i)]\leqslant 0$$

一致地成立，则称 $f(x)$在$[a,b]$上是上半绝对连续的. 上、下半绝对连续函数统称为半绝对连续函数. 它们有性质：

1. $f(x)$在$[a,b]$上绝对连续的充分必要条件为$f(x)$在$[a,b]$上既是上半绝对连续又是下半绝对连续的.

2. 若 $f(x)$是$[a,b]$上的上(下)半绝对连续函数，则 $f(x)$在$[a,b]$上几乎处处可微.

勒贝格不定积分(indefinite integral in Lebesgue sunse)　黎曼可积函数的不定积分在勒贝格可积函数情形的推广. 设 $f(x)$是$[a,b]$上的勒贝格可积函数. 令

$$F(x)=(L)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C\ \ (x\in[a,b]),$$

则称 $F(x)$为 $f(x)$的不定积分，其中 C 是任意常数. (L)可积函数 $f(x)$的不定积分必定是绝对连续函数，它的导数几乎处处等于被积函数 $f(x)$；任何绝对连续函数 $F(x)$，都是它的导数 $F'(x)$的不定积分，即

$$F(x)=(L)\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t+F(a)\ \ (x\in[a,b]).$$

函数的勒贝格点(Lebesgue points for a function)　与积分的求导有关的一个概念. 设 $x\in\mathbf{R}$，函数 f 在 x 的某一邻域上(L)可积. 若在点 x 处$f(x)\neq\pm\infty$，且

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(L)\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\mathrm{d}t=0,$$

则点 x 称为 $f(x)$的勒贝格点. 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上(L)可积，则$[a,b]$中几乎所有的点都是 $f(x)$的勒贝格点. 在 $f(x)$的勒贝格点，$f(x)$的不定积分的导数一定等于$f(x)$. 这个概念是由勒贝格(Lebesgue,H. L.)引入的.

勒贝格积分的微积分基本定理(calculus fundamental theorem for Lebesgue integrals)　牛顿-莱布尼茨公式在勒贝格积分情形的推广. 若$f(x)$在$[a,b]$上(L)可积，$f(x)$的绝对连续的广义原函数为 $F(x)$，则

$$(L)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a).$$

但对有界变差的连续函数 $F(x)$，算式

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t$$

未必成立，对此，维塔利(Vitali,G.)于 1904 年引入了绝对连续函数的概念，并证明了：$F(x)$在$[a,b]$上绝对连续的充分必要条件是：存在$[a,b]$上的(L)可积函数$f(x)$，使得

$$F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\ \ (x\in[a,b]).$$

1907 年，勒贝格(Lebesgue,H. L.)给出了这一定理的简短证明.

广义原函数(generalized primitive function)　原函数概念的推广. 若 $f(x)$及 $F(x)$是区间$[a,b]$上

的扩充实值函数，导数 $F'(x)$ 几乎处处存在并等于 $f(x)$，则 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的广义原函数. 勒贝格可积函数 $f(x)$ 的不同广义原函数之间不一定相差一常数，但其绝对连续的广义原函数彼此至多相差一常数.

勒贝格-康托尔函数(Lebesgue-Cantor function)　一个导数几乎处处为零的单调连续函数. 按构造康托尔三分集的程序，第 $n(n=1,2,\cdots)$ 次从闭区间 $[0,1]$ 内移去 n 个开区间，余下 2^n 个长度 3^{-n} 的互不相交的闭区间，设它们从左到右依次是 F_{n1}，F_{n2}，$\cdots$，F_{n2^n}. 现做连续函数 $f_n(x)$ 如下：在每个 F_{nj} 上 $f_n(x)$ 是线性增函数，且增量是 2^{-n}；在被移去的三分区间上取使 f_n 连续的常数值；$f_n(0)=0$，$f_n(1)=1$. 易知 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛，其极限函数 $f(x)$ 就称为勒贝格-康托尔函数. 它在康托尔集的余区间上取值为常数，因而它的导数几乎处处为 0. 它连续但不绝对连续，常用作不能使微积分基本定理成立的函数的例子.

奇异函数(singular function)　导函数几乎处处等于零，而本身不等于常数的连续函数. 例如，勒贝格-康托尔函数就是奇异函数.

迪尼导数(Dini derivatives)　对研究函数可微性态有用的下述四种形式广义导数的统称. 对于在点 x_0 的某个邻域内有定义的函数 $f(x)$，定义：

$$\text{左上导数 } D^-f(x_0)=\overline{\lim_{\xi\to x_0-}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0},$$

$$\text{左下导数 } D_-f(x_0)=\underline{\lim_{\xi\to x_0-}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0},$$

$$\text{右上导数 } D^+f(x_0)=\overline{\lim_{\xi\to x_0+}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0},$$

$$\text{右下导数 } D_+f(x_0)=\underline{\lim_{\xi\to x_0+}}\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}.$$

若 $D_+f(x_0)=D^+f(x_0)$ 且有限，则 x_0 处 $f(x)$ 有右导数；若 $D^-f(x_0)=D_-f(x_0)$ 且有限，则 x_0 处 $f(x)$ 有左导数；若左、右导数相等且有限，则 $f(x)$ 在 x_0 处有导数 $f'(x_0)$.

下导数(lower derivate)　一元函数在一点的异侧下导数相等时的共同值. 若某函数在一点的左、右下(上)导数相等，则称这个数为该函数在这点的下(上)导数.

上导数(upper derivate)　见"下导数".

当儒瓦-杨-萨克斯定理(Denjoy-Young-Saks theorem)　给出了有限函数的迪尼导数取值情况的定理. 该定理断言：对于区间 (a,b) 上的任一处处有限的函数 $f(x)$ 的导数，和几乎所有的 $x\in(a,b)$，下述三种情形必居其一：

1. $f'(x)$ 存在.

2. 在 x 处的异定侧的某两个导数等于同一有限数，两个异侧的导数一个是 $+\infty$，另一个是 $-\infty$.

3. 两个上导数等于 $+\infty$，两个下导数等于 $-\infty$.

即对于几乎所有的点，迪尼导数的情况不出如下两种：两个同侧导数若不都等于同一有限数，则其中必有一个是无穷大；两个异侧导数若不相等，则必有一个是 $+\infty$，另一个是 $-\infty$. 这些结果，由当儒瓦(Denjoy，A.)于 1915 年对连续函数首先证明，杨(Young，G. C.)于 1916 年推广到可测函数情形，萨克斯(Saks，S.)于 1924 年推广到一般情形.

勒贝格-斯蒂尔杰斯测度(Lebesgue-Stieltjes measure)　简称 $(L\text{-}S)$ 测度. 直线上勒贝格测度的推广. 设 $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调上升的右连续函数，分三步完成相应 $(L\text{-}S)$ 测度的定义：

1. 左开右闭区间的 g 长度. 对 $\mathbb{R}$ 中任一左开右闭区间 $I=(a,b]$，称数值 $\mathscr{U}_g(I)=g(b)-g(a)$ 为区间 I 的 g 长度. 特别地，当 $g(x)=x$ 时，g 长度 $\mathscr{U}_g(I)$ 就是区间 I 的长度.

2. 点集 E 的 $(L\text{-}S)$ 外测度. 设 E 为 $\mathbb{R}$ 中任一点集. 把覆盖 E 的可数个左开右闭区间的 g 长度之和的下确界称为 E 的 $(L\text{-}S)$ 外测度，记为 $\mathscr{U}_g^*(E)$，即

$$\mathscr{U}_g^*(E)=\inf\Big\{\sum_{k\geqslant 1}\mathscr{U}_g(I_k)\,|\,\{I_k\}\text{ 为可数个覆盖 }E\text{ 的左开右闭区间}\Big\}.$$

特别地，当 $g(x)=x$ 时，$\mathscr{U}_g^*(E)$ 即为 E 的 (L) 外测度 $m^*(E)$；当 E 为左开右闭区间 I 时，

$$\mathscr{U}_g^*(I)=\mathscr{U}_g(I).$$

3. $(L\text{-}S)$ 测度. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中的一点集. 如果对于任意点集 T，当 T 分解成 E 内部分 $T\cap E$ 与 E 外部分 $T\cap E^c$ 时，相应的 $(L\text{-}S)$ 外测度都具有可加性，即

$$\mathscr{U}_g^*(T)=\mathscr{U}_g^*(T\cap E)+\mathscr{U}_g^*(T\cap E^c),$$

则 E 称为关于 $g(x)$ 的 $(L\text{-}S)$ 可测集，或称 E 为 $\mathscr{U}_g^*$ 可测集或 g 可测集. 此时 E 的 $(L\text{-}S)$ 外测度 $\mathscr{U}_g^*(E)$ 就称为 E 的由分布函数 $g(x)$ 引出的 $(L\text{-}S)$ 测度，并记为 $\mathscr{U}_g(E)$. 特别地，当 $g(x)=x$ 时，$\mathscr{U}_g(E)$ 即为 E 的 (L) 测度 $m(E)$；当 E 为左开右闭区间 I 时，它必为 g 可测集，且其 $(L\text{-}S)$ 测度 $\mathscr{U}_g(I)$ 与它的 g 长度在数值上相等.

勒贝格-斯蒂尔杰斯可测函数(Lebesgue-Stieltjes measurable function)　勒贝格可测函数的推广. 设 $g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的一个单调上升的右连续函数，集 E 是关于 $g(x)$ 的 $(L\text{-}S)$ 可测集，$f(x)$ 是定义在 E 上的一个扩充实值函数. 若对任意实数 α，集 $\{x\in E\,|\,f(x)>\alpha\}$ 关于 $g(x)$ 是 $(L\text{-}S)$ 可测集，则称 $f(x)$ 在 E 上关于 $g(x)$ 是一个 $(L\text{-}S)$ 可测函数. 类似于 (L) 可测函数，$(L\text{-}S)$ 可测函数也可表示为一列 $(L\text{-}S)$ 简单函数的极限.

勒贝格-斯蒂尔杰斯简单函数(Lebesgue-Stieltjes simple function)　通常简单函数的推广. 设

$g(x)$是定义在R上的一个单调上升右连续函数，集E关于$g(x)$为$(L\text{-}S)$可测，$f(x)$是定义在E上的实函数. 如果E能分解成有限个$(L\text{-}S)$可测子集E_1，$E_2,\cdots,E_n$，且在每个E_i上$f(x)$等于常数c_i，则称$f(x)$为E上关于$g(x)$的一个$(L\text{-}S)$简单函数.

勒贝格-斯蒂尔杰斯积分(Lebesgue-Stieltjes integral)　勒贝格积分的推广. 类似于勒贝格积分，分三步定义：设$g(x)$是定义在R上的一个单调上升的右连续函数，集E关于$g(x)$为$(L\text{-}S)$可测，$f(x)$是E上关于$g(x)$的$(L\text{-}S)$可测函数.

1. 当

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}(x)$$

为非负的$(L\text{-}S)$简单可测函数时，定义$f(x)$在E上(关于$g(x)$)的$(L\text{-}S)$积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}g(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\mathscr{U}_g(E_i).$$

2. 当$f(x)\geqslant 0$时，若$\{f_n(x)\}$为递增的非负$(L\text{-}S)$简单函数列且收敛于$f(x)$，定义$f(x)$在E上(关于$g(x)$)的$(L\text{-}S)$积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}g(x)=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}g(x).$$

3. 当$f(x)$为一般的$(L\text{-}S)$可测函数时，令$f^+(x),f^-(x)$分别为$f(x)$的正部和负部，则$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$. 当

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}g(x),\quad \int_E f^-(x)\mathrm{d}g(x)$$

中至少有一个有限时，定义$f(x)$在E上(关于$g(x)$)的$(L\text{-}S)$积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}g(x)=\int_E f^+(x)\mathrm{d}g(x)-\int_E f^-(x)\mathrm{d}g(x).$$

若按抽象积分的记法，$(L\text{-}S)$积分

$$\int_E f(x)\mathrm{d}g(x)$$

也可记为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mathscr{U}_g.$$

当$g(x)=x$时，$(L\text{-}S)$积分

$$\int_E f(x)\mathrm{d}g(x)$$

即为(L)积分

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

沿点集的导数(derivative along a set)　通常导数概念的推广. 设$f(x)$是$[a,b]$上的实值函数，$E\subset[a,b]$，x_0为E的聚点，分别称

$$\lim_{x\to x_0}{}_E\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}{}_E\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\underline{\lim_{x\to x_0}}{}_E\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

为$f(x)$在点x_0沿点集E的导数、上导数、下导数，且分别记为$f'_E(x_0)$，$\overline{D}_Ef(x_0)$，$\underline{D}_Ef(x_0)$. 当$f'_E(x_0)$为有限数时，称$f(x)$在点x_0沿E是可导的. 若E是以x_0为全密点的点集，则分别称

$$\mathrm{ap}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\mathrm{ap}\underline{\lim_{x\to x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\mathrm{ap}\overline{\lim_{x\to x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

为$f(x)$在点x_0的近似导数、近似下导数、近似上导数，并分别记为$D_{ap}f(x_0)$(或$f'_{ap}(x_0)$)，$\underline{D}_{ap}f(x_0)$，$\overline{D}_{ap}f(x_0)$. 近似导数有下列性质：

1. $f(x)$在$x_0\in E$的近似导数为A的充分必要条件为：对任意$\varepsilon>0$，点集

$$E_\varepsilon=\left\{x\,\middle|\,A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<A+\varepsilon\right\}$$

以x_0为全密点.

2. 凡是导数$f'(x)$存在的点，近似导数$f'_{ap}(x)$一定存在，且$f'_{ap}(x)=f'(x)$；反之，存在连续函数$f(x)$，使得在某一正测集E上存在$f'_{ap}(x)$，但在E的几乎所有的点处$f'(x)$并不存在.

近似导数(approximate derivative)　见"沿点集的导数".

集上的有界变差函数(function of bounded variation on a set)　区间上的有界变差函数在集上的推广. 设$f(x)$是定义在集$E\subset$R上的实值函数，对E的分划T：$x_0<x_1<\cdots<x_n$，$x_i\in E(i=1,2,\cdots,n)$，f的变差为

$$V_E(f,T)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

若$V_E(f,T)$关于分划T有界，则称$f(x)$是E上的有界变差函数，一切$V_E(f,T)$的上确界称为$f(x)$在E上的全变差，记为$V_E(f)$，即

$$V_E(f)=\sup_T V_E(f,T).$$

广义有界变差函数(generalized function of bounded variation)　集上的有界变差函数的推广设$f(x)$是定义在$E\subset$R上的实值函数，且

$$E=\bigcup_n E_n.$$

若$f(x)$在每个E_n上是有界变差的，则称$f(x)$是E上的广义有界变差函数，若$f(x)$是E上的广义有界变差函数，则对E中几乎所有的点，近似导数$f'_{ap}(x)$存在.

集上的绝对连续函数(absolutely continuous

function on a set) 区间上绝对连续函数的推广.设 E 为实数的一个集合,$F(x)$为定义在 E 上的实值函数.如果对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对于端点全都属于 E 且互不重叠的任意一列区间$\{[a_n,b_n]\}$,当

$$\sum_n (b_n - a_n) < \delta$$

时,就有

$$\sum_n |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon$$

成立,则称 $F(x)$是 E 上的一个绝对连续函数.

集上的一般绝对连续函数(generalized absolutely continuous function on a set) 集上绝对连续函数的推广.设$f(x)$在集 E 上连续,且

$$E=\bigcup_n E_n.$$

若$f(x)$在每个 E_n 上绝对连续,则称 $f(x)$是集 E 上的一般绝对连续函数:

1.若 $f(x)$是有界集 E 上的一般绝对连续函数,则 $f(x)$是 E 上的一般有界变差函数,从而在 E 上近似导数$f'_{ap}(x)$几乎处处存在.

2.有界闭集 E 上的连续广义有界变差函数 $f(x)$在 E 上一般绝对连续的充分必要条件为,$f(x)$在 E 上具有性质(N).关于性质(N),见“绝对连续函数”.

集上的狭义绝对连续函数(absolutely continuous functions in the restricted sense on a set) 比集上绝对连续函数具有更强的性质的函数.设 $E\subset \mathrm{R}$,$F(x)$为定义域包含 E 的实值函数.如果对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对于两端点属于 E 而互不重叠的任意区间列$\{[a_n,b_n]\}$,当$\sum\limits_n(b_n-a_n)<\delta$时,就有$\sum\limits_n\omega(F|[a_n,b_n])<\varepsilon$(这里 $\omega(F|[a_n,b_n])$表示$F(x)$在$[a_n,b_n]$上的振幅),则称 $F(x)$是 E 上的一个狭义绝对连续函数.

集上的狭义一般绝对连续函数(generalized absolutely continuous function in the restricted sense on a set) 是较集上一般绝对连续函数具有更强的性质的函数.设 $F(x)$在集 E 上连续,且

$$E=\bigcup_n E_n.$$

若 $F(x)$在每个 E_n 上狭义绝对连续,则称 $F(x)$是 E 上的狭义一般绝对连续函数.若 $F(x)$是 E 上的狭义一般绝对连续函数,则导数 $F'(x)$几乎处处存在.

狭义当儒瓦可积函数(integrable function in the restricted sense of Denjoy) 勒贝格可积函数的推广.设 $f(x)$是定义在闭区间$[a,b]$上的实值函数.若存在狭义一般绝对连续函数 $F(x)$,使得在区间$[a,b]$上 $F'(x)=f(x)$ a.e.,则称 $f(x)$为$[a,b]$上的狭义当儒瓦可积函数,简称 $D(*)$可积函数.此时 $F(x)$称为$f(x)$的狭义当儒瓦不定积分或不定 $D(*)$积分.称 $F(b)-F(a)$为 $f(x)$在$[a,b]$上的狭义当儒瓦积分或 $D(*)$积分,记为

$$(D(*))\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若 $f(x)$是$[a,b]$上的勒贝格可积函数,则它在$[a,b]$上狭义当儒瓦可积.一般地,一个函数的导数不一定勒贝格可积,又因 $f(x)$勒贝格可积与$|f(x)|$勒贝格可积等价,因此,广义黎曼可积不一定勒贝格可积.这表明勒贝格积分尚留有拓广的余地.当儒瓦(Denjoy,A.)于 1912 年给出了狭义当儒瓦积分的定义,它同时成为勒贝格积分和黎曼积分的一种推广.

狭义当儒瓦不定积分(Denjoy indefinite integral in the restricted sense) 见“狭义当儒瓦可积函数”.

广义当儒瓦可积函数(integrable function in the wide sense of Denjoy) 狭义当儒瓦可积函数的推广.设 $f(x)$是定义在闭区间$[a,b]$上的一个实值函数.若存在一般绝对连续函数 $F(x)$,使得对于$[a,b]$中几乎所有的点,$F(x)$的近似导数 $F'_{ap}(x)=f(x)$,则称$f(x)$为$[a,b]$上的一个广义当儒瓦可积函数,简称 D 可积函数.此时 $F(x)$称为$f(x)$的当儒瓦不定积分或不定 D 积分.$F(b)-F(a)$称为 $f(x)$在$[a,b]$上的当儒瓦积分或 D 积分.狭义当儒瓦可积函数一定是广义当儒瓦可积函数.对当儒瓦积分和近似导数来说,积分与微分完全成了互逆的运算.

当儒瓦不定积分(Denjoy indefinite integral) 见“广义当儒瓦可积函数”.

当儒瓦积分(Denjoy integral) 见“广义当儒瓦可积函数”.

狭义当儒瓦积分(Denjoy integral in the restricted sense) 见“狭义当儒瓦可积函数”.

佩龙下函数(Perron lower function) 为定义佩龙积分而引进的概念.设 $f(x)$是在$[a,b]$上定义的实值函数(不一定有限),$F(x)$是在$[a,b]$上定义的连续函数,$\overline{D}F(x)$为 $F(x)$的上导数.若:

1.$F(a)=0$;

2.对所有 $x\in[a,b]$,$\overline{D}F(x)<+\infty$;

3.对所有 $x\in[a,b]$,$\overline{D}F(x)\leqslant f(x)$;

则称 $F(x)$为 $f(x)$的佩龙下函数,简称下函数.

佩龙上函数(Perron upper function) 为定义佩龙积分而引进的概念.设 $f(x)$是在$[a,b]$上定义的函数(不一定有限),$F(x)$是在$[a,b]$上定义的连续函数,$\underline{D}F(x)$为 $F(x)$的下导数.若:

1.$F(a)=0$;

2.对所有 $x\in[a,b]$,$\underline{D}F(x)<+\infty$;

3.对所有 $x\in[a,b]$,$\underline{D}F(x)\geqslant f(x)$;

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的佩龙上函数，简称上函数.

佩龙积分(Perron integral)　勒贝格积分的推广，一种非绝对积分. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数. 若：

1. 它至少有一个上函数 $U(x)$ 及一个下函数 $V(x)$；

2. 所有上函数 $U(x)$ 在 $x=b$ 的数值所成之集 $\{U(b)\}$ 的下确界与所有下函数 $V(x)$ 在同一点的数值所成之集 $\{V(b)\}$ 的上确界相等，即

$$\inf\{U(b)\} = \sup\{V(b)\};$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上依佩龙意义可积，简称 (P) 可积，并将上述上、下确界的共同值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的佩龙积分. 佩龙(Perron,O.)于 1914 年在当儒瓦(Denjoy,A.)建立狭义当儒瓦积分后，定义的另一类型的积分. 哈克(Hake,H.)于 1921 年证明了狭义当儒瓦可积的函数必是佩龙可积的，且积分值相等. 亚历山德罗夫(Александров, П. С.)与罗曼(Looman,H.)于 1924 年各自独立地证明了佩龙可积的函数必是狭义当儒瓦可积的，且积分值相等. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上依勒贝格意义可积，则它在 $[a,b]$ 上依佩龙意义可积，且两积分相等：

$$(P)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

所有非负且 (P) 可积的函数一定 (L) 可积；若 $f(x)$ 为 (L) 可测函数，且存在着佩龙积分

$$(P)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

则 $f(x)$ 是勒贝格可积的. 因佩龙积分与狭义当儒瓦积分、亨斯托克积分等价，上述关系也就给出了狭义当儒瓦积分、亨斯托克积分与勒贝格积分的关系.

瓦尔德下函数(Ward lower function)　为定义瓦尔德积分而引进的概念. 设 $f(x)$ 与 $G(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数. 若对任意 $\xi\in[a,b]$，存在 $\delta(\xi)>0$，使当 $\xi\in[u,v]\subset(\xi-\delta(\xi),\xi+\delta(\xi))$ 时有

$$f(\xi)(v-u) \geqslant G(v) - G(u),$$

则称 $G(x)$ 为 $f(x)$ 的瓦尔德下函数. 相反，若有 $[a,b]$ 上的函数 $H(x)$ 使得

$$f(\xi)(v-u) \leqslant H(v) - H(u),$$

则称 $H(x)$ 为 $f(x)$ 的瓦尔德上函数(这里 u,v,ξ 意义同前).

瓦尔德上函数(Ward upper function)　见"瓦尔德下函数".

瓦尔德积分(Ward integral)　与佩龙积分等价的一种积分. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数，$H(x)$ 与 $G(x)$ 分别为 $f(x)$ 的瓦尔德上函数与下函数. 若等式

$$\sup_G(G(b) - G(a)) = \inf_H(H(b) - H(a))$$

成立，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上依瓦尔德的意义可积，简称 (W) 可积，并将上述上、下确界的公共值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瓦尔德积分. 此积分是由瓦尔德(Ward,A. J.)引入的.

亨斯托克积分(Henstock integral)　在 20 世纪 50 年代出现，后来发现它是与佩龙积分等价的一种积分. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数. 如果存在数 A，对于任意 $\varepsilon>0$，存在函数 $\delta(\xi)>0$，使得对每一分划 $D: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 和 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，当 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\subset(\xi_i-\delta(\xi_i),\xi_i+\delta(\xi_i))$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A\right| < \varepsilon,$$

那么函数 $f(x)$ 称为亨斯托克意义可积，简称 (H) 可积. 此时 A 称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的亨斯托克积分，记为

$$(H)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在上述定义中，若对每一 $\varepsilon>0$，与之相应的正值函数 $\delta(\xi)$ 是常数，则 (H) 积分就是 (R) 积分. 1957 年，亨斯托克(Henstock,R.)给出的这种积分的定义是黎曼型的，它与佩龙积分等价，也与狭义当儒瓦积分等价，因而它给出了狭义当儒瓦积分的黎曼型定义，使狭义当儒瓦积分的处理简化. 亨斯托克积分的主要性质有：

1. (部分可积性)若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 (H) 可积，$[c,d]\subset[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上也 (H) 可积.

2. (积分按区间的可加性)若 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均 (H) 可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也 (H) 可积，且

$$(H)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (H)\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + (H)\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3. (积分的线性性)若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均 (H) 可积，α,β 为有限实数，则 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也 (H) 可积，且

$$(H)\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha(H)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta(H)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

4. (积分的保序性)若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均 (H) 可积，且 $f(x)\leqslant g(x)$ a. e. 于 $[a,b]$，则

$$(H)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (H)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 (H) 可积，则

$$F(x) = (H)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上连续，且几乎处处有 $F'(x)=f(x)$.

亨斯托克控制收敛定理(Henstock dominated convergence theorem)　亨斯托克积分在积分号下取极限的定理. 若：

1. $\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的(H)可积函数列，且在$[a,b]$上几乎处处收敛于$f(x)$；

2. $g(x),h(x)$是$[a,b]$上的(H)可积函数，且

$$g(x)\leqslant f_n(x)\leqslant h(x)\ (n=1,2,\cdots);$$

则$f(x)$在$[a,b]$上(H)可积，且有

$$(H)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(H)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

亨斯托克积分的微积分基本定理(calculus fundamental theorem for Henstock integrals)　黎曼积分和勒贝格积分的微积分基本定理在亨斯托克积分情形的推广. 若函数$F(x)$在$[a,b]$上可导，则$F'(x)$在$[a,b]$上(H)可积，且

$$(H)\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

微积分基本定理是分析数学中至关重要的一个定理，其应用十分广泛. 由于(R)可积函数未必存在原函数，而有原函数的函数未必(R)可积，因此，(R)积分运算不能完全解决由函数的有穷导数求其原函数的问题，从而使微积分基本定理的应用受到了限制. (L)积分推广了(R)积分，但(L)积分是一种绝对积分，它并不包括广义(R)积分，也没有完全解决由函数的有穷导数求其原函数的问题. (H)积分既包括(R)积分，也包括(L)积分，而且完全解决了从函数的有穷导数求其原函数的问题，从而扩大了微积分基本定理的应用.

绝对亨斯托克可积函数(absolute Henstock integrable function)　一类特殊的(H)可积函数. 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的实值函数，若$f(x)$与$|f(x)|$在$[a,b]$上均(H)可积，则称$f(x)$在$[a,b]$上绝对亨斯托克可积，简称绝对(H)可积. 若$f(x)$在$[a,b]$上绝对(H)可积，则它在$[a,b]$上亦必(H)可积，其逆不真. 因为绝对(H)积分与(L)积分等价，所以它是具有黎曼形式的(L)积分，用这种黎曼形式来讨论(L)积分，有利于同数学分析的衔接.

马克仙积分(Mcshane integral)　与勒贝格积分等价的一种积分. 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的实值函数，假如存在数A，对任何函数$\delta(\xi)>0$，任给$\varepsilon>0$，只要分划$D:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$和$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$符合$[x_{i-1},x_i]\subset(\xi_i-\delta(\xi_i),\xi_i+\delta(\xi_i))\ (i=1,2,\cdots,n)$时，便有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-A\right|<\varepsilon,$$

则称$f(x)$依马克仙意义可积，简称(M)可积，此时A称为$f(x)$在$[a,b]$上的马克仙积分，记为

$$(M)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

此积分是由马克仙(Mcshane, E. J.)引入的.

马克仙积分、绝对亨斯托克积分与勒贝格积分，这三种积分彼此都是等价的，性质相同.

囿变积分(variation integral)　与亨斯托克积分等价的一种积分. 设$f(x)$与$F(x)$是定义在$[a,b]$上的函数. 若对任意$\varepsilon>0$，存在不减函数$\varphi(x)$，$\varphi(b)-\varphi(a)<\varepsilon$和$\delta(x)>0$，当

$$\xi\in[u,v]\subset(\xi-\delta(\xi),\xi+\delta(\xi))$$

时，有

$$|F(v)-F(u)-f(\xi)(v-u)|\leqslant\varphi(v)-\varphi(u),$$

则称$F(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的囿变原函数，这时也称$f(x)$在$[a,b]$上是囿变可积的，且囿变积分为

$$F(b)-F(a).$$

囿变原函数(variation primitive function)　见“囿变积分”.

函 数 空 间

函数空间(function spaces)　具有某种共同特征的函数组成的函数类. 当这种特征是积分形式时，它就与勒贝格积分理论关系密切. 在这些函数类中，又常定义了某些运算，并按照这些运算形成的结构构成泛函分析的各种抽象空间的具体实例. 从而习惯上常称它们为函数空间. 常见的函数空间有L^p空间，l^p空间$(0<p\leqslant+\infty)$，C^n空间$(n=0,1,2,\cdots,)$等. 在不同学科中，还常用到许多特殊的函数空间. 在近代，分析学早已从研究个别的函数，转向研究这些函数空间的整体性质.

L^2空间(L^2 spaces)　平方可积函数类. 它更接近于n维欧氏空间，具有n维欧氏空间许多类似的几何性质. 若E是$\mathbb{R}^n$内的可测集，而$f(x)$在E上可测且$|f(x)|^2$在E上(L)可积，则称$f(x)$在E上是平方可积的. 所有这样的函数之集称为E上的L^2空间，记为$L^2(E)$或L^2，即

$$L^2(E)=\left\{f(x)\,\middle|\,\int_E|f(x)|^2\mathrm{d}x<+\infty\right\}.$$

它的主要性质有：

1. $L^2(E)$是线性空间，其中零元素是E上几乎处处为零的函数.

2. (施瓦兹不等式)若$f(x),g(x)\in L^2(E)$，则$f(x)g(x)\in L(E)$，且有

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_E|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_E|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. (柯西不等式)若$f(x),g(x)\in L^2(E)$，则

$$\left(\int_E|f(x)+g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_E|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_E|g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对于$f(x)\in L^2(E)$，令

$$\| f \|_2 = \left(\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

$\| f \|_2$ 具有以下性质：

1.（非负性）$\| f \|_2 \geqslant 0$，且 $\| f \|_2 = 0$ 当且仅当 $f(x)=0$ a.e. 于 E.

2.（正齐性）对任意实数 α，有

$$\| \alpha f \|_2 = |\alpha| \, \| f \|_2.$$

3.（三角不等式）$\| f+g \|_2 \leqslant \| f \|_2 + \| g \|_2$.

因此，$\| f \|_2$ 是 $L^2(E)$ 上的一个范数. 进一步，$L^2(E)$ 是希尔伯特空间（参见《泛函分析》同名条）.

L^2 中的内积（inner product in L^2） 是与通常向量的内积相似的一个重要概念. 对于 $f(x), g(x) \in L^2(E)$，称数

$$(f,g) = \int_E f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的内积. 内积具有以下性质：

1. $(f,f) \geqslant 0$，并且 $(f,f)=0$ 当且仅当 $f(x)=0$ a.e. 于 E.

2. $(\alpha f, g) = \alpha (f,g)$（$\alpha$ 为实数）.

3. $(f,g)=(g,f)$.

4. $(f+g,h)=(f,h)+(g,h)$.

在线性空间中定义了具有上述四条性质的内积，称为内积空间. 因此，$L^2(E)$ 是一个内积空间. L^2 中的内积还具有以下性质：

1.（内积的连续性）若

$$f_n \xrightarrow{L^2} f, \quad g_n \xrightarrow{L^2} g$$

（参见“L^p 中的强收敛”），则 $(f_n, g_n) \to (f,g)$.

2.（内积与范数的关系）

$$(f,g) = \frac{1}{4} (\| f+g \|_2^2 - \| f-g \|_2^2).$$

3.（平行四边形公式）

$$\| f+g \|_2^2 + \| f-g \|_2^2 = 2 \| f \|_2^2 + 2 \| g \|_2^2.$$

4. 若 $(f,g)=0$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为正交的. $f(x)$ 与 $g(x)$ 正交的充分必要条件是 $\| f+g \|_2^2 = \| f \|_2^2 + \| g \|_2^2$（勾股定理的推广）.

弗雷歇定理（Fréchet theorem） 关于 $L^2[a,b]$ 空间有界线性泛函一般形式的定理. 若 $\Phi(f)$ 是 $L^2[a,b]$ 上的有界线性泛函，则存在惟一的 $g(x) \in L^2[a,b]$，使得 $\Phi(f)=(f,g)$ 对任意 $f(x) \in L^2[a,b]$ 都成立.

L^2 中的规范正交系（orthonormal system in L^2） 欧氏空间中直角坐标系的推广. 若区间 $[a,b]$ 上的函数系 $\{w_n(x)\}$ 具有条件

$$\int_a^b \omega_m(x) \omega_n(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & (m=n), \\ 0 & (m \neq n), \end{cases}$$

则称 $\{\omega_n(x)\}$ 是 $L^2[a,b]$ 的规范正交系或规范直交系，亦称标准正交系或标准直交系. 例如

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt \ (k=1,2,\cdots)$$

是 $L^2(-\pi,\pi)$ 中的规范正交系. 在 $L^2(E)$ 中，任何规范正交系所含函数的个数至多可数.

$L^2[a,b]$ 中函数的傅里叶级数（Fourier series of function in $L^2[a,b]$） (R) 可积函数的傅里叶级数的推广. 设 $\{\omega_k(x)\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的规范正交系，$f(x) \in L^2[a,b]$. 称

$$c_k = \int_a^b f(x) \omega_k(x) \mathrm{d}x$$

为 $f(x)$ 关于 $\{w_k(x)\}$ 的傅里叶系数，并称级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x)$$

为 $f(x)$ 关于 $\{w_k(x)\}$ 的傅里叶级数.

贝塞尔不等式（Bessel inequality） 平方可积函数与它的傅里叶系数间的一个关系式. 设 c_k（$k=1,2,\cdots$）是 $f(x) \in L^2[a,b]$ 的傅里叶系数，则级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \| f \|_2^2.$$

此不等式称为贝塞尔不等式，它表明 c_k（$k=1,2,\cdots$）为 $L^2[a,b]$ 中某个函数的傅里叶系数的必要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

收敛. 对一般的内积空间，贝塞尔不等式也成立.

里斯-费希尔定理（Riesz-Fisher theorem） 贝塞尔不等式的逆命题. 设 $\{\omega_k(x)\}$ 是 $L^2[a,b]$ 中的规范正交系，若 $\{c_k\}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty,$$

则存在 $f(x) \in L^2[a,b]$，使得 c_k（$k=1,2,\cdots$）是 $f(x)$ 的傅里叶系数，并且有等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \| f \|_2^2$$

成立，即 $f(x)$ 的傅里叶级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x)$$

收敛于 $f(x)$.

贝塞尔不等式表明：$\{c_k\}$ 为 $L^2[a,b]$ 中某个函数的傅里叶系数的必要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

收敛，里斯-费希尔定理表明这个条件也是充分的.

帕塞瓦尔等式（Parseval equality） 平方可积函数与它的傅里叶系数间的某个等式关系. 设 $f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$，a_0, a_k, b_k（$k=1,2,\cdots$）是 $f(x)$ 关于三

角函数系的傅里叶系数,则帕塞瓦尔等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$$

成立.帕塞瓦尔(Parseval,C. M.-A.)于1806年给出的证明有许多理论上的限制.当$f(x)$是$[-\pi,\pi]$的(R)可积函数时,上述等式是由胡尔维茨(Hurwitz,A.)、瓦莱·普桑(Vallée-Poussin,C. de la)以及李亚普诺夫(Ляпунов,A. M.)建立的.对一般的规范正交系$\{\omega_k(x)\}$,若c_k是$f(x)\in L^2[a,b]$关于$\{\omega_k(x)\}$的傅里叶系数,则只能保证

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2\leqslant\|f\|_2^2.$$

若对某一函数f,上式两端相等,则此等式称为帕塞瓦尔等式(参见"L^2中完备的规范正交系"及《数学辞海》第一卷同名条).

L^2 中完备的规范正交系(completely orthonormal system in L^2)　为刻画$L^2[a,b]$中任一函数能够在平均收敛意义下展开为傅里叶级数而引进的一个概念.设$\{\omega_k(x)\}$是$L^2[a,b]$中的规范正交系,若对任意$f(x)\in L^2[a,b]$,帕塞瓦尔等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|_2^2$$

都成立,则称$\{\omega_k(x)\}$为完备的规范正交系.它表明对任意$f(x)\in L^2[a,b]$,$f(x)$关于完备规范正交系$\{\omega_k(x)\}$的傅里叶级数的部分和$S_n(x)$平均收敛于$f(x)$:

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n-f\|_2=0.$$

L^2 中完全的规范正交系(totally orthonormal system in L^2)　为描述$L^2[a,b]$的规范正交系中的函数是否"足够"而引进的概念.设$\{\omega_k(x)\}$为$L^2[a,b]$中的规范正交系,若$\varphi(x)\in L^2[a,b]$且$(\varphi,w_k)=0\ (k=1,2,\cdots)$,就有$\varphi(x)=0$ a. e. 于$[a,b]$,则称$\{\omega_k(x)\}$为$L^2[a,b]$中的完全的规范正交系,即在完全的正交系中,不能添加非0函数使它保持为正交系.在$L^2[a,b]$中,规范正交系的完备性与完全性是等价的.三角函数系、拉盖尔函数系、埃尔米特函数系、勒让德函数系、华尔希函数系都是$L^2(E)$中相对不同E的完全正交系.

司捷克洛夫定理(Steklov theorem)　关于$L^2[a,b]$中规范正交系为完备系的一个定理.设$\{\omega_k(x)\}$是$L^2[a,b]$中的规范正交系.若存在$L^2[a,b]$的稠密子集A,使对任一$f(x)\in A$,等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|_2^2$$

都成立,其中$\{c_k\}$为f关于$\{\omega_k(x)\}$的傅里叶系数,则$\{\omega_k(x)\}$是完备的规范正交系.

L^p 空间(L^p spaces)　一个重要的、应用广泛的函数空间.设E是$\mathbb{R}^n$中的可测集,$f(x)$是E上的可测函数且$|f(x)|^p$(p为正的常数)在E上(L)可积,则称$f(x)$在E上是p次幂可积的,所有这样的函数的全体称为E上的L^p空间,记为$L^p(E)$或L^p,即

$$L^p(E)=\left\{f(x)\,\middle|\,\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x<+\infty\right\}.$$

当$p=1$时,记$L^1(E)$为$L(E)$,它就是E上的(L)可积函数的全体:

1. $L^p(E)$是线性空间,其中零元素是E上几乎处处为零的函数.

2. 若$m(E)<+\infty$,且$1\leqslant p_1<p_2<+\infty$,则$L^{p_2}(E)\subset L^{p_1}(E)$.

3. (赫尔德不等式)设$p,q>1$,且$1/p+1/q=1$.若$f(x)\in L^p(E)$,$g(x)\in L^q(E)$,则$f(x)g(x)\in L(E)$,且

$$\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

4. (闵科夫斯基不等式)若$f(x),g(x)\in L^p(E)$ $(1\leqslant p<+\infty)$,则

$$\left(\int_E|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_E|g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

5. 令$\|f\|_p=(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$,则$\|f\|_p$为$L^p(E)(p\geqslant1)$上的范数,从而$L^p(E)$为线性赋范空间.特别地,它是完备的(参见"$L^p$中的柯西列").但若将$L^p$定义中的积分改为黎曼积分,则相应函数空间无此重要性质.这是勒贝格积分具有重要理论意义的原因之一.

平均连续性(continuity in mean)　函数在积分平均意义下的连续性.若$f(x)$满足

$$\lim_{h\to0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0,$$

则称其为具有p次幂(L)可积函数的平均连续性.实际上任何$f\in L^p(E)$都有这一性质.

L^p 中的强收敛(strong convergence in L^p)　亦称按范数收敛.p次幂可积函数列的重要收敛概念.设$f_n(x)\in L^p(E)(1\leqslant p<+\infty;n=1,2\cdots)$.若存在$f(x)\in L^p(E)$,使得$\|f_n-f\|_p\to0(n\to\infty)$,则称$\{f_n(x)\}$强收敛于$f(x)$或按$L^p$范数收敛于$f(x)$,记为$f_n\xrightarrow{L^p}f$:

1. 若$f_n\xrightarrow{L^p}f$,又$f_n\xrightarrow{L^p}g$,则$f(x)=g(x)$ a. e. 于E;反之,若$f_n\xrightarrow{L^p}f$,且$f(x)=g(x)$ a. e. 于E,则

$$f_n\xrightarrow{L^p}g.$$

2. 若$f_n\xrightarrow{L^p}f$,$g_n\xrightarrow{L^p}g$,α,β为实数,则

$$\alpha f_n+\beta g_n \xrightarrow{L^p} \alpha f+\beta g.$$

3. 若 $f_n \xrightarrow{L^p} f$，则 $\| f_n \|_p \to \| f \|_p$.

4. 若 $\| f_n \|_p \to \| f \|_p$ 且 $f_n(x) \to f(x)$ a.e. 于 E，则 $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

5. 若 $f_n \xrightarrow{L^p} f$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$.

按范数收敛(convergence in norm) 即"L^p 中的强收敛".

L^p 中的弱收敛(weak convergence in L^p) L^p 空间中函数列的一种收敛概念，巴拿赫空间中弱收敛概念的特例. 设 $f_n(x), f(x) \in L^p(E)$，$1<p<+\infty$，$n=1,2,\cdots$. 若对任意 $g(x) \in L^q(E)$，$1/p+1/q=1$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f(x)$，记为 $f_n \xrightarrow{w} f$：

1. 若 $f_n \xrightarrow{L^p} f$，则 $f_n \xrightarrow{w} f$，其逆不真.

2. 设 $\{f_n(x)\} \subset L^p(E)$，若 $\{\| f_n \|_p\}$ 为有界数列，则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 使 $f_{n_k} \xrightarrow{w} f \in L^p(E)$（即 $1<p<+\infty$ 时的 L^p 中有界集是弱紧的).

3.（里斯定理）设 $1<p<+\infty$. 若 $f_n \xrightarrow{w} f$ 且 $\| f_n \|_p \to \| f \|_p$，则 $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

这是里斯(Riesz, F.)于 1928 年得到的. 当 $f_n(x) \in L^1(E)$ $(n=1,2,\cdots)$，若存在 $f(x) \in L^1(E)$，使对于 E 上的任何本性有界函数 $g(x)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在 L^1 中弱收敛于 $f(x)$.

L^p 中的柯西列(Cauchy sequence in L^p) 亦称基本列. 柯西数列的推广. 设 $f_n(x) \in L^p(E)$ $(1\leqslant p<+\infty; n=1,2,\cdots)$. 若对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $m,n>N$ 时就有 $\| f_m - f_n \|_p < \varepsilon$，则称 $\{f_n(x)\}$ 为柯西列. $L^p(E)$ 中的柯西列必为强收敛列，即 $L^p(E)$ 是完备的，从而 $L^p(E)$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 是巴拿赫空间；还可知它是可分的；当 $1<p<+\infty$ 时，$L^p(E)$ 是自反的；但 $L(E)$（即 L^p 当 $p=1$）不自反.

柯尔莫哥洛夫定理(Kolmogoroff theorem) 关于 $L^p[a,b]$ 的子集为列紧集的特征的定理. $L^p[a,b]$ $(p\geqslant 1)$ 中集 A 为列紧集的充分必要条件如下：

1. 存在常数 M，使对任意 $f(x) \in A$，有

$$\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant M^p.$$

2. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $0<h<\delta$，对任意 $f(x) \in A$，都有

$$\left(\int_a^b |f_h(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

这里 $f_h(x) = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$.

里斯表示定理(Riesz representation theorem) 关于 $L^p[a,b]$ 上有界线性泛函的一般形式的定理. 空间 $L^p[a,b]$ $(1<p<+\infty)$ 上的有界线性泛函 Φ 均可表示为

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad f(x) \in L^p[a,b],$$

其中 $g(x) \in L^q[a,b]$，$1/p+1/q=1$.

巴拿赫-萨克斯定理(Banach-Saks theorem) 关于算术平均收敛的一个定理. 设 $f_n(x), f(x) \in L^p(E)$ $(1\leqslant p<+\infty, n=1,2,\cdots)$，若 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f(x)$，则存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使

$$\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_{n_k}(x)\right\}$$

强收敛于 $f(x)$. 巴拿赫(Banach, S.)与萨克斯(Saks, S.)于 1930 年证明了 $1<p<+\infty$ 时上述定理成立. 茨仑克(Salenk)于 1965 年证明了 $p=1$ 的情形. 施耐尔(Schreier)于 1930 年指出，对于连续函数空间 $C[0,1]$，巴拿赫-萨克斯定理的结论不成立.

L^∞ 空间(L^∞ space) 亦称本性有界函数类. 在一个零集之外有界的函数的全体. 若 E 为 R^n 中的可测集，$f(x)$ 是 E 上的可测函数，且存在零集 $E_0 \subset E$，使得 $f(x)$ 在 $E \backslash E_0$ 上有界，则 $f(x)$ 称为 E 上的本性有界函数. 这样函数的全体称为 E 上的 L^∞ 空间，记为 $L^\infty(E)$ 或 L^∞. 对 $f(x) \in L^\infty(E)$，定义 $f(x)$ 的 L^∞ 范数为

$$\| f \|_\infty = \inf_{E_0}(\sup_{x\in E\backslash E_0} |f(x)|).$$

其中 E_0 为 E 的零子集，下确界是对所有可能的这种子集 E_0 而取的：

1. 若 $\{f_n(x)\} \subset L^\infty(E)$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $L^\infty(E)$ 中收敛于 $f(x)$ 等价于 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上除一个零集之外一致收敛于 $f(x)$.

2. $L^\infty(E)$ 是巴拿赫空间.

3. $L^\infty(E)$ 不自反.

4. 设 $m(E)<+\infty$，若 $f(x) \in L^\infty(E)$，则 $f(x)$ 属于一切 $L^p(E)$ $(1\leqslant p<+\infty)$，且

$$\| f \|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \| f \|_p.$$

5. L^∞ 空间是不可分的，关于"可分"详见本卷《泛函分析》同名条.

本性有界函数类(class of essential bounded functions) 见"L^∞ 空间".

函数空间 $S(E)$(function spaces $S(E)$) (L) 可测函数组成的函数类. 设 E 是 R^n 内的 (L) 可测集，E 上所有几乎处处有限的可测函数之集记为

$S(E)$，不强调 E 时简记为 S. 对于$f\in S(E)$，令

$$\| f \| = \int_E |f(x)|/(1+|f(x)|)\mathrm{d}x,$$

则 $S(E)$是以 $\|\cdot\|$ 为准范数的弗雷歇空间，且在其中依准范数的收敛等价于依测度收敛. 可以在测度空间上，类似地建立 S 空间.

函数空间C^k(function spaces C^k)　欧氏空间中同一集上所有 k 阶连续可微函数组成的函数类. 设 $E\subset \mathrm{R}^n$，$C^k(E)$表示在 E 上处处 k 阶连续可微的函数的全体. 特别当 E 为紧集时，对于 $f\in C^k(E)$可定义范数

$$\| f \| = \max\left\{ \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \right| \,\middle|\, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E, \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\leqslant k \right\}.$$

从而按此范数 $C^k(E)$成为巴拿赫空间，其中的强收敛相当于函数列的一致收敛. 若 $E=\mathrm{R}^n$，$f\in C^k(E)$满足

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0,$$

则所有这样的 f 之集记为 C_0^k，C_0^k 与 E 为紧集的 $C^k(E)$性质极为类似. $k=0$ 对应的 C^0 常记为 C，即连续函数空间.

l^p 空间(l^p spaces)　与函数空间 L^p 相应的数列空间. 对于无穷数列 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，若对于某个数 $p(0<p<+\infty)$，

$$\| x \|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < +\infty,$$

则记 $x\in l^p$，所有这样的数列 x 组成之集称为 l^p 空间. 当 $p\geqslant 1$ 时 l^p 按 $\|\cdot\|_p$ 成为巴拿赫空间，$0<p<1$ 时 l^p 按 $\|\cdot\|_p^p$ 成为完备度量空间. 如果在自然数集 N 上定义测度 μ，使得对于任意自然数 n 有 $\mu(\{n\})=1$，则 l^p 也可看做是测度空间 $(\mathrm{N},\mathscr{P}(\mathrm{N}),\mu)$($\mathscr{P}(\mathrm{N})$ 为 N 之幂集，即 N 之所有子集之集) 上的空间 $L^p(\mathrm{N},\mathscr{P}(\mathrm{N}),\mu)$. l^p 空间($1\leqslant p\leqslant +\infty$) 是里斯(Riesz,F.)于 1913 年引入的. 复 l^2 空间是施密特(Schmidt,E.)于 1908 年引入的.

l^∞空间(l^∞ space)　有界数列组成的集. 设 $x=(x_1,x_2,\cdots)$为数列，且 $|x_n|\leqslant M<+\infty(n=1,2,\cdots)$，则所有这种数列之集称为 l^∞空间，并定义范数

$$\| x \|_\infty = \sup_n\{|x_n|\}.$$

它可看做函数空间$L^\infty(\mathrm{N},P(\mathrm{N}),\mu)$，这里 N 是自然数集，$P(\mathrm{N})$为 N 的幂集，μ 是 N 上的测度，对于任意 $n\in\mathrm{N}$，$\mu\{n\}=1$.

洛伦兹空间(Lorentz space)　函数空间 $S([0,1])$的一个子空间. 设 $t>0$ 时 $\phi(t)>0$，并且

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\psi(t)}=0.$$

对 $f\in S([0,1])$及 $s\in[0,1]$定义 $f^*(s)$等于

$$\inf\{a>0 | m\{t| |f(t)|>a\}\leqslant s\}.$$

函数类

$$\Lambda(\psi)=\left\{ f\in S([0,1]) \,\middle|\, \| f \| = \int_{[0,1]} f^*(s)\mathrm{d}\psi(s) < +\infty \right\}$$

称为相应于 ψ 的洛伦兹空间. 它是以 $\|\cdot\|$ 为范数的巴拿赫空间(参见本卷《泛函分析》同名条). 洛伦兹空间在算子内插理论中有用.

奥尔利奇空间(Orlicz space)　$L^p(1<p<\infty)$空间的推广. 设定义在正半实轴上的函数 $\Phi(t)$满足

$$\Phi(0)=0,\quad \lim_{t\to+\infty}(\Phi(t)/t)=\infty,$$

并满足倍增条件 $\Phi(2t)\leqslant C\Phi(t)$($C$ 是正的常数，$t\in\mathrm{R}_+$). 所有使得

$$\| f \| = \inf\left\{ \lambda>0 \,\middle|\, \int_{\mathrm{R}^n}\Phi(\lambda^{-1}|f(t)|)\mathrm{d}t\leqslant 1 \right\} < +\infty.$$

的 R^n 上的可测函数 f 之集称为奥尔利奇空间，记为 L_Φ^*. 它是以 $\|\cdot\|$ 为范数的巴拿赫空间. $L^p(\mathrm{R}^n)$ ($1\leqslant p<+\infty$)是对应于 $\Phi(t)=t^p$ 的特殊奥尔利奇空间. 奥尔利奇空间是由奥尔利奇(Orlicz ,W.)在 20 世纪 30 年代引进的.

函数的支集(support set of a function)　函数值非零的点集的闭包. 对于定义在 R^n 上的函数 f，集合$\{x|f(x)\neq 0\}$的闭包称为 f 的支集，如果函数 f 的支集为紧集(在 R^n 中为有界闭集)，则称 f 为有紧支的. 任何在某一有限区间以外恒为 0 的函数，都是有紧支的. 函数的支集和有紧支的函数的概念可以推广到拓扑空间上，但这时函数有紧支与其支集为有界闭集未必等同.

有紧支的函数(function with compact support)　见“函数的支集”.

局部可积函数(locally integrable function)　在任何有界集上可积的可测函数. 如果函数 $f(x)$是定义在整个 R^n 上的(L)可测函数，并且对于 R^n 的任意有界子集 M 有 $f\in L(M)$，则 $f(x)$称为在 R^n 上局部可积的.

撰　稿　古四毛　朱玉堦　汪　林　常心怡
审　阅　杨光俊　周民强

复 变 函 数 论

复变函数论(theory of functions of a complex variable) 研究自变量为复数的函数的基本理论及应用的数学分支.只含有一个自变量的复变函数称为单复变函数,含有多于一个自变量的复变函数称为多复变函数.通常所说的复变函数论,指的主要是关于单复变解析函数的理论,简称单复变.复变函数论历史悠久,内容丰富,理论十分完美而且深刻,在许多其他数学分支以及力学、工程技术学科中有着广泛的应用.

复数起源于求代数方程的根.在用求根公式求解二次、三次代数方程时都有可能遇到形如 $a+b\sqrt{-1}$ 的数,其中 a,b 是实数. $\sqrt{-1}$ 在实数范围内无意义,因此在很长时间里这类数不能为人们理解和接受.笛卡儿(Descartes,R.)称这样的数为虚数.现在以 i 表示 $\sqrt{-1}$,并称形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数为复数.韦塞尔(Wessel,C.)和阿尔冈(Argand,J. R.)把复数 $x+\mathrm{i}y$ 与平面上以 (x,y) 为坐标的点对应起来,使人们对于复数开始有了真实的感觉.复数与 xy-平面上的点一一对应,因而 xy-平面也称为复平面.达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)曾企图证明,一个一般的代数方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

至少有一个实数根或复数根,因此这个存在性定理有时称为达朗贝尔定理.但首先对它给出严格证明的是高斯(Gauss,C. F.).后来此定理被称为代数基本定理.欧拉(Euler,L.)曾在初等函数中引进复变数,并给出了著名的欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

该公式揭示了三角函数与指数函数之间的联系.

复变函数的一般理论起源于与实际问题有关的研究工作.达朗贝尔在关于流体的研究中,考虑两个实变数 x,y 的一个复值函数

$$u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y),$$

并且研究在什么条件下,当 (x,y) 趋于一点时,这个函数有导数,而且这个导数要与 (x,y) 所沿的路径无关.为此只需将函数 $u+\mathrm{i}v$ 看做是复变数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的函数 $f(z)$,它在域 D 内定义,就可得出结论:当 u,v 作为 x,y 的函数在 D 内可微,且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1}$$

时,函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 有导数.后来这个条件称为柯西-黎曼条件.由条件(1)可推知 u 及 v 都满足平面拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

在这里,假定了 u 及 v 有连续二阶偏导数,所以 u 及 v 都是关于两个实变数的调和函数.当柯西(Cauchy,A. -L.)对一般的含有一个复变数的可导函数进行研究时,他知道函数 $u+\mathrm{i}v$ 可以看做是两个满足条件(1)的调和函数,也可以看做是 $z=x+\mathrm{i}y$ 的一个可导函数 $f(z)$.最后他决定采取第二个观点,其原因之一是他考虑到函数的幂级数展式.他给出了一个函数 $f(z)$ 沿着复平面上一段曲线的积分的定义并证明了下列定理:如果一个函数 $f(z)$ 在复平面上的一个区域内有连续导数,而 C 为一简单闭曲线,它和它的内部均位于区域 D 内,则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{2}$$

这个定理是柯西理论中的基本定理.根据这个定理他得出了一系列重要结果,其中一个是:如果一个函数 $f(z)$ 在一个区域 D 内有连续导数,那么,在 D 的每一点 a 的邻域内 $f(z)$ 可以展为 $z-a$ 的幂级数.这个结果表示:具有连续导数的复变函数和在拉格朗日意义下的解析函数是相同的.另一个很重要的结果是留数定理.这个定理有广泛的应用,它是柯西理论中的一项巨大成就.例如这个定理的一个简单推论是:一个 n 次代数方程在复数域内恰有 n 个根(重级计算在内).古尔萨(Goursat,É. -J. -B.)给出了公式(2)的一个新的证明,在其中他只假定函数 $f(z)$ 在区域 D 内每一点有导数.从此以后,满足这个条件的函数 $f(z)$ 就称为在区域 D 内的解析函数,亦称为全纯函数或正则函数.

关于单复变函数的理论,黎曼(Riemann,(G. F.)B.)一方面采用了与柯西相同的观点,另一方面也采用了将函数分成两个调和函数的观点.他对于调和函数进行了研究,并且认为他已经证明了下列定理:任给平面上的一个简单闭曲线 C,恒存在一个在 C 的内部的调和函数,它在 C 上取预先给定的连续变化的值.不过外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))指出黎曼的证明中有一点并不显然.后来阿达马(Hadamard,J. (-S.))举出了一个简单的例子,肯定地说明了黎曼的证明是有问题的.虽然如此,黎曼的这项工作还是很有意义的.它引起了一系列的研究工作.黎曼从以上定理推出了一个关于共形映射的定理.后来经过施瓦兹(Schwarz,H. A.)

及庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)等人的工作,这个定理现在可叙述如下:设D为z平面上的一个单连通区域,它的边界多于一点,z_0为D内一点并且θ_0为一实数,则存在惟一的一个在D内的单叶解析函数$w=f(z)$将D映射为w平面上的单位圆$|w|<1$,并且满足条件

$$f(z_0)=0, \quad e^{-i\theta_0}f'(z_0)>0.$$

这个定理现在称为黎曼映射定理.复变函数的几何理论即由此定理而产生.以上定理没有涉及区域D的边界与圆周$|w|=1$的对应.卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)证明了:如果区域D的边界为一简单闭曲线C,那么,曲线C上的点与圆周$|w|=1$上的点也一一对应.根据卡拉西奥多里的这个结果,可以得出上述黎曼认为已经证明了的关于调和函数的定理的一个严格证明.

外尔斯特拉斯从幂级数的解析开拓的观点来进行研究.先考虑一个幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n, \tag{3}$$

它的收敛半径R满足条件$0<R<+\infty$.函数$f(z)$在圆Γ:$|z|<R$内解析,但在圆周$|z|=R$上最少有一个奇点z_0,即不存在一个圆盘

$$\gamma: |z-z_0|<\rho \ (0<\rho)$$

和一个在γ内的解析函数$g(z)$,使在Γ和γ的公共部分,$g(z)=f(z)$.特别地,如果圆周$|z|=R$上的每一点都是函数$f(z)$的奇点,这时函数$f(z)$就不可能从Γ内解析开拓出去,所以此时圆周$|z|=R$称为$f(z)$的自然边界.关于收敛圆周上的奇点及自然边界的研究,阿达马、曼德尔勃罗伊(Mandelbrojt,S.)及波伊亚(Pólya,G.)等人均有很好的工作.现在设$a(a\neq 0)$为圆Γ内一点,则在圆$|z-a|<R-|a|$内级数(3)的和函数$f(z)$可以展开为一个幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \tag{4}$$

它的收敛半径$r\geqslant R-|a|$.如果$r>R-|a|$,那么,函数$f(z)$就可以从圆Γ内越过点$Ra/|a|$解析开拓出去.然后在圆$|z-a|<r$内取一点$a_1(a_1\neq a)$,则在圆$|z-a_1|<r-|a_1-a|$内级数(4)的和函数$f_1(z)$可以展开为一个幂级数

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_1^{(n)}(a_1)}{n!}(z-a_1)^n,$$

它的收敛半径$r'\geqslant r-|a_1-a|$.如果$r'>r-|a_1-a|$,那么,函数$f_1(z)$又可以从$|z-a|<r$内越过点

$$a+r\frac{a_1-a}{|a_1-a|}$$

解析开拓出去.如此可以继续下去.从级数(3)出发,向各个方向,按照上述步骤利用幂级数进行所有可能的解析开拓,所得的全体幂级数构成一个集合,这个集合定义一个完全解析函数.庞加莱及沃尔泰拉(Volterra,V.)等人关于完全解析函数有重要工作.完全解析函数可以是单值的或多值的.不过以上所提到的在一个区域内的解析函数在该区域内都是单值的,这样的函数现在通常称为区域内的全纯函数.

总之,复变函数论的内容主要是研究解析函数.具体地说,包括以下三个方面:单值函数、多值函数及几何理论.单值函数中最基本的两类函数是整函数与亚纯函数.整函数就是在整个复平面上为全纯的函数.多项式是整函数.除去多项式以外,其他的整函数统称为超越整函数,外尔斯特拉斯将多项式的因式分解定理推广到了超越整函数.亚纯函数就是在整个复平面上除去一些孤立点外为全纯的函数,而这些孤立点都是它的极点.有理函数是亚纯函数.除有理函数以外,其他的亚纯函数统称为超越亚纯函数.米塔-列夫勒(Mittag-Leffler,M.G.)将有理函数的部分分式分解推广到了超越亚纯函数.黎曼把一个多值函数看做是定义在一些互相适当连结起来的重叠的平面(现在称为多值函数的黎曼面)上的单值函数.一个最简单的例子是多值函数$\sqrt{z}$的黎曼面,它是适当连结起来的两个重叠的平面.一个多值函数在它的黎曼面上是单值的.在近代,黎曼面已经有了一个完善的抽象定义.对此,外尔(Weyl,(C.H.)H.)所著《黎曼面的概念》一书起了重要作用.关于多值函数的研究工作主要是围绕着黎曼面及单值化问题展开的.黎曼映射定理,除引起边界对应问题外,还引起映射函数$w=f(z)$的构造问题以及关于单叶函数的一些问题.另外黎曼映射定理已经推广到了多连通区域的情形,但与单连通区域的情形有本质的不同之处.在悠久的历史进程中,经过许多人的努力,上述三个方面都取得了巨大的进展.例如关于亚纯函数奈望林纳理论的建立和这个理论中几个重要问题的解决,关于单叶函数著名的比伯巴赫猜想的证明以及关于泰希米勒空间的新研究等.

复变函数论,不仅它本身是一个美妙的理论,而且有着广泛的应用,它推动了一些学科的理论的发展,并且时常作为一个有力的工具被应用在实际问题中.可以预料,随着科学的发展,复变函数论将发挥愈来愈大的作用.正因为如此,人们一方面对它进行深入的研究,另一方面也受到理论和实际问题研究的影响而将它推广,从而产生了广义解析函数、拟共形映射、多复变函数等理论.广义解析函数及拟共形映射的研究受到研制亚音速、超音速飞机的推动.

单复变函数论(theory of functions of a com-

plex variable) 通常所说的复变函数论的全称(参见"复变函数论").

复平面C的拓扑

复数(complex number) 实数的一种扩充.形如$z=x+\mathrm{i}y$的数称为复数,其中i是虚数单位,x和y都是实数.在这种表示形式中,规定$\mathrm{i}^2=-1$,x和y分别称为复数z的实部和虚部,并分别记为$\mathrm{Re}\,z$和$\mathrm{Im}\,z$.如果$y=0$,那么$z=x$是实数;如果$y\neq0$,那么z是虚数,如果$x=0,y\neq0$,则$z=\mathrm{i}y$是纯虚数.复数概念的产生经历了漫长的路程.16世纪,人们在解二次、三次方程时遇到了负数开方的问题,为了使负数开方有意义引进了虚数.由于当时对复数的有关概念及性质了解得不清楚,用它进行计算又得出了一些矛盾,因此,复数在很长时期都被人看做为不可接受的"虚数".微积分创立后,情况有了改变,经过很多人的努力,复数与平面上的点和物理中的向量联系了起来.

复数是从已知量确定出来的数学实体这一概念是19世纪初才建立的.随着生产的发展,复数在数学和其他有关学科中日益起到巨大的作用.到19世纪中叶以后,对复数的研究已逐步发展成为一个完整的数学分支——复变函数论.

实部(real part) 见"复数".

虚部(imaginary part) 见"复数".

虚数(imaginary number) 见"复数".

纯虚数(pure imaginary number) 见"复数".

虚数单位(imaginary unit) 一种数学符号.指方程$x^2+1=0$的一个根$\sqrt{-1}$,用i表示.i与实数一样按实数的四则运算法则进行运算.早在1484年,许凯(Chaquet,N.)在《算术三篇》一书中,解二次方程$4+x^2=3x$,得到

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4},$$

他声明这根是不可能的.1545年,卡尔达诺(Cardano,G.)在《大衍术》(又译《重要的艺术》)一书中发表了解一元三次方程

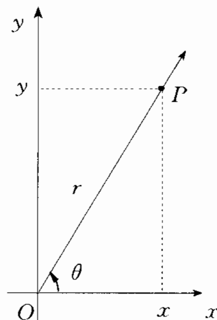
$$x^3+px+q=0$$

的著名公式

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

利用这个公式解方程时,可能遇到负数开方的困难,所以卡尔达诺认为一定有一种新型的数(复数)存在.1637年,笛卡儿(Descartes,R.)在《几何学》一书中,相对于"Realle"(实的)第一次给出了虚数的名称"Imaginaires"(虚的).1777年,欧拉(Euler,L.)在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中,首次使用i来表示$\sqrt{-1}$.真正做出虚数合理解释的是韦塞尔(Wessel,C.).1797年,他向丹麦科学院递交论文《方向的解析表示,特别应用于平面与球面多边形的测定》中,用$+1$表示正方向的单位,$+\varepsilon$表示另一种单位,方向与前者垂直且有相同的原点.阿尔冈(Argand,J. R.)也引进了复平面,文中有$\sqrt{-1}=\varepsilon$及$\cos v+\varepsilon\sin v$等记法,除了虚数单位的符号不同外,和现在所用的表示法一致.高斯(Gauss,C. F.)在1799年规定了复数的几何表示,但直到1831年才做出详细的说明,他主张用有序实数对(a,b)来表示$a+b\mathrm{i}$,这样复数的和与积都可以用纯代数方法来定义,无需做出几何解释.

复数的表示法(representation of complex number) 表示复数的方法.常见的有代数表示法、坐标表示法、向量表示法、三角表示法、指数表示法等几种.$z=x+\mathrm{i}y$称为复数的代数表示法.取平面直角坐标系Oxy,用坐标为(x,y)的点P表示复数$z=x+\mathrm{i}y$的方法称为复数的坐标表示法.复数的坐标表示法使复数与平面上的点之间建立起一一对应关系.实数与x轴上的点一一对应.x轴称为实轴.纯虚数与y轴上除原点以外的点一一对应.y轴称为虚轴.与复数建立了这种对应关系的平面称为复数平面,简称复平面.全体复数或复数平面记为C.用向量$\overrightarrow{OP}$来表示复数z的方法称为复数的向量表示法.x与y分别是$\overrightarrow{OP}$在实轴和虚轴上的投影.$\overrightarrow{OP}$的长度r称为复数的模或绝对值,记为$|z|$.若P点不是原点,则称$\overrightarrow{OP}$与x轴的正向之间的夹角θ为复数z的辐角,记为$\mathrm{Arg}\,z$.辐角的符号规定为:逆时针方向为正,顺时针方向为负.一个复数有无穷多个辐角.同一复数的任意两个辐角相差2π的整数倍.辐角中有一个θ_0满足条件



$$0\leqslant\theta_0<2\pi,$$

θ_0称为z的主要辐角或主辐角,亦称辐角的主值,记为$\arg z$.有时为了方便也取其他主值范围,如$-\pi<\theta\leqslant\pi$.但不论$\arg z$的范围如何确定,总有

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

如果Ox是极坐标系的极轴,那么,复数z的模r和辐角θ分别是向量$\overrightarrow{OP}$的极径和极角,且有$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,所以复数又可表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

称为复数的三角表示法.通过欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

复数可表为指数形式 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,称为复数的指数表示法.复数还可以在单位球面上表示(参见"复球面").

复数的代数表示法(algebraic representation of complex number)　见"复数的表示法".

复数的坐标表示法(coordinate representation of complex number)　见"复数的表示法".

复数的向量表示法(vector representation of complex number)　见"复数的表示法".

复数的三角表示法(trigonometric representation of complex number)　见"复数的表示法".

复数的指数表示法(exponential representation of complex number)　见"复数的表示法".

实轴(real axes)　平面直角坐标系中的一个坐标轴.使复数与平面上的点之间得以建立一一对应关系的平面直角坐标系的横坐标轴称为实轴.详见"复数的表示法".

虚轴(imaginary axes)　平面直角坐标系中的一个坐标轴.使复数与平面上的点之间得以建立一一对应关系的平面直角坐标系的纵坐标轴称为虚轴.详见"复数的表示法".

复平面(complex plane)　复数平面的简称.见"复数的表示法".

欧拉公式(Euler formula)　把复指数函数与三角函数联系起来的一个公式.即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\ (-\infty < \theta < +\infty).$$

这个公式是欧拉(Euler,L.)建立的.

复数的模(modulus of complex number)　复数表示中的一个量,即表示复数的向量的长度称为该复数的模.详见"复数的表示法".

复数的绝对值(absolute value of complex number)　复数的模的别称,见"复数的表示法".

复数的辐角(argument of complex number)　复数表示中的一个量,即表示复数的向量与实轴正向之间的夹角.详见"复数的表示法".

复数的主辐角(principle value of argument of complex number)　亦称辐角的主值.即复数的主要辐角的简称,见"复数的表示法".

共轭复数(conjugate complex)　与给定复数相比,只是虚部符号相反的复数.如果两个复数的实部相等,而虚部只相差正负符号,则称这两个复数互为共轭复数(α 的共轭复数记为 $\bar{\alpha}$).在复平面上,表示共轭复数的两点是关于实轴对称的.互相共轭的复数的模相等,辐角相差一个符号:

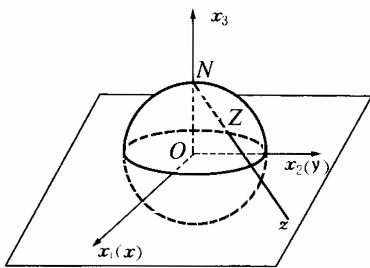
$$\alpha = a + \mathrm{i}b = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

$$\bar{\alpha} = a - \mathrm{i}b = \rho(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) = \rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}.$$

复球面(complex sphere)　用以表示复数的单位球面.以复平面 C 的原点为中心做一个半径为 1 的球面

$$S: x^2+y^2+u^2=1,$$

点 $N(0,0,1)$称为北极,C 与 S 的交线称为赤道.过 C 上一点 z 和 N 的直线只与 S 交于一点 Z;反之,连结球面上任意不是 N 的点 Z 与 N 的直线也与 C



交于一点 z.除了 N 点以外,复平面 C 和球面 S 上的点是一一对应的,并且当 $|z|\to+\infty$时,Z 趋向于 N,因此很自然地在复平面 C 中引进一理想的点,作为 N 的对应点,称为无穷远点,记为∞.无穷远点的模是$+\infty$,而辐角是不定的.加上无穷远点的复平面称为扩充复平面,一般记为 $\hat{\mathrm{C}}$,而 C 则称为有穷复平面.$\hat{\mathrm{C}}$ 与 S 上的点建立起的这种一一对应关系称为球极投影.S 称为复球面.

开平面(open plane)　复平面的别称,也称为有穷复平面.详见"复平面".

无穷远点(point at infinity)　在球极投影中复平面上与复球面北极对应的点.详见"复球面".

扩充复平面(extended complex plane)　加上了无穷远点的复平面.详见"复球面".

闭平面(closed plane)　扩充复平面的别称.

黎曼球面(Riemann sphere)　复球面的别称.

高斯平面(Gauss plane)　复平面的别称.

球极投影(stereographic projection)　扩充复平面上的点与复球面上的点之间的一种一一对应关系(参见"复球面").

测地投影(geodesic project)　球极投影的别称.

球面距离(spherical distance)　复平面上两点在复球面上对应点的欧氏距离.设 z_1,z_2 是复平面上的两点,$d(z_1,z_2)$表示 z_1,z_2 在黎曼球面上的球极投影之间的欧氏距离,则称 $d(z_1,z_2)$为 z_1,z_2 之间的球面距离,且有

$$d(z_1,z_2)=\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}.$$

幺模数(unital module)　模为 1 的复数.它的一般形式是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.如果 α 是幺模数,则 $\alpha^{-1}=\bar{\alpha}$.

棣莫弗公式(de Moivre formula) 关于幺模数的幂的一个计算公式，即公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

棣莫弗(de Moivre，A.)在1707年到1730年间逐步深入地得知这个公式在n是正有理数时成立. 后来欧拉(Euler，L.)在1748～1749年证明了这个公式在n是实数时成立.

邻域(neighbourhood) 复平面上的拓扑的基本概念之一. 包含复数a的区域，特别地，以复数a为中心，以正数ε为半径的圆盘，即满足$|z-a|<\varepsilon$的所有点z的集合，称为a的ε邻域. 在不强调半径为ε时简称a的邻域.

内点(interior point) 复平面上的拓扑基本概念之一. 复平面C上给定一个点集A，点$a\in A$，如果有a的某一个邻域整个包含在A内，则称a为A的一个内点.

开集(open set) 复平面上的拓扑基本概念之一. 复平面上完全由内点组成的集合称为复平面上的开集.

聚点(accumulation point) 复平面上的拓扑基本概念之一. 如果点a的任何邻域内都有异于a而属于集合A的点，则点a称为A的一个聚点.

导出集(derived set) 复平面上的拓扑基本概念之一. 由集合A的所有聚点组成的集合称为集合A的导出集.

孤立点(isolated point) 复平面上的拓扑基本概念之一. 属于集合A但又不是A的聚点的点称为A的孤立点.

闭集(closed set) 复平面上的拓扑基本概念之一. 如果集合A的一切聚点都属于A，则集合A称为闭集.

余集(supplementary set) 复平面上的拓扑基本概念之一. 点集A的余集是指复平面上全体不属于A的点所组成的集.

外点(exterior point) 复平面上的拓扑基本概念之一. 如果点a的某一个邻域内的每一个点都不属于集合A，则a称为A的一个外点.

边界点(boundary point) 复平面上的拓扑基本概念之一. 如果点ζ的任何邻域内都既有属于集合A的点，也有不属于A的点，则称点ζ为A的一个边界点.

边界(boundary) 复平面上的拓扑基本概念之一. 点集A的所有边界点组成的集合称为A的边界.

可达边界点(accessible boundary point) 边界点的一种. 设ζ是区域D的一个边界点，若D内的任意一点z都可用除终点ζ外包含在D内的连续曲线和ζ相连结，则称ζ是D的一个可达边界点. 可以证明，若D的边界是一条若尔当曲线，则D的边界上的每一点均是可达边界点.

有界集(bounded set) 复平面上的拓扑基本概念之一. 如果点集A可以包含于以原点为中心的某一圆内，则称A为有界集.

紧集(compact set) 复平面上的拓扑基本概念之一. 复变函数论中的紧集，指有穷复平面C上的有界闭集，或扩充复平面$\hat{\mathrm{C}}$上的闭集.

开覆盖(open covering) 复平面上的拓扑基本概念之一. 设A是一个集合，$\mathscr{F}$是一个开集族，如果A的每一点至少属于$\mathscr{F}$中某一个开集，那么$\mathscr{F}$就称为A的一个开覆盖.

康托尔定理(Cantor's theorem) 关于闭集套的一个定理. 该定理断言：若$F_n(n=1,2,\cdots)$是非空的闭集序列，且有

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots,$$

F_n的直径随n趋向无穷而趋于零，则$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$为单点集. 这个定理是由康托尔(Cantor，G.(F. P.))得到的.

有限覆盖定理(finite covering theorem) 亦称海涅-波莱尔定理. 复平面拓扑中关于紧性的一个基本定理. 该定理断言：若A是一个紧集，$\mathscr{F}$是A的一个开覆盖，则从$\mathscr{F}$中能选出有限个开集$G_1, G_2, \cdots, G_n$，使得

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j,$$

即从紧集的任一开覆盖中必能选出有限子覆盖.

海涅-波莱尔定理(Heine-Borel theorem) 即“有限覆盖定理”.

波尔查诺-外尔斯特拉斯定理(Bolzano-Weierstrass theorem) 极限理论的一个基本定理. 该定理断言：扩充复平面上的任一无穷点集都至少有一个聚点. 有限复平面情形叙述为：任一有界的无穷点集至少有一个聚点.

连续曲线(continuous curve) 复平面上的拓扑基本概念之一. 闭线段$a\leqslant t\leqslant b(a\neq b)$到复平面的连续映射称为连续曲线. 若$x(t)$和$y(t)$是两个在区间$a\leqslant t\leqslant b$上连续的函数，则

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

在平面上确定一条连续曲线γ. 若对任意的$t_1\in(a,b)$及$t_2\in[a,b]$，只要$t_1\neq t_2$就有$z(t_1)\neq z(t_2)$，则称连续曲线γ为简单曲线或若尔当弧. $z(a)$称为这条简单曲线的起点，$z(b)$称为这条简单曲线的终点. 若简单曲线γ还满足$z(a)=z(b)$，则称γ为简单闭曲线. 简单闭曲线也称为若尔当曲线.

若尔当弧(Jordan arc) 简单曲线的别称. 见“连续曲线”.

若尔当曲线(Jordan curve)　见"连续曲线".

闭路径(colsed path)　简单闭曲线的别称.见"连续曲线".

解析曲线(analytic curve)　复平面上的基本概念之一.设曲线 γ 由参数方程 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 所确定,若对于任意的 $t_0,a\leqslant t_0\leqslant b$,都存在它的邻域 $(t_0-\delta,t_0+\delta)$,使得 γ 上与这个小区间对应的一小段(当 $t_0=a$ 或 b 时,则考虑与 $[a,a+\delta)$ 和 $(b-\delta,b]$ 对应的小段)曲线可用一个收敛幂级数

$$z(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t-t_0)^n$$

表示(其中 $|t-t_0|<\delta,c_0=z(t_0)$),则称 γ 是一条解析曲线.

连通集(connected set)　复平面上的拓扑基本概念之一.若点集 A 不能分解成两个非空且互不相交的开子集的并集,则称 A 为连通集.

区域(region)　复平面上的连通的开集称为区域.

闭区域(closed region)　区域与它的边界的并集称为闭区域.

若尔当定理(Jordan's theorem)　关于复平面上简单闭曲线性质的一个著名定理.该定理断言:复平面上的任意一条简单闭曲线 γ 把复平面分成两个区域,其中一个是有界的,称为 γ 的内部;另一个是无界的,称为 γ 的外部.γ 是两个区域的共同边界.该定理的结论十分直观,但证明并不容易.若尔当(Jordan,M.E.C.)首先提出该定理,但他的证明有缺陷.维布伦(Veblen,O.)在 1945 年首先完成了对该定理的严格证明.

星形域(star region)　复平面上区域的一种.设 a 是平面上一点,D 是包含 a 点的一个区域.若任意一条连结 a 和 D 内一点的线段完全含于 D 内,则称 D 是关于 a 点的一个星形域.

单连通区域(simply connected domain)　复平面上的拓扑基本概念之一.若在区域内部任做一条简单闭曲线,它的内部都含于这个区域内,则称这个区域为单连通区域.否则就称这个区域为多连通区域.

多连通区域(multiply connected domain)　复平面上的拓扑基本概念之一.见"单连通区域".

解 析 函 数

解析函数论(analytic function theory)　复变函数论的主要研究对象.如果说以测度为基础的实变函数论是研究那些性质不大"好"的函数的话,那么,解析函数论则是研究那些性质非常"好"的函数.解析函数论的理论基础是 19 世纪奠定的,柯西(Cauchy,A.-L.)、外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))和黎曼(Riemann,(G.F.)B.)是这一时期的三位杰出人物.前两位分别应用积分和级数研究复变函数,黎曼则研究了复变函数的映射性质.到 20 世纪,解析函数论已成为数学的重要分支之一.它的领域不断扩大,逐步发展成了一门庞大的学科.除了解析函数论的基本理论之外,还有黎曼面、共形映射、拟共形映射、泰希米勒空间理论、整函数与亚纯函数论、特殊函数论、调和函数论、单叶函数、H^p 空间理论、代数函数、多复变函数等.另外,这门学科对其他学科如空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理等,以及数学中其他分支如微分方程、积分方程、概率论、数论等,都有重要的应用.

复变函数(function of a complex variable)　实变函数的推广.自变量和因变量均为复值的函数称为复变函数.设 E 为一复数集,若按照某一规律,E 内每一复数 z 都有一确定的复数 w 与之对应,则称在 E 上确定了一单值复变函数 $w=f(z)(z\in E)$.若对于自变量 z 的一个值,可能有几个或无穷多个 w 的值与之对应,则称在 E 上确定了一个多值复变函数 $w=f(z)(z\in E)$.E 称为该函数的定义域;函数值 w 的全体所成的集 M 称为函数 $w=f(z)$ 的值域.

解析函数(analytic function)　亦称全纯函数或正则函数,是解析函数论的主要研究对象.对于定义于复平面上区域 D 内的复变量 z 的单值函数 $f(z)$,如果它在 D 内的每个点 z_0 的一个邻域内都可以用 $z-z_0$ 的幂级数表示,则称 $f(z)$ 在 D 内解析.外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))从幂级数出发,建立了解析函数的级数理论.如果在 D 内的每个点 z 处,极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=f'(z)$$

(称为函数 $f(z)$ 在 z 点的导数)都存在,柯西(Cauchy,A.-L.)称 $f(z)$ 在 D 内是解析的.这两个定义是等价的.函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,$z=x+\mathrm{i}y$ 在 D 内解析的另一个等价条件是:$u=u(x,y)$,$v=v(x,y)$ 在 D 内的每一个点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处存在连续偏导数,并且满足柯西-黎曼方程(或称柯西-黎曼条件):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这个条件有时简称 C-R 条件或称达朗贝尔-欧拉条件.函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析的第四个等价条件是莫雷拉定理(参见"莫雷拉定理").

全纯函数(holomorphic function)　即"解析函数".

正则函数(regular function)　即"解析函数".

达布中值公式(Darboux's mean value for-

mula）解析函数在两点上函数值的差的一个表达式.若：

1. 直线段 L 以 a,b 为其端点，L 在区域 D 内；

2. 函数 $f(z)$ 在 D 内具有连续的导数；

则存在 λ 及 $\zeta(|\lambda|\leqslant 1,\zeta\in L)$，使

$$f(b)-f(a)=\lambda|b-a|f'(\zeta).$$

此公式称为达布中值公式.

柯西-黎曼条件(Cauchy-Riemann condition) 解析函数的实部和虚部所满足的条件(参见"解析函数").

***C-R* 条件**(*C-R* condition) 柯西-黎曼条件的简称(参见"解析函数").

达朗贝尔-欧拉条件(d'Alembert-Euler condition) 即"柯西-黎曼条件".

解析函数的无穷次可微性(infinite differentiability of analytic function) 复平面区域内的解析函数有别于实数域上的可导函数的一个重要性质.若 $f(z)$ 在 D 内解析，则 $f(z)$ 在 D 内具有各阶导数.解析函数的这一性质称为它的无穷次可微性.

初等复变函数(elementary functions of a complex variable) 实变量初等函数在复数域中的推广.在实函数中，常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数称为基本初等函数，而一切可由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合生成的函数称为初等函数.复变量的初等函数的定义形式上与此相同，只不过它们的定义域已由实数集合推广到复数域中.实变量的初等函数推广到复数域后，在实数域中保持它们原有的性质，但在复数域中具有一些新的性质，如复变指数函数的周期性、复变对数函数的无穷多值性、复变正弦函数与复变余弦函数的无界性等.从这些新的性质可以看出，只有把这些函数从实数域推广到复数域，才能更全面、更深刻地揭示它们的本质.

复变根式函数(radical function of a complex variable) 实变量根式函数在复数域中的推广.形如 $\sqrt[n]{z-a}$ 的函数称为复变根式函数，其中 n 是大于 1 的正整数，a 是复常数.

复变指数函数(exponent function of a complex variable) 实变量指数函数在复数域中的推广.形如 $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ 的函数称为复变指数函数.

复变一般指数函数(general exponent function of a complex variable) 实变量一般指数函数在复数域中的推广.若 $a\neq 0,\infty$，则称函数 $w=a^z=e^z\log a$ 为复变一般指数函数.

复变幂函数(power function of a complex variable) 实变量幂函数在复数域中的推广.形如 $w=z^a=e^{a\log z}(z\neq 0,\infty,a$ 为复常数)的函数称为复变幂函数.

复变对数函数(logarithmic function of a complex variable) 实变量对数函数在复数域中的推广.若 $e^w=z(z\neq 0,\infty)$，则复数 w 称为复数 z 的对数，记为 $w=\mathrm{Log}\,z=\log|z|+i(\arg z+2k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.若限定 $-\pi<\mathrm{Im}(\mathrm{Log}\,z)\leqslant\pi$，则得到复变对数函数的主值(或主支)，记为 $\log z$.

复变对数函数的主值(principal value of the logarithmic function) 见"复变对数函数".

复变三角函数(trigonometric functions of a complex variable) 实变量三角函数在复数域中的推广.复变正弦函数与余弦函数定义为

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),$$

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}).$$

当 z 为实数时，此定义与数学分析中关于正弦函数和余弦函数的定义是一致的.复变正切函数与余切函数定义为：

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\ \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

复变反三角函数(inverse trigonometric functions of a complex variable) 实变量反三角函数在复数域中的推广.由

$$z=\sin w=\frac{1}{2i}(e^{iw}-e^{-iw})$$

可解得

$$e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2},$$

由此定义复变反正弦函数为

$$w=\mathrm{Arcsin}\,z=-i\ \mathrm{Log}(iz+\sqrt{1-z^2}),$$

同样地定义复变反余弦函数和复变反正切函数为：

$$\mathrm{Arccos}\,z=-i\,\mathrm{Log}(z+i\sqrt{1-z^2}),$$

$$\mathrm{Arctan}\,z=\frac{1}{2i}\mathrm{Log}\,\frac{i-z}{i+z}.$$

双曲函数(hyperbolic functions) 一类初等复变函数.实变量双曲函数在复数域中的推广.下面四个双曲函数分别称为双曲正弦、双曲余弦、双曲正切及双曲余切：

$$\mathrm{sh}\,z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \mathrm{ch}\,z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$\mathrm{th}\,z=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}},\quad \mathrm{cth}\,z=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}.$$

在 Mathematica 等数学应用软件及英文数学著作中，上面四种双曲函数的符号分别为 $\sinh z,\cosh z,\tanh z$ 及 $\coth z$.这些函数的名称之所以既带有"双曲"二字，又带有一个相应的三角函数的名称，是因为在实变量的情况下，联系着单位圆周上的点的坐标与三角函数之间的关系式，类似于联系着半轴长

为 1 的等轴双曲线上的点的坐标与双曲函数之间的关系式.双曲函数与三角函数之间有密切的联系：

$$\mathrm{ch}\,\mathrm{i}z=\cos z,\quad \mathrm{sh}\,\mathrm{i}z=\mathrm{i}\sin z,$$
$$\mathrm{th}\,\mathrm{i}z=\mathrm{i}\tan z,\quad \mathrm{cth}\,\mathrm{i}z=-\mathrm{i}\cot z,$$
$$\cos\mathrm{i}z=\mathrm{ch}\,z,\quad \sin\mathrm{i}z=\mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,z,$$
$$\tan\mathrm{i}z=\mathrm{i}\,\mathrm{th}\,z,\quad \cot\mathrm{i}z=-\mathrm{i}\,\mathrm{cth}\,z.$$

其中 i 是虚数单位.与三角函数之间的每一关系式相对应,双曲函数之间都有类似的关系式.双曲函数在积分法、几何、力学、物理学及许多工程问题中有重要应用.

罗曼-梅尼绍夫定理(Looman-Menchoff theorem)　一个关于函数在区域内的解析性的判定定理.设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内有定义,u 和 v 在 D 内连续,最多除去 D 的可数个点外,

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y}$$

存在,且在 D 内除去一个勒贝格测度为零的集合外,柯西-黎曼方程成立,则 $f=u+\mathrm{i}v$ 在 D 内全纯.柯西(Cauchy,A.-L.)最初于 1814 年给出解析函数的定义时,要求导函数的连续性,从而推出柯西定理.1900 年,古尔萨(Goursat,É.-J.-B.)在没有导数连续性的假定下证明了柯西定理.人们期望与柯西解析函数的定义相等价的定义,即用柯西-黎曼方程定义的解析性能有相应的改进.1923 年,罗曼(Looman,H.)给了上述更广的定理,但他的证明有缺陷;1933 年,梅尼绍夫(Меньшов,Д. Е.)改正了他的缺陷.于是,这个定理称为罗曼-梅尼绍夫定理.

施托尔茨路径(Stolz's path)　区域内连结于区域边界上一点的一类连续曲线.设 P 是由光滑的若尔当曲线所围成的区域 D 的一个边界点,以 P 为顶点的一个角域的两边的起始部分在 D 的内部,L 是 D 内的一条曲线.若 L 从上述角域的内部连结于 P 点,则称 L 是一条以 P 为终点的施托尔茨路径.

角微商(angle derivative)　条件微商的一种.设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内全纯,如果 z 沿以单位圆周上的点 z_0 为终点的施托尔茨路径趋于 z_0 时,$f(z)$ 一致地趋于 w_0,且极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-w_0}{z-z_0}$$

存在,则称此极限值为 $f(z)$ 在 z_0 处的角微商.在定义域为 $\mathrm{Re}\,z>0$ 的情形,对虚轴上的点 z_0 也可同样地定义角微商.但是,当 $w_0=\infty$ 时,上式中的 $f(z)-w_0$ 要用 $1/f(z)$ 代替;在 $z_0=\infty$ 时,$1/(z-z_0)$ 要用 z 代替.在后面这种情形,施托尔茨路径理解为包含于角域 $|\arg z|\leqslant\alpha(<\pi/2)$ 内趋于 ∞ 的路径.

分式线性变换(fractional linear transformation)　一种特殊的映射.从扩充 z 平面到扩充 w 平面的共形映射称为分式线性变换,简称线性变换.即

$$w=\frac{az+b}{cz+d},$$

其中 a,b,c,d 都是复常数,$ad-bc\neq0$ 并且当 $z=\infty$ 时对应 $w=a/c$,$z=-d/c$ 时对应 $w=\infty$.分式线性变换总可以分解成下述简单类型变换的复合：

1. $w=kz+h(k\neq0)$.
2. $w=1/z$.

a,b,c,d 都是实数且满足 $ad-bc>0$ 的分式线性变换称为富克斯变换.富克斯变换将上半平面映为上半平面,使 Ox 轴($z=x+\mathrm{i}y$)上各点 z 与 Ou 轴($w=u+\mathrm{i}v$)上各点 w 对应.除恒等变换 $w=z$ 外,一个分式线性变换

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

至多有两个不动点(即在分式线性变换下映为自身的点),它由下面的方程决定

$$z=\frac{az+b}{cz+d},$$

即 $cz^2+(d-a)z-b=0$.若此二次方程有两个不同的有穷根 z_1,z_2,则变换 $L(z)$ 可写为

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=k\,\frac{z-z_1}{z-z_2},$$

其中 k 是常数.若 k 为正实数,则称 $L(z)$ 是双曲变换;若 $k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$,实数 $\alpha\neq0$,则称 $L(z)$ 是椭圆变换;若 $k=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$,$\alpha\neq0$,$r\neq1$,则称 $L(z)$ 是斜驶变换.若 $L(z)$ 仅有一个不动点,则称 $L(z)$ 为抛物变换.

线性变换(linear transformation)　分式线性变换的简称.

富克斯变换(Fuchs transformation)　见"分式线性变换".

抛物变换(parabolic transformation)　见"分式线性变换".

双曲变换(hyperbolic transformation)　见"分式线性变换".

椭圆变换(elliptic transformation)　见"分式线性变换".

斜驶变换(loxodromic transformation)　见"分式线性变换".

默比乌斯变换(Möbius transformation)　亦称默比乌斯函数.一种分式线性变换.有的著作中把单位圆盘映射到自身的共形变换称为默比乌斯变换.把单位圆盘映射到自身的默比乌斯变换都可以表示为

$$\tau(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z},$$

其中 φ 是实数,$|z_0|<1$.

关于圆的对称点(symmetric points with respect to a circle)　具有特殊关系的点对.若 z_1,z_2 满

足条件

$$z_2-z_0=\frac{R^2}{\overline{z_1-z_0}},$$

则称 z_1,z_2 是关于圆周 $|z-z_0|=R$ 的对称点或反演点;还规定 z_0 与 ∞ 关于圆周 $|z-z_0|=R$ 是对称的.

交比(cross ratio) 亦称非调和比.分式线性变换的一种不变量.设 a,b,c,d 是任意四个互异的有限复数,则称

$$\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}$$

为这四个数(或点)的交比,记为

$$(a,b,c,d)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}.$$

此定义可推广到 a,b,c,d 之一是无穷远点的情形:给定四个有限点中的三个点,而令第四个点趋向于无穷远点,则把四点交比在这一情形下的极限称为四点中这一点是无穷远点时的交比.即:

$$(\infty,b,c,d)=\frac{1}{c-b}:\frac{1}{d-b},$$

$$(a,\infty,c,d)=(c-a):(d-a),$$

$$(a,b,\infty,d)=1:\frac{d-a}{d-b},$$

$$(a,b,c,\infty)=\frac{c-a}{c-b}.$$

在分式线性变换下任意四点的交比不变,换句话说,交比是线性变换的不变量.

非调和比(anharmonic ratio) 即"交比".

线性变换的保对称性(preservation of symmetry by fractional linear transformations) 线性变换的特性之一.如果 z_1,z_2 是关于圆周 C 的一对对称点(反演点),那么在线性变换下,它们的像 w_1 与 w_2 也是关于 C 的像 C' 的对称点,线性变换的这种性质称为保对称性.

线性变换的保圆周性(perservation of circle by fractional linear transformation) 线性变换的特性之一.指线性变换将扩充复平面上的圆周变为扩充复平面上的圆周的性质(将直线视为通过无穷远点的圆周).

线性变换的保交比性(invariance of cross ratio by fractional linear transformation) 线性变换的特性之一.指线性变换在扩充复平面上保持交比不变的性质.

整线性变换(entire linear transformation) 线性变换的一种.设 $k\neq 0,h$ 为常数,称 $w=kz+h$ 为整线性变换.特别地,当 $h\neq 0$ 时,称映射 $w=z+h$ 为平移映射.

平移映射(translation) 见"整线性变换".

伸缩与旋转映射(dilatation and rotation) 线性变换的一种.映射

$$w=Az=|A|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg A}z$$

称为伸缩与旋转映射.它把复数 z 的模伸缩 $|A|$ 倍,再绕原点 O 旋转一个角度 $\arg A$.

单位圆到单位圆的映射(mapping of the unit disk onto itself) 线性变换的一种.即映射

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

其中 φ 是实数,$|a|<1$.有的著作称此种映射为默比乌斯变换.

上半平面到单位圆内的映射(mapping of the upper half-plane onto the interior of the unit disk) 线性变换的一种.即映射

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\frac{z-a}{z-\bar{a}},$$

其中 φ 是实数,$\mathrm{Im}\,a>0$.

上半平面到上半平面(下半平面)的映射(mapping of the upper half-plane onto itself or lower half-plane) 线性变换的一种.即映射

$$w=\frac{az+b}{cz+d},$$

其中 a,b,c,d 都是实数.当 $ad-bc>0$ 时,它把上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 映射到上半平面 $\mathrm{Im}\,w>0$;当 $ad-bc<0$ 时,它把上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 映射到下半平面 $\mathrm{Im}\,w<0$.

圆束(pencil of circles) 复平面上一类圆周的总称.若 k_1 和 k_2 为给定的两个圆,称同时正交 k_1 和 k_2 的圆的全体为圆束.按照 k_1 和 k_2 相交、相切及相离的情形,相应的圆束分别称为双曲型圆束、抛物型圆束及椭圆型圆束.

椭圆型圆束(elliptic pencil of circles) 见"圆束".

抛物型圆束(parabolic pencil of circles) 见"圆束".

双曲型圆束(hyperbolic pencil of circles) 见"圆束".

阿波罗尼奥斯圆族(circles of Apollonius) 由复平面上的两个点确定的一类圆周的总称.设 a,b $(a\neq b)$ 为两个复常数,则称

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=k\ \ (0<k<+\infty)$$

为以 a,b 为极限点的阿波罗尼奥斯圆族,而称过 a,b 两点的圆族为由 a,b 确定的施泰纳圆族.对于给定的 a,b 两点,任一阿波罗尼奥斯圆和任一施泰纳圆是正交的.

施泰纳圆族(Steiner circles) 由复平面上的两个点确定的一类圆周的总称.见"阿波罗尼奥斯圆族".

圆丛(bundle of circles) 复球面上一类圆周的

总称.指球面上这样圆的全体:这些圆所在的平面都通过空间内一个固定的点 M.根据点 M 在球面外、球面上和球面内,分别称相应的圆丛为双曲型的、抛物型的和椭圆型的.

双曲型圆丛(hyperbolic bundle) 见"圆丛".

抛物型圆丛(parabolic bundle) 见"圆丛".

椭圆型圆丛(elliptic bundle) 见"圆丛".

复 积 分

路径(path) 复平面上的拓扑基本概念之一.平面内的一条连续曲线称为一条路径,它可以用一个连续复函数:$z=\gamma(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$表示.

沿路径的积分(integral along a path) 复平面上的一种曲线积分.若 γ 为一条可求长路径 $z=\gamma(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,$f$ 为 γ 上的连续函数,对 γ 做分割,其分点为

$$z_0=\gamma(\alpha),\ z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n=\gamma(\beta),$$

从 z_{k-1} 到 $z_k(1\leqslant k\leqslant n)$的小段为 γ_k,

$$\lambda=\max_{1\leqslant k\leqslant n}s_k\quad(s_k\text{ 是 }\gamma_k\text{ 的弧长}),$$

在 γ_k 上任取一点 ζ_k,做和式

$$\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1}),$$

若

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1})$$

存在,则称此极限值为函数 $f(z)$沿路径 γ 的积分,记为

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z,$$

即

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)(z_k-z_{k-1}).$$

一点关于一条闭曲线的指示数(index of a point to a closed curve) 一条曲线绕一定点的圈数.设 γ 是一条可求长的闭路径,a 点不在 γ 上,则称

$$n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-a}$$

为 a 关于 γ 的指示数.它是一个整数.如果

$$\gamma(t)=a+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nt}\quad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

则当 $|b-a|<1$ 时,$n(\gamma,b)=n$;当 $|b-a|>1$ 时,$n(\gamma,b)=0$.a 点关于 γ 的指示数也称为 γ 绕 a 点的环绕数.

环绕数(winding number) 见"一点关于一条闭曲线的指示数".

柯西定理(Cauchy's theorem) 解析函数理论的最重要、最基本的定理.若 D 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的一个单连通区域,$f(z)$在 D 内是解析的,γ 是 D 内的一条可求长闭曲线,则有

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

它的一般形式是:若 $f(z)$在区域 D 内是解析的,γ_1,$\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 是 D 内的 m 条可求长闭曲线(m 是一个自然数),使得对 $\mathbf{C}\backslash D$ 内所有的 w,有

$$n(\gamma_1,w)+n(\gamma_2,w)+\cdots+n(\gamma_m,w)=0,$$

其中 $n(\gamma_i,w)$是 γ_i 绕 w 点的环绕数($i=1,2,\cdots,m$),则有

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

柯西积分公式(Cauchy's integral formula) 解析函数在一点处的值通过该函数在环绕该点的曲线上的积分表示的公式.该公式是解析函数理论中的一个基本公式.设 D 是一个区域,γ 是 D 内一条可求长闭路径,对于 $\mathbf{C}\backslash D$ 内的一切 w 的环绕数 $n(\gamma;w)=0$,$f(z)$在 D 内解析,则对于一切 $a\in D\backslash\gamma$ 有

$$n(\gamma,a)f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z.$$

一般形式是:设 D 是一个区域,$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 是 D 内 m 条可求长闭曲线(m 是一个自然数),等式

$$n(\gamma_1,w)+n(\gamma_2,w)+\cdots+n(\gamma_m,w)=0$$

对一切 $w\in\mathbf{C}\backslash D$ 成立,其中 $n(\gamma_i,w)$是 γ_i 绕 w 点的环绕数($i=1,2,\cdots,m$),则对于一切 $a\in D\backslash\gamma$,有

$$f(a)\sum_{k=1}^{m}n(\gamma_k,a)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma_k}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z.$$

平均值定理(mean value theorem) 圆内解析函数在圆心处的值通过在圆周上的值来表示的定理.如果函数$f(z)$在一个以 z_0 为圆心、R 为半径的圆 $|z-z_0|<R$ 内解析,在圆 $|z-z_0|\leqslant R$ 上连续,那么,函数 $f(z)$在圆心处的值等于在圆周上的值的积分平均值,即

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi.$$

莫雷拉定理(Morera's theorem) 柯西定理的逆定理.如果函数$f(z)$在区域 D 内连续,并且沿着 D 内任何一条可求长闭曲线 γ 的积分

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0,$$

那么 $f(z)$在区域 D 内解析.

柯西型积分(integral of Cauchy type) 原本适用于解析函数的柯西积分表达式在连续函数情形的一种推广.设 Γ 是一条闭或非闭的逐段光滑曲线,$\varphi(z)$是 Γ 上的连续函数,那么,积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{\varphi(w)}{w-z}\mathrm{d}w$$

称为关于$\varphi(z)$的柯西型积分，它在$\mathbf{C}\backslash\Gamma$上确定$z$的一个单值函数，记为$F(z)$. 柯西型积分在不包含曲线$\Gamma$上任一点的区域内是解析的，并且它的高阶导数为

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}}dw.$$

高阶导数的柯西积分公式(Cauchy's integral formala for derivative of higher order)　解析函数在一点处的高阶导数的值通过该函数在环绕该点的曲线上的积分表示的公式. 设$f(z)$在区域D内解析，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$是$D$内$m$条可求长闭曲线，$m$是一个自然数，等式

$$n(\gamma_1,w)+n(\gamma_2,w)+\cdots+n(\gamma_m,w)=0$$

对$\mathbf{C}\backslash D$内的一切w成立，则对于一切$a\in D\backslash\gamma$及$k\geqslant1$有

$$f^{(k)}(a)\sum_{j=1}^{m}n(\gamma_j,a)=k!\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}dz.$$

解析函数的零点(zero of analytic function)　使解析函数取零值的点. 设$f(z)$是一个解析函数，而$f(z_0)=0$，则称z_0为$f(z)$的一个零点. 若

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,$$

而$f^{(m)}(z_0)\neq0$，则称z_0为$f(z)$的一个m阶零点. 不恒为零的解析函数$f(z)$的零点有孤立性. 也就是说，如果z_0是$f(z)$的一个零点，并且$f(z)\not\equiv0$，那么一定有一正数$\rho>0$，使得$f(z)$在圆$|z-z_0|<\rho$内除z_0外无其他零点. 对于在无穷远点的一个邻域内有定义的函数$f(z)$，令$1/z=w$，设

$$f\left(\frac{1}{w}\right)=g(w)\ [f(\infty)=g(0)],$$

则$f(z)$在$z=\infty$处的解析性和零点的阶数由$g(w)$在$w=0$处的相应状态确定.

解析函数的 m 阶零点(zero of order m of analytic function)　见“解析函数的零点”.

解析函数零点的孤立性(isolated property of zero of analytic function)　见“解析函数的零点”.

留数(residue)　亦称残数. 函数的洛朗展式中-1次幂项的系数. 设$f(z)$以有限点$z=a$为孤立奇点，在a点的去心邻域内展成的洛朗级数为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n\quad(0<|z-a|<R),$$

则称此展式中$1/(z-a)$这一项的系数c_{-1}为$f(z)$在a点的留数，记为$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)$：

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}f(z)dz$$
$$(0<\rho<R),$$

其中积分是沿逆时针方向进行的. 特别地，当$f(z)$在$z=a$处全纯时，

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=0.$$

如果$z=a$是$f(z)$的一阶极点，则

$$\operatorname*{Res}_{z=a}f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

在无穷远点∞处的留数定义为在∞处的洛朗展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$$

的系数a_{-1}的相反数：

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}f(z)=-a_{-1}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)dz.$$

残数(residue)　即“留数”.

留数定理(residue theorem)　亦称残数定理. 关于函数在闭曲线上的积分与函数在闭曲线内部各孤立奇点上的留数之间关系的定理. 设Γ是复数平面上一条可求长若尔当曲线，$a_1,a_2,\cdots,a_n$是位于Γ内部的有限个点，D是包含Γ和Γ内部的一个区域，$f(z)$是$D\backslash\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$内的解析函数，则$f(z)$沿$\Gamma$的正向积分等于$f(z)$在$\Gamma$内部各奇点上留数之和的$2\pi i$倍，即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k}f(z).$$

如果$f(z)$在包含无穷远点的整个复平面上最多除去有限个奇点外都是解析的，则它在所有奇点上的留数的和为零.

残数定理(residue theorem)　即“留数定理”.

对数留数(logarithmic residue)　亦称对数残数. 复变函数论的一个概念. 积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

称为函数$f(z)$关于闭曲线Γ的对数留数. 此名称来源于

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{d}{dz}[\log f(z)].$$

其意义见“辐角原理”.

对数残数(logarithmic residue)　即“对数留数”.

辐角原理(argument principle)　关于解析函数在简单闭曲线内部的零点个数与极点个数之间的关系的定理. 设Γ为一简单闭曲线，函数$f(z)$满足条件：

1. $f(z)$在Γ的内部除可能有有限个极点外是解析的；

2. $f(z)$沿Γ上解析且不为零；

则$f(z)$在简单闭曲线Γ内部的零点个数与极点个数之差，等于当z沿Γ之正向绕行一周时，$\arg f(z)$的改变量$\Delta\arg f(z)$除以2π，即

$$N(f,\Gamma)-P(f,\Gamma)=\frac{\Delta\arg f(z)}{2\pi},$$

这里$N(f,\Gamma)$和$P(f,\Gamma)$分别表示$f(z)$在Γ内部的

零点个数和极点个数. 上式右端的量可写成积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \text{（对数留数）}.$$

鲁歇定理(Rouché theorem)　关于解析函数在区域内部的零点个数的定理. 设 Γ 为一简单闭曲线, 函数 $f(z)$ 及 $\varphi(z)$ 满足条件:

1. 它们在 Γ 上及其内部均解析;

2. 在 Γ 上, $|f(z)|>|\varphi(z)|$;

则函数 $f(z)$ 与 $f(z)+\varphi(z)$ 在 Γ 的内部有同样多的零点, 即

$$N(f+\varphi,\Gamma)=N(f,\Gamma).$$

这里 $N(f+\varphi,\Gamma)$ 和 $N(f,\Gamma)$ 分别表示 $f+\varphi$ 和 f 在 Γ 内部的零点个数.

胡尔维茨定理(Hurwitz's theorem)　关于解析函数序列的各项与它们的极限函数在一条简单闭曲线内部零点个数之间关系的定理. 设 D 是一个区域, D 内的解析函数序列 $f_n(z)$ 在 D 内闭一致收敛于函数 $f(z)\neq 0$, 并设 Γ 是 D 内的任意一条简单闭曲线, 其内部也在 D 内, 且 Γ 不经过函数 $f(z)$ 的零点, 则存在一个依赖于曲线 Γ 的正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 函数 $f_n(z)$ 在 Γ 内部的零点个数等于函数 $f(z)$ 在 Γ 内部的零点个数.

级 数 展 开

幂级数(power series)　一种形状简单而又应用广泛的函数项级数. 设 a 和 $c_0,c_1,c_2,\cdots$ 是复数, z 是复变量, 则称

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

为幂级数. 对于这个幂级数, 具有下列性质的实数 $R(0\leqslant R\leqslant+\infty)$ 是惟一确定的: 若 $|z-a|<R$ 时, 级数收敛, 而当 $|z-a|>R$ 时, 级数发散, 则称这样的 R 为幂级数的收敛半径, 并称圆盘 $|z-a|<R$ 为幂级数的收敛圆. 收敛半径公式

$$R=1/\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$$

称为柯西-阿达马公式. 幂级数在收敛圆内闭绝对一致收敛, 确定一个单值复函数. 又因幂级数在收敛圆内可以逐项微分, 所以, 它在收敛圆内是全纯的. 反之, 在一个区域内全纯的函数 $f(z)$, 在这个区域内的每个点 a 的一个邻域内, 都可以用幂级数表示, 称此幂级数为 $f(z)$ 在 a 处(或 a 的邻域内)的泰勒展式. 表示全纯函数的幂级数称为函数元素. 此外, 称形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^{-n}$$

的级数为以无穷远点为中心的幂级数, 并定义它在 ∞ 处的值为 c_0.

收敛圆(convergence circle)　幂级数的收敛区域. 见“幂级数”.

收敛半径(convergence radius)　幂级数收敛圆的半径. 见“幂级数”.

柯西-阿达马公式(Cauchy-Hadamard formula)　确定幂级数收敛半径的公式. 见“幂级数”.

泰勒定理(Taylor theorem)　函数展为幂级数的定理. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $a\in D$, $K=\{z\mid |z-a|<R\}\subset D$, 则 $f(z)$ 在 K 内能展成幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

且展式是惟一的.

孤立奇点(isolated singularity)　一种特殊的奇点. 复函数的全纯性被破坏的点称为奇点, 具有孤立性的奇点称为孤立奇点. 设 a 为 $f(z)$ 的一个奇点, 当 a 有限时, 令

$$D=\{z\mid 0<|z-a|<R\},$$

R 是某个实数; 当 $a=\infty$ 时, 令

$$D=\{z\mid R^{-1}<|z|<+\infty\},$$

R 是某个实数. 如果 $f(z)$ 在 D 内单值全纯, 则称 a 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点. 这时只有以下三种情形:

1. $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在且有穷, 这时称 a 是 $f(z)$ 的一个可去奇点.

2. $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$, 且 a 为 $1/f(z)$ 的一个 m 阶零点, 这时称 a 是 $f(z)$ 的一个 m 级极点.

3. $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 不存在, 这时称 a 是 $f(z)$ 的一个本性奇点.

可去奇点(removable singularity)　见“孤立奇点”.

极点(pole)　见“孤立奇点”.

本性奇点(essential singularity)　见“孤立奇点”.

洛朗定理(Laurent theorem)　函数在圆环内展为双边幂级数的定理. 在圆环

$$H:\ r<|z-a|<R\quad(r\geqslant 0, R\leqslant+\infty)$$

内解析的函数 $f(z)$ 可展成双边幂级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$

$$(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),$$

$$\Gamma:|\zeta-a|=\rho\quad(r<\rho<R).$$

展式是惟一的. 该展式称为 $f(z)$ 在 a 点的洛朗展开式或洛朗级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad 及 \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

分别称为 $f(z)$ 在 a 点的洛朗展开式的正则部分及主要部分.

洛朗展开式(Laurent expansion) 见"洛朗定理".

洛朗级数(Laurent series) 见"洛朗定理".

内部惟一性定理(interior uniqueness theorem) 关于解析函数在区域内部由有聚点的子集惟一确定的定理. 设 D 为一区域, 在 D 内定义着两个单值解析函数. 如果这两个函数在某一集合 $E \subset D$ 上相等, 而 E 在 D 内有聚点, 则它们在区域 D 内恒等.

阿贝尔定理(Abel theorem) 级数的收敛定理. 如果

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收敛到 s, 则当 z 趋于 1 而保持 $|1-z|/(1-|z|)$ 有界时,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

趋于 s.

陶伯定理(Tauber theorem) 级数的收敛定理. 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

的收敛半径为 1, 如果 $c_n = o(1/n)$, 且当 z 从单位圆内沿以 1 为终点的曲线趋向于 1 时, $f(z)$ 趋向于 A, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

收敛, 其和为 A. 本定理中的 $c_n = o(1/n)$ 可以放宽为 $c_n = O(1/n)$, 或 $n\,\mathrm{Re}\,c_n$ 及 $n\,\mathrm{Im}\,c_n$ 上方有界.

狄利克雷级数(Dirichlet series) 一类重要的无穷级数. 形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

的级数称为狄利克雷级数, 其中 a_n 是常数(实的或复的), 而 $s = \sigma + \mathrm{i}t$ 是复变数. 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\mu_n s}$$

的级数, 称为广义狄利克雷级数, 其中 μ_n 是常数, 且 $0 \leqslant \mu_n \uparrow +\infty$. 若

$$a_0 = 0, \mu_0 = 0, \mu_n = \log n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

则得到狄利克雷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

若令 $\mu_n = n, z = \mathrm{e}^{-s}$, 则得到幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

广义狄利克雷级数(generalized Dirichlet series) 见"狄利克雷级数".

狄利克雷级数的收敛横标(abscissa of convergence of Dirichlet series) 由狄利克雷级数的收敛性决定的一个实数. 狄利克雷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

具有以下性质: 若它在 s_0 收敛, 则任给 δ 满足 $0 < \delta < \pi/2$, 它在角域

$$|\arg(s - s_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$$

内一致收敛, 因此存在实数 α, 使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

在右半平面 $\mathrm{Re}\,z > \alpha$ 收敛, 在 $\mathrm{Re}\,z < \alpha$ 级数发散, α 称为该级数的收敛横标. $\mathrm{Re}\,z > \alpha$ 称为它的收敛半平面. 可以证明

$$\alpha = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\log|s_n|}{\log n} & \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}\right), \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\log|r_n|}{\log n} & \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}\right), \end{cases}$$

其中 $s_n = a_1 + a_2 \cdots + a_n$, $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^s}$$

的收敛横标 β 称为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

的绝对收敛横标. 不难证明 $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1$.

狄利克雷级数收敛半平面(half plane of convergence of Dirichlet series) 由狄利克雷级数的收敛横标决定的右半平面(参见"狄利克雷级数的收敛横标").

渐近展式(asymptotic expansion) 亦称渐近级数. 函数的一种展开式. 对于在角域

$$D = \{z \mid |z| > R > 0, \alpha < \arg z < \beta\}$$

定义的函数 $f(z)$, 如果对于所有固定的 n, 当 $z \in D$, $|z| \to \infty$ 时,

$$z^n \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \cdots - \frac{a_n}{z^n} \right] \to 0$$

成立, 则称级数

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots$$

为 $f(z)$ 的渐近展式或渐近级数, 记为

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots.$$

(参见《数学辞海》第一卷《数学分析》同名条).

渐近级数(asymptotic series) 见“渐近展式”.

指数级数(exponential series) 一类重要的无穷级数. 由指数函数构成的级数，即

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad (1)$$

其中 $\{a_n\}$ 及 $\{\lambda_n\}$ 分别是复数及实数序列，$0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$，而 $s=\sigma+it$，σ 及 t 是实变数. 这种级数是狄利克雷(Dirichlet, P. G. L.)在研究数论时引进的，也称为狄利克雷级数. 当 $\lambda_n=\log n$ 时，这是在解析数论中经常用到的级数；如果还有 $a_n=1$，则 $f(s)$ 是黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$；当 $\lambda_n=n$，$e^{-s}=z$ 时，得到泰勒级数或幂级数. 因此幂级数可以看做指数级数的特例，而后者具有与前者相类似的一些性质：

1. 收敛性. 指数级数有收敛、一致收敛及绝对收敛横标 σ_c，σ_u 及 σ_a，一般地，

$$-\infty \leqslant \sigma_c \leqslant \sigma_u \leqslant \sigma_a \leqslant +\infty.$$

在收敛或绝对收敛半平面 $\sigma>\sigma_c$ 或 $\sigma>\sigma_a$ 内任一点，级数分别收敛或绝对收敛，而在一致收敛半平面 $\sigma>\sigma_u$ 内的任一半平面 $\sigma\geqslant\sigma_u+\varepsilon$(任意 $\varepsilon>0$)上，级数一致收敛. 关于 σ_c，σ_u 及 σ_a，有与求幂级数的收敛半径相类似的公式，当 $\lambda_n=n$ 时，$\sigma_c=\sigma_u=\sigma_a$. 在 $\sigma>\sigma_c$ 内，$f(s)$ 解析.

2. 系数估计. 有与柯西不等式相类似的不等式，这一结果对一类渐近指数级数(附着级数)的推广可用来解决一系列分析中的问题.

3. 奇异点. 例如，如果 $-\infty<\sigma_c<+\infty$，那么当 $a_n\geqslant 0$ 时，$s=\sigma_c$ 是 $f(s)$ 的一个奇异点；当

$$\lim_{n\to\infty}(n/\lambda_n) = 0,$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n) > 0$$

时，$\sigma=\sigma_c$ 是 $f(s)$ 的自然边界；而且在一定条件下，$\sigma=\sigma_c$ 上的任一点是 $f(s)$ 的皮卡点，即在该点的任何邻域内，$f(s)$ 取任何有限复数值无穷多次，至多有一例外.

4. 整函数. 当

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\log n/\lambda_n) < +\infty, \quad \sigma_c = \sigma_a = -\infty$$

时，$f(s)$ 是一整函数，可得到(1)的系数及指数与 $f(s)$ 的增长性之间的关系(在 $\sigma_c=\sigma_a$ 为有限时有相应结果). 还可研究 $f(s)$ 值的分布，在一定条件下，s 平面上任何水平直线是 $f(s)$ 的茹利亚线，即在以该线为中线的任何水平带形内，$f(s)$ 取任何有限复数值无穷多次，至多有一例外.

关于求和法及陶伯型定理，也有与幂级数情形相类似的结果. 指数级数可看做拉普拉斯-斯蒂尔杰斯变换

$$\int_0^{+\infty} e^{-su} d\alpha(u)$$

的一个特例.

几何函数论

最大模定理(maximum modulus theorem) 复变函数论中有关函数值的模的一个重要定理. 若 $f(z)$ 是区域 D 内的非常数的解析函数，则 $|f(z)|$ 在 D 内部取不到最大值. 换言之，若 $f(z)$ 在 D 内解析，且有 $a\in D$ 使得 $|f(a)|\geqslant|f(z)|$ 对 D 内一切 z 成立，则 $f(z)$ 必为常数. 又若 $f(z)$ 是有界区域 D 上的非常数解析函数且在 $\overline{D}$ 上连续，则 $|f(z)|$ 只能在边界 ∂D 上达到最大值. 最大模定理可以由解析函数的平均值定理得到证明，也能由解析函数实现的映射的几何性质得到解释.

广义最大模定理(generalized maximum modulus theorem) 最大模定理的推广. 设 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析且有界. 若在 D 的边界上除去有限个点 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ 外，有

$$\overline{\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in D, \zeta\in\partial D}}} |f(z)| \leqslant M,$$

则在 D 内恒有 $|f(z)|\leqslant M$.

弗拉格曼-林德勒夫定理(Phragmen-Lindelöf theorem) 最大模定理的重要推广. 设 $f(z)$ 在角形区域

$$D: |\arg z| < \pi/2\alpha \quad (\alpha \geqslant 1/2)$$

内解析，对于每个有穷边界点 ζ，有

$$\overline{\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in D, \zeta\in\partial D}}} |f(z)| \leqslant M,$$

而当 $|z|$ 充分大时，存在常数 K 及 $b<\alpha$，使得

$$|f(z)| \leqslant K e^{|z|^b},$$

则在 D 内恒有 $|f(z)|\leqslant M$. 更一般的形式是：若 $f(z)$ 在

$$D: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha} \quad \left(\alpha \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

内对于 ∂D 上的每个有穷点 ζ，有

$$\overline{\lim_{\substack{z\to\zeta \\ z\in D, \zeta\in\partial D}}} |f(z)| \leqslant M,$$

且

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\alpha} \leqslant 0,$$

其中

$$M(r) = \sup_{\substack{|z|=r \\ z\in D}} |f(z)|,$$

则在 D 内恒有 $|f(z)|\leqslant M$. 该定理由弗拉格曼(Phragmen, L. E.)、林德勒夫(Lindelöf, E. L.)于 1908 年得到.

林德勒夫渐近定理(Lindelöf's asymptotic value theorem) 有关无穷角域内解析函数的极限值定理. 设函数 $f(z)$ 在闭角域 $\overline{D}: \alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$ 内除无

穷远点外解析有界，在角的一边上，当 $z\to\infty$ 时，有 $f(z)\to a$；在角的另一边上，当 $z\to\infty$ 时，有 $f(z)\to b$；则 $a=b$，且在 $\overline{D}$ 内当 $z\to\infty$ 时，一致地有 $f(z)\to a$.

施瓦兹引理(Schwarz's lemma)　复变函数几何理论中具有深远影响的基本定理. 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$|f(z)|\leqslant 1$，$f(0)=0$，则：

1. $|f(z)|\leqslant|z|$.

2. $|f'(0)|\leqslant 1$.

如果对一个 $z\neq 0$，有 $|f(z)|=|z|$ 或 $|f'(0)|=1$，则 $f(z)=\lambda z$，此处 λ 为常数且 $|\lambda|=1$.

这个引理表示：对于由这样的 $w=f(z)$ 构成的映射，z 的像到原点的距离比 z 本身到原点的距离近；如果有一点使得两者相等，则 $f(z)$ 是一个旋转映射. 该定理首先由施瓦兹(Schwarz, H. A.)所发现.

广义施瓦兹引理(generalized Schwarz's lemma)　施瓦兹引理的推广. 若 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，且 $|f(z)|<1$，则对于 $|z|<1$ 内任意两点 z_1，z_2，有

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right|\leqslant\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|$$

及

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2},$$

其中，等号仅当 $f(z)$ 为分式线性变换时成立.

高斯-吕卡定理(Gauss-Lucas theorem)　关于多项式零点位置的定理. 该定理断言：多项式 $P_m(z)$ 的导数的一切零点包含在 $P_m(z)$ 的零点的凸包内.

阿达马三圆定理(Hadamard's three-circles theorem)　关于圆环内解析函数在圆环的同心圆周上的最大模的增长性定理. 该定理可叙述为：若 $f(z)$ 在同心圆环 $\rho<|z|<R$ 内单值全纯且不恒为零，令

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|\quad(\rho<r<R),$$

则 $\log M(r)$ 在 $\rho<r<R$ 内是 $\log r$ 的凸函数，即有

$$\log M(r)\leqslant\frac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_1)+\frac{\log r-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_2),$$

其中 $\rho<r_1\leqslant r\leqslant r_2<R$.

哈代凸性定理(Hardy convexity theorem)　关于圆内解析函数的增长性的一个定理. 该定理可叙述为：设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，

$$M_p(r,f)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right]^{1/p}\quad(0<p<+\infty),$$

$$M_\infty(r,f)=\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|.$$

则对于 $0<p\leqslant+\infty$，有：

1. $M_p(r,f)$ 是 r 的增函数.

2. $\log M_p(r,f)$ 是 $\log r$ 的凸函数.

保角变换(conformal transformation)　保持两条曲线间夹角的大小和方向不变的变换. 设 $f(z)$ 是区域 D 内的一个连续函数. 若 $f(z)$ 将从 D 内的每一点 z 出发的任意两条在 z 有切向的连续曲线变为 w 平面上从 $w=f(z)$ 出发的两条在 $w=f(z)$ 有切向的连续曲线，并且保持夹角的大小和方向不变，则称 $f(z)$ 是区域 D 到 w 平面的保角变换. 若函数 $f(z):D\to C$ 为保角变换并且

$$\lim_{z\to a}\frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}$$

也存在，称 $f(z)$ 为共形(或保形)映射. 如果 $f(z)$ 是解析的且对任意 z 有 $f'(z)\neq 0$，则 $f(z)$ 是共形的；反之亦然. 区域 D 内的单叶解析函数所实现的映射是 D 到 w 平面的共形映射.

解析函数的保域性(preservation of region by an analytic function)　解析函数的特性之一. 指不恒为常数的解析函数将区域变为区域的变换性质.

共形映射(conformal mapping)　单叶解析函数所表示的映射. 见“保角变换”.

边界对应定理(theorem of boundary correspondence)　复变函数几何理论的基本定理之一. 若 $w=f(z)$ 将单连通区域 D 共形映射成单连通区域 G，D 和 G 分别由简单闭曲线 C 和 Γ 围成，则 $f(z)$ 可以开拓为 $F(z)$，且满足条件：

1. $F(z)=f(z)$，$z\in D$.

2. $F(z)$ 在 $\overline{D}=D+C$ 上连续.

3. $F(z)$ 将 C 双方单值且双方连续地变换成 Γ.

伸缩率(rate of dilatation-magnificationratio)　复变函数的导数的模的几何意义. 设 $w=f(z)$ 在区域 D 内连续，$z_0\in D$，在 z_0 点有导数 $f'(z_0)\neq 0$. 此时由于

$$|f'(z_0)|=\lim_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|},$$

而

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$$

可以看做在 $w=f(z)$ 的作用下向量 $z-z_0$ 的伸缩率，所以称导数的模 $|f'(z_0)|$ 为函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的伸缩率.

旋转角(angle of rotation)　复变函数的导数的辐角的几何意义. 设 $w=f(z)$ 在区域 D 内连续，$z_0\in D$，$f(z)$ 在 z_0 点有导数 $f'(z_0)\neq 0$，则当经过 z_0 点的任一曲线 L 在 $w=f(z)$ 的作用下变为它在 w 平面上的像 Λ 时，Λ 在 $w_0=f(z_0)$ 处的切线与实轴之间的夹角恰好等于 L 在 z_0 处的切线与实轴之间的夹角与 $\arg f'(z_0)$ 之和，因而称 $\arg f'(z_0)$ 为映射

$w=f(z)$在z_0点的旋转角.

映射的不动点(fixed point of mapping) 分析数学的一个基本概念.方程$z=f(z)$的解称为映射$w=f(z)$的不动点.例如$w=1/z$有不动点$z=\pm 1$.

反演映射(inverse mapping) 一种特殊的映射.映射$w=1/\bar{z}$称为反演映射.它把单位圆内(外)一点映射到单位圆外(内)一点.这两点在从原点引出的同一条射线上.

开映射定理(open mapping theorem) 复变函数几何理论的基本定理之一.该定理断言:若D是一个区域,$f(z)$是D内的非常值的解析函数,则$f(D)$也是一个区域.

黎曼映射定理(Riemann mapping theorem) 复变函数几何理论最基本、最重要的定理,是几何函数论的基础.设D是扩充z平面上的一个单连通区域,其边界点不止一个点,$a\in D$,则有且只有一个在D内单叶解析的函数$w=f(z)$将D共形映射为单位圆$|w|<1$,且适合条件$f(a)=0,f'(a)>0$.上述定理称为黎曼映射定理.若设

$$F(z)=\frac{f(z)}{f'(a)},$$

则$F(z)$将区域D共形映射为圆$|w|<R$,而且$F(0)=0,F'(0)=1$.数$R=1/f'(a)$称为区域D在a点处的映射半径.

黎曼映射定理首先由黎曼(Riemann,(G. F.)B.)于1851年在他的博士论文中给出,他将此问题化为调和函数的狄利克雷问题,并应用狄利克雷原理求解.但外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))和阿达马(Hadamard,J. (-S.))指出证明中所用的狄利克雷原理有问题,因而黎曼的证明不能被接受.随后,便发现了许多方法,找到了狄利克雷问题存在性的证明.如施瓦兹(Schwarz,H. A.)的交错法,庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)的扫除法,佩龙(Perron,O.)的次调和函数方法,而希尔伯特(Hilbert,D.)则完善了黎曼的原论.蒙泰尔(Montel,P. A.)应用正规族理论给出定理一个简明的证明.

映射半径(mapping radius) 见"黎曼映射定理".

克里斯托费尔-施瓦兹公式(Christoffel-Schwarz formula) 多角形区域共形映射函数的表示式.设$w=f(z)$是将上半平面D:$\operatorname{Im}z>0$共形映射到多角形区域G的单叶解析函数,z平面实轴上的n个点$a_1,a_2,\cdots,a_n(-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_n<+\infty)$对应于$w$平面上多角形区域$G$的顶点$w_1,w_2,\cdots,w_n$;$\lambda_1\pi,\lambda_2\pi,\cdots,\lambda_n\pi(0<\lambda_j<2,j=1,2,\cdots,n)$表示多角形$G$在顶点$w_1,w_2,\cdots,w_n$处的内角,则有克利斯托费尔-施瓦兹公式

$$f(z)=C_1\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}(\zeta-a_k)^{\lambda_k-1}\mathrm{d}\zeta+C_2,$$

其中C_1,C_2是两个复常数,$z_0\in\overline{D},z_0\neq\infty$.

多边形映射(polygonal mapping) 一类特殊的共形映射.一类把上半平面双方单值共形映射成多角形区域的映射.它是由克里斯托费尔-施瓦兹公式确定的映射.

***n*连通区域到平行割线区域的映射**(mapping of a multiply-connected domain onto a parallel slit domain) 多连通区域共形映射的一种.设D为z平面上的一个n连通区域,其余集的每一分支都不退化为一个点,$\infty\in D$,θ为一实数,则存在D内的一个单叶亚纯函数$w=f(z)$,满足条件:

1.将区域D共形映射到w平面的平行割线区域(全平面上去掉几条互相平行的线段之后所成的区域称为平行割线区域),这些平行割线与实轴的夹角为θ;

2.把$z=\infty$映射为$w=\infty$,在$z=\infty$的邻域内,$f(z)$的展开式具有以下形式:

$$f(z)=z+\frac{a_1}{z}+\cdots.$$

对于z平面上的有限n连通区域D,这个映射是惟一的.

***n*连通区域到螺旋割线区域的映射**(mapping of a multiply-connected domain onto a logarithmic spiral slit domain) 多连通区域共形映射的一种.设D为z平面上的一个有界n连通区域(包含点$z=0$),θ为一实数,则在D内存在一个单叶亚纯函数$w=f(z)$,满足条件:

1.将D保形映射到倾斜角(从原点出发的射线与螺线的交角)为θ的螺旋割线区域(平面上去掉一些对数螺线所成的区域);

2.将$z=0$变为$w=\infty$,将$z=a(a\neq 0,a\in D)$变为$w=0$,且在$z=0$的邻域内,$f(z)$的展开式具有以下形式:

$$f(z)=z+a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots.$$

满足给定条件的映射是惟一的.

***n*连通区域到圆界区域的映射**(mapping of a multiply-connected domain onto a domain bounded by circular arcs) 多连通区域共形映射的一种.设D为z平面上n连通区域(包含点∞),其余集的每一个分支都不退化为一个点,则存在D内单叶亚纯函数$w=f(z)$,满足条件:

1.将D保形映射到w平面的一个n连通圆界区域(边界是由一些圆周构成的区域);

2.将$z=\infty$变为$w=\infty$,在$z=\infty$的邻域内$f(z)$具有如下形式的展开式:

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \cdots.$$

满足给定条件的映射是惟一的.

单叶函数论(theory of univalent function) 亦称几何函数论.是单复变函数论的一个重要分支.单叶函数指定义在平面区域上且函数值与自变量一一对应的亚纯函数.

黎曼(Riemann,(G. F.)B.)在 1851 年的学位论文中指出的映射定理,即“边界点不只一个的单连通区域共形等价于单位圆盘”,成为单叶函数理论的奠基石.20 世纪初,在对单位圆盘内满足规范条件

$$f(0) = f'(0) - 1 = 0$$

的单叶解析函数类(S 类)以及单位圆外以∞为单极点且留数为 1 的单叶函数类(Σ 类)的研究中,格朗沃尔面积定理、克贝 1/4 定理、克贝偏差定理等显示单叶函数内在美的第一批结果的建立拉开了单叶函数研究的序幕.

1916 年,比伯巴赫(Bieberbach,L.)提出一个著名猜测:S 类函数的幂级数展开式系数满足 $|a_n| \leqslant n, n=2,3,\cdots$,且仅对于克贝函数

$$k(z) = z(1 - z)^{-2}$$

及其旋转等号成立.它是那样简单而精美,它始终是单叶函数研究的中心课题之一,也是最著名的数学难题之一,在半个多世纪中它吸引着众多数学家的努力,产生了研究单叶函数的许多方法和相关论题.例如,1923 年,勒夫纳(Loewner,C.)引入参数表示法;1940 年前后,席费尔(Schiffer,M. M.)与戈卢津(Голузин,Г. М.)创立的变分法;1939 年,格隆斯基(Grunsky,H.)给出以其名字命名的重要不等式.1936 年,罗伯森(Robertson,M. S.)提出下面的猜测:对于 S 类中的单叶奇函数,有

$$1 + |a_3|^2 + |a_5|^2 + \cdots + |a_{2n-1}|^2 \leqslant n.$$

由 S 类函数的平方根变换,罗伯森猜想蕴涵比伯巴赫猜想.1971 年,米林(Милин)猜测:若 $f \in S$ 且

$$\log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} r_n z^n,$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}(n - k + 1)\left(k|r_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \leqslant 0.$$

基于列别杰夫-米林的一个不等式,米林猜想蕴涵罗伯森猜想,从而也蕴涵比伯巴赫猜想.1984 年,美国数学家布朗基(Branges,L. de)基于勒夫纳的参数表示法并利用雅可比多项式的一个结果证明了米林猜想,从而使比伯巴赫猜想得以证实.

单叶函数的种种泛函极值问题也是单叶函数研究的重要内容,并取得了一系列进展.例如,1974 年,伯恩施坦(Bernstein,A. R.)利用他所创立的一种对称化方法证明了:对于 $f \in S$,$0 < r < 1$,$0 < p < +\infty$,有

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |k(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

其中 $k(z)$是克贝函数.

近年来在用极端点和支撑点理论研究单叶函数的线性泛函以及对多连通区域单叶函数的研究方面也已取得显著的成果.关于单叶函数边界性质的研究重新引起了一些数学家的重视.在 20 世纪初,卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)曾对单叶函数的边界对应做过精美的刻画.最近,马柯罗夫(Макаров)和波默伦克(Pommerenke,C. M. W.)等人的研究则将单叶函数的边界性质同像域边界子集的豪斯多夫测度联系起来.

几何函数论(geometric theory of functions) 即“单叶函数论”.

***S* 类**(class S) 一类单叶函数.它是由全体在单位圆$\{z \mid |z| < 1\}$内具有展开式

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

的单叶解析函数构成的集合.

Σ 类(class Σ) 一类单叶函数.它是由全体在单位圆$\{z \mid |z| < 1\}$外具有展开式

$$g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots \quad (1 < |z| < +\infty)$$

的单叶函数构成的集合.

面积原理(area principle) 亦称格朗沃尔面积定理.Σ 类函数展开式系数的一个性质定理.该定理断言:若 $g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots \in \Sigma$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1.$$

之所以称其为面积原理,是因为定理的结论是根据 $g(\{|z| > \rho\})$的余集的面积大于零的几何事实而得到的,这里 ρ 可以是任何大于 1 的数.此定理由格朗沃尔(Gronwall,T. H.)于 1915 年提出.

格朗沃尔面积定理(Gronwall's area principle) 即“面积原理”.

克贝1/4 定理(Koebe's one-quarter theorem) 关于 S 类函数映射性质的一个定理.该定理断言:若 $f \in S$,则单位圆盘在 f 映射下的像包含以原点为中心以 1/4 为半径的圆盘.此定理由克贝(Koebe,P.)于 1907 年提出.

克贝偏差定理(Koebe's distortion theorem) 关于 S 类函数及其导函数模的估计的定理.该定理断言:若 $f \in S$,z 是单位圆盘中的点,则

$$|z|(1+|z|)^{-2} \leqslant |f(z)| \leqslant |z|(1-|z|)^{-2},$$

$$(1-|z|)(1+|z|)^{-3} \leqslant |f'(z)| \leqslant (1+|z|)(1-|z|)^{-3}.$$

若其中某个等号成立,则 f 必是克贝函数的一个适当的旋转.

克贝函数的旋转(rotation of the Koebe function) 克贝函数经过旋转而得到的函数. 函数 $k_\theta(z)=e^{i\theta}k(e^{i\theta}z)$ 称为克贝函数的旋转,其中 $k(z)=z(1-z)^{-2}$ 是克贝函数. 它是 S 类上许多泛函极值问题的极值函数,在单叶函数理论中起着十分重要的作用.

比伯巴赫猜想(Bieberbach conjecture) 比伯巴赫(Bieberbach,L.)于 1916 年提出的一个著名数学难题. 他猜测 S 类中函数的幂级数展开式系数满足 $|a_n|\leqslant n(n=2,3,\cdots)$,且仅对于克贝函数及其旋转等号成立. 在 68 年漫长岁月中,众多数学家从不同的侧面用不同的方法为攻克这一难题做了种种努力. 1984 年,比伯巴赫猜想终于被美国数学家布朗基(Branges,L. de)所证明. 他实际上证明了更强的米林猜想,由米林猜想可以推出罗伯森猜想,而罗伯森猜想蕴涵比伯巴赫猜想.

在解决这个猜想的过程中,下述重要结果值得提到:在提出猜想的同时,比伯巴赫本人利用面积定理证明了 $|a_2|\leqslant 2$;1923 年,勒夫纳(Loewner,C.)引入参数表示法并证明了 $|a_3|\leqslant 3$;1955 年,加拉贝迪安(Garabedian,P. R.)和席费尔(Schiffer,M. M.)利用席费尔与戈卢津(Голузин,Г. М.)创立的变分法证明了 $|a_4|\leqslant 4$;1968 年,佩德森(Pederson,R.)与奥玛(Ozawa,M.)先后用格隆斯基不等式证明了 $|a_6|\leqslant 6$;1972 年,佩德森与席费尔利用格隆斯基不等式的一种推广形式证明了 $|a_5|\leqslant 5$;

对系数全体的第一个较好的估计是 $|a_n|\leqslant en$,由李特尔伍德(Littlewood,J. E.)在 1925 年给出. 1951 年,巴赫列维奇(Базилевиц)证明了 $|a_n|<en/2+c$,其中 c 为一绝对常数. 1972 年,菲茨杰尔德(Fitzgerald,C. H.)证明了 $|a_n|\leqslant\sqrt{n/6}\cdot n$. 1955 年,海曼(Hayman,W. K.)证明了对于每个 $f\in S$,存在极限

$$\beta=\lim_{n\to\infty}|a_n|/n\leqslant 1,$$

且仅当 f 是克贝函数及其旋转时才有 $\beta=1$.

罗伯森猜想(Robertson's conjecture) 罗伯森(Robertson,M. S.)于 1936 年提出的关于 S 类中奇函数系数的一个猜想. 在此之前李特尔伍德(Littlewood,J. E.)与佩利(Paley,R. E. A. C.)曾猜测奇函数系数的模不超过 1,不久即发现此猜测不成立. 罗伯森猜测奇函数系数应满足不等式

$$1+|a_3|^2+|a_5|^2+\cdots+|a_{2n-1}|^2\leqslant n,$$

这一猜想已被布朗基(Branges,L. de)证实. 由 S 类与其奇函数子类元素间的一一对应: $f(z)\leftrightarrow\sqrt{f(z^2)}$,罗伯森猜想蕴涵比伯巴赫猜想.

米林猜想(Milin conjecture) 苏联数学家米林(Милин)于 1971 年提出的一个猜想:若 $f\in S$,且

$$\log\frac{f(z)}{z}=2\sum_{n=1}^{\infty}r_nz^n,$$

则对于 $n=1,2,\cdots$,有

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\left(k|r_k|^2-\frac{1}{k}\right)\leqslant 0.$$

根据列别杰夫-米林的一个不等式可得

$$1+|a_3|^2+\cdots+|a_{2n+1}|^2$$
$$\leqslant(n+1)\exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\left(k|r_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right\}.$$

因此,米林猜想蕴涵罗伯森猜想,从而蕴涵比伯巴赫猜想. 米林猜想已被布朗基(Branges,L. de)证实.

单叶函数参数表示法(parametric representation method of univalent functons) 一种研究单叶函数的方法. 其基本思想是将函数的像域嵌入一个连续递增区域族中,这个区域族可以用一个微分方程来描述. 布朗基(Branges,L. de)应用这个方法证实了比伯巴赫猜想. 单叶函数参数表示法是由勒夫纳(Loewner,C.)于 1923 年首先提出并为库法列夫(Куфарев,K.)所发展的.

勒夫纳微分方程(Loewner differential equation) 一类偏微分方程. 所谓勒夫纳微分方程,是指方程

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t}=-f(z,t)\frac{1+k(t)f(z,t)}{1-k(t)f(z,t)}\quad(0\leqslant t<+\infty),$$

这里 $k(t)$ 是模等于 1 的连续复值函数. 若 $f(z,t)$ 是勒夫纳微分方程在初始条件 $f(z,0)=z$ 下的解,则它的像域是由单位圆盘除去从单位圆周上的一点出发而不通过原点的一条若尔当弧后所得到的域. 任何满足 $f(0)=0,f'(0)=1$ 的在单位圆 $|z|<1$ 内单叶解析的函数都可以用形如 $e^tf(z,t)$ 的函数任意精确地逼近.

变分方法(variational method) 一种研究单叶函数的方法. 考虑在 S 类(或其他单叶函数类)上给定的实值泛函的最大值问题,变分方法的思想是,做出极值函数 f 在 S 类中的微小变分 f_λ,因为这一变分不会使所给泛函的值增加,从而得到极值函数所满足的一个关系式——席费尔微分方程,由这一方程可获得关于极值函数及其像域的一些定性结果. 变分方法是由席费尔(Schiffer,M. M.)于 1938 年首先提出并为戈卢津(Голузин,Г. М.)所发展的.

格隆斯基不等式(Grunsky inequality) 格隆斯基(Grunsky,H.)于 1939 年给出的一个不等式,它是面积原理的一种推广. 是研究单叶函数的重要手段之一,其具体表述如下:设 $g\in\Sigma$,

$$\log\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}z^{-k}\zeta^{-l},$$

则

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}\lambda_k\lambda_l\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_k|^2}{k}\ (\lambda_k \in \mathrm{C}).$$

这里 Σ 表示单位圆外的一类单叶函数(参见"Σ 类").

极端点(extreme points) 复平面上拓扑的基本概念之一. 设 X 是复数域上的拓扑向量空间,E 是 X 的子集,$x\in E$. 若 x 不能表为 $x=ty+(1-t)z$ 使得 $t\in(0,1)$,$y,z\in E$且 $y\neq z$,则 x 称为 E 的极端点. 如果存在 X 上的连续线性泛函 L,在 E 上不为常数,使得任一 $y\in E$ 有 $\mathrm{Re}\{L(x)\}\geqslant\mathrm{Re}\{L(y)\}$,则称 x 是 E 的支撑点. 通过寻求单叶函数类闭凸包的极端点和支撑点的表达式来研究各种线性泛函的极值问题是近几年发展起来的一个重要方法.

支撑点(support points) 见"极端点".

素端(prime ends) 包含无穷远点的单连通区域的一类边界点. 设 G 是单连通区域,$\infty\in G$. G 中以可达边界点为端点的若尔当弧 C 称为 G 的横截线,C 将 G 分成两个分支,记有界分支为 $\mathrm{int}C$. 若横截线序列$\{C_n\}$满足

$$\overline{C}_n \cap \overline{C}_{n+1} = \varnothing,\ \mathrm{int}C_{n+1} \subset \mathrm{int}C_n,\ \mathrm{diam}C_n \to 0,$$

则称$\{C_n\}$是 G 的零链. 设$\{C_n\}$与$\{\widetilde{C}_n\}$是 G 的两个零链,若对任意 m 都存在 n,使得

$$\mathrm{int}\widetilde{C}_n \subset \mathrm{int}C_m,\quad \mathrm{int}C_n \subset \mathrm{int}\widetilde{C}_m,$$

则称零链$\{C_n\}$与$\{\widetilde{C}_n\}$等价. 一个零链等价类称为 G 的一个素端,G 的素端全体称为 G 的卡拉西奥多里边界,简称卡氏边界. 早在 1913 年,卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)就已证明单连通区域间的共形映射可同胚开拓到卡氏边界.

区域的横截线(crosscut of a domain) 见"素端".

区域的零链(null-chain of a domain) 见"素端".

卡拉西奥多里边界(Carathéodory boundary) 见"素端".

布洛赫定理(Bloch theorem) 关于闭圆上解析函数的单叶性的定理. 该定理断言:若$f(z)$在 $\Delta=\{z\,|\,|z|\leqslant1\}$上解析,$f(0)=0$,$f'(0)=1$,则$f(z)$在一个圆 $s\subset\Delta$ 内单叶,且$f(s)$包含一个半径为 1/4 的圆(单叶圆). 设 $\mathscr{F}$ 是满足以下条件的函数族:$f(z)$在$|z|<1$ 解析,$f(0)=0$,$f'(0)=1$,对于 $\mathscr{F}$ 中的函数 f,$\beta(f)$是$f(\Delta)$所包含的单叶圆的半径的上确界,则称 $B=\inf\{\beta(f)\,|\,f\in\mathscr{F}\}$为布洛赫常数. 按照布洛赫定理,$B\geqslant1/4$;由于 $f(z)=z\in\mathscr{F}$,所以 $B\leqslant1$. 已经证明 $\sqrt{3}/4\leqslant B\leqslant0.47$,但目前尚不知它的确切值. 又设 $\lambda(f)=\sup\{r\,|\,r$ 是 $f(\Delta)$所包含圆的半径,$f\in\mathscr{F}\}$,则 $L=\inf\{\lambda(f)\,|\,f\in\mathscr{F}\}$称为兰道常数. 显然 $B\leqslant L$. 已经证明 $0.5\leqslant L\leqslant0.56$,所以 $L>B$.

布洛赫常数(Bloch's constant) 见"布洛赫定理".

兰道常数(Landau's constant) 见"布洛赫定理".

拟共形映射(quasiconformal mapping) 几何函数论的一个重要分支,对数学的其他领域有着广泛而深远的影响,其研究方法也很有特色. 关于平面拟共形映射的严格定义有几何与分析两种. 这两种定义是等价的.

1. 几何定义:令 D 是平面上一个区域,Γ 是 D 的若尔当曲线族,ρ 是定义在 D 上的非负波莱尔函数. 记 $P(\Gamma)$是满足

$$\int_{\gamma}\rho|\mathrm{d}z| \geqslant 1$$

对一切 γ 成立的 ρ 函数全体,

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in P(\Gamma)}\int_{D}\rho^2|\mathrm{d}z|$$

称为曲线族 Γ 的模. D 上的保持定向的同胚映射 f 称为 K 拟共形映射,当且仅当存在数 $K>0$,对一切 D 上的曲线族 Γ,$M(\Gamma)/K\leqslant M(f(\Gamma))\leqslant KM(\Gamma)$.

2. 分析定义:D 上的保持定向的同胚 f 称为是 K 拟共形映射,当且仅当 f 是线上绝对连续(简称 ACL 性质),并且

$$\max_{\alpha}|\partial_\alpha f(z)| \leqslant K\min_{\alpha}|\partial_\alpha f(z)|$$

在 D 上几乎处处成立,其中 ∂_α 是沿 α 方向的导数.

关于拟共形映射的发展,有一个漫长的历史过程. 最早引入拟共形映射的是格勒奇(Grötzsch,H.). 1928 年,格勒奇为了证明皮卡定理的一个推广引进了拟共形映射,与此同时,他还研究方形到矩形的保持顶点对应的拟共形映射的极值映射,即与共形映射最为接近的那个映射. 他指出,极值映射是仿射拉伸. 1935 年,拉夫连季耶夫(Лаврентьев,M. A.)从偏微分方程的角度研究这类映射. 1936 年,阿尔福斯(Ahlfors,L. V.)从几何函数论的角度研究拟共形映射. 1939 年,泰希米勒(Teichmüller,O.)把平面拟共形映射推广到黎曼面上,研究黎曼面上的拟共形映射的极值映射,建立了极值拟共形映射与黎曼面上全纯两次微分空间的内在联系;此外他还证明了黎曼面上拟共形映射的同伦类中极值映射的存在性和惟一性,从而给出了黎曼面的模空间的一个参数化.

20 世纪 60 年代初,阿尔福斯和伯斯(Bers,L.)从泰希米勒的这些理论出发,用拟共形映射作为工具,系统地建立了泰希米勒空间理论. 近年来,拟共形映射理论又向深度和广度发展,成为现代数学的一个非常活跃的分支. 拟共形映射的经典理论包括阿尔福斯-伯斯拟共形映射存在定理,莫利偏差定

理，边值问题的拟圆理论及其应用等.

拟共形映射理论有着极为丰富的成果，这些理论在椭圆型偏微分方程中占有重要地位. 由于拟共形映射理论的发展，有着悠久历史的克莱因群理论成为现代数学的一个重要领域. 20 世纪 80 年代初，沙利文(Sullivan, D. P.)的几篇文章将拟共形映射理论应用于复解析动力系统；瑟斯顿(Thurston, W.)则系统地研究了黎曼面上拟共形映射的拓扑结构，用几何与拓扑的观点研究这种结构与泰希米勒空间的模变换的对应关系，以此来解决三维流形理论中的重大问题. 拟共形映射理论同几何、分析的各个分支都有联系，成为研究现代数学的重要工具.

拟共形映射存在定理(existence theorem on quasiconformal mappings)　平面拟共形映射理论的一个基本定理. 即贝尔特拉米方程 $\partial_{\bar{z}}f(z)-\mu(z)\partial_z f(z)=0$ 的解的存在性和惟一性定理，其中 $\mu(z)$是扩充复平面上的复值解析函数，满足

$$\|\mu\|_\infty = \text{ess sup}|\mu(z)| \leqslant K < 1.$$

令 $\mathscr{M}(\hat{\mathbb{C}})$是所有这种 μ 所成的集合. 存在定理断言：对任何 $\mu\in\mathscr{M}(\hat{\mathbb{C}})$，存在惟一的 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的拟共形映射，记为 w^μ，满足规范条件：

$$w^\mu(0)=0,\ w^\mu(1)=1,\ w^\mu(\infty)=\infty,$$

而且 w^μ 的复特征

$$\frac{\partial_{\bar{z}}w^\mu(z)}{\partial_z w^\mu(z)}$$

恰为$\mu(z)$，即 w^μ 满足贝尔特拉米方程. 从证明可以看出，对任何固定的 $\zeta\in\hat{\mathbb{C}}$，映射 $\mu\mapsto w^\mu(\zeta)$ 是$M(\hat{\mathbb{C}})$上的全纯函数，更确切地，这一函数可以表示为形式：

$$w^\mu(\zeta)=\zeta+p\mu(\zeta)+o(\|\mu\|),\ \mu\to 0,$$

其中$o(\|\mu\|)$在 $\hat{\mathbb{C}}$ 的任一紧子集上一致趋于 0，且

$$p\mu(\zeta)=-\frac{1}{\pi}\iint\frac{\zeta(\zeta-1)\mu(z)}{z(z-1)(z-\zeta)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

存在性定理的最早证明属于莫利(Morry, C. B.)(1938 年)，只是因为术语和重点的不同最终掩盖了证明本身与这一理论的联系. 后来，阿尔福斯(Ahlfors, L. V.)和伯斯(Bers, L.)应用考尔德伦-赞格蒙理论(参见《调和分析》)给出了存在性定理的一个简洁而漂亮的证明.

莫利偏差定理(Morri distortion theorem)　拟共形映射理论中的一个重要定理. 设 $w=f(z)$是$|z|<1$ 到$|w|<1$ 上的 K 拟共形映射，满足规范条件$f(0)=0$，则对 $z_1\neq z_2$，

$$|f(z_1)-f(z_2)|<16|z_1-z_2|^{1/k}.$$

这一结果说明，f 满足赫尔德条件. 莫利定理说明，f 可连续扩张到闭圆$|z|\leqslant 1$ 上，而且这一扩张是同胚. 从这个定理可推出紧性定理：单位圆到自身的满足规范条件$f(0)=0$的 K 拟共形映射族关于一致收敛构成列紧族.

拟共形映射的边值问题(boundary value problem of quasiconformal mapping)　拟共形映射的扩张问题. 设 $h(x)$是实轴上严格单调上升的连续函数，如果对一切 $x,t,t>0$，

$$\frac{1}{\rho}\leqslant\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}\leqslant\rho$$

对某一 ρ 成立，则称 $h(x)$为 ρ 拟对称函数. ρ 拟对称性完全刻画了上半平面的拟共形映射. 容易看出，任何一个上半平面的拟共形映射在实轴上的限制满足 ρ 拟对称性；反之，博灵(Beurling, A.)与阿尔福斯(Ahlfors, L. V.)证明了任一实轴上的 ρ 拟对称函数 $h(x)$总可以扩张为上半平面的拟共形映射，他们通过 h 构造重要的拟共形映射(称为博灵-阿尔福斯扩张)，

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^1(h(x+y)+h(x-y))\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{i}}{2}\int_0^1(h(x+y)-h(x-y))\mathrm{d}y,$$

指出 f 是 h 的同胚扩张，而且是 ρ^2 拟共形映射. 在空间中也有类似的扩张问题. 20 世纪 80 年代初土奇亚(Tukia, P.)的几篇文章较为彻底地解决了高维欧氏空间的拟共形映射的扩张问题.

拟对称函数(quasisymmetric function)　见“拟共形映射的边值问题”.

拟圆(quasicircle)　拟共形映射理论中的重要概念. 首先由阿尔福斯(Ahlfors, L. V.)提出的一个与拟共形映射有关的概念. 设 C 是平面上一条若尔当曲线，如果 C 是平面上一圆周在 K 拟共形映射下的像，则称 C 为 K 拟圆. 阿尔福斯证明了以下两个关于拟圆的等价定义. 令 $b\geqslant 1$，C 是复平面上的若尔当曲线，$z_1,z_2\in C$ 把 C 分成两段子弧 C_1,C_2. 如果

$$\min\{\text{diam } C_1,\text{diam } C_2\}\leqslant b|z_1-z_2|,$$

则 C 称为 b 有界转折曲线. 第一个等价定义是：C 是 K 拟圆，当且仅当 C 是 $b(k)$有界转折曲线. 第二个等价定义是通过拟共形反射给出的. 令 C 是若尔当曲线把平面 $\mathbb{C}$ 分为 D_1,D_2，一个反向的 K 拟共形映射 $f:D_1\to D_2$ 称为 K 拟共形反射，如果 f 在 C 上的限制是恒等映射. C 是拟圆，当且仅当存在一个拟共形反射.

葛林(Gehring, F. W.)的系统研究给出拟圆的多种定义，其中有几何的，也有分析的. 在 20 世纪 70 年代后期，由于葛林的工作，拟圆的理论成为研究万有泰希米勒空间的有力工具，特别地，葛林用他本人发展起来的这套工具解决了由伯斯(Bers, L.)在 1970 年提出的关于万有泰希米勒空间的两个著名猜想.

拟共形反射(quasiconformal reflection)　见

"拟圆".

调 和 函 数

调和函数(harmonic function) 一类重要的二元实函数.所谓调和函数,是指具有二阶连续偏导数且满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的二元实函数 $u(x,y)$.解析函数的实部和虚部都是调和函数.若调和函数 u 和 v 满足 C-R 条件 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$,则称 v 为 u 的共轭调和函数(参见本卷《位势论》和《调和分析》同名条).

共轭调和函数(conjugate harmonic function) 见"调和函数".

调和函数极值原理(extremum principle for harmonic function) 调和函数的重要性质.在区域 D 内调和且不恒等于常数的函数 $u(z)$,在 D 的内点不能达到最大值和最小值.

调和函数的平均值性质(mean value property for harmonic function) 调和函数的重要性质.若 $u(z)$ 在区域 D 内调和,$a\in D$,则

$$u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})d\theta$$

对适当小的 r 成立.

狄利克雷问题(Dirichlet's problem) 亦称第一边值问题.调和函数的一类重要边值问题.求一个在区域 D 内调和并在 $\overline{D}=D\cup\partial D$ 上连续的函数 $u(z)$ 的问题,要求它在 ∂D 上取给定的连续函数

$$\varphi(\zeta)\quad(\zeta\in\partial D).$$

第一边值问题(boundary value problem of the first kind) 即"狄利克雷问题".

狄利克雷区域(Dirichlet region) 一类特殊区域.对于狄利克雷问题是可解的域 D,称为狄利克雷区域.

诺伊曼问题(Neumann problem) 亦称第二边值问题.调和函数的一类重要边值问题.设在区域 D 的边界 ∂D 上给定了一个连续函数 $\varphi(z)$,在 D 内求一个调和函数 $u(z)$,要求它具有连续到边界的一阶偏导数,且在 ∂D 上的外法向导数 $\partial u/\partial n$ 等于 $\varphi(z)$.对于给定的 D 及其边界上的给定函数 $\varphi(z)$,若满足要求的 $u(z)$ 存在,则可以相差一个实常数.

第二边值问题(boundary value problem of the second kind) 即"诺伊曼问题".

哈纳克不等式(Harnack's inequality) 非负调和函数在圆周上的值与其在圆心的值之比的双向不等式.若函数 $u(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内调和并且非负,则有

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}u(a)\leqslant u(a+re^{i\theta})\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}u(a),$$

其中 $0<r<\rho<R$.这个不等式称为哈纳克不等式.

哈纳克定理(Harnack's theorem) 关于单调递增调和函数序列的收敛定理.它可叙述成下述形式:若函数序列 $u_n(z)(n=1,2,\cdots)$ 中的每一个函数都是区域 D 内的非负调和函数,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$$

在 $z=a\in D$ 收敛,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$$

在 D 内闭一致收敛.

泊松积分公式(Poisson integral formula) 圆域狄利克雷问题的求解公式.设函数 $u(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内调和,在 $|z|\leqslant R$ 上连续,则对于 $|z|<R$ 内任意一点 $z=re^{i\varphi}$,有圆内泊松公式

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)u(Re^{i\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta.$$

施瓦兹公式(Schwarz formula) 解析函数的实部在圆周上的值确定解析函数在圆内的值的重要公式.设函数 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析,在 $|z|\leqslant R$ 上连续,则对于任意的 z:$|z|<R$,有

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\overline{f(0)}.$$

这个表达式称为施瓦兹公式.

泊松核(Poisson's kernel) 单位圆情形泊松积分的核.函数

$$p_r(\theta-t)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$$

称为泊松核,这里 $0\leqslant r<1$,θ 为实数.

调和测度(harmonic measure) 特殊的狄利克雷问题的解.是边界点集的一种测度.设 D 为一个区域,其边界 ∂D 由有限条若尔当弧组成,∂D 分为 α 和 β 两部分.则在 D 内存在惟一的一个有界调和函数 $u(z)$ 在 α 上取边值 1,在 β 上取边值 0.称 $u(z)$ 为 α 关于区域 D 的调和测度,记为 $\omega(z,\alpha,D)$.显然

$$0\leqslant\omega(z,\alpha,D)\leqslant1,$$
$$\omega(z,\alpha,D)+\omega(z,\beta,D)\equiv1.$$

例如,D 是上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$,α 是线段 (a,b),则

$$\omega(z,\alpha,D)=\frac{1}{\pi}\arg\frac{b-z}{a-z}$$

是 z 对 (a,b) 的视角.

格林函数(Green's function) 一种以区域内一点为对数奇点,而在区域的边界上为零的调和函数.设 D 是一个区域,$a\in D$,如果函数 $g(z,a)$ 具有以下性质:

1. $g(z,a)$ 在 D 内除去 a 外是调和的.
2. 当 $a\neq\infty$ 时,$G(z)=g(z,a)+\log|z-a|$ 在 a

的邻域内是调和的；当 $a=\infty$ 时，$G(z)=g(z,\infty)-\log|z|$ 在 ∞ 的邻域内是调和的.

3. 当 z 趋于 ∂D 上的任意一点 ζ 时，$g(z,a)\to 0$，则函数 $g(z,a)$ 称为 D 内具有奇点 a 的格林函数. 例如

$$g(z,a)=\log\left|\frac{z-\bar{a}}{z-a}\right|$$

是上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 以 $a(\mathrm{Im}\,a>0)$ 为奇点的格林函数.

整函数与亚纯函数

延森公式(Jensen formula)　调和函数平均值公式的推广. 假设 $f(z)$ 在圆 $|z|<R$ 内解析，$f(0)\neq 0$，$0<r<R$，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$ 是 $f(z)$ 在 $|z|<r$ 内的零点，按其重数列出，则

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta\right\}.$$

刘维尔定理(Liouville theorem)　整函数理论的一个重要定理. 该定理断言：有界整函数必为常数.

外尔斯特拉斯基本因式(Weierstrass basic factor)　整函数的典型乘积中的因子. 令 $E(z,0)=1-z$，对于 $p=1,2,\cdots$，令

$$E(z,p)=(1-z)\exp\left\{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right\},$$

这些函数称为外尔斯特拉斯基本因式.

无穷乘积(infinite product)　用来表示解析函数的一种方法. 设有复数序列 $u_n(n=1,2,\cdots)$，$u_n\neq -1$. 若当 $n\to\infty$ 时，乘积

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$$

收敛到 $p\neq 0,\infty$，则称无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$$

收敛，记为 $p=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$；若 $\lim_{n\to\infty}p_n$ 不存在或 $\lim_{n\to\infty}p_n=0$，则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 发散. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ 绝对收敛；若 $u_n(z)(n=1,2,\cdots)$ 是域 D 内的解析函数序列，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(z)|$ 在 D 内闭一致收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(z))$ 在 D 内闭一致收敛到 D 内的解析函数.

典范乘积(canonical product)　对应于非零序列的外尔斯特拉斯基本因式构成的无穷乘积. 设有序列 a_n，$0<|a_n|\leqslant|a_{n+1}|$，$|a_n|\to+\infty$，$\rho$ 是使

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{\rho+1}}$$

收敛的最小非负整数，称

$$p(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_n},p\right)$$

为序列 a_n 的典范乘积，这里 $E(z,p)$ 是外尔斯特拉斯基本因式.

阿达马因子分解定理(Hadamard factorization theorem)　有穷级整函数的一种表示式. 若函数 $f(z)$ 是有穷级整函数，其级为 ρ，则

$$f(z)=z^m e^{h(z)}p(z),$$

其中 $p(z)$ 是 $f(z)$ 的零点的典范乘积，$h(z)$ 是次数不超过 ρ 的多项式，m 是 $f(z)$ 在原点的零点的级.

亚纯函数(meromorphic function)　一类特殊的解析函数. 指在 z 平面上除极点外无其他类型奇点的单值解析函数. 如有理函数，$\tan z$ 等.

超越亚纯函数(transcendental meromorphic function)　一类亚纯函数. 指非有理函数的亚纯函数.

部分分式分解(partial fraction decomposition)　亚纯函数在极点处的一种表示式. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 处有 m 级极点($m\geqslant 1$)，则称

$$f(z)=\frac{a_m}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_1}{(z-z_0)}+h(z)$$

为 $f(z)$ 在 z_0 处的部分分式分解，这里，$h(z)$ 在 z_0 处是解析的，而

$$\frac{a_m}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_1}{(z-z_0)}$$

为主要部分，$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为复数.

米塔-列夫勒定理(Mittag-Leffler theorem)　具有给定极点和相应主要部分的亚纯函数的构造性存在定理. 若 $f(z)$ 为亚纯函数，$a_1,a_2,\cdots$ 是 $f(z)$ 的极点，$a_i\neq a_j(i\neq j)$，且

$$|a_n|\leqslant|a_{n+1}|,\ |a_n|\to+\infty\quad(n\to+\infty),$$

则

$$f(z)=u(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\{\psi_n(z)-p_n(z)\},$$

其中 $\psi_n(z)$ 是 $f(z)$ 在 a_n 的主要部分，$p_n(z)$ 是多项式，$u(z)$ 是一个整函数.

外尔斯特拉斯定理(Weierstrass theorem)　亦称索霍茨基定理. 解析函数在本质奇点邻域取值的重要定理. 该定理断言：如果 a 为 $f(z)$ 的本质奇点，则对于任何常数 A，不管它是有限数还是无穷，都有一个收敛于 a 的点列 $\{z_n\}$，使得

$$\lim_{z_n\to a}f(z_n)=A.$$

后来，皮卡(Picard，(C.-)É.)发展了这一结果.

索霍茨基定理(Sokhozki theorem)　即"外尔斯特拉斯定理".

聚值集(cluster set)　区域内点列趋于一边界点时相应的函数值的极限值. 设 D 是复平面上任一区域，Γ 是它的边界，$w=f(z)$ 是定义于 D 内的单值亚纯函数，这时对于 Γ 的每个点 z_0，可在复平面上定义与映射 $w=f(z)$ 相联系的如下点集：如果存在点列 $\{z_n\}$，使得当 $z_n\in D, z_n\to z_0$ 时，$f(z_n)\to\alpha$，则 α 称为 $f(z)$ 在 z_0 处的一个聚值. 它的全体记为 $C_D(f,z_0)$，称为 f 在 z_0 处的聚值集.

聚值(cluster value)　见"聚值集".

整函数(entire function)　整个复平面 $\mathbf{C}$ 内的全纯函数. 多项式是整函数的特殊情形. 不是多项式的整函数称为超越整函数，例如

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n,\ \sin z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

此外，两个整函数的和、差、积是整函数，又若分母恒不为零时，两个整函数的商仍为整函数. 整函数可看成多项式的自然推广. 代数基本定理指出，p 次多项式在复平面内恰有 p 个根(按重数计算). 据此，每一多项式有惟一的乘积表示，即

$$f(z)=a(z-z_1)\cdots(z-z_p),$$

其中 a 为非零常数，$z_1,z_2,\cdots,z_p$ 是 $f(z)$ 的零点. 反之，总能构造一多项式使得它恰有事先给定的零点和相应的重级，它能表示为乘积的形式，且除去一常数因子之外是惟一确定的. 此外，多项式的次数 p 还能给出 $|f(z)|$ 增长速度的度量，即当 $|z|\to\infty$ 时，有

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^p}=c\ \ (c\neq 0,\infty).$$

在整函数的研究中，常以多项式为模型提出并讨论相应的问题，而获得类似的结果.

整函数的一般理论源于 1876 年外尔斯特拉斯(Weierstrass，K. (T. W.))的工作，他的两个基本定理成为这一理论的出发点. 他的第一个定理是关于整函数的因子分解的(参见"魏尔斯特拉斯第一定理"). 1882—1884 年，拉盖尔(Laguerre，M.)引入整函数的格这一新的概念，以此来区分整函数的类，整函数的格在某种意义下类似于多项式的次数. 1883 年，庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)建立了整函数的最大模

$$M(r,f)=\max_{|z|\leqslant r}|f(z)|$$

与格的一个关系，即格为 k 的整函数满足

$$\log M(r,f)=O\{r^{k+1}\}.$$

随后，1893 年，阿达马(Hadamard，J. (-S.))得到一系列结果，它们合起来构成了庞加莱定理的反命题. 另一方面，1897 年，波莱尔(Borel，(F.-É.-J.-)É.)给出了整函数的级的一个定义. 整函数 $f(z)$ 的级为

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

外斯特拉斯的第二个定理是关于值分布的(参见"外尔斯特拉斯定理"). 1879 年，皮卡(Picard，(C.-)É.)用椭圆模函数的方法证明了下述重要而深刻的定理：如果一整函数 $f(z)$ 不取两个有穷值，则 $f(z)$ 为一常数. 1896 年，波莱尔给出了皮卡定理的一个初等证明. 他还证明，每一个有穷 ρ 级的整函数，下式对所有 $a\in\mathbf{C}$ 成立：

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,a)}{\log r}=\rho,$$

至多除去一个例外的 a，其中 $n(r,a)$ 是圆盘 $\{z\,|\,|z|\leqslant r\}$ 内 $f(z)$ 的 a 值点个数，并按重级计算.

20 世纪的前 20 年，波莱尔的结果是整函数理论中最高的成就. 它使皮卡定理定量化，而且波莱尔定理中考虑的是函数的 a 值点数而不是庞加莱定理和阿达马的结果中所考虑的零点数. 这一点还显示出有穷级整函数值分布的对称性. 在此意义下，它与多项式的结果是相似的. 在整函数理论发展过程中，威曼(Wiman，A.)、瓦利隆(Valiron，G.)、林德勒夫(Lindelöf，E. L.)等人的工作也很活跃，并做出了许多贡献. 20 世纪 20 年代，奈望林纳(Nevanlinna，R.)创立了很广泛的亚纯函数值分布理论，它包括了整函数的经典结果作为其特殊情形，而且形式更为精美.

超越整函数(transcendental entire function)　见"整函数".

零点收敛指数(exponent of convergence of zeros)　量度函数零点稠密程度的一个量. 设 $f(z)$ 为一整函数，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为其零点序列，则零点收敛指数 $\lambda=\lambda(0,f)$ 定义为使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{\alpha}}$$

收敛的正数 α 所成的集合之最大下界. 因此当 $\alpha>\lambda$ 时，级数收敛；当 $\alpha<\lambda$ 时，级数发散. 若 a 为任一复数，$\{z_n\}$ 为 $f(z)-a$ 的零点序列，即 $f(z)$ 的 a 值点序列，则相应地可以定义 $f(z)$ 的 a 值点序列的收敛指数 $\lambda(a,f)$.

外尔斯特拉斯第一定理(first theorem of Weierstrass)　关于整函数因子分解的重要定理，是 1876 年由外尔斯特拉斯(Weierstrass，K. (T. W.))所给出的. 定理叙述如下：设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是整函数 $f(z)$ 的异于零的零点序列，且满足

$$|z_n|\leqslant|z_{n+1}|\ \ (n=1,2,\cdots),\ \ \lim_{n\to\infty}z_n=\infty,$$

每一零点在序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中出现的次数与其重级相同，又设 $\{p_n\}(n=1,2,\cdots)$，为正整数序列，它使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{p_n}$$

对任意的 $R>0$ 收敛，则无穷乘积

$$G(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E(z/z_n,p_n-1)$$

对任意的复数 z 绝对收敛，且 $f(z)$ 能表示为 $f(z)=z^m e^{g(z)}G(z)$. 其中 $g(z)$ 为另一整函数，$m\geqslant 0$ 为整数.

外尔斯特拉斯第一定理可看成是多项式因子分解定理的推广，但多项式情形能由其零点惟一地确定(除去一个常数因子)，而一般超越整函数只能确定到任意一个不取零值的整函数因子，而且为保证无穷乘积的收敛性，需要引入基本因子.

整函数的级(order of an entire function) 量度整函数增长性的特征量. 设 $f(z)$ 为整函数，令

$$M(r,f)=\max_{|z|\leqslant r}|f(z)|,$$

则 $f(z)$ 的级 ρ 和下级 μ 由下式所定义

$$\rho=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

$$\mu=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

对于函数 $p(z)=\sum_{n=0}^{m}a_n z^n$，$\cos\sqrt{z}$，$e^{z^n}$ 和 e^{e^z}，分别有 $\rho=\mu=0,1/2,n$ 和 ∞. 整函数的级在整函数理论的研究中起着核心的作用，函数的其他许多性质都与它有关. 整函数的级和下级分别由波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)(1897)和维塔克(Wittaker,J. M.)(1933)所引进.

整函数的下级(lower order of an entire function) 见"整函数的级".

整函数的格(genus of an entire function) 区分整函数增长性的一个量. 设 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是整函数 $f(z)$ 的零点序列，并设存在 $\lambda>0$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^{-\lambda}$$

收敛，则有一最小的非负整数 $k\geqslant 0$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^{-(k+1)}$$

收敛. 又设

$$f(z)=z^m e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E(z/z_n,k),$$

其中 $g(z)$ 是 $q(\geqslant 0)$ 次多项式或 0(此时也认为 $q=0$)，则 $f(z)$ 的格 p 定义为 k 和 q 中较大者. 例如函数

$$e^z,\quad e^z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n^2}\right),\quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

的格都是 1. 对于格为 0 和 1 的整函数有下述类似于多项式的重要定理：设 $f(z)$ 是格为 0 或 1 的实整函数，则在 $f(z)$ 的两个零点之间恰有 $f'(z)$ 的一个零点，并且 $f(z)$ 和 $f'(z)$ 有相同的格. 整函数的格在某种意义下类似于多项式的次数. 此概念于 1882 年首先由拉盖尔(Laguerre,M.)引进.

皮卡定理(Picard theorem) 关于整函数的值分布的重要而深刻的定理. 若 $p(z)$ 是 p 次多项式，则对任意复数 a，$p(z)-a$ 在复平面内恰有 p 个根，但若把整函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

看成"无穷高次多项式"，则并不总具有无穷多个零点，例如整函数

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

在复平面内无零点. 而皮卡定理表明这是一例外的情形.

通常将皮卡定理分为两个定理来叙述. 第一定理，亦称为皮卡小定理. 即若一个整函数 $f(z)$ 不取两个有限值，则 $f(z)$ 必为常数. 第二定理，亦称皮卡大定理，是关于一个全纯函数在它的一个孤立本质奇点邻域内取值的定理，即任一全纯函数在其本质奇点的邻域内无穷多次地取到每个有穷复数值，至多可能除去一个例外值.

皮卡定理有种种证明和推广. 它首先于 1879 年由皮卡(Picard,(C.-)É.)用椭圆模函数的方法证明. 1896 年，波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)给出一个初等证明.

皮卡定理亦可作为奈望林纳(Nevanlinna,R.)的第二基本定理的推论而得到. 关于亚纯函数的皮卡定理可叙述如下：超越亚纯函数能取所有值(有穷或无穷)无穷多次，至多除去两个例外值.

皮卡小定理(little Picard theorem) 见"皮卡定理".

皮卡大定理(great Picard theorem) 见"皮卡定理".

皮卡例外值(exceptional value of Picard) 整函数理论的一个概念. 使 $f(z)-a$ 仅有有限多个零点的值 a 称为皮卡例外值. 根据皮卡定理，对任一超越整函数至多有一个有穷的皮卡例外值，对超越亚纯函数至多有两个皮卡例外值，例如，e^z 以 0 为有穷皮卡例外值，$\sin z$ 无有穷皮卡例外值. 亚纯函数 $\tan z$ 以 $\pm i$ 为皮卡例外值，外尔斯特拉斯椭圆函数 $\mathscr{P}(z)$ 无皮卡例外值.

波莱尔定理(Borel theorem) 关于整函数值分布的重要定理，1897 年为波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)所证明. 定理叙述如下：设 $f(z)$ 是有穷 ρ 级整函数，则对一切 $a\in\mathbf{C}$ 都有

$$\rho=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,a)}{\log r},\qquad(1)$$

至多可能除去一个例外值 a. 式中 $n(r,a)$ 是 $f(z)-a$ 在 $|z|\leqslant r$ 内之零点个数(按重级计算). 此定理大大推进了皮卡定理,因为根据皮卡定理只知道 $f(z)-a$ 有无穷多个根,但并不知道其稠密程度. 波莱尔定理显示了有穷级整函数值分布的对称性,即除去可能有一个 a 值以外,所有的 a 值点数能由函数的增长速度来确定. 关于亚纯函数的波莱尔定理可叙述如下:设 $f(z)$ 是有穷 ρ 级的亚纯函数,则对一切 $a\in\hat{C}=C\cup\{\infty\}$,都有(1)式成立,至多可能除去两个例外的 a.

波莱尔例外值(exceptional value of Borel) 整函数亚纯函数理论的一个概念. 使 $f(z)-a$ 的零点的收敛指数小于函数的级的值 a 称为波莱尔例外值. 它亦能叙述为下面的形式:设 $n(r,a)$ 是 $f(z)-a$ 在 $|z|\leqslant r$ 内的零点数(按重级计算),若

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,a)}{\log r}$$

小于 $f(z)$ 的级 ρ,则称 a 为 $f(z)$ 的波莱尔例外值. 波莱尔定理断言,对于整函数至多有一个波莱尔例外值,对亚纯函数至多有两个波莱尔例外值.

茹利亚方向(Julia direction) 函数值分布的奇异方向. 对于超越整函数(或超越亚纯函数),茹利亚方向是复平面 C 内由原点出发的具有下述性质的半射线 $J=\{z\,|\arg z=\theta_0\}$:在以 J 为平分角线的任意小开度的角域内,若是整函数情形,函数取每一有穷值无穷多次,至多除去一个例外;若是亚纯函数情形,函数取每一值无穷多次,至多除去两个例外. 茹利亚(Julia,G. M.)于 1919—1921 年应用蒙泰尔(Montel,P. A.)创立的正规族理论证明,任一超越整函数至少存在一条茹利亚方向. 对于亚纯函数的情形需要对函数 $f(z)$ 的增长性加上某些条件,例如满足

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,f)}{(\log r)^2}=\infty$$

的亚纯函数存在一条茹利亚方向,其中 $T(r,f)$ 是 $f(z)$ 的奈望林纳特征函数. 例如正负实轴是 $\sin z$ 的茹利亚方向.

波莱尔方向(Borel direction) 函数值分布的奇异方向,它是从原点出发的具有下述性质的半射线 $B=\{z\,|\arg z=\theta_0\}$:设 $f(z)$ 是 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 级亚纯函数,任给 $\eta>0$,令 $n(r,\theta_0,\eta,a)$ 表示在扇形区域 $\{z\,||z|\leqslant r\}\cap\{z\,||\arg z-\theta_0|<\eta\}$ 内 $f(z)-a$ 的零点数 $(a\neq\infty)$,或 $f(z)$ 的极点数 $(a=\infty)$(均按重级计算),则对每个 $a\in\hat{C}$ 有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\theta_0,\eta,a)}{\log r}=\rho,$$

至多除去两个例外值. 此时称 B 为 $f(z)$ 的一条 ρ 级波莱尔方向,或简称波莱尔方向. 1928 年,瓦利隆(Valiron,G.)应用奈望林纳理论和关于多项式的模的布特鲁-嘉当定理,证明有穷正级的亚纯函数必存在波莱尔方向. 后来也有人称此方向为波莱尔-瓦利隆方向. 例如从原点出发的任一半射线都是外尔斯特拉斯椭圆函数 $\mathscr{P}(z)$ 的波莱尔方向.

波莱尔-瓦利隆方向(direction of Borel-Valiron) 见"波莱尔方向".

兰道定理(Landau theorem) 关于全纯函数的重要定理. 它可叙述如下:设函数 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$ $(a_1\neq0)$ 在 $|z|<R$ 内全纯且在此圆内不取 0 和 1,则 $R\leqslant\Omega(a_0,a_1)$,其中 $\Omega(a_0,a_1)$ 是仅依赖于 a_0 和 a_1 的数. 兰道定理能看做是皮卡定理的补充,它表明:若函数 $f(z)$ 有两个皮卡例外值,则其全纯半径有一上界. 有趣的是这个上界仅依赖于 $f(z)$ 的泰勒展式的首两项系数. 上述定理首先由兰道(Landau,E. G. H.)于 1904 年所证明,此后有多种证明和推广.

肖特基定理(Schottky theorem) 关于全纯函数的重要定理. 定理叙述如下:设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内全纯并不取 0 和 1 为值,则在 $|z|\leqslant r<1$ 内有 $|f(z)|\leqslant\Theta(r,f(0))$,其中 $\Theta(r,f(0))$ 是只依赖于 r 和 $f(0)$ 的数. 而且若 $|f(0)|<A$,则在 $|z|\leqslant r<1$ 内有 $|f(z)|\leqslant\Omega(r,A)$,其中 $\Omega(r,A)$ 是仅依赖于 r 和 A 的数. 肖特基定理首先由肖特基(Schottky,F. H.)(1904)所证明.

渐近值(asymptotic value) 整函数的一种特定极限值. 若存在一条延伸至无穷的路径 Γ,沿着它函数 $f(z)$ 趋于一确定的值 a,则称 a 为 $f(z)$ 的一渐近值,Γ 是相应于 a 的定值路径或称渐近路径. 艾弗森(Iversen,F.)于 1914 年曾证明,∞ 是每个非常数整函数的渐近值. 此外阿尔福斯(Ahlfors,L. V.)于 1930 年曾证明当儒瓦(Denjoy,A.)的下述猜测:有穷 ρ 级的整函数至多有 2ρ 个有穷渐近值. 为此阿尔福斯于 1936 年获得了首届菲尔兹奖.

渐近路径(asymptotic path) 见"渐近值".

亚纯函数值分布理论(theory of value distribution of meromorphic functions) 亚纯函数理论中具有深刻而完美理论的一个分支. 设 $w(z)$ 为复平面 C 上的亚纯函数,令

$$n(r,a)=\begin{cases}n\left(r,\dfrac{1}{w-a}\right) & (a\neq\infty),\\ n(r,w) & (a=\infty)\end{cases}$$

表示圆 $|z|<r$ 内 $w(z)$ 的 a 值点个数(按重级计算),若 $w(0)\neq a,\infty$,则 $w(z)$ 的 a 值点密指量定义为

$N(r,a)$

$$=\begin{cases}N\left(r,\dfrac{1}{w-a}\right)=\displaystyle\int_0^r\frac{n(t,a)}{t}\mathrm{d}t & (a\neq\infty),\\ N(r,w)=\displaystyle\int_0^r\frac{n(t,w)}{t}\mathrm{d}t & (a=\infty).\end{cases}$$

奈望林纳引入特征函数

$$T(r,w)=m(r,w)+N(r,w),$$

其中

$$m(r,w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|w(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta,$$

$$\log^+|\alpha|=\max\{0,\log|\alpha|\}.$$

进一步定义 $w(z)$关于 a 的亏量为

$$\delta(a)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,a)}{T(r,w)}.$$

如果 $\delta(a)>0$,则称 a 为亏值. 由第二基本定理可得下述重要的亏量关系,即至多有可数多个亏值,且总亏量满足

$$\sum_{a\in\mathbf{C}}\delta(a)\leqslant 2.$$

近代亚纯函数值分布理论亦称奈望林纳理论,是由芬兰数学家奈望林纳(Nevanlinna,R.)于 20 世纪 20 年代创立的. 他还建立了两个基本定理且引入新的概念,使得已有的理论或呈现崭新的面貌,或得到重要的推广. 亚纯函数奈望林纳理论还被推广于代数体函数、亚纯曲线和多复变亚纯映射等方面,并且成为研究复域常微分方程解析理论的有力工具.

奈望林纳理论(Nevanlinna theory) 即近代亚纯函数值分布理论. 见"亚纯函数值分布理论".

亚纯函数的特征函数(the charateristic function of a meromorphic function) 见"亚纯函数值分布理论".

第一基本定理(the first fundamental theorem) 亚纯函数奈望林纳理论的重要定理. 设 $w(z)$为亚纯函数,a 值点的密指量为 $N(r,a)$,关于 a 的平均中值函数定义为

$$m(r,a)=m\left(r,\frac{1}{w-a}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|w(re^{i\theta})-a|}\mathrm{d}\theta\quad(a\neq\infty),$$
$$m(r,\infty)=m(r,w)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|w(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\qquad(a=\infty).$$

则有如下的第一基本定理:对任意的 $a\in\mathbf{C}$,

$$m(r,a)+N(r,a)=T(r,w)+O(1).$$

第二基本定理(the second fundamental theorem) 亚纯函数奈望林纳理论中重要定理. 设$w(z)$为亚纯函数,$a_k(k=1,2,\cdots,p)$是 $p(>2)$个互异的复数(有穷或无穷),则有第二基本定理如下:

$$(p-z)T(r,w)\leqslant\sum_{k=1}^{p}N(r,a_k)$$
$$-N_1(r,w)+S(r,w),$$

其中 $N_1(r,w)$是重值点数目函数,$S(r,w)$为余项,满足$S(r,w)=O(\log rT(r,w))(r\to\infty)$.

亏值(defective value) 见"亚纯函数值分布理论".

亏量(deficiency) 见"亚纯函数值分布理论".

亏量关系(defect relation) 见"亚纯函数值分布理论".

亚纯函数的增长级(growth order of a meromorphic function) 量度亚纯函数增长性的特征量. 设 $w(z)$为亚纯函数,令 $T(r,w)$为奈望林纳特征函数,则

$$\rho=\overline{\lim_{R\to\infty}}\frac{\log T(r,w)}{\log r},$$
$$\lambda=\underline{\lim_{R\to\infty}}\frac{\log T(r,w)}{\log r}$$

分别称为亚纯函数 $w(z)$的级和下级.

正规族(normal family) 具有某种收敛性质的函数族. 定义如下:在一个区域 D 的一个全纯函数族 F 称为在 D 内为正规,如果从 F 的每一个函数序列 $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$都可以选出一个子序列$f_{n_k}(z)$ $(k=1,2,\cdots)$,使得它在 D 的内部一致收敛到一个全纯函数或一致发散到∞.

一个全纯函数族 F 在一个区域 D 内为正规的一个充分条件都称为正规性定则. 蒙泰尔(Montel,P. A.)指出:如果 F 是区域 D 内一致有界的全纯函数族,则 F 是正规族. 经过进一步的研究,蒙泰尔证明了"F 中的函数在 D 内均不取二固定的有穷值 a 及 b"是一个正规性定则. 由蒙泰尔的这个重要的正规性定则,很容易推出皮卡的小定理及大定理,由它还很容易推出肖特基定理及兰道定理. 为了说明蒙泰尔的这个正规性定则的另一个应用,先引进下列定义:设 F 为在一区域 D 的一个全纯函数族并考虑 D 内一点 z_0,如果存在一个以 z_0 为中心的圆 C,使在 C 内 F 为正规,则称 F 在 z_0 为正规. 显然,如果 F 在 D 内为正规,那么,F 在 D 内每点为正规. 反过来,如果 F 在 D 内每一点为正规,那么 F 在 D 为正规. 因此,假定已知 F 在 D 为不正规,那么至少存在 D 内一点 z_0,使 F 在 z_0 不正规,这样的点 z_0 称为一茹利亚点. 根据最后这个事实及上述蒙泰尔的正规性定则,茹利亚(Julia,G. M.)证明了下列定理:如果$f(z)$是一个超越整函数,那么,最少存在一条茹利亚方向.

正规族的理论有广泛的应用,它是蒙泰尔于 1912 年引进的. 蒙泰尔引进正规族的概念之后,又进一步引进了拟正规族的概念(参见"拟正规族"). 利用正规族和拟正规族两个概念,蒙泰尔推广了维塔利(Vitali,G.)的一个定理. 经过卡拉西奥多里

(Carathéodory,C.)、兰道(Landau,E. G. H.)、蒙泰尔及奥斯特洛夫斯基(Ostrowski,A. M.)的工作,亚纯函数正规族理论也已建立起来.如果一致收敛性是用球面距离来定义,那么,亚纯函数的正规族的定义如下:在一个区域 D 的一个亚纯函数族 F 称为在 D 内为正规,如果从 F 的每一函数序列 $f_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$,都可以选出一个子序列 $f_{n_k}(z)(k=1,2,\cdots)$在 D 的内部一致收敛.关于亚纯函数族蒙泰尔的正规性定则是:F 中的函数在 D 内均不取三个固定的值 a,b 及 c(有穷或无穷).类似地可给出亚纯函数拟正规族的定义.

全纯函数正规族及亚纯函数正规族理论已经发展到了完善的地步.这个理论中的一个重要研究课题是寻求新的正规性定则,在这方面,布洛赫(Bloch,A.)的下列猜测很有指导意义:如果 p 是一个性质,非常数的整函数(或非常数的亚纯函数)不具有性质 p,那么,在一个区域内具有性质 p 的全纯函数族(或亚纯函数族)是正规的.这个猜测在一些例子中都是对的,例如与关于整函数的刘维尔(Liouville,J.)定理相应的是以上蒙泰尔的关于一致有界的全纯函数族的定理,与关于整函数的皮卡定理相应的是以上蒙泰尔的关于有两个有穷例外值的全纯函数族的定则.

全纯函数正规族(normal family of holomorphic functions) 见"正规族".

亚纯函数正规族(normal family of meromorphic functions) 见"正规族".

正规性定则(criterion for normality) 判断一个全纯函数族或亚纯函数族在一区域为正规的充分条件.见"正规族".

布洛赫猜测(Bloch conjecture) 见"正规族".

茹利亚点(Julia point) 函数值分布理论中一类具有特殊函数论性质的点.如果在一个区域 D 的一个全纯函数族(或亚纯函数族)在 D 内一点 z_0 为非正规,则 z_0 称为一茹利亚点(参见"正规族").

拟正规族(quasi-normal family) 正规族概念的一种推广.在拟正规族的定义中不要求子序列 $f_{n_k}(z)(k=1,2,\cdots)$在 D 的内部一致收敛,而只要求除去 D 内有穷个点(或无穷个点但在 D 内没有凝聚点),在所余的区域内部一致收敛(参见"正规族").

代数体函数(algebroidal function) 亚纯函数或代数函数的推广.设 M 为亚纯函数域,$M[x]$表示系数为 M 的多项式环,则代数体函数域 A 是$M[x]$的代数闭包,即任一个 $w\in A$,存在$F\in M[x]$,使得

$$F(w) = S_\nu w^\nu + \cdots + S_0 = 0, \qquad (1)$$

其中$S_j(j=0,1,2,\cdots,\nu)\in M$,或者经通分后 w 满足下述不可约方程

$$\psi(z,w) \equiv A_\nu(z)w^\nu + A_{\nu-1}(z)w^{\nu-1} + \cdots + A_0(z) = 0, \qquad (2)$$

其中 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,\nu)$是 z 的整函数(通常考虑$A_j(z)$中至少有一个为超越函数的情形).特别地,当$\nu=1$ 时,$w(z)$为亚纯函数;当$A_j(z)(j=0,1,\cdots,\nu)$都为多项式时,$w(z)$为代数函数.

代数体函数首先由庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)所引入,其后班勒卫(Painlevé,P.)、布特鲁(Boutroux,P. L.)和马尔姆奎斯特(Malmquist,J.)等人研究常微分方程时遇到此类函数.如同亚纯函数一样,代数体函数的主要研究内容之一是它的值分布理论.最早由雷蒙多斯(Rémoundos,G.)(1927)推广了皮卡定理,他证明了 ν 值代数体函数至多有 2ν 个皮卡例外值,并指出存在具有 2ν 个皮卡例外值的代数体函数.其后瓦利隆(Valiron,G.)(1929)、乌利希(Ullricn,E.)(1931)和塞尔贝格(Selberg,A.)(1930—1934)分别用不同的方法对代数体函数建立了相当于亚纯函数奈望林纳理论的基本定理,即代数体函数的第一基本定理和第二基本定理.根据第二基本定理可以得到代数体函数的亏量关系以及重值和惟一性定理等重要结果.1933年,嘉当(Cartan,H.)讨论了$p(\geqslant 2)$个全纯函数的线性组合 $a_1g_1(z)+a_2g_2(z)+\cdots+a_pg_p(z)$的零点分布问题.特别地,当取 $a_j=a^{j-1}(j=1,2,\cdots,p=\nu+1)$时,则相当于考虑 ν 值代数体函数的值分布.因此嘉当的讨论能导出代数体函数的基本结果.

亚纯函数分解论(factorization theory of meromorphic function) 研究亚纯函数在复合意义下分解性质的理论,它主要探讨对于一个给定的亚纯函数可否以及如何将它分解成为两个或两个以上的非双线性亚纯函数的复合.1952 年,罗森布弄姆(Rosenbloom,P. C.)将整函数迭代的不动点的结果推广到两个整函数复合时不动点的存在性与数量的研究时,首先提出了整函数的"分解"一词及素函数的定义,并指出函数 e^z+z 为一素函数.1968 年,贝克(Baker,I. N.)与格罗斯(Gross,F.)正式证明了:对任一非常数多项式$p(z)$,$e^z+p(z)$为素函数.同年格氏还将分解研究推广到亚纯函数族.几乎同时,在 1972 年左右,格罗斯与杨重骏(Yang,C. C.)、哥尔德斯坦(Goldstein,R.)及普罗科波维奇(Prokopovich,G. S.)等人分别用不同的方法,解决对函数族 $p_1(z)e^{p_2(z)}+p_3(z)$(p_1,p_2,p_3 皆为多项式,$p_1(z)\not\equiv 0$,$p_3(z)$及 $p_2(z)\not\equiv$常数)的分解问题.

经过美、中、日、苏、德、英等国的一些复变函数专家 20 多年的努力,函数分解论研究有了多方面的进展.但迄今为止,具有较重大意义的分解论的结论并不多.一般仅是一些素函数族的建造,拟素函数的

判定法则，及建造某些具分解惟一性的整函数族等，而像素函数的必要条件和因子为素函数的超越整函数的分解是否（在等价意义下）具惟一性等基本问题仍尚待解决及突破.

目前，研究一个函数能否分解，除从其本身（或其导函数）的特殊性质，如其增长性、周期性、零点的分布、有无亏值或是否满足某些特殊形式的微分方程等来着手外，还要配合因子增长受函数本身增长之限制，使得所考虑的因子范围有所界定. 因此，分解论研究很自然地以古典函数论及奈望林纳（Nevanlinna，R.）的值分布论为主要理论工具. 这既可解决分解论的一些问题，又使值分布论得到了充实. 例如函数与其因子间的增长关系的一些改进结果，函数方程的一些简化形式及复合函数不动点的数量估计等.

1970 年，罗森布弄姆曾提出如下的猜测：设 f，g 为非线性整函数，如果 $f(g)$ 为超越的，则它必有无穷多个不动点. 上述猜测相当于称对任何非常数整函数 $\alpha(z)$ 及多项式 $p(z)(\neq 0)$，$z+p(z)e^{\alpha(z)}$ 必为素函数. 此猜测在 $f(g)$ 为有穷级时已在前面提到的对 $p_1(t)e^{p_2(z)}+p_3(z)$ 的分解研究中得到了解决. $f(g)$ 为无穷级的情形，直到 1988 年才由伯格维诺（Bergweiler，W.）所解决. 除此较重大的成果外，另一是早先施泰因梅茨（Steinmetz，N.）于 1980 年所证明的：任何一个满足系数为多项式的线性常微分方程的亚纯函数解必为拟素的. 从此开启了人们对常微分方程亚纯函数解的分解讨论并取得一系列进展. 施氏所用的函数方程简化定理成为分解论中的一个重要方法.

最近，中国数学家已开始对代数体函数的分解及多变数整函数的分解进行研究，给出了初步的定义和结果.

亚纯函数因式分解（factorization of meromorphic function） 亚纯函数在复合意义下的分解. 设 $F(z)$ 为一亚纯函数，若 $F(z)$ 可表为

$$F(z)=f(g(z))\equiv f\circ g(z), \qquad (1)$$

f，g 为亚纯函数；或一般地

$$F(z)=f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_n(z), \qquad (2)$$

$f_i(z)(1\leqslant i\leqslant n)$ 皆为亚纯函数，(1)及(2)皆称为 F 的因式分解或称分解. 特别地，若 F 的分解形式(2)中每一个因子 f_i 皆为非双线性亚纯函数时，则称之为一非平凡分解. (1)式的分解中，f 称为左因子，g 称为右因子.

非平凡分解（non-trivial factorization） 见“亚纯函数因式分解”.

左因子（left factor） 见“亚纯函数因式分解”.

右因子（right factor） 见“亚纯函数因式分解”.

素函数（prime function） 函数分解论中一类具特殊性质的函数. 设 $F(z)$ 为一亚纯函数，若 F 的任一个分解式 $f\circ g$ 中，必导致 f 或 g 为一双线性函数时，则称 F 为素函数. 特别地，$F(z)$ 为一整函数，若因子皆为整函数的任一分解，必导致 f 或 g 为线性因子时，则称 F 为 E 素的. 已经证明，凡是一个非周期性的 E 素的整函数也必为素的.

***E* 素函数**（*E*-prime function） 见“素函数”.

左素函数（left prime function） 亚纯函数分解论中的一个概念. 设 $F(z)$ 为一亚纯函数，若 $F(z)$ 的每一形如 $F(z)=f(g(z))$ 的分解，当 g 为超越函数时，f 必为双线性的（当 f 为超越函数时，g 必为双线性的），则称 F 为左(右)素函数.

右素函数（right prime function） 见“左素函数”.

等价分解（equivalent factorization） 函数分解论中讨论分解惟一性时的重要概念. 设 $F(z)$ 为一超越整函数，具有两个非平凡分解：

$$F(z)=f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_m(z)$$
$$=g_1\circ g_2\circ\cdots\circ g_n(z),$$

若 $m=n$ 及存在有 $n-1$ 个双线性函数 $T_j(j=1,2,\cdots,n-1)$ 使得

$$\begin{cases}f_1=g_1\circ T_1^{-1},\\ f_2=T_1\circ g_2\circ T_2^{-1},\cdots,f_n=T_{n-1}\circ g_n,\end{cases}$$

则称上述分解为等价的.

分解惟一性（uniqueness of factorization） 函数分解论中研究的重要性质之一. 若一亚纯函数 $F(z)$ 的任两个非平凡分解皆为等价时，则称 F 具有分解惟一性. 由于 $z^6=z^2\circ z^3=z^3\circ z^2$ 为明显的两个非等价的分解，所以为避免混淆及复杂性，现考虑因子皆为超越整函数，并且因子为素的情形来讨论分解惟一性. 即 $F(z)$ 为一超越整函数且 F 可表为

$$F=f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_n=g_1\circ g_2\cdots\circ g_m,$$

其中 f_i 及 g_j 等皆为超越的素整函数，若上述两种分解等价，则称 F 具有分解惟一性.

黎曼曲面

解析开拓（analytic continuation） 扩大解析函数定义域的概念. 如果函数 $f(z)$ 在复数平面的区域 G 内解析，函数 $F(z)$ 在复数平面的区域 G^* 内解析，G 为 G^* 的真子集，且在 G 内有 $F(z)=f(z)$，则称函数 $F(z)$ 是函数 $f(z)$ 从 G 到 G^* 的解析开拓. 如果 G，G^*，$f(z)$ 均给定，满足条件的函数 $F(z)$ 存在，则它必然是惟一的.

解析开拓原理（principle of analytic continuation） 扩大解析函数定义域的原理. 设平面上的区

域 D_1 与 D_2 有一公共部分 d，函数 $f_1(z)$ 在 D_1 内解析，函数 $f_2(z)$ 在 D_2 内解析，且在 $d=D_1\cap D_2$ 上有 $f_1(z)=f_2(z)$，则函数

$$F(z)=\begin{cases}f_1(z) & (z\in D_1\backslash d),\\ f_2(z) & (z\in D_2\backslash d),\\ f_1(z)=f_2(z) & (z\in d)\end{cases}$$

是区域 $D=D_1\cup D_2$ 上的单值解析函数.

解析元素(analytic element)　亦称函数元素. 是单值解析函数及其定义域组成的二元组. 设 D 是复平面上的一个区域，$f(z)$ 是区域 D 内的单值解析函数，则函数 $f(z)$ 和区域 D 的组合称为一个解析元素，记为 $\{D,f(z)\}$. 解析元素亦称解析函数元素，或简称函数元素.

函数元素(function element)　即"解析元素".

直接解析开拓(direct analytic continuation)　满足解析开拓原理的两解析元素. 若给定两个解析元素 $\{D_1,f(z)\}$ 及 $\{D_2,f(z)\}$，D_1 和 D_2 互不包含，其公共部分是一区域 G，在区域 G 内有 $f_1(z)=f_2(z)$，则称此两个解析函数互为直接解析开拓.

黎曼-施瓦兹对称原理(Riemann-Schwarz symmetry principle)　亦称黎曼-施瓦兹反射原理. 解析开拓的一种方法. 若 D 与 D^* 为 z 平面上的两个区域，它们关于实轴对称，D 位于上半平面，它们的边界都包含实轴上一线段 S；$\{D,f(z)\}$ 是一个解析元素，$f(z)$ 在 $D\cup S$ 上连续且在 S 上取实数值，则存在一个函数 $F(z)$，满足：

1. 在区域 $D\cup S\cup D^*$ 内解析；
2. 在 D 内有 $F(z)=f(z)$；
3. 在 D^* 内有 $F(z)=\overline{f(\bar{z})}$；

则称 $\{D^*,\overline{f(\bar{z})}\}$ 是 $\{D,f(z)\}$ 的越过 S 的直接解析开拓.

黎曼-施瓦兹反射原理(Riemann-Schwarz reflection principle)　即"黎曼-施瓦兹对称原理".

对称原理的一般形式(general form of symmetry principle)　较一般的解析开拓方法. 设区域 D 位于直线 l 的一侧，其边界包含 l 上的某一(开)线段 S. 若函数 $f(z)$ 满足条件：

1. $f(z)$ 在 D 内解析，在 $D\cup S$ 上连续；
2. $f(z)$ 在 S 上的值位于某直线 L 上；

则存在一函数 $F_1(z)$ 满足条件：

1. $F_1(z)$ 在 $D\cup D'\cup S$ 内解析，在 D 内有 $F_1(z)=f(z)$，这里 D' 是 D 关于 l 对称的区域；
2. 若 z_1,z_2 是 $D\cup D'\cup S$ 内关于 l 对称的两点；

则 $F_1(z_1),F_1(z_2)$ 是关于 L 对称的两点.

班勒卫定理(Painlevé theorem)　关于越过弧线的直接解析开拓. 设 $\{D_1,f_1(z)\}$ 及 $\{D_2,f_2(z)\}$ 为两解析元素，它们满足条件：

1. 区域 D_1 与 D_2 不相交，但有一段公共边界，除掉其端点后的开弧记为 Γ；
2. $f_1(z)$ 在 $D_1\cup\Gamma$ 上连续，$f_2(z)$ 在 $D_2\cup\Gamma$ 上连续；
3. 在 Γ 上，$f_1(z)=f_2(z)$；

则 $\{D_1\cup\Gamma\cup D_2,F(z)\}$ 也是一个解析元素. 其中，当 $z\in D_1$ 时，$F(z)=f_1(z)$；当 $z\in\Gamma$ 时，$F(z)=f_1(z)=f_2(z)$；当 $z\in D_2$ 时 $F(z)=f_2(z)$，此时称 $\{D_1,f_1(z)\}$ 及 $\{D_2,f_2(z)\}$ 互为越过弧 Γ 的直接解析开拓.

越过弧直接解析开拓(direct analytic continuation over an arc)　见"班勒卫定理".

解析开拓链(analytic continuation chain)　相继为直接解析开拓的解析元素集合. 给定解析元素集

$$\{\{D_1,f_1(z)\},\{D_2,f_2(z)\},\cdots,\{D_n,f_n(z)\}\},$$

若每一个解析元素都是前一个解析元素的直接解析开拓，则称这些解析元素组成解析开拓链，并称 $\{D_1,f_1(z)\}$ 及 $\{D_n,f_n(z)\}$ 互为解析开拓.

互为解析开拓(analytic continuatin of each other)　见"解析开拓链".

完全解析函数(complete analytic function)　亦称整体解析函数. 一类大范围的解析函数. 一个解析元素的全部解析开拓所确定的函数称为由这个解析元素生成的完全解析函数，它的定义域 G 称为它的存在域，G 的边界称为这个完全解析函数的自然边界. G 的边界点就是这个完全解析函数的奇点. 一个完全解析函数可能是单值的，也可能是多值的.

整体解析函数(global analytic function)　即"完全解析函数".

解析函数的自然边界(natural boundary of analytic function)　见"完全解析函数".

解析函数的存在域(existence domain of analytic function)　见"完全解析函数".

解析函数的奇点(singular point of analytic function)　函数不解析的点. 若函数 $f(z)$ 在点 $z=a$ 的任一邻域内不能展为泰勒级数，则点 $z=a$ 称为 $f(z)$ 的一个奇点. 一个函数的奇点可以是单值性奇点，也可以是多值性奇点.

解析函数的分支(branch of analytic function)　由完全解析函数的一个函数元素在区域内的解析开拓所得的函数元素之全体. 设 $f(z)$ 是一个完全解析函数，$P(z;a)$ 是 $f(z)$ 的以区域 D 内的点 a 为中心的一个函数元素. 以点 a 为起点，沿 D 内的所有曲线进行一切可能的解析开拓所得到的全部函数元素的集合，称为 $f(z)$ 在 D 内的一个由函数元素 $P(z;a)$ 确定的分支. 当 D 是整个复数平面时，$f(z)$ 的分

支就是完全解析函数$f(z)$本身. 在区域 D 内全纯的函数,能以 D 的任一点为中心展开为幂级数,这些幂级数(函数元素)的集合,成为一个解析函数的分支. 当 D 为单连通区域时,如果以 D 内的点 a 为中心的函数元素 $P(z;a)$在 D 内沿以 a 为起点的所有曲线都可以解析开拓,则 $f(z)$在 D 内由 $P(z;a)$确定的分支是单值的. 这便是单值性定理.

单值性定理(monodromy theorem) 见“解析函数的分支”.

解析函数的支点(branch point of analytic function) 多值解析函数中产生多值性的点. 若围绕以 z_0 为中心的充分小的圆周开拓一完全解析函数$F(z)$(z_0 是孤立奇点)的解析元素$\{D_1, f_1(z)\}$,当变点回到原来的位置时,得到不同的解析元素,则称此 z_0 点为函数 $F(z)$的一个支点. 若经有穷圈数的开拓后 $F(z)$回到开始的元素,而且当 $z \to z_0$ 时,$F(z)$的各个分支趋于一个有穷或无穷的极限,则称 z_0 是$F(z)$的一个代数支点. 若经任意圈开拓都不能回到原来的元素,则称 z_0 是$F(z)$的一个对数支点. 对数支点属于超越支点. 若当 z 绕支点 z_0 一圈时,$F(z)$的各分支周期性地重复 n 个值,则称 z_0 是$F(z)$的一个有限 $n-1$ 阶支点. 具有支点的完全解析函数称为多值解析函数.

代数支点(algebraic branch point) 见“解析函数的支点”.

对数支点(logarithmic branch point) 见“解析函数的支点”.

支点的阶(order of branch point) 见“解析函数的支点”.

超越支点(transcendental branch point) 见“解析函数的支点”.

多值解析函数(multi-valued analytic function) 见“解析函数的支点”.

代数函数(algebraic function) 一类完全解析函数. 指由不可约方程

$$P(z,w) \equiv a_n(z)w^n + a_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + a_0(z) = 0 \quad (1)$$

确定的多值函数,其中 $a_j(z)(j=0,1,\cdots,n)$是 z 的多项式. 从这个 w 的代数方程可知对每一个 z 值确定多个 w 值,因此 $w=w(z)$是一多值函数. 代数函数是在扩充的复平面 $\hat{\mathbf{C}}$ 上仅具有有限多个代数支点和极点的完全解析函数;反之,具有上述特征的完全解析函数,必满足一不可约代数方程,且除去一个非零常数因子外此方程是惟一的. 相应于代数函数的黎曼曲面是紧致的,即闭曲面. 此曲面的亏格即定义为代数函数的亏格. 由方程(1)联系着的 z 和 w 的有理函数 $R(z,w)$之积分

$$\int_{z_0}^{z} R(z,w)\mathrm{d}z$$

称为阿贝尔积分,其中$w(z)$的值是由 z_0 点选定的分支沿积分路径解析开拓而得. 它是一多值函数,其多值性不仅产生于$R(z,w)$的残数,$w(z)$的多值性,而且还依赖于 $w(z)$相应的黎曼曲面的拓扑性质. 对于这个积分人们常寻找一系列标准形式,使得任一这类型的积分能通过适当的变数变换变为其中一个标准形式.

关于阿贝尔积分的研究导致代数函数的单值化问题,代数函数单值化又引起一般单值化理论的发展. 在这方面,从 19 世纪下半期到 20 世纪的最初十年,世界上许多著名数学家如黎曼(Riemann,G. F. B.)、克莱因(Klein,(C.)F.)、庞加莱(Poincaré,J.-H.)、施瓦兹(Schwarz,H. A.)、诺伊曼(Neumann,C. G.)和克贝(Koebe,P.)等人都做出了重要贡献.

阿贝尔积分(Abel integral) 见“代数函数”.

椭圆函数(elliptic function) 一类双周期亚纯函数. 设 $f(z)$是一亚纯函数,如果 $f(z)$具有两个比值不为实数的周期 ω_1, ω_2,即对一切 $z \in \mathbf{C}$,

$$f(z+\omega_1) = f(z) = f(z+\omega_2),$$

则称 $f(z)$为椭圆函数(参见《数学分析》同名条).

单值化(uniformization) 求多值对应关系的参数表示. 寻求由不可约方程 $p(z,\omega) = a_n(z)w^n + a_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + a_0(z) = 0$(其中 $a_j(z)(j=1,2,\cdots,n)$是 z 的多项式)所确定的多值对应关系$z \leftrightarrow w$ 的一个参数表示 $z=z(t), w=w(t)$,使得 $z=z(t)$和 $w=w(t)$是 $\hat{\mathbf{C}}$ 的子域 G 上 t 的单值函数. 一般情形是要寻求由一个完全解析函数所确定的多值对应关系的参数表示. 1908 年,庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)和克贝(Koebe,P.)同时解决了一般单值化的问题. 对于代数函数的单值化的基本结果是:亏格 $p=0$ 的代数函数由有理函数单值化;亏格 $p=1$ 的代数函数由双周期椭圆函数单值化;亏格 $p \geqslant 2$ 时,则由单位圆内对某个富克斯群自守的亚纯函数单值化.

超椭圆曲面(hyperelliptic surface) 一类特殊的黎曼曲面. 相应于代数函数 $w^2 = p(z)$的黎曼曲面称为超椭圆曲面,其中$p(z)$为 z 的 $2p+1$ 和 $2p+2$ 次多项式. 数目 p 给出代数函数的亏格.

黎曼曲面(Riemann surface) 一维复解析流形. 由局部定义的解析函数经解析开拓得到的大范围定义的解析函数常常是多值的,它的单值定义域即是相联于此函数的黎曼曲面. 它能由有限或可数无穷多的“叶”所组成,这些叶都是复平面 $\mathbf{C}$ 上的域. 抽象黎曼曲面定义为:一个曲面 M 连同一个附加的复结构$\{(u_\gamma, h_\gamma)\}$,并记黎曼曲面 $R = (M, \{(u_\gamma, h_\gamma)\})$. 这是外尔(Weyl,(C. H.)H.)首先提出的. 这里复结构$\{(u_\gamma, h_\gamma)\}$是指开集族$\{u_\gamma\}$是

M 的一开覆盖，即 $M=\bigcup u_\gamma$，h_γ 是 u_γ 到复平面开集 V_γ 的同胚映射，亦称局部参数或局部坐标，并且相邻两个局部参数的定义域的交集上，其中一个参数是另一个参数的解析函数. 黎曼曲面上定义的函数称为解析的(或调和的或次调和的)，如果在每个参数邻域内它表示为局部参数的解析函数(或调和或次调和函数). 紧致黎曼曲面称为闭黎曼曲面，否则为开黎曼曲面.

黎曼曲面理论中具有基本的重要性的定理是单值化定理.

闭黎曼曲面(closed Riemann surface)　见“黎曼曲面”.

开黎曼曲面(open Riemann surface)　见“黎曼曲面”.

单值化定理(uniformization theorem)　黎曼曲面理论中最基本最重要的定理. 定理叙述如下：任一黎曼曲面必共形等价于下述典型曲面之一：

1. 扩充复平面 $\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$.
2. 复平面 $\mathbf{C}$.
3. 穿洞的复平面 $\mathbf{C}/\{0\}$.
4. 环面，即 $\mathbf{C}/\mathscr{L}$，$\mathscr{L}=\{T(z)=z+n_1w_1+n_2w_2,\ n_1,n_2\in\mathbf{Z},\mathrm{Im}(w_1/w_2)>0\}$，$\mathbf{Z}$ 表示整数集.
5. 单位圆对某个富克斯群 G 的商空间 D/G.

单值化定理表明，大多数的情形下，黎曼曲面共形等价于单位圆 D 对某个富克斯群 G 的商空间 D/G. 因此 R 上的解析函数论等价于定义在 D 上的对某个富克斯群 G 自守的函数论. 反之，整个黎曼曲面理论也能以这个特殊的表示为基础进行讨论. 一个经典的问题是：给定一个 D 上的富克斯群 G，是否存在非常数亚纯函数对于 G 是自守的，即黎曼曲面上是否存在非常数的亚纯函数.

庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)具体构造 Θ 级数，后称为庞加莱级数，以此证明对给定的 G 是自守的函数的存在. 闭黎曼曲面的一个重要定理是黎曼-罗赫定理，它给出闭黎曼曲面上亚纯函数构成的线性空间的维数. 两黎曼曲面，如果存在映一个为另一个的共形映射，则称它们是共形等价的. 关于闭黎曼曲面的模的黎曼问题称：亏格为 $g(>2)$ 的闭黎曼曲面的共形等价类集合 R_g 构成 $3g-3$ 维复流形. 这方面基础性的工作是由弗里克(Fricke，R.)和泰希米勒(Teichmüller，O.)所做.

共形等价黎曼曲面(conformal equivalence Riemann surface)　见“单值化定理”.

黎曼-罗赫定理(Riemann-Roch theorem)　闭黎曼曲面的重要定理. 设 R 为闭黎曼曲面，R 上的除子是如下有限形式和 $\delta=\sum n_ip_i(n_i\in Z,p_i\in R)$，其次数 $\deg\delta=\sum n_i$. 如 $n_i\geqslant 0$，则称 δ 为正除子，记 $\delta\geqslant 0$. 所有除子构成一阿贝尔群. 一除子称为是亚纯函数 f 或阿贝尔微分 ω 的除子，如果$\{p_i\}$是其所有零点和极点，n_i 为零点或 $-n_i$ 为极点相应的级，并记 $\delta=\delta(f)$(或 $\delta=\delta(\omega)$). 又给定 δ，记 $l(\delta)$为所有亚纯函数使得 $\delta(f)+\delta\geqslant 0$ 者，它是复域上的线性空间，记其维数为 $\dim l(\delta)$. 黎曼-罗赫定理断言：亏格为 g 的闭黎曼曲面上给定一除子 δ，对任意阿贝尔微分除子 k，有

$$\dim l(\delta)=\dim(k-\delta)+\deg\delta+(1-g).$$

这个基本定理可以导出一系列重要结果. 比如，闭曲面上存在非常数的亚纯函数和阿贝尔微分；亏格为 g 的闭黎曼曲面上第一类阿贝尔微分式所成的线性空间的复维数是 g；任意阿贝尔微分 ω 的除子$\delta(\omega)$的次数$\deg\ \delta(\omega)=2g-2$ 等.

黎曼曲面的亏格(genus of Riemann surface)　黎曼曲面的重要拓扑不变量. 一闭曲面(或开曲面)的一维同调群(或模理想边界的一维同调群)之秩是 $2g$，则称 g 为此曲面的亏格. 开曲面的亏格可能为无穷.

阿贝尔微分(Abel differential)　一类微分式. 闭黎曼曲面 R 上的亚纯微分 ω 称为阿贝尔微分，即 ω 用局部参数表示为

$$\omega=a(z)\mathrm{d}z,$$

其中$a(z)$为亚纯的. 如$a(z)$恒为全纯的，则 ω 称为第一类阿贝尔微分；如$a(z)$为亚纯且仅有 2 级极点，则 ω 称为第二类阿贝尔微分；如$a(z)$仅有 1 级极点，则 ω 称为第三类阿贝尔微分.

真间断群(properly discontinuous group)　一种特殊的单位圆 D 的解析自同胚群. 所谓真间断群 G，是指对任意$z_0\in D$，点集$\{r(z_0)|r\in G\}$在 D 内无聚点.

富克斯群(Fuchs group)　一类分式线性变换群. 单位圆 D 内的解析自同构真间断群称为富克斯群.

外尔斯特拉斯点(Weierstrass point)　黎曼曲面上具有某种特殊函数论性质的点. 设 R 为黎曼曲面，如 $p\in R$ 使得存在 R 上的亚纯函数，它仅以 p 为极点且重级$\leqslant g$，其他点为全纯，则称 p 为外尔斯特拉斯点，亏格为 $g(\geqslant 2)$的闭黎曼曲面 R 的外尔斯特拉斯点的总数 $n(w)$有下列估计

$$2(g+1)\leqslant n(w)\leqslant g^3-g.$$

外尔斯特拉斯空隙定理称：设 R 为亏格 $g>0$ 的闭黎曼曲面，$p\in R$ 为任一点，则存在且仅存在 g 个整数 $1=n_1<n_2<\cdots<n_g<2g$，使得不存在 R 上的亚纯函数，它在 $R\backslash\{p\}$上为全纯，而以 p 点为 n_i 级极点.

外尔斯特拉斯空隙定理(Weierstrass gap theorem)　见“外尔斯特拉斯点”.

覆盖曲面(covering surface)　黎曼曲面理论中引进的重要概念. 设 R 和 $\tilde{R}$ 为两曲面，如存在 $\tilde{R}$ 到

R 的映射 σ，使得对每一点 $\tilde{p}\in\tilde{R}$，存在一个邻域 $\tilde{U}$，而 σ 在 $\tilde{U}$ 上的限制是 $\tilde{U}$ 到 $p=\sigma(\tilde{p})$ 的一个邻域 U 的拓扑映射，此时称 $\tilde{R}$ 为 R 的光滑覆盖曲面. σ 为投影映射，$\tilde{p}$ 是 p 上的点，p 为 $\tilde{p}$ 的投影. 设 $\tilde{r}$ 和 r 分别是 $\tilde{R}$ 和 R 上的曲线，若 $\sigma(\tilde{r})=r$，则称 $\tilde{r}$ 是 r 的提升. 若对任意的 R 上的曲线 r 和 r 的起始点上的任意点 $\tilde{p}$，r 的以 $\tilde{p}$ 为起始点的提升总存在，则称 $\tilde{R}$ 为 R 的非限覆盖曲面. 对光滑覆盖曲面，提升不是恒存在的，但如存在则是惟一的. 单值性定理称：若 $\tilde{R}$ 是 R 的非限覆盖曲面，r_1 和 r_2 为 R 上任两个同伦曲线，它们的以共同起始点 p_0 上的一点 $\tilde{p}_0$ 为起始点的提升分别为 $\tilde{r}_1$ 和 $\tilde{r}_2$，则它们亦有相同的终点，且是同伦的. 投影映射作为连续映射诱导 $\tilde{R}$ 的基本群 $\tilde{F}$ 与 R 的基本群 F 的子群 G 同构，并称 G 为 $\tilde{F}$ 的迹群，记为 $G=\sigma(\tilde{F})$. 反之，对 R 的基本群 F 的任意子群 G，恒存在一个非限覆盖曲面 $\tilde{R}$，使得其基本群 $\tilde{F}$ 的迹群为 G. 若 G 只包含 F 的么元素 e，则相应的覆盖曲面称为万有覆盖曲面. 它是单连通的覆盖曲面.

提升(lifting)　见“覆盖曲面”.

迹群(trace group)　见“覆盖曲面”.

光滑覆盖曲面(smooth covering surface)　见“覆盖曲面”.

非限覆盖曲面(unlimited covering surface)　见“覆盖曲面”.

万有覆盖曲面(universal covering surface)　见“覆盖曲面”.

自守函数(automorphic function)　自变数在某个变换群作用下函数值不变的解析函数. 如一解析函数 $f(z)$（允许有极点）的变元经某分式线性变换群 $T=\{T_n(z)\}$（有限或可数个元）中的元代换后仍得出原来的函数，即

$$f(T_n(z))=f(z)\quad(T_n\in T),$$

则称 $f(z)$ 为关于群 T 的自守函数. 这里 $T_n(z)$ 是分式线性函数，即

$$T_n(z)=\frac{\alpha_n z+\beta_n}{\gamma_n z+\delta_n}\quad(\alpha_n\delta_n-\beta_n\gamma_n\neq 0).$$

自守函数包括了很多初等函数，例如三角函数、指数函数等，也包括像椭圆函数、模函数等非初等函数.

自守函数是复变函数论中的一个重要部分，它在代数函数论、单值化问题、微分方程解析理论等方面均有重要的应用，它还和黎曼曲面的研究密切相关. 自守函数的一般理论是庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)和克莱因(Klein, (C.)F.)在19世纪80年代建立起来的.

基本区域(fundamental region)　复平面上某个变换群的等价类的代表所成的域. 设 $f(z)$ 为关于分式变换群 G 的自守函数. 平面中两点，如能用 G 中的元使一点变为另一点，则称此两点为关于群 G 的等价点. 平面中的一区域 D，若其中任何两个不同点彼此不等价，而平面中任何点都可在 D 中找出其等价点，则称 D 为群 G 的基本区域，也称为自守函数 $f(z)$ 的基本区域. 自守函数在基本区域中取任何值（包括无穷）的次数均相同.

等价点(equivalent point)　见“基本区域”.

基本函数(fundamental function)　一类特殊的自守函数. 在基本区域中取任何值只一次的自守函数，称为关于这个基本区域的基本函数. 并不是任何基本区域都有基本函数. 例如，用周期平行四边形作为基本区域，相应的自守函数就是椭圆函数，但不存在椭圆函数在周期平行四边形中只一次地取任何值.

模函数(modular function)　一种在理论上极为重要的特殊的自守函数. 例如，可用它来证明皮卡定理. 设在 z 平面的单位圆周 Γ 上任意取定三点 A,B,C（如图1），过其中每两点做圆弧与 Γ 正交，在圆内形成一内接圆弧三角形 ABC. 将它用 $w=\chi(z)$

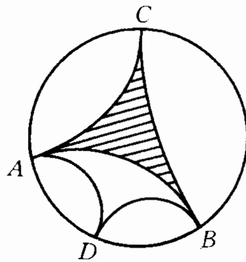


图 1

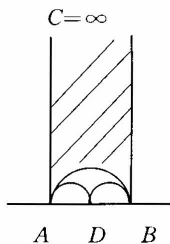


图 2

共形映射到 w 的上半平面. 使 A,B,C 分别映为 $0,1,\infty$. 利用对称原理，可将（圆弧）三角形越过 AB 弧对称反演成另一三角形 ABD，而 $w=\chi(z)$ 就在 w 平面上越过线段[0,1]解析开拓到下半平面. 如果对三角形 ABC 的各个弧都做反演，又对反演后的图形再对每一新三角形的新圆弧边反演，并对每一次反演将函数 $w=\chi(z)$ 解析开拓. 如此一直继续下去，便可得 z 平面中单位圆内的解析函数 $w=\chi(z)$，其值域为 w 扩充平面. 这函数是由这些反演所生成的群的自守函数，称为模函数.

圆弧四边形 $ABCD$ 为其基本区域，且 $\chi(z)$ 就是该群的基本函数. 当然，如把 ABC 改为上半平面的一个半带形，它由实轴上两点 A,B 出发在上半平面中做垂直于实轴的半射线和以 AB 为直径的上半圆周所围成（如图2），仍将它共形映射到 w 的上半平面，并不断用对称原理将它解析开拓，则可得上半平面中的模函数，以上述半带形及它对半圆弧 AB 反演的圆弧三角形 ADB 合成其基本区域，此模函数也是基本函数.

泰希米勒空间(Teichmüller spaces)　闭黎曼

曲面上附带一定拓扑条件的复解析结构所构成的空间.假设 $S_g(g\geqslant 0)$ 是一个亏格为 g 的闭曲面,在复分析及其应用中一个十分重要的基本问题是怎样对 S_g 上的复结构进行描述. $g=0,1$ 的情形早为人们所认识,即 S_0 上有惟一的复结构,S_1 上的所有复结构可以用一个复参数来描述.当 $g>1$ 时此问题十分复杂.100 多年前,黎曼猜测 $S_g(g>1)$ 上的所有复结构可用 $6g-6$ 个实参数来描述.此著名猜测的证明由德国数学家泰希米勒(Teichmüller,O.)于 20 世纪 40 年代首先给出,其证明的关键性思想是对一类以 S_g 为基点的形变空间的拓扑性质及其"自然"作用于其上的模群的分析,这类重要的形变空间即是现在所称的泰希米勒空间.其定义如下:考虑所有形如$[S,f]$的元组,其中 $f:S_g\to S$ 为同胚映射,规定一等价关系:$[S_1,f_1]\sim[S_2,f_2]$,当且仅当存在一共形映射 $\sigma:S_1\to S_2$ 满足 $\sigma\circ f_1\sim f_2$(同伦),利用拟共形映射的复偏差可在此等价类集合上装备一个完备的度量,并称为泰希米勒度量.如此所得到的拓扑空间 T_g 称为泰希米勒空间.粗略地说,泰希米勒的重大贡献在于巧妙地应用拟共形映射及 S_g 上的全纯二次微分给出了一个"直观地"得到 S_g 上所有复结构的形变方法.与此相关的重要结果有:

1. 给定 T_g 中的任一点$[S,f]$,存在 S_g 上的泰希米勒形变 T 及共形映射 h,使得 $[S,f]=[S,h\circ T]$,且$h\circ T$是 f 的同伦类中伸缩商为最小的惟一的极值映射.

2. 记 R_g 是亏格为 g 的闭曲面的共形等价类的集合,$\mathrm{Mod}\,g$ 是作用于 T_g 上的模群,则 $\mathrm{Mod}\,g$ 在 T_g 上的作用是离散的,且 $R_g=T_g/\mathrm{Mod}\,g$.

3. T_g 同胚于 $6g-6$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^{6g-6}$ 中的开球.

阿尔福斯(Ahlfors,L. V.)首先认识到泰希米勒空间的重要价值,并证明 T_g 上存在与泰希米勒拓扑相容的复结构.稍后伯斯(Bers,L.)证明 T_g 可被全纯地嵌入到 $\mathbb{C}^{3g-3}$中有界球的内部.在随后的研究中,S_g 的拓扑类型推广到允许 S_g 上有洞或穿孔点,甚至可以直接从离散群出发来定义广泛的泰希米勒空间.至今泰希米勒空间理论已发展成为现代数学中非常重要的研究课题,它与现代数学及物理中的许多分支,如埃尔米特几何、黎曼几何、代数几何、离散群理论、三维流形理论、动力系统、遍历理论、BMO 理论以及超弦理论等均有直接或间接的联系.许多精粹思想交融其中,互映生辉.特别要指出的是由瑟斯顿(Thurston,W.)所创立的"地震"理论.这是与泰希米勒形变理论相媲美的另一个"直观地"得到 S_g 上所有复结构的形变方法.此外由于计算机技术的发展及应用上的需要,开发对 T_g 中的目标的计算方法已开始受到人们的重视.

泰希米勒度量(Teichmüller metric) 泰希米勒空间中两点的距离.设 $p=[S_1,f_1]$和 $q=[S_2,f_2]$ 是 T_g 中两点,则称

$$d_T(p,q)=\frac{1}{2}\inf_f\log\frac{1+\|\mu_f\|_\infty}{1-\|\mu_f\|_\infty}$$

为 p,q 两点的距离,其中 f 是取自 $f_2\circ f_1^{-1}$ 的同伦类中所有拟共形映射,μ_f 是 f 的伸缩商.泰希米勒(Teichmüller,O.)证明:在 $f_2\circ f_1^{-1}$ 的同伦类存在惟一的极值映射达到上述定义中的下确界.值得一提的是这种复偏差方法可追溯到格勒奇(Grötzsch,H.)的著名变分问题.

全纯二次微分(holomorphic quadratic differential) 一种特殊的二次微分式.在局部坐标 z 下表为 $\omega=f(z)\mathrm{d}z^2$且在局部坐标变换下不变的微分式.若 f 是点 z 的全纯函数,则称 ω 为 S_g 上的全纯二次微分式.由黎曼-罗赫定理可知:S_g 上所有全纯二次微分的全体是 $6g-6$ 维实的向量空间.利用非零全纯二次微分可做出 S_g 上的局部全纯坐标系,即所谓自然参数.其作法如下:设 $p\in S_g$,z 为 p 附近的局部坐标,$z(p)=0$,$\omega=f(z)\mathrm{d}z^2$.若$f(z(p))=f(0)\neq 0$,则在原点附近

$$z\mapsto\Phi(z)=\int\sqrt{f(z)}\mathrm{d}z$$

是单射,此处取 $\sqrt{f(z)}$为一单值分支,从而在 p 的邻域内 $q\to\zeta=\Phi(z(q))$是一局部全纯坐标.若 p 是 ω 的 n 阶零点,则存在以原点为中心的圆盘 $D(0;r)$,使得在其内 $f(z)=z^n\psi(z)$,其中 $\psi(z)$全纯且 $\psi(z)\neq 0$.取定 $\sqrt{\psi}$ 的一个单值分支;如 n 为奇数,则沿 $I=\{x\mid 0\leqslant x<r\}$ 切割$D(0;r)$,然后取$z^{n/2}$在 $D(0;r)\setminus I$ 中一个分支;如 n 为偶数,则无须切割 $D(0;r)$,总之,

$$z\mapsto\Phi(z)=\int_0^z\sqrt{f(z)}\mathrm{d}z$$
$$=z^{(n+2)/2}(c_0+c_1z+\cdots)\quad(c_0\neq 0)$$

是定义于 $D(0;r)\setminus I$ 的单值函数.可验证

$$z\to\Phi(z)^{2/n+2}$$

是单值且在原点的导数不为 0.从而

$$q\to\zeta=\Phi(z(q))^{2/n+2}$$

可作为 p 点附近的局部坐标.设 $0<k<1$,ζ 是 S_g 上某一非零全纯二次微分 ω 诱导的自然参数,令

$$\zeta'=\frac{\zeta+k\bar{\zeta}}{1-k},$$

易知 ζ'满足局部坐标的相容性条件,因而 ζ'可作为拓扑曲面 S_g 上的全纯坐标.由此产生一个黎曼曲面 S'_g 及泰希米勒空间的一个点$[S'_g,T]$,其中$T:S_g\to S'_g$作为拓扑曲面 S_g 上的自同胚为恒等映射,T 及$[S'_g,T]$称为泰希米勒形变.

自然参数(natural parameter) 见"全纯二次

微分”.

泰希米勒形变(Teichmüller deformation) 见“全纯二次微分”.

模群(modular group) 即亏格大于 2 的闭曲面上映射类群. 考虑拓扑曲面 S_g 上所有保向自同胚集合,在其上定义一等价关系使得两元素 h 与 h^1 等价,当且仅当 h 与 h^1 同伦,如此所得到的等价类集合在复合运算$[h]\circ[h^1]=[h\circ h^1]$下构成一群,称为模群,或映射类群. 模群以如下方式自然地作用于泰希米勒空间:$[h]([s,f])=[s,f\circ h]$. 易证此种作用是间断的. 模群与泰希米勒空间理论、拓扑学及三维流形理论等有密切的联系,至今仍是人们所重点研究的课题之一.

解析函数空间

布拉施克乘积(Blaschke product) 因子为单位圆到自身的共形变换的无穷乘积. 若 $a_n(n=1,2,\cdots)$是一复数序列,$0<|a_n|<1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$$

收敛,则无穷乘积

$$B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{a_n}\left(\frac{a_n-a}{1-\bar{a}_n z}\right)$$

在$|z|<1$ 内收敛,$B(z)$称为布拉施克乘积.

哈代空间(Hardy space) 单位圆内一类重要的解析函数空间. 设函数 $f(z)$在单位圆盘$|z|<1$中解析,若

$$M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}\quad(0<p<+\infty),$$

$$M_\infty(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|\qquad(p=+\infty)$$

对一切 $0\leqslant r<1$ 有界,则称 $f(z)$属于函数族 H^p. H^p 族是由哈代(Hardy,G. H.)在 1915 年首先提出的,并对此做了一系列的研究工作,他证明了著名的凸定理:$\log M_p(r,f)$是 $\log r$ 的凸函数.

在 20 世纪上半叶,还有许多数学家,如法图(Fatou,P. J. L.)、李特尔伍德(Littlewood,J. E.)、里斯(Riesz,F. 和 Riesz,M.)、赛格(Szegö,G.)和斯米尔诺夫(Смирнов,В. И.)等人对哈代族进行了研究并取得一系列相当深刻的结果. 但那时对 H^p 的研究局限于所谓的“硬”分析范围,如研究 H^p 函数的边界性质及幂级数等,所用的工具也主要是复变函数与实变函数论. 到了 20 世纪 50 年代,数学家们将 H^p 看做度量空间,如对 $1\leqslant p\leqslant+\infty$,定义范数 $\|f\|_p=M_p(1,f)$,则 H^p 是巴拿赫空间;对 $0<p<1$,对 $f,g\in H^p$,定义距离

$$\|f-g\|_p=M_p(1,f-g)^p,$$

则 H^p 是弗雷歇空间. 引进泛函分析等工具,将“软”“硬”分析结合起来研究 H^p 空间,20 世纪 70 年代和 80 年代,对 H^p 的研究非常活跃,并得到了许多引人注目的结果. 如在 1971 年,美国青年数学家费弗曼(Fefferman,C.)证明了 H^1 的对偶空间为 BMOA 空间. 费弗曼主要由于 H^p 理论的研究,获得了 1978 年的菲尔兹奖(参见《调和分析》同名条).

H^p 理论不仅对分析和函数论(包括泛函分析和调和分析)本身有着深刻的影响,而且与数学的一些其他分支,如微分方程、概率论及力学等都有交叉联系. 单位圆盘的 H^p 空间的主要研究问题有:边界性质、积分表示、泰勒系数、结构问题、解析投影算子、对偶空间、极值问题及插值问题等.

单位圆盘上的 H^p 空间可以推广到平面上任意区域和双曲型黎曼曲面上,也可推广到 $\mathbb{C}^n$ 上去. 与 H^p 空间有关的重要函数类有奈望林纳类 N 和有界平均振动解析函数类 BMOA. 可以证明

$$H^\infty\subset\mathrm{BMOA}\subset\bigcap_{p<\infty}H^p.$$

设 $f(z)$是单位圆盘 D 内的解析函数,ζ 是 ∂D 上的给定点,如果当 z 在 D 内以 ζ 为顶点的任何角形区域内趋于 ζ 时,$f(z)$都趋于一确定值,则称$f(z)$在 ζ 有非切向极限值,记为$f(\zeta)$. 1923 年,里斯证明了,若 $f\in H^p(0<p<+\infty)$,则 $f(z)$在 ∂D 上几乎处处有非切向极限值 $f(e^{i\theta})$,且 $f(e^{i\theta})\in L^p[0,2\pi]$. 同年,里斯还证明了,若$f(z)\in H^p(0<p\leqslant+\infty)$,$f(z)\not\equiv0$,则$f(z)=B(z)g(z)$. 这里$B(z)$是由$f(z)$在$|z|<1$内所有零点所构成的布拉施克乘积,而 $g\in H^p$ 且 g 在$|z|<1$中没有零点. 1929 年,斯米尔诺夫进一步地对 g 进行分解,得到下述结果:若$f(z)\in H^p$,$f(z)\not\equiv0$,则

$$f(z)=e^{ic}B(z)S(z)F(z),$$

这里 c 是实数,$S(z)$是奇异内函数,$F(z)$是外函数,即

$$S(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\mathrm{d}\mu(t)\right\},$$

$$F(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f(e^{it})|\mathrm{d}t\right\},$$

其中 $\mu(t)$是非减的有界变差函数,其导函数几乎处处等于零.

单位圆盘上的解析函数称为内函数,如果 $f\in H^\infty$,且$|f(e^{it})|=1$ 在 ∂D 上几乎处处成立. 可以证明,$f(z)$为内函数的充分必要条件是 $f(z)$能写成如下形式

$$f(z)=e^{ic}B(z)S(z),$$

这里 c 为实数,$B(z)$为布拉施克乘积,$S(z)$为奇异内函数. 内函数与不变子空间有密切的联系. 令 S 为 H^2 的位移算子,即$S(f)=zf(z)$,$f\in H^2$. H^2 的一个子空间 M 称为在 S 下不变,若 $zM\subset M$. 1949 年,博灵(Beurling,A.)证明了下面的著名定理:H^2

的子空间 M 在 S 下不变的充分必要条件是存在内函数 G,使得

$$M = GH^2 = \{G(z)f(z) \mid f \in H^2\}.$$

此定理在泛函分析中也有重要意义.

非切向极限值(nontangential limit value) 见"哈代空间".

内函数(inner function) 见"哈代空间".

外函数(outer function) 见"哈代空间".

插值序列(interpolation sequence) 单位圆内满足某种函数论条件的点列.单位圆盘一序列 $\{z_k\}$ 称为插值序列,如果对任意一个复数序列 $\{w_k\} \subset l^\infty$,存在 $f \in H^\infty$,使得 $f(z_k) = w_k (k=1,2,\cdots)$.讨论插值序列,有一个有用概念是均匀分散序列.序列 $\{z_k\}$ 称为均匀分散的,若存在常数 $\delta > 0$,使得

$$\prod_{j \neq k}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \bar{z}_j z_k} \right| \geqslant \delta \quad (k = 1,2,\cdots).$$

1958年,卡尔松(Carleson,L.)证明了 $\{z_k\}$ 是插值序列的充分必要条件是 $\{z_k\}$ 是均匀分散的.

有界平均振动解析函数(analytic function of bounded mean oscillation) 哈代空间 H^1 的对偶空间中的函数.有种种等价描述,其原始定义如下:对于单位圆周 T 上的可积函数 u,若 I 是 T 的子弧,令

$$u_I = \frac{1}{|I|}\int_I u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta,$$

这里 $|I|$ 是 I 的长度.若

$$\frac{1}{|I|}\int_I |u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - u_I| \mathrm{d}t$$

对 T 上的一切子弧 I 有界,则称 u 属于BMO(有界平均振动函数的简称,参见本卷《调和分析》同名条).

单位圆盘的解析函数 $f(z)$ 若能表为一个BMO函数的泊松积分,则称它属于BMOA(有界平均振动解析函数的简称).

有界平均振动函数(function of bounded mean oscillation) 见"有界平均振动解析函数".

卡尔松测度(Carleson measure) H^p 理论中非常重要和有广泛应用的测度.设 σ 是单位圆盘的正测度,若存在常数 $c(\sigma)$,使得 $\sigma(S) \leqslant c(\sigma)h$ 对所有下列扇形 S 成立,则称 σ 为卡尔松测度:

$$S = \{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid 1 - h \leqslant r \leqslant 1, \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + h\}.$$

卡尔松测度由卡尔松(Carleson,L.)提出.1958年,卡尔松证明了下面著名的测度定理:令 μ 是 $|z|<1$ 上的正测度.设 $0<p<+\infty$,则存在常数 C,使得

$$\left(\int_{|z|<1} |f(z)|^p \mathrm{d}\mu(z)\right)^{1/p} \leqslant C \| f \|_p$$

对一切 $f \in H^p$ 成立的充分必要条件是 μ 是一个卡尔松测度.卡尔松测度也能刻画BMOA,费弗曼(Fefferman,C.)在证明 H^1 的对偶空间为BMOA的过程中,证明了 $f \in$ BMOA 的充分必要条件是

$$(1 - |z|^2)|f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为一个卡尔松测度,其中 $z = x + \mathrm{i}y$.

日冕问题(corona problem) H^p 理论中的一个重要问题.1941年,角谷静夫(Kakutani,S.)提出如下猜想:设 $\mathscr{M}$ 是 H^∞ 的极大理想,则 $\mathscr{M} \backslash \overline{D}$ 是一个空集,这里 D 是单位圆盘.此即称为日冕问题.由于 $\mathscr{M}$ 的拓扑是Gelfand拓扑,所以日冕问题亦可叙述为如下的形式:若 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in H^\infty$ 且对一切 $z \in D$,满足条件

$$0 < \delta \leqslant \max_j |f_j(z)| \leqslant 1,$$

则存在 $g_1, g_2, \cdots, g_n \in H^\infty$,使得

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n = 1.$$

这个猜想已于1962年由卡尔松(Carleson,L.)所证明.但日冕问题对于平面上一般的无限连通区域,及对于 $\mathbf{C}^n$ 中的多圆柱和超球等,都是引起许多学者关注的待解决的难题.

伯格曼空间(Bergman space) 区域上平方可积的解析函数空间.一般地,对 $1 \leqslant p < +\infty$,令 $L^p(D)$ 表示域 D 上勒贝格可测函数 $f(z)$ 所成的巴拿赫空间,其范数为

$$\| f \|_p = \left(\int_D |f(z)|^p \mathrm{d}A(z)\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

其中 $\mathrm{d}A(z)$ 为面积元素.伯格曼空间定义为由 $L^p(D)$ 内的所有解析函数组成的子空间,记为 $L_a^p(D)$.伯格曼空间的一个重要结果是下述对偶定理:$L_a^p(D)$ 的对偶空间 $(L_a^p(D))^*$ 同构于 $L_a^q(D)$,其中 $1<p,q<+\infty$ 且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

当 $p=1$ 时,$L_a^1(D)$ 的对偶空间是布洛克空间,$L_a^1(D)$ 的预对偶空间为小布洛克空间.伯格曼空间有多种形式的推广,关于这些空间上的各种算子的研究,得到不少深入的结果.

L_a^2 函数的再生核(reproducing kernel for L_a^2 functions) 伯格曼空间 $L_a^2(D)$ 上用以表示此空间中的函数的某个积分算子的核函数.由里斯表示定理可得在点 $z \in D$ 存在惟一的函数 $K_z(w) \in L_a^2(D)$,使得对所有的 $f(z) \in L_a^2(D)$ 有下述再生公式

$$f(z) = \int_D f(w) \overline{K_z(w)} \mathrm{d}A(w).$$

$K(z,w) = \overline{K_z(w)}$ 称为域 D 上 L_a^2 函数的再生核.它是研究伯格曼空间的重要工具,亦是域 D 的几何基础.当 D 为单位圆盘时,核函数为

$$K(z,w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}.$$

由它导出的伯格曼度量与庞加莱度量相同.

伯格曼投影(Bergman projection)　$L^2(D)$到$L_a^2(D)$的正交投影算子. 伯格曼空间$L_a^2(D)$是希尔伯特空间$L^2(D)$的闭子空间,对任意$f\in L^2(D)$,

$$Pf(z)=\int_D K(z,w)f(w)\mathrm{d}A(w)$$

表示了$L^2(D)$到$L_a^2(D)$的正交投影算子,P称为伯格曼投影,其中$K(z,w)$为再生核(参见"L_a^2函数的再生核"). 显然它是有界算子. 一般地,对$1<p<+\infty$,$f(z)\in L^p(D)$,令

$$(Pf)(z)=\int_D K(z,w)f(w)\mathrm{d}A(w),$$

则可知$Pf(z)$是解析的,并且P是$L^p(D)$到$L_a^p(D)$的有界算子.

布洛赫空间(Bloch space)　一类重要的解析函数空间. 设$f(z)$是单位圆D内的解析函数,若

$$\|f\|_B=|f(0)|+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)|$$

为有限数,则称$f(z)$是布洛赫函数. 全体这样的函数构成以$\|f\|_B$为范数的巴拿赫空间,称为布洛赫空间,并用B表示. 布洛赫函数与著名的布洛赫定理密切相关. 若$f(z)$在D内解析,$|f'(0)|=|a_1|=1$,布洛赫定理指出,存在绝对常数$c>0$使得$f(D)$包含一个以$f(0)$为心以c为半径的单叶圆盘. 定理中的常数c的最大值称为布洛赫常数,记为c_0. c_0的准确下界是多少仍是个未解决的问题. 若b表示$f(D)$内最大的单叶圆半径,则有

$$b\leqslant\sup(1-|z|^2)|f'(z)|\leqslant\frac{b}{c_0}.$$

由此得到范数$\|f\|_B$的几何解释,即若$f(z)=0$,则除去一个常数系数,$\|f\|_B$就是$f(D)$内最大单叶圆盘的半径. 布洛赫空间的一个重要子空间是小布洛赫空间,记为B_0,定义如下

$$B_0=\{f|f\in B,\lim_{|z|\to 1}(1-|z|^2)|f'(z)|=0\}.$$

这是B的可分的闭子空间. 布洛赫函数有种种等价的描述,比如可用阿达马(Hadamard,J.(-S.))的缺项条件来刻画B和B_0. 新近一个重要发现是,$f(z)\in B$(或B_0)的充分必要条件是对$1<p<+\infty$,

$$\sup_{a\in D}\int_D|f'(z)|^2(G(z,a))^p\mathrm{d}A(z)<+\infty$$

$$\left(\text{或}\lim_{|a|\to 1}\int_D|f'(z)|^2(G(z,a))^p\mathrm{d}A(z)=0\right),$$

其中

$$G(z,a)=\log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right|$$

是D的奇点在a的格林函数. 在伯格曼空间理论中,已知$L_a^1(D)$的对偶空间$L_a^1(D)^*$为B,B_0是$L_a^1(D)$的预对偶空间. 由此得到:对于面积测度,B_0和B分别是零平均振动解析函数VMOA和有界平均振动解析函数BMOA的类似物. 布洛赫函数空间有种种推广,如α型布洛赫空间以及在双曲型黎曼曲面上的推广,后者显示与单位圆情形有本质的差别.

布洛赫函数(Bloch function)　见"布洛赫空间".

小布洛赫空间(little Bloch space)　见"布洛赫空间".

广义解析函数与边值问题

解析函数边值问题(boundary value problem of analytic functions)　求某些区域中的解析函数,使其在区域边界上的极限值(也称边值)满足一定条件的问题. 此类问题统称为解析函数的边值问题. 由于解析函数满足柯西-黎曼条件,因此解析函数边值问题和椭圆型偏微分方程的边值问题密切相关. 如未知函数不止一个,而是一组解析函数,则又有解析函数组的边值问题. 有时边值条件中会出现未知函数在区域边界点t和$\alpha(t)$的边值之间的联系,则称为带位移的边值问题,其中$\alpha(t)$是边界到其自身的同胚映射. 求解这类边值问题的基本工具是柯西型积分和普莱姆利公式. 解析函数边值问题最直接的应用是求解或讨论奇异积分方程. 而奇异积分方程和解析函数边值问题本身在许多科技领域中有广泛的应用,如弹性理论、流体力学、数学物理等方面. 还有一类问题,其区域的边界是未知的,要由所给条件去求出,这类问题称为反边值问题.

解析函数边值问题的一些简单情况,早在19世纪就已有所讨论,而作为函数论的一分支蓬勃发展,则是20世纪中叶的事情. 特别是以穆斯赫利什维利(Мусхелишвили,Н. И.)为首的苏联学派在这方面做出了卓越的贡献. 中国学者从20世纪60年代起在这方面也做了不少工作. 如果把柯西-黎曼条件推广,则可引进广义解析函数概念,从而也有广义解析函数边值问题的研究. 这种研究在20世纪下半叶以来已经有了相当的规模,这其中也包括中国数学工作者的工作在内.

柯西主值积分(Cauchy principal value of an integral)　对奇异积分主值的一种取法. 设L为一可求长曲线,考虑积分

$$\int_L f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中$f(\tau)$在$\tau=c$处有一奇点(如L为开口曲线,则c不是端点). 一般地此积分发散. 如以c为中心,以充分小的ε为半径做圆,在L上截下一小段弧L_ε,如果

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{L-L_\varepsilon}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

存在，则称此极限为柯西主值积分，记为

$$\mathrm{P.V.}\int_L f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

或径直记为

$$\int_L f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

最常用的情况是

$$\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau \quad (t \in L).$$

（参见《数学分析》同名条）.

柯西型积分(integral of Cauchy type)　柯西积分的推广. 下列积分称为柯西型积分

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t - z}\mathrm{d}t \quad (z \notin L),$$

其中 L 为封闭的或开口的可求长曲线. $f(t)$称为它的核密度，$1/(t-z)$称为柯西核. 当然要假定积分存在. 这里$f(t)$一般不是某解析函数在 L 上的边值，所以柯西型积分和柯西积分公式中的积分不同. 由上式定义的函数 $\Phi(z)$，当 L 为封闭曲线时，是在 L 所围内域和外域中的两个解析函数；当 L 为开口曲线时，则是全平面除掉 L 后的一个解析函数.

柯西核(Cauchy's kernel)　见“柯西型积分”.

普莱姆利公式(Plemeli's formulas)　柯西型积分的边界值公式. 设柯西型积分

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t - z}\mathrm{d}t \quad (z \notin L)$$

中的 $f(t)$满足赫尔德条件，即

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant A|t_1 - t_2|^{\mu}$$
$$(0 < \mu \leqslant 1, t_1, t_2 \in L),$$

其中 A 为一常数. 又设 L 为一光滑弧，并取定一方向为正向(例如，当 L 为封闭曲线时，可取为逆时针方向)，则 $\Phi(z)$当 z 从 L 的正侧(正向前进方向的左侧)和负侧(右侧)趋向于 L 上一点 t_0 时(当 L 为开口时，t_0 不是端点)，其极限值(边值)$\Phi^+(t_0)$和 $\Phi^-(t_0)$存在，且

$$\Phi^{\pm}(t_0) = \pm\frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t - t_0}\mathrm{d}t \quad (t_0 \in L),$$

其中右端积分要理解为柯西主值积分. 这个公式称为普莱姆利公式. 它是求解边值问题的基本工具. 如 L 分段光滑，t_0 为 L 上的一角点，其两个单边切线在正侧所张的角为 θ_0，则上式成为

$$\Phi^+(t_0) = \left(1 - \frac{\theta_0}{2\pi}\right)f(t_0) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t - t_0}\mathrm{d}t,$$

$$\Phi^-(t_0) = -\frac{\theta_0}{2\pi}f(t_0) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{t - t_0}\mathrm{d}t \quad (t_0 \in L).$$

普莱姆利公式在苏联的书刊中常被称为索霍茨基公式. 当$f(t) \in L^p(p>1)$(即 p 次勒贝格可积)时，普莱姆利公式对 L 上点 t_0 几乎处处成立.

索霍茨基公式(Sokhozki formula)　即“普莱姆利公式”.

黎曼边值问题(Riemann boumdary value problem)　亦称连结问题，一类解析函数的边值问题. 设 L 为一封闭曲线，求一分区全纯函数(即在 L 所围内域和外域中解析，且在 L 的正、负侧上有极限值即边值)，使之满足边值条件

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (t \in L), \tag{1}$$

其中 $G(t)$，$g(t)$为已知函数. 此问题称为黎曼边值问题. 当然还应要求 $\Phi(z)$在 $z=\infty$处有一定的性态，例如 $\Phi(\infty)=0$ 或有限等. 当 L 是开口曲线时也有类似问题，不过这时 $\Phi(z)$在整个平面中除去 L 后是一个解析函数. 如果(1)式左端中的 t 改为 $\alpha(t)$，这里 $\alpha(t)$是 L 到自身的同胚映射，则有带位移的黎曼边值问题.

连结问题(problem of conjunction)　即“黎曼边值问题”.

希尔伯特边值问题(Hilbert boundary value problem)　寻求区域内的解析函数使得它在区域边界上满足某些边界条件的问题. 设 L 是某区域 G 的边界曲线，L 的正向取成使 G 在其正(左)侧. 求 G 中的解析函数 $\Phi(z)$，使其在 L 上的边值 $\Phi^+(t)$满足条件

$$\mathrm{Re}\{\gamma(t)\Phi^+(t)\} = f(t) \quad (t \in L),$$

其中 $\gamma(t)$为已知函数，$f(t)$为已知实函数. 此问题称为希尔伯特边值问题. 也有人将希尔伯特边值问题称为黎曼-希尔伯特边值问题.

黎曼-希尔伯特边值问题(Riemann-Hilbert boundary value problem)　见“希尔伯特边值问题”.

广义解析函数(generalized analytic function)　解析函数的推广. 指标准化的一阶椭圆型方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = au + bv \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = cu + \mathrm{d}v\end{cases} \tag{1}$$

在平面区域 D 内的连续解. 以上方程组还可写成复形式的方程

$$w_{\bar z} = Aw + B\bar w, \tag{2}$$

其中

$$A = \frac{1}{4}(a + d + \mathrm{i}(b + c)),$$

$$B = \frac{1}{4}(a - d + \mathrm{i}(b + c)),$$

$$z = x + \mathrm{i}y,\ w = u + \mathrm{i}v,\ w_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

韦夸(Векуа, И. Н.)和伯斯(Bers, L.)各自独立地建立了系统的广义解析函数理论. 20 世纪 50 年代，亚音速、超音速飞机的研制，推进了广义解析函数的发

展. 伯斯用 $D(\infty\in D)$ 内两个连续可微的函数 $F(z)$, $G(z)$ 分别代替复数表示中的 1, i, 并要求 $F(z)$, $G(z)$ 满足条件

$$\operatorname{Im}\overline{F(z)}G(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\overline{F(z)}G(z)+F(z)\overline{G(z)}]>0. \quad (3)$$

而 D 内任一连续可微函数 $w(z)$ 均可表示成

$$w(z)=F(z)\varphi(z)+G(z)\psi(z), \quad (4)$$

这里 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 都是 D 内实值函数. 如果对 D 内的任一点 z, 极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{w(z+h)-F(z+h)\varphi(z)-G(z+h)\psi(z)}{h}=\dot{w}(z) \quad (5)$$

存在, 则称 $w(z)$ 按 $(f(z),G(z))$ 在点 z 存在微商 $\dot{w}(z)$, 并称 $w(z)$ 为 D 内的第一类准解析函数. $w(z)$ 是 D 内第一类准解析函数的充分必要条件是: $w(z)$ 在 D 内满足复方程(2), 其中

$$A(z)=\frac{\overline{F}G_{\bar z}-\overline{G}F_{\bar z}}{\overline{F}G-F\overline{G}},\ B(z)=\frac{GF_{\bar z}-FG_{\bar z}}{\overline{F}G-F\overline{G}}.$$

还可以证明: $f(z)=\varphi(z)+\mathrm{i}\psi(z)$ 在 D 内满足复方程

$$\begin{cases}f_{\bar z}=q(z)\overline{f}_{\bar z},\\ q(z)=-\dfrac{F(z)+\mathrm{i}G(z)}{F(z)-\mathrm{i}G(z)},\\ f_z=\dfrac{1}{2}(f_x-\mathrm{i}f_y),\end{cases} \quad (6)$$

并称 $f(z)$ 为 D 内的第二类准解析函数. 这两类准解析函数有着不同的性质, 对于非常数的第二类准解析函数, 保持区域定理是成立的, 而对于第一类准解析函数, 保持区域定理不一定成立. 设 $w(z)$ 是区域 D 内广义解析函数或第一类准解析函数, 则必存在 D 内解析函数 $\Phi(z)$ 与 $\overline{D}$ 上的连续函数 $\varphi(z)$, 使得

$$w(z)=\Phi(z)\mathrm{e}^{\varphi(z)}. \quad (7)$$

这个定理称为相似原理. 有了这个原理, 使得关于解析函数的许多性质, 可转移到广义解析函数上来, 如积分和级数理论、孤立奇点的分类、惟一开拓性、函数序列的凝聚原理及龙格逼近定理等. 类似于解析函数, 对于复方程(2), 也有各种边值问题的可解性结果等, 如黎曼边值问题和黎曼-希尔伯特边值问题, 这些边值问题在力学、物理学中有重要应用.

方程组(1)和复方程(2)可推广到一阶线性一致椭圆型方程组和一致椭圆型复方程

$$w_{\bar z}=Q_1(z)w_z+Q_2(z)\overline{w}_{\bar z}+A_1(z)w+A_2(z)\overline{w}+A_3(z), \quad (8)$$

其一致椭圆型条件为

$$|Q_1(z)|+|Q_2(z)|\leqslant q_0<1\quad(z\in D), \quad (9)$$

这里 q_0 是非负常数. 特别地, 当

$$Q_1(z)=Q_2(z)=A_3(z)=0\quad(z\in D)$$

时, (8)就是复方程(2), 其中

$$A_1(z)=A(z), A_2(z)=B(z).$$

对于多个自变量的情况, 在克利福德代数的基础上, 建立了相应于单复变函数的一些理论, 以三个实自变量的情况为例, 用 $e_1=1, e_2, e_3$, 表示克利福德代数的基, 其中 $e_j^2=-1, j=2,3, e_2e_3=-e_3e_2$. 设 D 是三维欧氏空间 R^3 中的区域, D 内的点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 可写成

$$x=\sum_{j=1}^{3}x_je_j=x_1+x_2e_2+x_3e_3,$$

而 $\overline{x}=x_1-x_2e_2-x_3e_3$, 又 D 内的函数 $w(x)$ 可表为

$$w(x)=\sum_{j=1}^{4}w_j(x)e_j, \quad (10)$$

这里用 e_4 表示 e_2e_3. 定义运算

$$\overline{\partial}(\ )=(\ )_{x_1}e_1+(\ )_{x_2}e_2+(\ )_{x_3}e_3,$$
$$\partial(\ )=(\ )_{x_1}e_1-(\ )_{x_2}e_2-(\ )_{x_3}e_3.$$

显然 $\overline{\partial}\partial(\ )=\overline{\partial}\partial(\ )=(\ )_{x_1^2}+(\ )_{x_2^2}+(\ )_{x_3^2}$, 区域 D 内的正则函数 $w(x)$ 是指满足方程组 $\partial w(x)=0$, 即

$$\begin{pmatrix}(\ )_{x_1} & -(\ )_{x_2} & -(\ )_{x_3} & 0\\ (\ )_{x_2} & (\ )_{x_1} & 0 & (\ )_{x_3}\\ (\ )_{x_3} & 0 & (\ )_{x_1} & -(\ )_{x_2}\\ 0 & -(\ )_{x_3} & (\ )_{x_2} & (\ )_{x_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{pmatrix}=0 \quad (11)$$

的连续函数 $w(x)$, 又广义正则函数是指 D 内满足方程组

$$\overline{\partial}w=A(x)w+B(x)\overline{w} \quad (12)$$

的连续函数 $w(x)$, 其中

$$A(x)=\sum_{j=1}^{4}A_j(x)e_j,$$
$$B(x)=\sum_{j=1}^{4}B_j(x)e_j,$$
$$A_j(x), B_j(x)\in L_\alpha(\overline{D})$$
$$(0<\alpha<1; j=1,2,3,4),$$
$$\overline{w(x)}=w_1(x)-w_2(x)e_2-w_3(x)e_3-w_4(x)e_4.$$

第一类准解析函数(the first kind of pseudo-analytic function) 见"广义解析函数".

第二类准解析函数(the second kind of pseudo-analytic function) 见"广义解析函数".

广义柯西公式(generalized Cauchy formula) 亦称广义柯西型积分. 解析函数柯西公式的推广. 以 D 表示复平面的有界多连通区域, 其边界 Γ 是有限条逐段光滑的简单闭曲线, 设 $w(z)$ 是在 $\overline{D}$ 上连续的广义解析函数, 则有广义柯西公式

$$w(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,t)w(t)\mathrm{d}t-\Omega_2(z,t)\overline{w(t)}\mathrm{d}\overline{t}\quad(z\in D), \quad (1)$$

其中 $\Omega_1(z,t)$, $\Omega_2(z,t)$ 称为广义解析函数的基本核, 满足条件:

$$\begin{cases}\Omega_1(z,t)-\dfrac{1}{t-z}=o\left(|z-t|^{-\frac{2}{p}}\right)\\ \Omega_2(z,t)=o\left(|z-t|^{-\frac{2}{p}}\right)\end{cases} \quad (2)$$

这里 $p(>2)$是正常数. 另外,设 $\varphi(z)$是 Γ 上的连续函数,则称

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\Omega_1(z,t)\varphi(t)\mathrm{d}t-\Omega_2(z,t)\overline{\varphi(t)}\mathrm{d}\bar{t}\quad(3)$$

为广义柯西型积分.

广义柯西型积分(generalized integral of Cauchy type) 即"广义柯西公式".

广义解析函数的基本核(basic kernel of generalized analytic function) 见"广义柯西公式".

广义幂级数(generalized power series) 幂级数的推广. 设 z_0 为一有穷点,$w_{2n}(z,z_0)$,$w_{2n+1}(z,z_0)$是分别对应于$(z-z_0)^n$,$i(z-z_0)^n$($|n|$为整数)的广义幂函数,则由以上幂函数

$$w_n(z,z_0)(z,z_0)\quad(n=0,\pm1,\cdots)$$

组成的级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n w_n(z,z_0)$$

称为广义幂级数. 这里 $c_n(n=0,\pm1,\cdots)$均为复常数. 还可给出不同形式的广义幂级数.

广义解析函数序列的凝聚原理(principle of accumulation for the sequence of generalized analytic functions) 广义解析函数序列的列紧性原理. 设$\{w_n(z)\}$是复方程 $w_{\bar z}=Aw+B\overline{w}$ 或$w_{\bar z}=Q_1(z)w_z+Q_2(z)\overline{w}_{\bar z}+A_1(z)w+A_2(z)\overline{w}+A_3(z)$于有界区域 D 内的连续解序列,如果能从$\{w_n(z)\}$选取子序列在 D 内闭一致有界,则从$\{w_n(z)\}$中可选取在 D 内闭一致收敛到上述方程于 D 内的连续解.

广义解析函数零点的孤立性(isolation of zeros of generalized analytic function) 广义解析函数的基本性质. 是指复方程

$$w_{\bar z}=Q_1(z)w_z+Q_2(z)\overline{w}_{\bar z}+A_1(z)w+A_2(z)\overline{w}$$

在区域 D 内为非常数的解$w(z)$的零点是孤立的. 即若 $z=z_0\in D$ 是 $w(z)$的一个零点,则存在正数 σ,使在$0<|z-z_0|<\sigma$内$w(z)$没有零点.

广义解析函数的黎曼边值问题(Riemann boundary problem of generalized analytic function) 广义解析函数的一类基本边值问题. 设 Γ 是复平面上 $N+1$ 条逐段光滑的闭曲线 $\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_N$,而 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_N$ 在 Γ_0 所围的有界区域 D^+内,以 Γ 为边界的有界区域,D^-是 D^+在全平面的余集. 求复方程

$$w_{\bar z}=A(z)w+B(z)\overline{w}$$

或

$$w_{\bar z}=Q_1(z)w_z+Q_2(z)\overline{w}_{\bar z}+A_1(z)w+A_2(z)\overline{w}+A_3(z)$$

在 $D^{\pm}$内的分片连续解

$$w(z)=\begin{cases}w^+(z) & (z\in D^+),\\ w^-(z) & (z\in D^-),\end{cases}$$

使它直到边界 Γ 连续,且适合边界条件:

$$w^+(t)=G(t)w^-(t)+g(t)\quad(t\in\Gamma),\quad(1)$$

其中 $G(t)$,$g(t)$满足条件

$$G(t)\neq0,G(t),g(t)\in C_\alpha(\Gamma),$$

这里 $\alpha(0<\alpha<1)$为实常数,$C_\alpha(\Gamma)$是 Γ 上满足赫尔德条件的函数类.

广义解析函数的黎曼-希尔伯特边值问题(Riemann-Hilbert boundary value problem of generalized analytic functions) 广义解析函数的一类基本边值问题. 设 D 是 $N+1$ 连通区域,其边界为如"广义解析函数黎曼边值问题"条目中所述 $N+1$ 条光滑闭曲线

$$\Gamma=\bigcup_{j=0}^{N}\Gamma_j$$

且 $\Gamma\in C_\mu^1$,$\mu(0<\mu<1)$为实常数,$C_\mu^1(\Gamma)$是 Γ 上函数及其一阶导数满足赫尔德条件的函数类. 求复方程

$$w_{\bar z}=A(z)w+B(z)\overline{w}$$

或

$$w_{\bar z}=Q_1(z)w_z+Q_2(z)\overline{w}_{\bar z}+A_1(z)w+A_2(z)\overline{w}+A_3(z)$$

在闭区域 $\overline{D}$ 上的连续解 $w(z)$,使它适合边界条件

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(t)}w(t)]=r(t)\quad(t\in\Gamma),\qquad(1)$$

此处$|\lambda(t)|=1$,$\lambda(t)$,$r(t)$满足条件

$$\lambda(t)\in C_\alpha(\Gamma),\quad r(t)\in C_\alpha(\Gamma),$$

其中 α 是实常数,$C_\alpha(\Gamma)$是 Γ 上满足赫尔德条件的函数类.

广义解析函数的保持区域定理(region-preserving theorem of generalized analytic function) 广义解析函数的基本几何性质. 设 D 是 z 平面的一区域,又 $w(z)$是复方程

$$w_{\bar z}=q(z)\overline{w}_z\ \text{或}\ w_{\bar z}=Q_1(z)w_z+Q_2(z)\overline{w}_{\bar z}$$

在 D 内的连续解,且 $w(z)$在 D 内不是常数,则 $w(z)$把 D 映射到 w 平面上的一区域. 这就是保持区域定理.

广义解析函数的黎曼映射定理(Riemann mapping theorem of generalized analytic function) 共形映射的黎曼定理的推广. 设区域 D 是复平面上的单连通区域,其边界多于一点,则复方程

$$w_{\bar z}=q(z)\overline{w}_z\ \text{或}\ w_{\bar z}=Q_1(z)w_z+Q_2(z)\overline{w}_{\bar z}$$

具有将 D 拟共形映射到单位圆$|w|<1$ 的同胚解 $w(z)$,如果 D 的边界 Γ 是简单闭曲线,以 z_1,z_2,z_3 表示 Γ 上按正向排列的三点,又 w_1,w_2,w_3 是$|w|=1$ 上按正向排列的三点,则满足条件

$$w(z_j)=w_j\ (j=1,2,3)$$

的上述映射是惟一的. 如果 D 是 $N+1$ 连通区域,那么也可以证明:复方程

$$w_{\bar z}=q(z)\overline{w}_z\ \text{或}\ w_{\bar z}=Q_1(z)w_z+Q_2(z)\overline{w}_{\bar z}$$

存在着把 D 拟共形映射到一些典型区域如圆界区

域的同胚解.

复变函数的应用

复势(complex potential)　与复变函数论在流体力学中的应用有关的一个概念. 设有一不可压缩流体做平面定常运动,其速度向量 $v=(v_x,v_y)$. 又设其中无源和汇,也无涡流. 这些等价于

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\frac{\partial v_y}{\partial y},\quad \frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial y},$$

它说明 $\bar{v}=v_x-\mathrm{i}v_y$ 为解析函数,称为流体的复速度;而

$$f(z)=\int_{z_0}^{z}\bar{v}\mathrm{d}z$$

与积分路径无关,称为流体的复势. 流体运动的许多性质都可通过复势和复速度来描述. 例如,流体绕过某障碍物的流动问题(即绕流问题)就可化为复势的边值问题来考虑.

复变函数论在许多自然科学和工程技术领域(诸如流体力学、弹性理论、热传导、电学)中有应用. 事实上,像著名的柯西定理,其产生的思想背景就源于流体力学. 由于解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 的实部 u 和虚部 v 满足柯西-黎曼方程,因此,把 u,v 看做平面上向量场的分量时,说明这个向量场满足一定的条件,从而满足这种条件的任何种类平面物理场的问题都可化为复变函数的问题来处理,于是复变函数得到了种种应用.

另外,满足二元拉普拉斯方程的调和函数 u 可以看做是某解析函数的实部(或虚部),因此,与拉普拉斯方程的解有关的实际问题,也可转化为复变函数的问题. 这也是复变函数应用的另一重要方面.

由于电流 I 是电荷流动的速度,类似于流体的速度,因此,与复变函数在流体力学中的应用相似,复变函数也可应用于电动力学.

由于平面热传导问题温度的定常分布满足二元拉普拉斯方程,其解为调和函数,可看做解析函数的实部(或虚部),所以复变函数可应用于热传导问题.

复速度(complex velocity)　见"复势".

科洛索夫函数(Kolosov function)　复变函数用于求解平面弹性问题时引进的一个特殊的函数. 如果在平面直角坐标系中用 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 表示在 (x,y) 处的应力,则存在弹性区域中的两个解析函数 $\Phi(z),\Psi(z)$,使得

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\{\Phi(z)\},$$

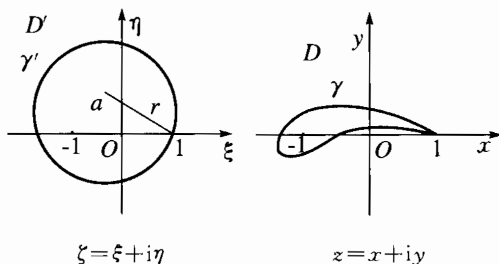
$$\sigma_y-\sigma_x+2\mathrm{i}\tau_{xy}=2\mathrm{Re}\{\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)\}.$$

$\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$(或其不定积分 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$)称为科洛索夫函数或穆斯赫利什维利函数,也称为艾里函数. 由此出发就可将平面弹性问题(包括断裂力学)化为解析函数的边值问题进行求解.

茹科夫斯基变换(Zhukovskii transformation)　在机翼理论中最基本的一种共形映射. 形如

$$z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$$

的复变函数称为茹科夫斯基变换,亦称为茹科夫斯基函数. 这个函数在理论上及共形映射的实际构造上都是重要的. 茹科夫斯基(Жуковский, Н. Е.)是俄国空气动力学家. 如下图,它把 ζ 平面中的圆 γ' 的外域 D' 共形变换为 z 平面中某曲线 γ 的外域 D. γ 可作为机翼断面外形的设计. 调节 ζ 平面中圆 γ' 中心



$\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$　　　　$z=x+\mathrm{i}y$

a 的位置(从而包括半径 r 的大小),可得出各种各样机翼的外形. 如果空气流动的复速度为 $v=v_x+\mathrm{i}v_y$(实际上是飞机的速度为 $-v$),则在机翼上有著名的恰普雷金升力公式

$$P=-\frac{\rho\mathrm{i}}{2}\int_{\gamma}v^2\mathrm{d}\bar{z},$$

其中 ρ 为空气密度.

由于拉普拉斯方程在共形映射下不变,因此许多平面复杂区域上的问题,经过共形映射可化为典型区域(例如,单连通区域可变为圆域,二连通区域可变为同心的圆环域等)上的问题. 由于典型区域比较简单、规则,因此常常可使问题得到简化甚至解决.

恰普雷金升力公式(Chaplygin lift formula)　见"茹科夫斯基变换". 它是由恰普雷金(Чаплыгин, С. А.)给出的.

撰　稿　王文俊　邢富冲　任福尧　庄圻泰　杨重骏　杨维奇　何成奇　何育赞　何思谦　余家荣　张南岳　陈　敏　陈于坚　闻国椿　袁文俊　温学恒　路见可

审　阅　庄圻泰　杨　森　何育赞　陈怀惠

多复变函数论

多复变函数论(function theory of several complex variables)　简称多复变.它是研究多个独立复变数的全纯函数性质的学科.单复变函数论是研究复平面及黎曼曲面中的域上的解析函数的性质,多复变函数论则是研究 $n(n\geqslant 2)$ 个独立复变量 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 的全纯函数

$$f(z)=f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$$

的性质.为此,首先要将复平面推广到复欧氏空间,将黎曼曲面推广到复流形及复空间,然后研究它们的域上的全纯函数的性质.出乎意料的是,大多数单复变函数论中的结果,无法平行地推广到多复变函数的情形,在这种情形下,经典问题有什么新提法、新形式和新结果,又有什么新的问题,这正是多复变函数论所要研究的.另一方面,多复变函数论又有着大量的应用.所以多复变数函数论是一个富有生命力的数学分支.

就工具而言,由于多复变函数论中问题的复杂性,所以涉及拓扑、微分方程、微分几何、代数几何、抽象代数、李群和泛函分析,以及实变函数论和复变函数论的大量概念和方法,且有自己独特的处理办法.

多复变函数论有很多不同的研究方向.大体上有:

1.积分表示.
2.算子理论.
3.奇点理论.
4.值分布理论.
5.逼近理论.
6.函数空间理论和调和函数论.
7.全纯开拓.
8.施坦流形理论.
9.双全纯映射的几何理论.
10.域的分类理论.
11.自守函数论.
12.亚纯函数和亚纯映射理论.
13.复空间理论等.

从历史上来看,真正使多复变函数论成为一门独立学科的,是源于19世纪末和20世纪初庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)、哈托格斯(Hartogs,F.M.)、库辛(Cousin,P.)和列维(Levi,E.E.)等人的出色的工作.庞加莱首先发现,在 C^2 中球和多圆柱不是全纯等价的,这说明单复变中著名的黎曼映射定理在多复变中不再成立;哈托格斯则发现在 C^n 中存在这样一类域,其上的所有全纯函数都可以全纯开拓到比它更大的域上去,这在单复变中是不可能的;库辛提出的以他的名字命名的单复变中的米塔-列夫勒(Mittag-Leffler,(M.)G.)定理和外尔斯特拉斯定理在多复变中的推广的两个问题(参见“库辛第一问题”和“库辛第二问题”)和列维提出的拟凸域是否全纯域的问题(参见“列维问题”)更是长期以来推动着多复变函数论的发展.

20世纪30年代出现的嘉当(Cartan,H.)关于全纯自同构的惟一性定理和有界域的全纯自同构群是李群的出色工作,特别是冈洁(Oka,K.)对库辛问题和列维问题的深入研究,导致20世纪50年代对上述问题的最终解决.具体地说,1936年,冈洁首先在多项式凸域上,稍后,他于1937年在一般的全纯凸域上解决了库辛第一问题;1942年,列维问题首先由冈洁在 C^2 中解决;后来,冈洁于1953年,布雷默尔曼(Bremermann,H.J.)于1954年,诺盖(Norguet,F.)于1954年独立地解决了任意维数的 C^n 中的列维问题.1958年,格劳尔特(Grauert,H.)用凝聚解析层的理论解决了复流形上的列维问题.

到了20世纪60年代中叶,科恩(Kohn,J.J.)和赫尔曼德尔(Hörmander,L.)利用 $\bar\partial$ 算子的 L^2 估计,证明了在拟凸域上 $\bar\partial$ 问题有解,从而可以容易地解决列维问题和库辛第一、第二问题.1970年,辛钦(Henkin,G.M.)得到强拟凸域上 $\bar\partial$ 问题解的积分表示,由它不难得到 $\bar\partial$ 问题解的 L^∞ 估计.自此以后,积分表示和一些“硬分析”中的问题,诸如边界性质、复切现象、零点集的刻画等问题又吸引众多的多复变函数论的研究者.

1980年,路丁(Rudin,W.)的《C^n 中球上的函数论》出版以后,又引发了众多的学者去研究球上的函数论.作为有界对称域和强拟凸域的最简单的模型,球上函数论的进展又推动着有界对称域和强拟凸域上函数论的进一步发展.

复欧几里得空间(complex Euclidean space)简称复欧氏空间,是通常欧氏空间的推广.由 n 个复数确定的点构成的空间.给定正整数 n,n 个复数 a_1,a_2,$\cdots$,a_n 的有序组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 全体构成的集合称为 n 维复欧氏空间,记为 C^n.C^n 中元素 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为点,复数 a_j 称为点 a 的第 j 个坐标,在 C^n 中给定点 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,C^n 中子集

$U_\varepsilon(a)=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid |a_j-x_j|<\varepsilon,1\leqslant j\leqslant n\}$

称为点 a 的邻域,这里 $\varepsilon>0$.C^n 中一些邻域的并集

称为开集，在 $\mathbf{C}^n$ 中取定两点

$$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\ b=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

则 $\mathbf{C}^n$ 中的子集

$$\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_j=ta_j+(1-t)b_j,\ 0\leqslant t\leqslant 1,1\leqslant j\leqslant n\}$$

称为由 a 和 b 决定的线段，它的长度定义为

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j-b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

n 维复欧氏空间为 $2n$ 维实欧氏空间，特别地，一维复欧氏空间为普通平面，用复坐标来记点的坐标.

复射影空间(complex projective space)　实射影空间的推广，即复欧氏空间添加无穷远点构成的空间. 添加了无穷远点的复平面称为一维复射影空间，记为 $\mathbf{C}P^1$，推广到 n 维，便得到 n 维复射影空间，它具体构作如下：给定 $n+1$ 维复欧氏空间 $\mathbf{C}^{n+1}$，考虑子集合 $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$. 在其中引进等价关系如下：如果对 $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 中的点 $(z_1,z_2,\cdots,z_{n+1})$ 和 $(w_1,w_2,\cdots,w_{n+1})$，存在非零复数 ρ，使得

$$w_j=\rho z_j\ (1\leqslant j\leqslant n+1),$$

则称此两点互相等价，于是 $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 成为等价类之并集，含代表元素 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_{n+1})$ 的等价类为

$$\tilde{z}=\{(w_1,w_2,\cdots,w_{n+1})\in\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}\mid w_j=\rho z_j,\ 1\leqslant j\leqslant n+1,\rho\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\},$$

所有等价类构成之集合记为 $\mathbf{C}P^n$，称为 n 维复射影空间.

在 n 维复射影空间 $\mathbf{C}P^n$ 中取出以点 $(z_1,z_2,\cdots,z_n,1)$ 为代表元素的等价类，这些等价类构成 $\mathbf{C}P^n$ 中的子集 $\tilde{\mathbf{C}}^n$，其中每个点

$$\widetilde{(z_1,z_2,\cdots,z_n,1)}$$

对应 $\mathbf{C}^n$ 中的点 $(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，这是 $\tilde{\mathbf{C}}^n$ 到 $\mathbf{C}^n$ 上的一一对应. 将 $\tilde{\mathbf{C}}^n$ 看做和 $\mathbf{C}^n$ 等同，在这个意义下，$\mathbf{C}^n\subset\mathbf{C}P^n$，而 $\mathbf{C}P^n\setminus\mathbf{C}^n$ 中的点称为 $\mathbf{C}^n$ 的无穷远点. 所以 n 维复射影空间是由 n 维复欧氏空间添加无穷远点而成.

利用 $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 到 $\mathbf{C}P^n$ 之自然投影映射

$$\sigma:(z_1,z_2,\cdots,z_{n+1})\to\widetilde{(z_1,\cdots,z_n,z_{n+1})},$$

用 $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ 之欧氏拓扑结构，在 $\mathbf{C}P^n$ 中可引进关于 σ 的商拓扑，于是 $\mathbf{C}P^n$ 为紧复流形.

$\mathbf{C}^n$ 中的域(domains in $\mathbf{C}^n$)　实欧氏空间中域的推广. 若 D 是 n 维复欧氏空间 $\mathbf{C}^n$ 中的连通开集，则 D 称为 $\mathbf{C}^n$ 中的域. 若存在正数 M，使得 D 中的点 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 都满足条件

$$|z_j|<M\ (1\leqslant j\leqslant n),$$

则域 D 称为有界域，否则称为无界域.

$\mathbf{C}^n$ 中的有界域(bounded domain in $\mathbf{C}^n$)　见“$\mathbf{C}^n$ 中的域”.

$\mathbf{C}^n$ 中的无界域(unbounded domain in $\mathbf{C}^n$)　见“$\mathbf{C}^n$ 中的域”.

$\mathbf{C}^n$ 中的多圆柱(polycylinder in $\mathbf{C}^n$)　$\mathbf{C}^n$ 中的特殊的有界域. 指 $\mathbf{C}$ 中的 n 个具有相同半径的开圆盘的积. 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{C}^n$.

$$P_n(a,r)=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid |z_1-a_1|<r,\ |z_2-a_2|<r,\cdots,|z_n-a_n|<r\}$$

的域称为以 a 为中心，r 为半径的多圆柱. 中心在原点半径为 1 的多圆柱称为单位多圆柱.

$\mathbf{C}^n$ 中的单位多圆柱(unit polycylinder in $\mathbf{C}^n$)　见“$\mathbf{C}^n$ 中的多圆柱”.

圆型域(circular domain)　复欧氏空间中的一种特殊的域. 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，如果对每点 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in D$，以及任意 $\theta\in\mathbf{R}$，都有 $(\mathrm{e}^{i\theta}z_1,\mathrm{e}^{i\theta}z_2,\cdots,\mathrm{e}^{i\theta}z_n)\in D$，就称 D 是关于原点的圆型域.

莱因哈特域(Reinhardt domain)　复欧氏空间中一种特殊的域. 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 的域，如果对每点 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in D$，以及任意的 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\in\mathbf{R}$，都有 $(\mathrm{e}^{i\theta_1}z_1,\mathrm{e}^{i\theta_2}z_2,\cdots,\mathrm{e}^{i\theta_n}z_n)\in D$，就称 D 是关于原点的莱因哈特域. 例如，单位球

$$B_n=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid |z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2<1\}$$

以及单位多圆柱

$$P_n=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid |z_1|<1,\ |z_2|<1,\cdots,|z_n|<1\}$$

都是莱因哈特域. 一般地，莱因哈特域一定是圆型域，但圆型域却不一定是莱因哈特域. 例如

$$D=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid |z_1+z_2+\cdots+z_n|<1\}$$

显然是圆型域，但不是莱因哈特域. 研究最多的莱因哈特域是由适合条件

$$|z_1|^{\alpha_1}+|z_2|^{\alpha_2}+\cdots+|z_n|^{\alpha_n}<1$$

的点构成的域，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为正实数.

$\mathbf{C}^n$ 中的星形域(starlike domain in $\mathbf{C}^n$)　平面上星形状的区域的推广. 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$0\in D$. 如果对每点 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in D$ 及一切 $0\leqslant r<1$ 都有 $rz=(rz_1,rz_2,\cdots,rz_n)\in D$，就称 D 是关于原点的星形域. 单位球 B_n 和单位多圆柱 P_n(参见“莱因哈特域”)都是星形域的例子.

星形圆型域有很好的函数论性质.

多复变全纯函数(holomorphic functions of several complex variables)　亦称多复变解析函数. 多复变函数论研究的主要对象. 设 $f:D\to\mathbf{C}$ 是定义在域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 上的函数，如果对 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in D$，存在以 a 为中心，r 为半径的多圆柱 $P_n(a,r)\subset D$，使得

$$f(z) = \sum_{\alpha \geq 0} c_\alpha (z - a)^\alpha$$

在 $P_n(a,r)$ 中成立，就称为 $f(z)$ 在 a 点解析，这里 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是多重指标，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都取整数，$\alpha \geq 0$ 表示 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都取非负整数；而

$$(z - a)^\alpha = (z_1 - a_1)^{\alpha_1}(z_2 - a_2)^{\alpha_2}\cdots(z_n - a_n)^{\alpha_n}.$$

如果 $f(z)$ 在 D 中每点都解析，就称 $f(z)$ 在 D 上是全纯的.

D 上的全纯函数还有下面两种等价定义：

1. D 上的连续函数 $f(z)$ 称为是全纯的，如果对每个 $j=1,2,\cdots,n$ 及每个固定的 $z_1, z_2, \cdots, z_{j-1}, z_{j+1}, \cdots, z_n$，函数 $f(z_1, z_2, \cdots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \cdots, z_n)$ 作为单复变数 z 的函数，在域

$$D(z_1, z_2, \cdots, z_{j-1}, z_{j+1}, \cdots, z_n) = \{z \in \mathrm{C} \mid (z_1, z_2, \cdots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \cdots, z_n) \in D\}$$

是全纯的.

2. D 上的函数 $f(z)$ 称为是全纯的，如果 $f(z)$ 在 D 上连续，且对每个 $j=1,2,\cdots,n$，柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$$

在 D 上成立，这里偏微分算子 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$ 定义为

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$(z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j,\ j=1,2,\cdots,n).$$

多复变解析函数(analytic functions of several complex variables)　即"多复变全纯函数".

哈托格斯定理(Hartogs theorem)　给出多复变函数成为全纯函数所需的最弱条件的命题. 设 $n \geq 2$，D 是 C^n 中的域，$f = f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 是 D 上的单值函数. 该定理断言：如果对于任意 $j(1 \leq j \leq n)$ 和任意一点 $(z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)}) \in D$，单复变函数

$$f(z_1^{(0)}, \cdots, z_{j-1}^{(0)}, z, z_{j+1}^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)})$$

在点 $z = z_j^{(0)}$ 全纯，则 f 在 D 上为全纯函数.

全纯映射(holomorphic mapping)　多复变函数论中讨论的主要映射. 设 D 是 C^n 中的域，$f_1, f_2, \cdots, f_m$ 都是 D 上的全纯函数，则

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_m): D \to \mathrm{C}^m$$

称为 $D \to \mathrm{C}^m$ 的全纯映射(参见本卷《流形上的分析》同名条).

全纯映射的导数(derivative of holomorphic mapping)　亦称全纯映射的雅可比矩阵. C^n 上映射作为向量值函数的导数. 设 D 是 C^n 中的一个域，D 上的全纯映射

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z), \cdots, f_m(z))$$
$$(z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in D)$$

的导数定义为

$$f'(z) = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_m)}{\partial(z_1, z_2, \cdots, z_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \frac{\partial f_m}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}.$$

它是单复变函数导数的推广.

全纯映射的雅可比矩阵(Jacobian matrix of holomorphic mapping)　即"全纯映射的导数".

双全纯映射(biholomorphic mapping)　有逆映射的全纯映射. 设 D 是 C^n 中的域，$f: D \to \mathrm{C}^n$ 是全纯映射，如果 $f(z)$ 有逆映射，就称 $f(z)$ 是 D 上的双全纯映射，或称为全纯同构映射. 这时 $f(D)$ 为 C^n 中的域，并称 D 和 $f(D)$ 互相全纯同构. 和实的情形不同，可逆全纯映射的逆必为全纯映射.

全纯同构映射(mapping of holomorphic isomorphism)　即"双全纯映射".

域的全纯同构(holomorphic isomorphism of domain)　多复变函数论中最重要的映射. 设 D_1, D_2 是 C^n 中的两个域，如果存在 D_1 到 D_2 上的双全纯映射，就称 D_1 和 D_2 是全纯同构的，或全纯等价的.

C^n 中的单位球 B_n 和单位多圆柱 P_n 都是单位圆盘在 C^n 中的推广，但庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)首先指出，B_n 和 P_n 不是全纯等价的，即不存在双全纯映射，把 B_n 一一地映为 P_n. 因而 B_n 上的函数论和 P_n 上的函数论有很多相异之处.

嘉当惟一性定理(Cartan's uniqueness theorem)　单复变函数论中施瓦兹引理的推广. 在单复变函数论中，施瓦兹引理的规范形式为：如果 f 是单位圆盘到单位圆盘的映射，满足

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,$$

那么必有 $f(z)=z$.

嘉当(Cartan, H.)把这个引理推广到多复变函数，得到所谓的嘉当惟一性定理：设 Ω 是 C^n 中包含原点的有界域，如果 $F: \Omega \to \Omega$ 是全纯的，且有

$$F(0)=0,\quad F'(0)=I_n,$$

这里 I_n 是 n 阶单位方阵，那么对任意 $z \in \Omega$，有

$$F(z)=z.$$

利用嘉当惟一性定理又可得到：设 Ω_1 和 Ω_2 是 C^n 中包含原点的圆型域，其中 Ω_1 是有界的. 如果 $F: \Omega_1 \to \Omega_2$ 是双全纯的，且 $F(0)=0$，那么 F 一定是线性映射.

上述两个定理在全纯映射中是基本的.

域的全纯等价(holomorphic equivalence of domains)　多复变函数论的基本概念. C^n 中的两个域

如果全纯同构，则这两个域称为(互相)全纯等价. 所谓域的分类理论，就是研究域在全纯等价下的分类，这是因为互相全纯等价的域上有完全相同的全纯函数论性质. 所以分类问题是多复变函数论中的根本问题之一.

域的全纯自同构(holomorphic automorphism of a domain) $\mathbb{C}^n$ 中的区域到它自身上的全纯同构映射. $D\rightarrow D$ 上的双全纯映射称为 D 的全纯自同构，简称自同构. D 上所有这种映射之集合记为 $\mathrm{Aut}(D)$. 例如，$\mathbb{C}^n$ 中单位球 B_n 的全部全纯自同构可表为如下的形状：任取 $\psi\in\mathrm{Aut}(B_n)$，则 $\psi=\varphi_a U$，其中 U 是 n 阶酉方阵，φ_a 是把 $a\in B_n$ 映为 0 的 B_n 的全纯自同构：

$$\varphi_a(z)=\frac{a-z}{1-z\bar{a}'}A,$$

其中

$$A=\frac{\bar{a}'a+s(a\bar{a}'I_n-\bar{a}'a)}{a\bar{a}'}=sI_n+\frac{\bar{a}'a}{1+s},$$

这里 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\bar{a}'$为 a 的转置共轭，$s=\sqrt{1-a\bar{a}'}$，I_n 是 n 阶单位方阵.

域的全纯自同构群(holomorphic automorphism group of a domain) 域 D 的全纯自同构的全体所组成的群，记为 $\mathrm{Aut}(D)$. 它是 D 上的拓扑变换群，当 D 为有界域时，它是 D 上实李变换群.

域的迷向子群(isotropic subgroup of a domain) 使域中一个点不动的所有全纯自同构构成的集合. 在 $\mathbb{C}^n$ 中的域 D 内取定一点 p，则全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(D)$的子集合

$$\{\sigma\in\mathrm{Aut}(D)\,|\,\sigma(p)=p\}$$

称为关于固定点 p 的迷向子群，记为 $\mathrm{Iso}_p(D)$，它是拓扑变换群 $\mathrm{Aut}(D)$的拓扑子群. 当 D 为有界域时，$\mathrm{Iso}_p(D)$为紧李子群.

$\mathbb{C}^n$ 中域的边界(boundary of a domain in $\mathbb{C}^n$) 由 $\mathbb{C}^n$ 中既非域的内点又非域的外点的点构成的集合. 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的域，D 在 $\mathbb{C}^n$ 中的闭包记为 $\overline{D}$，则差集 $\overline{D}\backslash D=\partial D$ 就是域 D 的边界. 在 $n>1$ 时，域的边界比较复杂. 有些重要的域，是对域的边界加上限制后定义的. 例如，重要的强拟凸域便是这样定义的.

域的希洛夫边界(Silov boundary of a domain) 与最大模原理有关的一块边界子集. 设 ∂D 为 $\mathbb{C}^n$ 中域 D 的边界，S 是 ∂D 的子集，如果在 $\overline{D}$ 上连续、D 上全纯的函数必在 S 的点上达到最大模，且对 S 中任一点 z_0，必存在 $\overline{D}$ 上连续、D 上全纯的函数$f(z)$，使得 $f(z)$在 z_0 点达到最大模，则 S 称为希洛夫边界.

在 $n=1$ 的情形，希洛夫边界为整个边界；在 $n>1$ 的情形，希洛夫边界不一定是整个边界. 希洛夫边界有很多重要的性质，例如，在建立某些柯西型积分时，只需要在希洛夫边界上做积分就够了. 例如 $n=2$ 时，双圆柱

$$P_2:\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\,|\,|z_1|<1,|z_2|<1\}$$

的希洛夫边界为

$$S=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\,|\,|z_1|=1,|z_2|=1\},$$

而

$$\partial P_2=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\,|\,|z_1|=1,|z_2|<1\}\cup\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\,|\,|z_1|<1,|z_2|=1\}\cup S.$$

齐性域(homogeneous domains) 具有良好函数论性质的一类域. 设 D 为 n 维复欧氏空间中的域. $\mathrm{Aut}(D)$为 D 上所有全纯自同构映射在紧开拓扑下构成拓扑变换群，G 为 $\mathrm{Aut}(D)$的拓扑子群. 若对 D 中任意两点 p,q，均存在 $\sigma\in G$ 使得 $\sigma(p)=q$，则 G 称为在 D 上是可递的. 如果 D 上有可递变换群 $G\subset\mathrm{Aut}(D)$，则 D 称为齐性域. 这时在 D 中取定一点 p，则

$$H_p=\{\sigma\in G\,|\,\sigma(p)=p\}$$

为 G 的拓扑闭子群，称为 G 中点 p 之固定子群. 这时存在自然的双全纯同构将 D 映为商空间 G/H_p.

齐性有界域(homogeneous bounded domains) 一类重要的有界域. 齐性域 D 若为有界域，则称为齐性有界域. 这时 $\mathrm{Aut}(D)$为有限维实李群，且为 D 上李变换群. 如果 G 为 $\mathrm{Aut}(D)$之李子群，且 G 为 D 上可逆李变换群，则固定子群也称为迷向子群，它是紧李子群，又 D 双全纯同构于商空间 G/H_p.

在单复变函数论中的黎曼定理以及随后发展起来的单值化理论，完全解决了域在全纯等价下的完全分类. 但是在两个复变数情形，域的分类就很复杂，至今只有零星结果. 在多复变数函数论中，嘉当(Cartan, H.)在 1935 年首先解决了对称有界域的分类. 随后提出著名猜想：齐性有界域必对称. 但是在 1959 年伯雅查基-夏皮罗(Piatetski-Shapiro)举出的反例否定了这个猜想，随后引进西格尔域的概念. 再后来他又和同事证明了齐性有界域必全纯同构于齐性西格尔域.

西格尔域(Siegel domain) 一类重要的无界域. 给定正整数 n 和非负整数 m. 记 V 为 n 维实欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为顶点的开凸锥，又设 V 不包含整条直线，则 $\mathbb{C}^n$ 中的域

$$D(V)=\{z\in\mathbb{C}^n\,|\,\mathrm{Im}\,z\in V\}$$

称为锥 V 上第一类西格尔域. 设 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 均为 $m(m>0)$阶埃尔米特方阵，$u\in\mathbb{C}^m$ 为 $m\times1$ 复矩阵，$\bar{u}'$为 u 的转置共轭矩阵，令

$$F(u,u)=(\bar{u}'H_1u,\bar{u}'H_2u,\cdots,\bar{u}'H_nu),$$

若存在 n 个 m 阶埃尔米特方阵 $H_1,H_2,\cdots,H_n$，使对任意 $u\in\mathbb{C}^m$，均有 $F(u,u)\in\overline{V}$，其中 $\overline{V}$ 为 V 的闭

包，且 $F(u,u)=0$ 当且仅当 $u=0$，则 $\mathbb{C}^{n+m}$ 中的域

$$D(V,F)=\{z\in\mathbb{C}^n,u\in\mathbb{C}^m\mid \mathrm{Im}\,z-F(u,u)\in V\}$$

称为第二类西格尔域. 这两类西格尔域统称为西格尔域. 记 A 为 n 阶实非奇异方阵，$\mathbb{R}^n$ 上线性变换 σ: $y=Ax$ 称为关于 V 不变，如果 $\sigma(V)=V$. 所有使 V 不变的可逆线性变换构成的集合，记为 $\mathrm{Aff}(V)$. 如果在 $\mathrm{Aff}(V)$ 中存在 V 上可递李变换群 G_V，且任取 $\sigma\in G_V$，记为 $y=Ax$，则存在 m 阶非奇异复方阵 Q，使得 $\mathbb{C}^m$ 上有非奇异线性变换 $\tau:u\to Qu$，且

$$F(Qu,Qu)=A(F(u,u))\quad(\forall u\in\mathbb{C}^m),$$

这时西格尔域 $D(V,F)$ 必线性可递，称为齐性西格尔域，它全纯同构于齐性有界域. 反之，齐性有界域全纯同构于齐性西格尔域.

第一类西格尔域(Siegel domains of first kind) 见“西格尔域”.

第二类西格尔域(Siegel domains of second kind) 见“西格尔域”.

齐性西格尔域(homogeneous Siegel domains) 见“西格尔域”.

对称埃尔米特流形(symmetric Hermitian manifold) 一类重要的复流形. n 维埃尔米特流形 (M,k) 称为对称的，如果任取一点 $p\in M$，存在 M 上全纯等度量变换 σ_p，称为对称变换，使得：

1. 以点 p 为孤立不动点，即 $\sigma_p(p)=p$，且存在点 p 之邻域 U_p，使得任取 $q\in U_p,q\neq p$，均有

$$\sigma_p(q)\neq q.$$

2. $\sigma_p^2=\mathrm{id}$(id 表示恒等映射).

多复变函数论中第一个系统的分类工作是嘉当(Cartan, È)给出的，他给出了对称埃尔米特空间在全纯等价下的分类. 对称埃尔米特空间是不可分解对称埃尔米特空间的拓扑积. 后者有四大类和两个特殊的不可分解对称埃尔米特空间. 且给出了四大类不可分解对称埃尔米特空间的标准流形为复欧氏空间中的典型域. 但未给出两个特殊的情形的实例.

对称有界域(symmetric bounded domain) 研究得最深入的一类齐性有界域. $\mathbb{C}^n$ 中的域称为对称有界域，如果它关于伯格曼度量为对称埃尔米特流形.

对称有界域为齐性有界域，它双全纯同构于不可分解对称有界域的拓扑积，而不可分解对称有界域双全纯同构于几种典型域之一. 这些域也都是不可分解的对称域，且可具体写出来.

典型域(classical domain) 多复变函数论的基本概念. $\mathbb{C}^n$ 中不可分解对称有界域在全纯等价下分类的标准域称为典型域. 它们有四大类和两个特殊的域，分别在 16 维及 27 维复欧氏空间中，这两个域也称为例外典型域.

第一类典型域(classical domain of first class) 典型域之一. 第一类典型域

$$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}(m,n):\ m\leqslant n,\ I-Z\overline{Z}'>0,$$

其中 I 为 m 阶单位方阵，$Z=(z_{ij})$ 为由 nm 个独立复变量

$$z_{11},z_{12},\cdots,z_{1n},z_{21},z_{22},\cdots,z_{2n},\cdots,z_{m1},z_{m2},\cdots,z_{mn}$$

构成的 $m\times n$ 矩阵，$\overline{Z}$ 表示 Z 的共轭矩阵，Z' 表示 Z 的转置矩阵. $I-Z\overline{Z}'>0$ 表示 m 阶埃尔米特方阵 $I-Z\overline{Z}'$ 正定.

第二类典型域(classical domain of second class) 典型域之一. 第二类典型域

$$\mathscr{R}_{\mathrm{II}}(n):\ I-Z\overline{Z}'>0,$$

其中 $Z=Z'$，即 Z 由 $n(n+1)/2$ 个独立复变量

$$z_{11},z_{12},\cdots,z_{1n},z_{22},\cdots,z_{2n},\cdots,z_{nn}$$

构成，又

$$z_{ij}=z_{ji}\ (1\leqslant i,j\leqslant n).$$

第三类典型域(classical domain of third class) 典型域之一. 第三类典型域

$$\mathscr{R}_{\mathrm{III}}(n):\ I-Z\overline{Z}'>0,$$

其中 $Z'=-Z$，即 Z 由 $n(n-1)/2$ 个独立变量

$$z_{12},\cdots,z_{1n},z_{23},\cdots,z_{2n},\cdots,z_{n-1,n}$$

构成，又

$$z_{ji}=-z_{ij}\ (1\leqslant i\leqslant j\leqslant n).$$

第四类典型域(classical domain of fourth class) 亦称李球，典型域之一. 第四类典型域

$$\mathscr{R}_{\mathrm{IV}}(n):\ |zz'|<1,1+2|zz'|^2-2z\overline{z}'>0,$$

其中 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 为由 n 个独立复变量 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 构成的 $1\times n$ 矩阵.

李球(Lie sphere) 即“第四类典型域”.

第五类例外典型域(exceptional classical domain of fifth class) 典型域之一. 第五类例外典型域 $\mathscr{R}_{\mathrm{V}}(16)$：它双全纯同构于无界域

$$\mathrm{Im}\begin{pmatrix}s_1 & y'\\ y & s_2I^{(6)}\end{pmatrix}-\mathrm{Re}\left[\begin{matrix}u\\ \sum_{j=1}^{6}e_jv'\overline{Q}'_j\end{matrix}\right]\overline{\left[\begin{matrix}u\\ \sum_{j=1}^{6}e_jv'\overline{Q}'_j\end{matrix}\right]}'>0,$$

其中 $s_1,s_2\in\mathbb{C},y\in\mathbb{C}^6,u,v\in\mathbb{C}^4$，而

$$e_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)'\ (j=1,2,\cdots,6),$$

$$Q_1=I^{(1)},$$

$$Q_2=\sqrt{-1}\begin{pmatrix}I^{(2)} & 0\\ 0 & -I^{(2)}\end{pmatrix},$$

$$Q_3=\begin{pmatrix}0 & I^{(2)}\\ -I^{(2)} & 0\end{pmatrix},$$

$$Q_4=\sqrt{-1}\begin{pmatrix}0 & \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & 0\end{pmatrix},$$

$$Q_5=\begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_6=\sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}.$$

第六类例外典型域(exceptional classical domain of sixth class)　典型域之一.第六类例外典型域$R_{\mathrm{VI}}(27)$:它双全纯同构于无界域

$$\operatorname{Im}\begin{pmatrix} s_1 & y'_{12} & y'_{13} \\ y_{12} & s_2 I^{(8)} & R(y_{23}) \\ y_{13} & R(y_{23})' & s_3 I^{(8)} \end{pmatrix}>0,$$

其中$s_1,s_2,s_3\in \mathrm{C}$,$y_{12},y_{13},y_{23}\in \mathrm{C}^8$,记

$$y_{23}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_8 \end{pmatrix},$$

则

$R(y_{23})=$

$$\begin{pmatrix}
y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\
-y_2 & y_1 & y_4 & -y_3 & y_6 & -y_5 & -y_8 & y_7 \\
-y_3 & -y_4 & y_1 & y_2 & y_7 & y_8 & -y_5 & -y_6 \\
-y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 & y_8 & -y_7 & y_6 & -y_5 \\
-y_5 & -y_6 & -y_7 & -y_8 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\
-y_6 & y_5 & -y_8 & y_7 & -y_2 & y_1 & -y_4 & y_3 \\
-y_7 & y_8 & y_5 & -y_6 & -y_3 & y_4 & y_1 & -y_2 \\
-y_8 & -y_7 & y_6 & y_5 & -y_4 & -y_3 & y_2 & y_1
\end{pmatrix}.$$

哈托格斯现象(Hartogs phenomenon)　多复变函数论中的特殊现象.设D为C^n中的域,其中$n\geqslant 2$.若K为域D中紧子集(即有界闭集),且$D\backslash K$为连通子集,即为D的子域,若域$D\backslash K$上的函数f全纯,则f可解析开拓到域D上.换句话说,存在域D上的全纯函数F,使得F限制在子域$D\backslash K$上为函数f.

这个性质是多复变函数论的本质性质.它说明:在一个域中挖一个洞,则全纯函数全部可以开拓到这个洞中,所以,在多复变函数论中,不存在孤立奇点.换句话说,一个函数的奇点若存在,则必成片,且到边界点上.那么什么样的域的边界是自然边界呢?这就导致全纯域的概念.

全纯域(domain of holomorphy)　刻画自然边界的域.C^n中的域Ω称为全纯域,如果不存在比Ω更大的域$\Omega'(\Omega'\supset\Omega,\Omega'\neq\Omega)$,使得$\Omega$上全部全纯函数都能全纯地开拓到$\Omega'$上去.复平面$\mathrm{C}$上的域都是全纯域,但当$n>1$时,$\mathrm{C}^n$中确实存在着非全纯的域.例如

$$\Omega=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid 0<r^2<|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2<R^2\}$$

就是非全纯域.这是多复变数函数论和单复变数函数论的一个本质差异之处.为了定义全纯凸域,先给出全纯凸包的概念.设Ω是C^n中的域,K是Ω的一个子集,

$$\hat{K}=\{z\in\Omega\mid |f(z)|\leqslant\sup_K|f|,\forall f\in \mathrm{Hol}(\Omega)\}$$

称为K在Ω中的全纯凸包,其中$\mathrm{Hol}(\Omega)$表示Ω上全体全纯函数构成的集合.如果$\overline{K}\subset\Omega$且$\overline{K}$是紧的,则称$\Omega$的子集$K$相对于$\Omega$是紧的,记为$K\subset\subset\Omega$.现在给出全纯凸域的概念.设$\Omega$是$\mathrm{C}^n$中的域,如果对任意$K\subset\Omega$,从$K\subset\subset\Omega$能推出$\hat{K}\subset\subset\Omega$,就称$\Omega$是全纯凸域.

全纯凸包(envelope of holomorphically convex)　见"全纯域".

全纯凸域(domain of holomorphically convex)　见"全纯域".

嘉当-苏伦定理(Cartan-Thullen theorem)　用全纯凸刻画全纯域的重要定理.嘉当-苏伦定理断言:全纯域和全纯凸域是等价的.这是刻画全纯域的特征的第一个重要结果.

C^n中的龙格域(Runge domains in C^n)　能用多项式逼近的全纯域.设D为C^n中的全纯域,对D上的全纯函数$f(z)$,如果存在多项式序列$\{p_n(z)\}$,使得对D中任意紧子集K,$\{p_n\}$在K上一致地收敛于$f(z)$,则称多项式序列$\{p_n\}$在D上逼近于$f(z)$.若对D上的任一全纯函数$f(z)$,都可找到多项式序列在D上逼近于$f(z)$,则D称为龙格域.在$n=1$的情形,单连通域都是龙格域,但在多复变数的情形,存在非龙格域,例如,域

$$D=\sigma(\Delta_c)=\sigma(\{(x,y,z)\in \mathrm{C}^3\mid |x|<1+c,\ |y|<1+c,|z|<6\}),$$

其中$0<c<1$,又σ为映射:

$$\sigma(x)=x,\ \sigma(y)=xy+z,\ \sigma(z)=xy^2-y+2yz.$$

当c充分小,则σ在Δ_c上双全纯同构,且D为有界域,它不是龙格域.

龙格型定理(Runge type theorem)　关于全纯函数的逼近定理.设D是全纯域,K是D中的有界闭集,并且

$$K=\hat{K}=\{z\in D\mid |g(z)|\leqslant\sup_K|g|,\forall g\in \mathrm{Hol}(D)\},$$

其中$\mathrm{Hol}(D)$表示D上全体全纯函数构成的集.若f是定义于K的某个邻域的全纯函数,则f一定可用定义于D上的全纯函数一致逼近.上述龙格型定理是由韦伊(Weil,A.)和冈洁(Oka,K.)证明的.

拟凸域(quasiconvex domain)　一类具有部分凸性的域.设Ω是C^n中的域,称Ω在$a\in\partial\Omega$具有C^2

边界，是指存在 a 的一个邻域 $U(a)$ 以及定义在 $U(a)$ 上的一个二次连续可微的实值函数 $\varphi: U(a)\to \mathbf{R}$，使得：

1. $\Omega\cap U(a)=\{z\in U(a)\mid\varphi(z)<0\}$.

2. $(\mathrm{d}\varphi)_z\neq 0$ 对所有 $z\in U(a)$ 成立.

如果 $\partial\Omega$ 上每点都具有 C^2 边界，就称 Ω 具有 C^2 边界，上面的 φ 称为域 Ω 在 a 处的局部定义函数；如果 φ 适用于 $\partial\Omega$ 上的每一点，就称 φ 是 Ω 的定义函数.

设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，Ω 在 $a\in\partial\Omega$ 处具有 C^2 边界，φ 是 Ω 在 a 处的局部定义函数，如果对满足

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\right)_a\xi_j=0$$

的 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n$，有

$$\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\right)_a\xi_j\bar{\xi}_k\geqslant 0, \qquad (1)$$

就称 Ω 在 a 处是拟凸的；如果(1)的等号仅当 $\xi=0$ 时才成立，则称 Ω 在 a 处是强拟凸的. 如果 Ω 在 $\partial\Omega$ 上的每一点都是拟凸的，就称 Ω 是拟凸域；如果 Ω 在 $\partial\Omega$ 上的每一点都是强拟凸的，就称 Ω 是强拟凸域. 例如，

$$\Omega=\{z\in\mathbf{C}^n\mid |z_1|^p+|z_2|^p+\cdots+|z_n|^p<1\}$$

当 $p=2$ 时是强拟凸域，$p\neq 2$ 时是拟凸域.

上面(1)式的几何意义是对任一非零向量

$$v\in T_a(\partial\Omega)\cap JT_a(\partial\Omega),$$

这里 J 是 $\mathbf{C}^n$ 上的复结构，v 和法向量 $\operatorname{grad}\varphi$ 所张成的实二维平面与 Ω 的交所成的该二维平面上的域在 a 点是凸的.

由于域的定义函数不是惟一的，上面定义的域的拟凸性或强拟凸性表面上依赖于域的定义函数的选取. 事实上，可以证明域的拟凸性或强拟凸性与域的定义函数的选取无关.

域的局部定义函数(local defined function of a domain)　见“拟凸域”.

域的定义函数(defined function of a domain)　见“拟凸域”.

强拟凸域(strictly pseudoconvex domain)　见“拟凸域”.

$\bar{\partial}$ 算子($\bar{\partial}$- operator)　一类重要的微分算子. 设 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$C^1(D)$ 为 D 上所有一阶连续可微函数构成的线性空间，$\mathrm{Hol}(D)$ 为 D 上所有全纯函数构成的线性空间，$L^2(D)$ 为 D 上所有平方可积函数构成的线性空间，于是有

$$\mathrm{Hol}(D)\subset C^1(D).$$

记

$$L_D^2=\{(f_1,f_2,\cdots,f_n)\mid f_i\in L^2(D),i=1,2,\cdots,n\},$$

则 L_D^2 为线性空间.

$C^1(D)$ 到 L_D^2 内的线性算子

$$u\to\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{z}_1},\frac{\partial u}{\partial\bar{z}_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial\bar{z}_n}\right)$$

称为 $\bar{\partial}$ 算子，这个算子记为 $\bar{\partial}$，于是

$$\ker(\bar{\partial})=\bar{\partial}^{-1}(0)=\mathrm{Hol}(D),$$

任给 $f\in L_D^2$，算出 $\bar{\partial}^{-1}(f)$ 的问题称为 $\bar{\partial}$ 问题. 确切地说，给定 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in L^2(D)$，试求函数 $u\in C^1(D)$ 使得

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{z}_1}=f_1,\ \frac{\partial u}{\partial\bar{z}_2}=f_2,\ \cdots,\ \frac{\partial u}{\partial\bar{z}_n}=f_n.$$

上面是超定一阶偏微分方程，又可简单地写成

$$\bar{\partial}u=f.$$

$\bar{\partial}$ 问题在拟凸域上一定有解. 另一方面，在强拟凸域的情形给出了解的积分表示.

$\bar{\partial}$ 问题($\bar{\partial}$ problem)　见“$\bar{\partial}$ 算子”.

多重次调和函数(plurisubharmonic function)　用来刻画多复变函数论性质的一类常用的实函数. 设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，$u: D\to\mathbf{R}$ 是 D 上的实值函数，如果 u 满足下面两条性质，则 u 称为 D 上的多重次调和函数：

1. u 是上半连续的.

2. u 限制在每条复直线上都是次调和的，即对每个 $z_0\in D$ 与 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{C}^n$，$u$ 是

$$\{z_0+\lambda a\mid\lambda\in\mathbf{C}\}\cap D$$

上的单复变数 λ 的次调和函数.

多重次调和穷竭函数(plurisubharmonic exhaustive function)　多复变函数论中一类重要的实函数. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，ψ 是 Ω 上的一个多重次调和函数，如果对每个实数 c，有

$$\{z\in\Omega\mid\psi(z)\leqslant c\}\subset\subset\Omega,$$

则称 ψ 是 Ω 上的一个多重次调和穷竭函数.

列维问题(Levi problem)　关于拟凸域和全纯域是否等价的问题. 对具有 C^2 边界的域定义了拟凸域，由此不难证明：具有 C^2 边界的全纯域一定是拟凸域. 但在全纯域的定义中，对域的边界没有要求，这样就产生了一个问题：对于不具有光滑边界的全纯域，是否也有上述性质？为此，首先要把拟凸域的概念拓广，使之包括边界不光滑的域. 现在可以给出与边界的光滑性无关的拟凸域的概念. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域，如果在 Ω 上存在连续的多重次调和穷竭函数，就称 Ω 是拟凸域. 可以证明，如果 Ω 具有 C^2 边界，那么这里的拟凸域的概念和前面提到的拟凸域的概念是等价的. 对于这里定义的与边界的光滑性无关的拟凸域，亦可证明：全纯域一定是拟凸域.

列维(Levi, E. E.)在 1910 年提出一个反问题：拟凸域是否一定是全纯域？首先就一些特殊情形，证明上述问题的答案是肯定的. 一般的情形就成了有名的列维猜测. 1942 年，冈洁(Oka, K.)解决了 $n=2$

的情形;1954 年,诺盖(Norguet,F.)和布雷默尔曼(Bremermann,J. H.)同时解决了这个问题. 复流形上的列维问题是由格劳尔特(Grauert,H.)在 1958 年用层论的方法解决的. 到 20 世纪 60 年代中期,科恩(Kohn,J. J.)、赫尔曼德尔(Hörmander,L.)等用 $\bar{\partial}$ 算子的 L^2 估计解决了列维问题. 因此,列维问题长期以来对多复变函数论的发展有着重要的影响.

多复变函数的积分表示(integral representation of function of several complex variables) 单复变函数论中柯西型积分表示理论的推广. 在多复变数函数论中,存在各种积分表示,积分表示理论就是寻找各种柯西核,使得在 $\mathbf{C}^n$ 中 D 的闭包上适当阶连续可微的函数 $f(z)$,当 $f(z)$ 在 D 上全纯时,$f(z)$ 在 D 上之值可用 $f(z)$ 及其适当阶导数在边界上或者希洛夫边界上之值乘以柯西核的积分来表示.

柯西-赛格积分表示(Cauchy-Szegö representation) 单复变函数论中柯西型积分的推广. 多圆柱上的柯西积分公式可以看做单位圆盘上柯西积分公式的直接推广:设 $f(z)$ 在多圆柱 P_n 中全纯,在 $\overline{P}_n$ 上连续,则对每点 $z\in P_n$,有柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi_1|=1}\int\limits_{|\xi_2|=1}\cdots\int\limits_{|\xi_n|=1}\frac{f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{(\xi_1-z_1)(\xi_2-z_2)\cdots(\xi_n-z_n)}d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n.$$

单位球 B_n 上的柯西积分公式为

$$f(z)=\int_{\partial B_n}\frac{f(\xi)d\sigma(\xi)}{(1-\langle z,\xi\rangle)^n}\quad(z\in B_n),$$

其中

$$\langle z,\xi\rangle=z\bar{\xi}'=\sum_{j=1}^{n}z_j\bar{\xi}_j,$$

σ 是规范化了的 ∂B_n 上的不变测度,$\sigma(\partial B_n)=1$. 又 $f(z)$ 在 B_n 上全纯,在 $\overline{B}_n$ 上连续.

华罗庚引进并证明了在一般有界圆型星形域上存在一类柯西积分公式,称为柯西-赛格积分公式. 作为特例,他得到了四类典型域上的柯西-赛格核,从而也得到了它们的柯西-赛格积分公式. 四类典型域 R_{I},R_{II},R_{III},R_{IV} 的柯西-赛格核 C_{I},C_{II},C_{III},C_{IV} 分别为:

$$C_{\mathrm{I}}(Z,\overline{U})=\frac{1}{V(S_{\mathrm{I}})\det(I-Z\overline{U}')^n},$$

$$C_{\mathrm{II}}(Z,\overline{U})=\frac{1}{V(S_{\mathrm{II}})\det(I-Z\overline{U})^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

$$C_{\mathrm{III}}(Z,\overline{U})=\begin{cases}\dfrac{1}{V(S_{\mathrm{III}})\det(I-Z\overline{U})^{\frac{1}{2}(n-1)}} & (n\text{ 是偶数}),\\[2ex] \dfrac{1}{V(S_{\mathrm{III}})\det(I-Z\overline{U})^{\frac{1}{2}n}} & (n\text{ 是奇数}),\end{cases}$$

$$C_{\mathrm{IV}}(z,\theta,x)=\frac{1}{V(S_{\mathrm{IV}})[(x-e^{-i\theta}z)(x-e^{-i\theta}z)']^{\frac{1}{2}n}},$$

其中 $V(S_{\mathrm{I}})$,$V(S_{\mathrm{II}})$,$V(S_{\mathrm{III}})$,$V(S_{\mathrm{IV}})$ 分别是 R_{I},R_{II},R_{III},R_{IV} 的希洛夫边界 S_{I},S_{II},S_{III},S_{IV} 的体积.

从这里可以看出,多复变数函数的柯西积分公式和单复变数函数的柯西积分公式有两个本质不同的地方:

1. 单复变数的柯西核与域无关,而多复变数的柯西核因域而异,不同的域有不同的柯西积分公式,且对同一域也存在不同的柯西积分公式.

2. 单复变数的柯西-赛格积分公式的积分是在域的全部边界上进行的,而多复变数的柯西-赛格积分公式的积分有时是在边界的一部分——希洛夫边界上进行的.

还有一点值得提一下,看上去似乎并不复杂的球的柯西积分公式,是在 1958 年华罗庚得到第一类典型域 R_{I} 的柯西-赛格积分公式后,作为特例得到的.

博赫纳-马蒂里尼积分表示公式(Bochner-Martinelle integral representation formula) 单复变数函数论的柯西积分公式的推广. 设 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域,它的边界记为 ∂D. 设边界 ∂D 是逐块光滑的,则有如下积分表示公式:

$$\int_{\partial D}f(\xi)W(\xi-z,\bar{\xi}-\bar{z})=\begin{cases}f(z) & (z\in D),\\ 0 & (z\notin\overline{D}),\end{cases}$$

其中 $\overline{D}$ 为域 D 的闭包,$f(z)$ 在 D 上全纯,在 $\overline{D}$ 上连续,又

$$W(\xi-z,\bar{\xi}-\bar{z})=\frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\cdot\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\bar{\xi}_j-\bar{z}_j}{|\xi-z|^n}W_j(\xi)\wedge W_0(\xi),$$

其中

$$|\xi-z|^2=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-z_i)^2,$$

又

$$W_j(\xi)=d\bar{\xi}_1\wedge\cdots\wedge d\hat{\bar{\xi}}_j\wedge\cdots d\bar{\xi}_n,$$
$$W_0(\xi)=d\xi_1\wedge d\xi_2\wedge\cdots\wedge d\xi_n,$$

而 $d\hat{\bar{\xi}}_j$ 表示 $d\bar{\xi}_j$ 不出现.

这个很有用的积分公式的缺点在于博赫纳-马蒂里尼核 $W(\xi-z,\bar{\xi}-\bar{z})$ 不是域 D 上的全纯函数,而仅为连续函数.

柯西-凡塔皮耶积分表示(Cauchy-Fantappié integral representation formula) 重要的积分表示公式. 它可推出许多已有的积分表示公式,当希洛夫边界不是整个边界时,和由华罗庚引进的柯西-赛格积

分表示公式是两种独立的重要积分表示公式.

定义如下,设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域,它的边界是逐块光滑的.如果存在 n 个函数

$$v_1(z,\xi,\bar{\xi}),\ v_2(z,\xi,\bar{\xi}),\ \cdots,\ v_n(z,\xi,\bar{\xi}),$$

它们关于 z 在 D 上连续,关于 ξ 在 ∂D 上一阶连续可微,且适合勒雷条件:

1. $\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - z_j)v_j(z,\xi,\bar{\xi}) = 1$
$(\forall z \in D, \xi \in \partial D)$.

2. 任意取 $z \in D$,则当 ξ 在 ∂D 上变动时,做 $\mathbb{R}^{2n}$ 中实超曲面簇

$$S_\lambda(z)=\{ (\xi, \frac{\lambda}{|\xi - z|^2}(\bar{\xi} - \bar{z}) + (1-\lambda)v(z,\xi,\bar{\xi})) \in C^{2n} \mid \forall \xi \in \partial D\},$$

其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$,

$$v(z,\xi,\bar{\xi}) = (v_1(z,\xi,\bar{\xi}), v_2(z,\xi,\bar{\xi}), \cdots, v_n(z,\xi,\bar{\xi})),$$

则向量函数 $v(z,\xi,\bar{\xi})$ 适合条件:

$$\partial(\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant1} S_\lambda(z)) = S_0(z)\backslash S_1(z)(z \in D).$$

这时有柯西-凡塔皮耶积分表示公式,又称为勒雷积分表示公式

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\partial D} f(\xi) \cdot \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}v_j(z,\xi,\bar{\xi})W_j(z,\xi,\bar{\xi}) \wedge W_0(\xi),$$

其中

$$W_0(\xi)=\mathrm{d}\xi_1\wedge\mathrm{d}\xi_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi_n,$$

$$W_j(z,\xi,\bar{\xi})=\mathrm{d}_{\bar{\xi}}v_1(z,\xi,\bar{\xi})\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}_{\bar{\xi}}v_j}(z,\xi,\bar{\xi})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}_{\bar{\xi}}v_n(z,\xi,\bar{\xi}),$$

又 $f(z)$ 在 $z\in D$ 全纯,在 $z\in\bar{D}$ 连续,这里 $\bar{D}$ 为域 D 的闭包.

最重要的柯西-凡塔皮耶公式还要求加上条件:向量函数 $v(z,\xi,\bar{\xi})(\forall\xi\in\partial D)$ 关于 z 全纯.

勒雷积分表示公式(Leray integral representation formula) 一种多复变函数论的柯西型积分.即所谓勒雷积分表示公式.它是勒雷(Leray, J.)在很广的条件下得到的,用它可导出最常用的柯西-凡塔皮耶积分表示公式.

复流形(complex manifold) 无支点黎曼曲面的推广.设 M 为具有可数基的仿紧拓扑空间,且在 M 上有开覆盖 $\{U_\alpha\}$,使得对每个开集 U_α,存在 U_α 到 $\mathbb{C}^n$ 中的域上的同胚映射 φ_α,于是 U_α 中任给一点 p,则

$$\varphi_\alpha(p) = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

称为点 p 关于区图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 之坐标.设对 M 中任一点 q,若存在 U_α, U_β 使得 $q\in U_\alpha\cap U_\beta$.记 q 关于 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 之坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,关于 (U_β,φ_β) 之坐标为 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,则

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2 = f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$

为 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 到 $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 上的全纯同构,这时 M 称为 n 维复流形. n 维复流形为 $2n$ 维实解析流形,反之不一定.

和实流形概念的引进扩大了微分几何和实分析的对象,产生了像大范围分析那样的学科一样,复流形概念的引进,扩大了复分析的研究领域和产生像复几何那样的学科,其中紧复流形的研究成果较多.最简单的紧复流形为紧黎曼面及 n 维复射影空间 P^n(参见本卷《流形上的分析》同名条).

复流形上的函数(function on complex manifold) 复流形 M 到复平面 $\mathbb{C}$ 内的单值映射 f 称为复流形 M 上的函数.

复流形上的全纯函数(holomorphic function on complex manifold) 复流形上函数论的研究对象.设 f 为复流形 M 上的函数,f 称为 M 上全纯函数,如果 (U,φ) 为 M 上任一区图,则 $f\circ\varphi^{-1}$ 为 $\varphi(U)$ 上全纯函数. M 上所有全纯函数构成线性空间,记为 $\mathrm{Hol}(M)$.多复变函数论实际上是研究复流形上的全纯函数论.

复流形上的全纯映射(holomorphic mapping on complex manifold) 一种特殊的连续映射.复流形 M_1 到 M_2 内的单值映射 σ 如果是连续映射,于是对 M_2 之任一区图 (U_2,φ_2),在 M_1 中任取(必存在)区图 (U_1,φ_1),使得 $\sigma(U_1)\subset U_2$,如果

$$\tau = \varphi_1\circ\sigma\circ\varphi_2^{-1}$$

有坐标表达式

$$w_1 = f_1(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$
$$w_2 = f_2(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_m = f_m(z_1,z_2,\cdots,z_n).$$

当 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 为 $\varphi_1(U_1)$ 上的全纯函数时,σ 称为 n 维复流形 M_1 到 m 维复流形 M_2 内之全纯映射.

复流形的全纯同构(holomorphic isomorphism on complex manifold) 一个流形到另一个流形之上的一一全纯映射.若 σ 为复流形 M_1 到 M_2 上的同胚映射,且为全纯映射,则 σ^{-1} 一定也是 M_2 到 M_1 上的全纯映射.这时 σ 称为 M_1 到 M_2 上的全纯同构,而 M_1 和 M_2 称为全纯同构的,或称为全纯等价的.这是一个等价关系,所谓复流形的分类问题就是复流形的全纯等价分类的问题.确切地说,要求出复流形在全纯同构下的全系不变量,且在等价类中找出一个具有最简单表达形式的复流形.

关于复流形的分类问题，完全解决的只有对称埃尔米特流形、实半单李群作用的齐性克勒流形以及紧齐性复流形.

复流形的全纯等价(holomorphic equivalence of complex manifolds)　多复变函数论的基本概念. 两个复流形互相全纯同构，则称为全纯等价(参见“复流形的全纯同构”).

复流形上的共变张量场(covariant tensor fields on complex manifold)　刻画复流形几何性质的有力工具. 设 M 为 n 维复流形，它是 $2n$ 维实解析流形. M 中给定区图$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$, U_α 中点 p 有坐标

$$\varphi_\alpha(p)=z=(z_1,z_2,\cdots,z_n).$$

记 $z_j=x_j+iy_j$，其中x_j,y_j均为实数($1\leqslant j\leqslant n$)，于是 M 作为 $2n$ 维实流形有坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 记

$$\frac{\partial}{\partial z_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$
$$\mathrm{d}z_j=\mathrm{d}x_j+\sqrt{-1}\mathrm{d}y_j,$$
$$\mathrm{d}\bar{z}_j=\mathrm{d}x_j-\sqrt{-1}\,\mathrm{d}y_j.$$

若 M 作为 $2n$ 维实解析流形，其上 m 阶共变张量场 F，在 U_α 上可用坐标写为

$$F=\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{n}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n}a_{i_1\cdots i_pj_1\cdots j_q}(z,\bar{z})\cdot\mathrm{d}z_{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}z_{i_p}\otimes\overline{\mathrm{d}z_{j_1}}\otimes\cdots\otimes\overline{\mathrm{d}z_{j_q}},$$

则 F 称为 n 维复流形 M 上的(p,q)型共变张量场，这里 $p+q=m$.

复流形上的外微分形式(exterior differential form on complex manifold)　定义在复流形上的一种微分形式. 复流形上 m 阶外微分形式 ω 在 U_α 上可用坐标写为

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant n}a_{i_1\cdots i_pj_1\cdots j_q}(z,\bar{z})\cdot\mathrm{d}z_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z_{i_p}\wedge\overline{\mathrm{d}z_{j_1}}\wedge\cdots\wedge\overline{\mathrm{d}z_{j_q}},$$

则 ω 称为 n 维复流形 M 上的(p,q)型外微分形式.

复流形上的埃尔米特度量(Hermitian metric on complex manifold)　复流形上的一种度量. 设 M 为 n 维复流形，M 上的(1,1)型共变张量场 h 若在每个区图$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$上有坐标表达式

$$h=\sum_{j,k=1}^{n}h_{jk}(z,\bar{z})\mathrm{d}z_j\otimes\overline{\mathrm{d}z_k},$$

其中 $h_{jk}(z,\bar{z})$在$\varphi_\alpha(U_\alpha)$上光滑，又 n 阶方阵

$$H(z,\bar{z})=\begin{pmatrix}h_{11}(z,\bar{z}) & h_{12}(z,\bar{z}) & \cdots & h_{1n}(z,\bar{z})\\ h_{21}(z,\bar{z}) & h_{22}(z,\bar{z}) & \cdots & h_{2n}(z,\bar{z})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ h_{n1}(z,\bar{z}) & h_{n2}(z,\bar{z}) & \cdots & h_{nn}(z,\bar{z})\end{pmatrix}$$

对任意 $z\in\varphi_\alpha(U_\alpha)$为正定埃尔米特方阵，则 h 称为 M 上的埃尔米特度量.

埃尔米特流形(Hermitian manifolds)　一类重要的复流形. 具有埃尔米特度量的复流形称为埃尔米特流形.

克勒流形(Kähler manifolds)　一类重要的复流形. 设 M 有埃尔米特度量 h，它对应一个(1,1)型外微分形式

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{j,k=1}^{n}h_{jk}(z,\bar{z})\mathrm{d}z_j\wedge\overline{\mathrm{d}z_k},$$

称为 h 的伴随克勒形式. 当 $\mathrm{d}\omega=0$ 时，h 称为克勒度量. 具有克勒度量的复流形称为克勒流形. 例如，$\mathbf{C}^n$ 中有界域关于伯格曼度量为克勒流形.

施坦流形(Stein manifold)　从多复变函数论角度研究最多的复流形. 它是全纯凸域在复流形上的推广. 若复流形 M 满足下述条件，则 M 称为施坦流形(参见本卷《流形上的分析》同名条)：

1. M 是全纯凸的，即对于 M 中的任何紧子集 K，集合

$$\hat{K}=\{x\in M\,|\,|f(x)|\leqslant\sup_K|f|,\forall f\in\mathrm{Hol}(M)\}$$

也是 M 中的紧子集.

2. 任取 $x_1,x_2\in M$, $x_1\neq x_2$，存在 M 上的全纯函数 f，使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

3. 对于任何 $x\in M$，均存在 M 上的全纯函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，使得 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 可作为 x 附近的局部坐标.

伯格曼核函数(Bergman kernel function)　刻画有界域函数论性质和几何性质的一个极有用的正值函数. 设 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域. 记 μ 为 $\mathbf{C}^n$ 的欧几里得测度，考虑函数空间

$$B_\mu^2(D)=\mathrm{Hol}(D)\cap L_\mu^2(D),$$

其中 $\mathrm{Hol}(D)$为 D 上所有全纯函数构成的集合，$L_\mu^2(D)$为 D 上适合条件

$$\int_D|f|^2\mathrm{d}\mu<+\infty$$

的所有可积函数 f 构成的集合，在 $B_\mu^2(D)$中引进内积

$$(f,g)=\int_D f(z)\,\overline{g(z)}\mathrm{d}\mu,$$

于是 $B_\mu^2(D)$关于此内积为希尔伯特空间，且有可数基. 任给完备规范正交基 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$，于是

$$K(p,\bar{q})=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(p)\,\overline{\varphi_j(q)}\quad(\forall p,q\in D)$$

关于 p 及 $\bar{q}$ 为全纯函数，且 $K(p,\bar{q})$与规范正交基的选取无关. $K(p,\bar{q})$称为有界域 D 上的伯格曼核函数. 它有性质：平方可积全纯函数 $f(z)$可表为

$$f(z)=\int_D f(w)K(z,\bar{w})\mathrm{d}w.$$

伯格曼度量方阵(Bergman metric matrix)　由伯格曼核函数诱导的一种克勒度量决定的埃尔米特方阵. 记 $K(z,\bar{z})$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界域 D 上的伯格曼核函数. 记(1,1)型共变张量场

$$h=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\log K(z,\bar{z})}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\mathrm{d}z_j\otimes\overline{\mathrm{d}z_k},$$

则 n 阶埃尔米特方阵

$$\left(\frac{\partial^2\log K(z,\bar{z})}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}$$

关于 $z\in D$ 为正定埃尔米特方阵,此方阵称为域 D 的伯格曼度量方阵.

伯格曼度量(Bergman metric)　由伯格曼核函数诱导的克勒度量. 记 $T(z,\bar{z})$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界域 D 上的伯格曼度量方阵,则

$$\begin{aligned}h&=\mathrm{d}zT(z,\bar{z})\overline{\mathrm{d}z'}\\&=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\log K(z,\bar{z})}{\partial z_i\partial\bar{z}_j}\mathrm{d}z_i\otimes\overline{\mathrm{d}z_j}\end{aligned}$$

为域 D 上的克勒度量,称为域 D 的伯格曼度量,所以有界域 D 为克勒流形,且 D 的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(D)$ 为关于此度量的等度量变换群.

伯格曼核函数和伯格曼度量是研究有界域的几何性质及函数论性质的基本工具之一.

伯格曼流形(Bergman manifolds)　具有伯格曼核函数的一类流形. 设 M 为 n 维复流形, $\mathrm{Hol}(M)$ 为 M 上所有全纯函数构成的复线性空间,在 M 上任给测度 μ, $L_\mu^2(M)$ 为 M 上所有适合条件

$$\int_M|f|^2\mathrm{d}\mu<+\infty$$

的可测函数 f 构成的复线性空间. 记

$$B_\mu^2(M)=\mathrm{Hol}(M)\cap L_\mu^2(M),$$

在 $B_\mu^2(M)$ 中可自然地引进内积

$$(f,g)=\int_M f\bar{g}\mathrm{d}\mu.$$

如果复流形 M 适合条件:存在测度 μ,使得:

1. $B_\mu^2(M)$ 关于上述内积为希尔伯特空间.

2. $B_\mu^2(M)$ 有可数基,且在 $B_\mu^2(M)$ 中任取规范正交基 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$,使

$$K(p,\bar{q})=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(p)\overline{\varphi_j(q)}\quad(\forall p,q\in M)$$

为 M 上关于 $p,\bar{q}$ 的全纯函数,则 $K(p,\bar{q})$ 的定义与规范正交基之选取无关,称为 M 上的伯格曼核函数.

3. 在 M 中任取区图 (U,φ),则 $K(p,\bar{p})$ 有坐标表达式

$$K(z,\bar{z})=\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_j(z)|^2,$$

做 n 阶埃尔米特方阵

$$\left(\frac{\partial^2\log K(z,\bar{z})}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n}.$$

于是 M 上有(1,1)型共变张量场 h,它在 (U,φ) 上有坐标表达式

$$h=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\log K(z,\bar{z})}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}\mathrm{d}z_j\otimes\overline{\mathrm{d}z_k}.$$

在 M 上有(1,1)型2形式,它在 (U,φ) 上有坐标表达式

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\log K(z,\bar{z})}{\partial z_j\overline{\partial z_k}}\mathrm{d}z_j\wedge\overline{\mathrm{d}z_k},$$

且在 M 上有 $\mathrm{d}\omega=0$.

假设 h 为 M 上的埃尔米特度量,则必为克勒度量,这时 M 称为伯格曼流形,而 h 称为伯格曼度量.

伯格曼流形的存在性是由于有界域必为伯格曼流形.

不变调和函数(invariant harmonic function)　拉普拉斯-贝尔特拉米方程 $\Delta u=0$ 的解. 记 $K(z,\bar{z})$ 为 $\mathbf{C}^n$ 中有界域 D 的伯格曼核函数,则由伯格曼核决定的伯格曼度量为

$$\sum_{j,k=1}^{n}h_{jk}(z,\bar{z})\mathrm{d}z_j\otimes\overline{\mathrm{d}z_k}.$$

由此伯格曼度量决定的拉普拉斯-贝尔特拉米算子为

$$\Delta=\sum_{j,k=1}^{n}\tilde{h}_{jk}(z,\bar{z})\frac{\partial^2}{\partial z_j\overline{\partial z_k}},$$

其中 n 阶方阵

$$T(z,\bar{z})=\begin{pmatrix}h_{11}(z,\bar{z})&h_{12}(z,\bar{z})&\cdots&h_{1n}(z,\bar{z})\\h_{21}(z,\bar{z})&h_{22}(z,\bar{z})&\cdots&h_{2n}(z,\bar{z})\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\h_{n1}(z,\bar{z})&h_{n2}(z,\bar{z})&\cdots&h_{nn}(z,\bar{z})\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{T}(z,\bar{z})=\begin{pmatrix}\tilde{h}_{11}(z,\bar{z})&\tilde{h}_{12}(z,\bar{z})&\cdots&\tilde{h}_{1n}(z,\bar{z})\\\tilde{h}_{21}(z,\bar{z})&\tilde{h}_{22}(z,\bar{z})&\cdots&\tilde{h}_{2n}(z,\bar{z})\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\tilde{h}_{n1}(z,\bar{z})&\tilde{h}_{n2}(z,\bar{z})&\cdots&\tilde{h}_{nn}(z,\bar{z})\end{pmatrix}$$

互为逆方阵. D 上二阶连续可微实值函数 $f(z,\bar{z})$ 称为不变调和函数,如果 $\Delta f=0$.

卡拉西奥多里度量(Carathéodory metric)　由全纯映射集合诱导的一种度量. 复流形 M 到单位圆盘 B 内的全体全纯映射构成集合 $B(M)$,则

$$F_c(z,\xi)=\sup_{\substack{f\in B(M)\\f(z)=0}}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}\xi_j\right|$$

$$(\forall z\in M,\xi\in M)$$

称为卡拉西奥多里度量.

卡拉西奥多里伪距(Carathéodory pseudo-distance)　距离的定义方式之一. 复流形 M 到单位圆盘 B 内的全体全纯映射构成集合 $B(M)$,则

$$C(z_1,z_2)=\sup_{f\in B(M)}\rho(f(z_1),f(z_2))$$

$$(z_1,z_2\in M)$$

称为卡拉西奥多里伪距,其中 ρ 为 M 的庞加莱度量

导出的距离.

柯巴雅西伪距(Kobayashi pseudo-distance) 复流形上的一种全纯同构下不变的伪距. 设 p,q 是复流形 M 上的任意两个点,$p_0=p,p_1,\cdots,p_k=q$ 都是 M 上的点,$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是单位圆盘 B 上的点,而且存在全纯映射 $f_i:B\to M$,使得

$$f_i(0)=p_{i-1},f_i(a_i)=p_i\ (i=1,2,\cdots,k).$$

这样的 $p_0,p_1,\cdots,p_k,a_1,a_2,\cdots,a_k$ 与 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 称为连结 p 与 q 的一个全纯链. p,q 的柯巴雅西伪距

$$d_M(p,q)=\inf\sum_{i=1}^{k}\rho(0,a_i),$$

这里 ρ 是单位圆盘上庞加莱度量导出的距离,上式中的下确界是对所有连结 p 与 q 的全纯链取的.

当一个复流形的柯巴雅西伪距是一个真距离时,就称这个复流形是柯巴雅西流形或双曲流形. 所有的 $\mathbf{C}^n$ 中的有界域都是柯巴雅西流形. 因此,柯巴雅西流形可视作是有界域的推广.

柯巴雅西-罗伊登度量是关于柯巴雅西伪距的无穷小度量. 因为

$$d_M(p,q)=\inf_r\int_0^1 F_M(r(t),\dot{r}(t))\mathrm{d}t,$$

这里 $r:[0,1]\to M$ 是 $r(0)=p,r(1)=q$ 的逐段光滑曲线,上式中的下确界是对所有连结 p 与 q 的逐段光滑曲线取的.

有很多复流形上的柯巴雅西伪距不是真距离. 例如 $\mathbf{C}^n,\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$,其中$\{0\}$是 $\mathbf{C}^n$ 中零元组成的单元素集. 亏格为 0 与 1 的黎曼曲面、复射影空间,它们任意两点的柯巴雅西伪距都为零.

柯巴雅西-罗伊登度量(Kobayashi-Royden metric) 由全纯映射集合诱导的一种度量. 记单位圆盘 B 到 $\mathbf{C}^n$ 中域 D 内的全体全纯映射构成的集合为$D(B)$,则

$$F_K(z,\xi)=\inf\{\alpha|\alpha>0,\exists\ f\in D(B),\ f(0)=z,f'(0)=\xi/\alpha\}$$
$$(\forall z\in D,\xi\in\mathbf{C}^n).$$

卡拉西奥多里度量比柯巴雅西-罗伊登度量小,它们在全纯映射下缩小,在全纯同构下保持不变. 但是这两种度量都不是微分几何意义下的度量.

泊松积分(Poisson integral) 不变调和函数的积分表示. 记 $S(D)$为有界域 D 的希洛夫边界. 拓扑积 $D\times S(D)$上的实值连续函数

$$P(z,\bar{z};\xi,\bar{\xi})\ (\forall z\in D,\xi\in S(D)),$$

如果关于 $z\in D,\bar{z}\in\overline{D}$ 为二阶连续可微,关于 $\xi,\bar{\xi}$ 在 $S(D),\overline{S(D)}$上连续,这里 $\overline{D},\overline{S(D)}$表示 D 及 $S(D)$ 中点之共轭复数点构成之集合,如果任取 $S(D)$上实值连续函数 $f(\zeta,\bar{\zeta})$,使得

$$f(z,\bar{z})=\frac{1}{V}\int_{S(D)}f(\zeta,\bar{\zeta})P(z,\bar{z};\zeta,\bar{\zeta})\dot{\zeta}$$

为 D 上不变调和函数,且当 z 由 D 趋于$S(D)$中点 ζ_0 时,极限为$f(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)$,这里 $\dot{\zeta}$ 为由 $\mathbf{C}^n$ 之欧氏测度在 $S(D)$上的诱导,而 V 为 $S(D)$的体积,则 $P(z,\bar{z};\zeta,\bar{\zeta})$称为域 D 上的泊松核函数,而上述积分式称为关于$f(\zeta,\bar{\zeta})$之泊松积分.

利用单复变数函数论中构造泊松核函数之办法,很自然的问题是:如果知道域 D 的柯西核函数 $S(z,\bar{\zeta})$,则形式泊松核函数

$$\tilde{P}(z,\bar{z};\zeta,\bar{\zeta})=\frac{|S(z,\bar{\zeta})|^2}{S(z,\bar{z})}$$

是否为泊松核函数. 在 D 为对称有界域时,这是对的. 在一般情形,齐性有界域上形式泊松核函数是泊松核函数当且仅当 D 为对称齐性有界. 当 D 为非齐性有界域时,还一无所知.

泊松核函数(Poisson kernel function) 见"泊松积分".

多复变函数的H^p空间(H^p spaces of several complex variables) 单复变函数的 H^p 空间的推广. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界对称域,b 是它的希洛夫边界,$f:\Omega\to\mathbf{C}$ 是 Ω 上的全纯函数,定义 f 的积分平均为

$$M_p(r,f)=\left\{\int_b|f(r\zeta)|^p\mathrm{d}\sigma(\zeta)\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$(0<p<+\infty),$$

其中 σ 为 b 上的规范化的勒贝格测度,

$$M_\infty(r,f)=\sup_{\zeta\in b}|f(r\zeta)|,$$

则称 Ω 上的全纯函数 $f\in H^p(\Omega)$,如果

$$\sup_{0<r<1}M_p(r,f)<+\infty.$$

对于不同的 $p,H^p(\Omega)$有下面的包含关系:

$$H^q(\Omega)\subset H^p(\Omega)\ (q>p).$$

单复变数的 H^p 空间理论自 20 世纪 20 年代哈代(Hardy,G. H.)和李特尔伍德(Littlewood,J. E.)等人的开创性工作以来,经过许多数学家的努力,已形成完整的体系,目前已有好几本专著问世. 多复变数 H^p 空间理论的研究开始于 20 世纪 60 年代末、70 年初,正处于发展的阶段,有很多问题和单复变数有本质的差异,如 H^p 函数的分解,H^p 函数的零点集等都比单变数情形复杂得多.

当 $n=1$ 时,单位圆盘上的 H^p 空间的零点集和 p 无关;而当 $n>1$ 时,B_n 上的 H^p 空间的零点集随 p 而异.

多复变数奈望林纳函数类(Nevanlinna function class of several complex variables) 单复变函数论奈望林纳函数的推广. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界对称域,b 是它的特征边界. 如果 $f:\Omega\to\mathbf{C}$ 在 Ω 上全纯,且满足

$$\sup_{0<r<1}\int_b\log^+|f(r\zeta)|\mathrm{d}\sigma(\zeta)<+\infty,$$

则称 f 属于奈望林纳函数类，记为 $N(\Omega)$.

多复变数斯米尔诺夫函数类(Smirnov function class of several complex variables)　单复变函数论斯米尔诺夫函数的推广. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的对称有界域，b 是它的特征边界. 如果 $f:\Omega\to\mathbf{C}$ 在 Ω 上全纯. 又设 $f\in N(\Omega)$且

$$\log^+|f_r|\ (0<r<1)$$

一致可积，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要特征边界 b 上的点集 E 满足$\sigma(E)<\delta$，就有

$$\int_E \log^+|f_r(\zeta)|\mathrm{d}\sigma(\zeta)<\varepsilon,$$

则称 f 属于斯米尔诺夫函数类，记为 $N_*(\Omega)$. H^p 函数类和奈望林纳函数类的关系是，对任意 $0<p<+\infty$，均有

$$H^p(\Omega)\subset N_*(\Omega)\subset N(\Omega).$$

多复变数布洛赫函数(Bloch functions of several complex variables)　单复变数布洛赫函数的推广. 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的齐性有界域，$f:\Omega\to\mathbf{C}$ 是 Ω 上的全纯函数. 用$\frac{\partial f}{\partial z}(z)$记 $f(z)$在 z 处的梯度向量，即

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z)=\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z),\frac{\partial f}{\partial z_2}(z),\cdots,\frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\right),$$

$T(z,\bar{z})$记 Ω 的伯格曼度量方阵. 定义

$$Q_f(z)=\sup\left\{\frac{\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z)w'\right|}{(wT(z,\bar{z})w')^{\frac{1}{2}}}\middle|0\neq w\in\mathbf{C}^n\right\},$$

如果

$$\sup\{Q_f(z)\,|\,z\in\Omega\}<+\infty,$$

就称 f 是 Ω 上的布洛赫函数. Ω 上的布洛赫函数的全体记为 $\beta(\Omega)$. 如果 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球 B_n，那么 B_n 上的全纯函数$f\in\beta(B_n)$的充分必要条件是

$$\sup_{z\in B_n}\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z)\right|(1-|z|^2)<+\infty.$$

如果 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的单位多圆柱 P_n，那么 P_n 上的全纯函数 $f\in\beta(P_n)$的充分必要条件是

$$\sup_{z\in P_n}\left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\right|(1-|z_j|^2)<+\infty$$

$$(j=1,2,\cdots,n).$$

布洛赫函数类和 H^p 函数类是互不包含的.

多复变数 BMOA 函数(BMOA functions of several complex variables)　$H^1(B_n)$的对偶空间. 如果 B_n 上的全纯函数 $f\in H^2(B_n)$，且存在常数 C，对任意 $g\in H^2(B_n)$均有

$$\left|\int_{\partial B_n} f\bar{g}\mathrm{d}\sigma_n\right|<C\,\|g\|_1,$$

则称 f 为 BMOA 函数. 由此可见：BMOA(B_n)是 $H^1(B_n)$的对偶空间. BMOA 函数还有下面的等价定义：$f\in$ BMOA(B_n)的充分必要条件是存在 $\psi\in L^\infty(\partial B_n)$，使得

$$f(z)=\int_{\partial B_n}\frac{\psi(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n}\mathrm{d}\sigma_n(\zeta).$$

上述各种函数类的包含关系如下：

$$H^\infty\subset BMOA\subset H^p\subset N_*\subset N$$
$$(BMOA\subset\beta).$$

多复变数极大函数(Maximal function of several complex variables)　单位圆盘的极大函数在 B_n 中的推广. 对于 $\zeta\in\partial B_n$，$\alpha>1$，定义柯朗意区域为

$$D_\alpha(\zeta)=\{z\in\mathbf{C}^n\,|\,|1-\langle z,\zeta\rangle|<\frac{\alpha}{2}(1-|z|^2)\}.$$

容易看出 $D_\alpha(\zeta)\subset B_n$. 对于 B_n 上的连续函数 f，定义它的极大函数为

$$(M_\alpha f)(\zeta)=\sup\{|f(z)|\,|\,z\in D_\alpha(\zeta)\}.$$

f 的极大函数 $M_\alpha f$ 有下列重要性质：对每一个 $\alpha>1$，对应常数 $A(\alpha)<+\infty$，使得对每个

$$f\in H^p(B_n)\ (0<p<+\infty),$$

均有

$$\int_{\partial B_n}|(M_\alpha f)(\zeta)|^p\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant A(\alpha)\,\|f\|_p^p.$$

多复变数内函数(inner function of several complex variables)　单位圆盘的内函数在 B_n 中的推广. 称 B_n 上的全纯函数 f 是 B_n 上的内函数，如果

$$|f(z)|<1\quad(z\in B_n),$$

且对 B_n 的边界 ∂B_n 上几乎所有的 ζ，有

$$\lim_{r\to1}f(r\zeta)=f^*(\zeta),\quad|f^*(\zeta)|=1,$$

其中 $f^*(\zeta)$就是由这个等式来定义的函数.

由于单位圆盘上的内函数在单复变函数论中起着重要的作用，人们自然要研究 B_n 上的内函数. 然而，长时间以来，人们找不出一个具体的内函数，这不得不使人怀疑，当 $n>1$ 时，是否存在 B_n 上的内函数. 路丁(Rudin, W.)在 1980 年出版的《单位球上的函数论》一书中提出 $B_n(n>1)$上不存在内函数的猜测. 但到 1981 年秋，亚历山德罗夫(Александров, П. С.)推翻了路丁的猜测，证明对任意 n，B_n 上都存在着内函数. 几个星期以后，劳(Low, K.)又独立地证明了内函数的存在. 但是，由于 B_n 上内函数的许多病态性质，它的作用远不如在单复变中那样重要.

多复变数亚纯函数(meromorphic function of several complex variables)　单复变数亚纯函数的推广. 设 D 为 $\mathbf{C}^n$ 中的域，D 上的函数 h 称为亚纯的，如果任取$z_0\in D$，存在 z_0 的邻域$U_0\subset D$使得在 U_0 上存在全纯函数$g(z)$及$f(z)$，其中$g(z)$不恒等于零，而

$$h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}\quad(\forall z\in U_0).$$

设 D 为 n 维复流形，D 上函数 f 称为亚纯函数，如果任取复流形 D 的可容许区图(U,φ)，则

$$f(p)=f(\varphi^{-1}(z))$$

$$(\forall z \in \varphi(U) \subset \mathbf{C}^n, \varphi(p) = z \forall p \in U)$$

为$\varphi(U)$上亚纯函数.

库辛第一问题(Cousin first problem)　单复变函数论中外尔斯特拉斯定理如何推广到多复变的问题.即库辛第一问题:设D为复流形,$\{U_\alpha\}$为D的标架覆盖,且在每个U_α上存在亚纯函数f_α,使当

$$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$$

时,$f_\alpha - f_\beta$在$U_\alpha \cap U_\beta$上全纯,则在D上是否必定存在亚纯函数f,使在每个U_α上$f - f_\alpha$全纯?

单复变函数论中的外尔斯特拉斯定理断言:对$\mathbf{C}$中的任意域D,均存在全纯函数,它以指定的离散点集为自己的零点集,而且重数等于指定的重数.在多复变发展的早期,库辛(Cousin,P.)就提出了如何把外尔斯特拉斯定理推广的问题,即上述库辛第一问题.对库辛问题的解决做出最主要贡献的是冈洁,他指出:若D是全纯域,则库辛第一问题是永远可解的.

库辛第二问题(Cousin second problem)　单复变函数论中米塔-列夫勒定理如何推广到多复变的问题.即库辛第二问题:若$\{U_\alpha\}$是复流形D的标架覆盖,且在每个U_α上存在亚纯函数f_α,使当

$$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$$

时,f_α / f_β在$U_\alpha \cap U_\beta$上为无零点的全纯函数,则在D上是否必定存在全纯函数f,使在每个U_α上f/f_α为无零点的全纯函数?

单复变函数论中米塔-列夫勒定理断言:对$\mathbf{C}$中的任意域D,均存在亚纯函数,它以指定的点集为自己的极点集,并且重数等于指定的重数.库辛(Cousin,P.)提出如何推广米塔-列夫勒定理的问题,即上述库辛第二问题.冈洁指出:即使D是全纯域,库辛第二问题并不永远可解,它的可解性还依赖于一定的拓扑条件.

多复变数自守函数(automorphic function of several complex variables)　单复变数自守函数的推广.设D为$\mathbf{C}^n$中的域,$\mathrm{Aut}(D)$为D的全纯自同构群,Γ为$\mathrm{Aut}(D)$之离散子群.$\Gamma \times D$上的函数$j(r,z)$称为权函数,如果

$$j(\sigma,z)j(\tau,z) = j(\sigma\tau,z) \quad (\forall \sigma,\tau \in \Gamma, z \in D).$$

D上的全纯函数$f(z)$称为关于权函数$j(r,z)$的Γ自守函数,简称自守函数,如果

$$f(r(z)) = j(r,z)f(z) \quad (\forall r \in \Gamma, z \in D).$$

当

$$j(r,z) = 1 \quad (\forall r \in \Gamma, z \in D)$$

时,即得普通的自守函数.

所有自守函数构成线性空间,求出它的维数,且给出一组基,是自守函数论中的根本问题.

由于对实半单李群的离散子群有较多的结果,所以自守函数论主要结果限于对称有界域及紧克勒流形的情形.

多复变数自守函数的基本域(fundamental domain of automorphic function of several complex variables)　自守函数的基本定义域.设D为$\mathbf{C}^n$中的域,Γ为域D上全纯自同构群$\mathrm{Aut}(D)$的离散子群.如果存在$\gamma \in \Gamma$,使得$\gamma(z_1) = z_2$,D中点z_1和z_2称为关于Γ是等价的.于是D关于Γ分成等价类之并.所有等价类构成的集合,记为D/Γ.可以在D/Γ中引进拓扑,使得D在自然映射

$$\pi: z \rightarrow \Gamma(z) = \{\gamma(z) \mid \forall \gamma \in \Gamma\}$$

下为D/Γ之覆盖空间,D/Γ称为自守函数的基本域,实际上,自守函数就是D/Γ上的全纯函数.

一般地,基本域D/Γ不一定是域,是复流形.当基本域D/Γ紧时,离散子群Γ称为一致格.但不一定对所有域都存在一致格.在齐性有界域的情形,存在一致格当且仅当域对称.

撰　稿　史济怀　　许以超
审　阅　陈志华

测　　度　　论

测度论(measure theory)　亦称抽象测度论或抽象积分论,研究一般集合上的测度和积分的理论.是勒贝格测度和勒贝格积分理论的进一步抽象和发展.

测度是集合的一种度量,它是长度、面积、体积概念的推广.首先试图把长度、面积、体积概念推广到任意点集而得出一般的"测度"观念的是杜·布瓦-雷蒙(Du Bois-Reymond,P. D. G.),他在《一般函数论》(1882年)中提出容量概念,即测度概念的雏形.随后汉克尔(Hankel,H.)、施托尔茨(Stolz,O.)、哈纳克(Harnack,C. G. A.)、康托尔(Cantor,G. (F. P.))等人发展了这种思想,其中康托尔于1884年对直线上的有界集 A 定义它的测度 $\mu(A)$:首先对任意正数 δ,令

$$S_\delta=\bigcup_{x\in A}\{y\mid |y-x|<\delta\},$$

$\mu(S_\delta)$ 代表 S_δ 的长度;再令

$$\mu(A)=\lim_{\delta\to 0}\mu(S_\delta).$$

康托尔给出的测度不具有可加性.例如,设 $\mathbb{Q}$ 为有理数全体,$A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$,$B=[0,1]\setminus A$,则 $[0,1]=A\cup B$,$\mu(A)=\mu(B)=1$,$\mu([0,1])=1$,但 $\mu([0,1])\neq\mu(A)+\mu(B)$,因而很不合理.

佩亚诺(Peano,G.)于1887年引入了平面有界集 A 的内、外测度的概念:包含 A 的多边形面积的下确界称为 A 的外测度,含于 A 内的多边形面积的上确界称为 A 的内测度.若 A 的内、外测度相等,则这个公共值称为 A 的测度,并称 A 为可测集.佩亚诺证明了:

1. A 可测的充分必要条件是 A 的边界的外测度为0.

2. 若 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界正函数,$A=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$,则 $f(x)$ 的黎曼下积分为 A 的内测度,黎曼上积分为 A 的外测度,$f(x)$ 黎曼可积当且仅当 A 是可测集.

3. 测度具有有限可加性.

若尔当(Jordan,M. E. C.)于1892年在 $\mathbb{R}^n$ 中发展了佩亚诺可测集的概念.原来定义外测度时,要用多边形去覆盖点集,他规范为用有限个开区间去覆盖,其余不变.若尔当的改进使测度概念前进了一大步,蕴涵了勒贝格测度的萌芽,但仍有明显的缺点.主要是它仍只具有有限可加性,从而导致有些简单的点集也不可测.例如,令 $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}$,则 A 的若尔当内测度为0,而外测度为1,因而 A 在若尔当意义下不可测.总之,若尔当测度只适合于黎曼积分的需要.波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)于1898年,先由开集经过可列并与余的运算导致一类集,即所谓波莱尔集类.再对每个有界波莱尔集对应一个实数,即波莱尔测度,并使得这种测度具有可列可加性.波莱尔的这种思想对测度理论做出了重大贡献,成为近代测度论中用公理方式引出 σ 代数概念的起源,并为勒贝格(Lebesgue,H. L.)的工作开辟了道路.波莱尔的学生勒贝格在前人工作的基础上,于1902年以更一般的形式建立起比较完善的测度理论.他在定义点集测度的方法上,容许可列覆盖,使所建立的测度具有可列可加性,并且相当广泛的一类点集的测度有了定义(参见"勒贝格测度").勒贝格测度是现代抽象测度的起源,在它的基础上建立的勒贝格积分,是现代分析中应用最广和意义重大的积分.卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)于1914年发展了外测度理论,对测度进行了公理化研究,并给出了测度扩张的典型方法,成为近代测度论的基础.拉东(Radon,J.)、萨克斯(Saks,S.)、弗雷歇(Fréchet,M.-R.)以及另外一些人考虑了一般集合上的测度以及测度空间的乘积,并建立了一般可测集上积分的理论.

一般集合上的测度和积分理论是最广泛的测度理论,但为适应各方面的需要,还出现了其他种种特殊的测度和积分.例如,20世纪30年代初,伴随着人们对取值于巴拿赫空间的函数性质特别是可微性和可积性的研究,出现了有关向量值测度的一些工作.1960年以后,向量值测度理论得到蓬勃发展,并逐渐趋于完善.又如,19世纪建立的傅里叶分析理论,对于应用数学而言,当时已是令人满意的数学工具,但由于黎曼积分的局限性,对于函数与展开式之间的关系,直到勒贝格积分理论确立之后才有深刻的揭示.勒贝格积分的出现对于傅里叶展开的研究显然促进了一大步,但依旧显示出了它的局限性.研究拓扑群上的测度是建立群上傅里叶分析的基本问题之一,这个问题自1930年以来,经过哈尔(Haar,A.)、韦伊(Weil,A.)和盖尔范德(Гельфанд,И. М.)等人的工作而趋于完善.再如,20世纪初测度论的建立,使得人们对 $\mathbb{R}^n$ 中的子集关于 n 维勒贝格测度的性质有了很好的了解.但在处理与 $\mathbb{R}^n$ 中低维点集有关的数学问题时遇到了困难.在这种背景下,20世纪20年代出现了几何测度论,它是研究高维空间中低维点集的测度及低维点集上积分的理论.

测度概念与积分概念紧密相关.每一种测度理

论的推广都可导致一种积分理论的推广. 测度理论不仅是积分理论的基础, 而且在现代分析以及概率论等许多数学领域中也有着广泛的应用.

抽象测度论(abstract measure theory)　即"测度论".

抽象积分论(abstract integral theory)　即"测度论".

集　类

环(ring)　对并与差运算封闭的集类, 测度论中重要概念之一. 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个非空集类. 如果它对集的并及差运算封闭, 即对任何 $A,B\in\mathscr{F}$, 都有 $A\cup B\in\mathscr{F}$, $A\backslash B\in\mathscr{F}$, 则称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的环. 例如, 若 $\mathscr{F}$ 是由实直线 R^1 上任意有限个左开右闭的有限区间的并集

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]$$

的全体构成的集类, 则 $\mathscr{F}$ 是 R^1 上的一个环. 环也是对于交与对称差运算封闭的集类, 并按这两种运算成为布尔环(参见第一卷《布尔代数》). 要把 R^n 上的勒贝格测度和勒贝格-斯蒂尔杰斯测度以及相应的积分理论推广到更一般的集合上, 就需要做一系列奠基工作, 其中之一是建立一些特殊的集类并研究其性质. 环以及半环、σ 环、代数、σ 代数等重要集类正是为了这一目的而引入的.

半环(semi-ring)　一种重要集类. 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个非空集类. 如果它满足下列条件, 则称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的半环:

1. $\varnothing\in\mathscr{F}$.
2. 若 $A,B\in\mathscr{F}$, 则 $A\cup B\in\mathscr{F}$.
3. 若 $A,B\in\mathscr{F}$ 且 $A\supset B$, 则

$$A\backslash B=\bigcup_{i=1}^{n}C_i,$$

其中 $C_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots,n)$, 且 $C_i\cap C_j=\varnothing(i\neq j)$. 例如, 实直线 R^1 上全体左开右闭区间 $(a,b]$ $(-\infty<a\leqslant b<+\infty)$ 所组成的集类是 R^1 上的一个半环.

σ 环(σ-ring)　对可列并运算封闭的环. 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个环, 并且它对集的可列并运算封闭, 即对任意 $A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$, 都有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F},$$

则称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的 σ 环. 它是建立具有良好的极限性质的测度的基础.

代数(algebra)　亦称域. 含有基本空间的环. 设 $\mathscr{F}$ 是基本空间 Ω 上的环. 若 $\Omega\in\mathscr{F}$, 则称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的代数. 例如, 实直线 R^1 上任意有限个区间(包括无限区间)的并的全体便是 R^1 上的代数.

域(field)　即"代数".

σ 代数(σ-algebra)　亦称 σ 域、完全加法类、可列加法类、σ 加法类. 含有基本空间的 σ 环. 设 $\mathscr{F}$ 是基本空间 Ω 上的非空集类. 如果它对余及可列并运算封闭, 且 $\Omega\in\mathscr{F}$, 则称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的 σ 代数. 例如, R^n 中的(L)可测集的全体 $\mathscr{L}$ 是 R^n 上的 σ 代数. 又如, 自然数集 N 的一切子集组成的集类 $\mathscr{P}(\mathrm{N})$ 是 N 上的 σ 代数.

σ 域(σ-field)　即"σ 代数".

完全加法类(completely additive class)　即"σ 代数".

可列加法类(countably additive class)　即"σ 代数".

σ 加法类(σ-additive class)　即"σ 代数".

集类生成的环(ring generated by a collection of sets)　测度论中的重要集类. 称包含集类 $\mathscr{F}$ 的最小环为由 $\mathscr{F}$ 生成的环, 它是所有包含 $\mathscr{F}$ 的环的交. 同理, 称包含集类 $\mathscr{F}$ 的最小 σ 环(代数, σ 代数)为由 $\mathscr{F}$ 生成的 σ 环(代数, σ 代数).

集类生成的 σ 环(σ-ring generated by a collection of sets)　见"集类生成的环".

集类生成的代数(algebra generated by a collection of sets)　见"集类生成的环".

集类生成的 σ 代数(σ-algebra generated by a collection of sets)　见"集类生成的环".

波莱尔集类(collection of Borel sets)　深入讨论函数的连续性、可微性、可积性时必不可少的重要集类. 由 R^n 中半开区间组成的半环所生成的 σ 代数, 称为 R^n 上的波莱尔集类. 也可定义为 R^n 中的闭集(开集)全体生成的 σ 代数. 它是由波莱尔(Borel, (F.-É.-J.-)É.)于 1898 年引入的, 故以此而命名. 这种集类在测度论、概率论、遍历理论等数学分支中均有广泛应用. 在一般拓扑空间中可类似地引入波莱尔集类.

广义波莱尔集类(collection of generalized Borel sets)　扩充了的 R^1 上的波莱尔集类. 由 R^1 上的波莱尔集类 $\mathscr{B}$ 及单元素集 $\{+\infty\}$, $\{-\infty\}$ 所生成的 σ 代数, 称为广义波莱尔集类. 广义波莱尔集类中的每一个元素或是波莱尔集或它与 $\{+\infty\}$, $\{-\infty\}$ 或 $\{+\infty,-\infty\}$ 的并.

单调类(monotone class)　对单调极限运算封闭的集类. 设 $\mathscr{F}$ 是一非空集类. 若对于 $\mathscr{F}$ 中任一单调集列 $\{A_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}A_n\in\mathscr{F},$$

则称 $\mathscr{F}$ 是一个单调类. σ 环和 σ 代数都是建立抽象测度的基础, 但它们的结构一般比较复杂, 在应用中很不方便, 引入单调类以及 π 类、λ 类的概念, 对掌握 σ 环和 σ 代数特别是某些集类生成的 σ 环和 σ 代

数颇有帮助. 例如,集类 $\mathscr{F}$ 是 σ 代数的充分必要条件为 $\mathscr{F}$ 既是代数,又是单调类. 对 σ 环亦有类似的结论. 又如,$\mathscr{F}$ 是 σ 代数的充分必要条件为 $\mathscr{F}$ 既是 λ 类,又是 π 类. 这样,可以通过结构比较简单的单调类、π 类和 λ 类来刻画结构比较复杂的 σ 环和 σ 代数.

π 类(π-class) 对交运算封闭的集类. 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个集类. 若对任意 $A,B\in\mathscr{F}$,都有 $A\cap B\in\mathscr{F}$,则 $\mathscr{F}$ 称为 Ω 上的 π 类.

λ 类(λ-class) 测度论中的重要集类之一. 设 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的非空集类,如果它满足条件:

1. 空间 $\Omega\in\mathscr{F}$;
2. 若 $A,B\in\mathscr{F}$,且 $A\supset B$,则 $A\backslash B\in\mathscr{F}$;
3. 若 $\{A_n\}$ 为 $\mathscr{F}$ 中的递增集列,则

$$\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{F};$$

那么 $\mathscr{F}$ 称为 λ 类.

测度和积分

集函数(set function) 以集类为定义域的函数. 设 $\mathscr{C}$ 是 Ω 上的一个集类,K 是实数域或复数域,称映射 $\mu:\mathscr{C}\to K$ 为定义在 $\mathscr{C}$ 上的集函数. 重要的(数值)集函数有测度、集上的积分等. 若实值集函数的值可允许取 $+\infty$ 或 $-\infty$,则称此集函数为扩充实值集函数. 关于集函数,也可引入单调性、收敛性等概念. 例如,设 μ 是定义在集类 $\mathscr{C}$ 上的实值集函数. 如果对任意 $A,B\in\mathscr{C}$,$A\subset B$,均有 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$,则说 μ 在 $\mathscr{C}$ 上是单调增加的. 设 $\{\mu_n\}$ 是集类 $\mathscr{C}$ 上的集函数列. 若对每个 $A\in\mathscr{C}$,数列 $\{\mu_n(A)\}$ 收敛,则说 $\{\mu_n\}$ 在 $\mathscr{C}$ 上收敛. 若对每个 $A\in\mathscr{C}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A),$$

则称 $\{\mu_n\}$ 在 $\mathscr{C}$ 上收敛于 μ. 若对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,对一切 $A\in\mathscr{C}$,都有

$$|\mu_n(A)-\mu(A)|<\varepsilon,$$

则称 $\{\mu_n\}$ 在 $\mathscr{C}$ 上一致收敛于 μ,

当 K 是向量空间或算子集时,分别称映射 $\mu:\mathscr{C}\to K$ 为 $\mathscr{C}$ 上的向量值集函数或算子值集函数. 常见的这种集函数有向量值测度、谱测度和谱积分等.

区间函数(interval function) 一种重要而又特殊的集函数. 以 R^n 中的区间族为定义域的函数称为区间函数. 例如,当 $f(x)$ 是以 R 为定义域的可积函数时,如果对 $I=[a,b]$ 使

$$F(I)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

与之对应,则得 R 上的区间函数 F.

扩充实值集函数(extended real-valued set function) 见"集函数".

可列可加集函数(countable additivity set function) 亦称完全可加集函数或可数可加集函数. 一类特殊而又重要的集函数. 设 μ 是定义在集类 $\mathscr{C}$ 上的集函数. 若对任意 $A,B\in\mathscr{C}$,$A\cup B\in\mathscr{C}$,$A\cap B=\varnothing$,都有 $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$,则说 μ 具有有限可加性. 若对 $\mathscr{C}$ 中任意一列互不相交的集合 $\{A_n\}$,只要

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{C},$$

均有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n),$$

则称 μ 具有可列可加性.

完全可加集函数(completely additive set function) 即"可列可加集函数".

可数可加集函数(countably additive set function) 即"可列可加集函数".

有限可加集函数(finitely additive set function) 见"可列可加集函数".

测度(measure) 抽象测度的简称,即非负可列可加的集函数,测度论研究的对象. 设 μ 是集类 $\mathscr{C}$ 上的扩充实值集函数,满足下列条件:

1. 若 $\varnothing\in\mathscr{C}$,则 $\mu(\varnothing)=0$;
2. μ 为非负的,即对任意 $A\in\mathscr{C}$,有

$$0\leqslant\mu(A)\leqslant+\infty;$$

3. μ 为可列可加的,即对任意一列互不相交的 $A_n\in\mathscr{C}(n=1,2,\cdots)$,且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{C},$$

有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n);$$

则 μ 称为 $\mathscr{C}$ 上的测度. 特别地,当集类 $\mathscr{C}$ 为半环(环、代数、σ 代数)时,μ 为半环(环、代数、σ 代数)上的测度. 设 μ 为 $\mathscr{C}$ 上的测度. 若对每个 $A\in\mathscr{C}$,均有 $\mu(A)<+\infty$,则称 μ 为集类 $\mathscr{C}$ 上的有限测度. 若对每个 $A\in\mathscr{C}$,存在 $A_n\in\mathscr{C}(n=1,2,\cdots)$,使得

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\text{且每个 }\mu(A_n)<+\infty,$$

则称 μ 为集类 $\mathscr{C}$ 上的 σ 有限测度. 抽象测度可看做勒贝格测度的推广,但一般不再有面积、体积等几何意义. 在不致混淆时,带符号的测度、向量值测度等也简称测度.

抽象测度(abstract measure) 即"测度".

有限测度(finite measure) 见"测度".

σ 有限测度(σ-finite measure) 见"测度".

外测度(outer measure) 非负次可加集函数. 设 Ω 为基本空间,μ^* 是定义在 Ω 的幂集上的扩充实值函数. 如果满足下列条件:

1. 非负性：$\mu^*(A)\geqslant 0, \mu^*(\varnothing)=0$；

2. 单调性：若 $A\subset B$，则 $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B)$；

3. 次可加性：

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n);$$

则称 μ^* 为 Ω 上的外测度．对积分来说，有用的是 σ 环或 σ 代数上的测度．但是，σ 环或 σ 代数的结构一般比较复杂，因此，往往先在结构比较简单的半环、环或代数上定义某种测度，然后把它延拓到 σ 环或 σ 代数上．引入外测度的目的主要就是为了将某种集类上的测度延拓成为较广集类上的测度．

度量外测度(metric outer measure)　亦称卡拉西奥多里外测度．对于彼此距离为正数的两集的并，具有可加性的外测度．若 μ^* 是基本空间 Ω 上的外测度，Ω 为具有度量 ρ 的度量空间，对于任意 $A_1\subset\Omega, A_2\subset\Omega$，只要它们之间的距离

$$\rho(A_1,A_2)=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A_1, y\in A_2\}>0,$$

就有

$$\mu^*(A_1\cup A_2)=\mu^*(A_1)+\mu^*(A_2),$$

则 μ^* 称为 Ω 上的度量外测度．例如勒贝格测度是 R^n 上的度量外测度．若 μ^* 为度量空间 Ω 上的度量外测度，则 Ω 上的一切波莱尔集都是 μ^* 可测的．

卡拉西奥多里外测度(Carathéodory outer measure)　即"度量外测度"．

μ^* 可测集(μ^*-measurable set)　外测度理论中极为重要的概念．设 μ^* 是 Ω 上的外测度，$A\subset\Omega$．若对任意 $T\subset\Omega$，均有

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap A^c),\quad(1)$$

则称 A 为一个 μ^* 可测集．在 μ^* 可测集组成的集类上，集函数 μ^* 实际上具有可列可加性，即是说，外测度 μ^* 在限制了的这个集类上是一个测度．条件(1)正是刻画外测度 μ^* 成为测度的特征．卡拉西奥多里(Carathéodory，C.)在深入研究了勒贝格外测度理论后，于 1914 年指出：若 μ^* 是 R^n 上的勒贝格外测度，则(1)式是集 $A\subset\mathrm{R}^n$ 勒贝格可测的充分必要条件．条件(1)比较简洁，同时又易于推广到一般的测度，常称为卡拉西奥多里条件．

卡拉西奥多里条件(Carathéodory condition)　见"μ^* 可测集"．

构造外测度的方法(method of constructing outer measure)　由给定的集函数导出外测度的一种方法．设 $\mathscr{C}$ 是基本空间 Ω 上的一个集类，空集 $\varnothing\in\mathscr{C}$，又设 μ 为 $\mathscr{C}$ 上的非负扩充实值集函数，且 $\mu(\varnothing)=0$，对于 Ω 的任意子集 A，若 A 有 $\mathscr{C}$ 中的可列覆盖，令

$$\mu^*(A)=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\mid A_n\in\mathscr{C},\ n=1,2,\cdots,A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\};$$

若 A 无 $\mathscr{C}$ 中的可列覆盖，令 $\mu^*(A)=+\infty$，则 μ^* 为 Ω 上的外测度，并称其为由 μ 导出的外测度．如果 $\mathscr{C}$ 为半环，且 μ 为 $\mathscr{C}$ 上的测度，那么用上法构造的 μ^* 有：

1. 若 $A\in\mathscr{C}$，则 $\mu^*(A)=\mu(A)$．

2. 若 $\sigma(\mathscr{C})$ 为由 $\mathscr{C}$ 生成的 σ 代数，S^* 为 Ω 中全体 μ^* 可测集组成的 σ 代数，则 $\sigma(\mathscr{C})\subset S^*$．

测度延拓的惟一性(uniqueness of measure extension)　指半环上的测度可以惟一地延拓成某个 σ 代数上的测度．设 $\mathscr{F}$ 为半环，$\sigma(\mathscr{F})$ 为 $\mathscr{F}$ 生成的 σ 代数．若 μ 为 $\mathscr{F}$ 上的测度，则 μ 可延拓为 $\sigma(\mathscr{F})$ 上的测度．若 μ 在 $\mathscr{F}$ 上 σ 有限，则它在 $\sigma(\mathscr{F})$ 上的延拓 σ 有限且惟一．例如，R 中左开右闭区间的 g 长度 μ_g 是左开右闭区间类 $\mathscr{F}$ 这一半环上的测度，μ_g 可延拓到 R 的波莱尔集类 $\mathscr{B}$ 上，且在 $\mathscr{B}$ 上的延拓是 σ 有限的，也是惟一的．这样的延拓便是波莱尔集类 $\mathscr{B}$ 上的勒贝格-斯蒂尔杰斯测度．较为有用的 σ 代数(σ 环)上的测度，往往都是由半环(环，代数)上的测度延拓而成的(参见"外测度")．这条性质说明这种延拓是可能的，并且是惟一的．

卡拉西奥多里-哈恩延拓定理(Carathéodory-Hahn extension theorem)　关于测度延拓的重要结果．设 μ 是代数 $\mathscr{A}$ 上的测度，μ^* 是由 μ 导出的外测度，$\mathscr{A}^*$ 是 μ^* 可测集的 σ 代数，则 μ^* 限制到 $\mathscr{A}^*$ 上是 μ 的延拓；又若 μ 对于 $\mathscr{A}$ 是 σ 有限的，Σ 是满足 $\mathscr{A}\subset\Sigma\subset\mathscr{A}^*$ 的任何 σ 代数，则 μ^* 是 Σ 上惟一成为 μ 的延拓的测度．

可测空间(measurable space)　测度的定义域，测度论中的基本概念．设 $\mathscr{F}$ 是基本空间 Ω 上的 σ 代数，称 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间，而称 $\mathscr{F}$ 中的元素 A 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 中的可测集，也称为 Ω 中的 $\mathscr{F}$ 可测集，简称可测集．例如，当 $\mathscr{F}$ 是 R^n 中的波莱尔集类 $\mathscr{B}$ 时，$(\mathrm{R}^n,\mathscr{B})$ 称为波莱尔可测空间．当 $\mathscr{F}$ 是 R^n 中的勒贝格可测集类 $\mathscr{L}$ 时，$(\mathrm{R}^n,\mathscr{L})$ 称为勒贝格可测空间．可测空间是测度的定义域，在一个可测空间上可以定义不止一种测度．

勒贝格可测空间(Lebesgue measurable space)　见"可测空间"．

可测集(measurable set)　见"可测空间"．

波莱尔可测空间(Borel measurable space)　见"可测空间"．

拓扑可测空间(topological measurable space)　带有拓扑结构的可测空间．设 τ 是 Ω 上的拓扑，$\sigma(\tau)$ 是由 τ 生成的 σ 代数，称 $(\Omega,\tau,\sigma(\tau))$ 为一个拓扑可测空间．

测度空间(measure space)　定义了测度的可

测空间. 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间,μ是$\mathscr{F}$上的测度,$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$称为测度空间. 当μ是$\mathscr{F}$上的有限测度(σ有限测度)时,相应地称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是有限测度空间(σ有限测度空间). 在各种特殊情况下,相应有勒贝格测度空间、勒贝格-斯蒂尔杰斯测度空间、波莱尔测度空间等名称.

勒贝格测度空间(Lebesgue measure space) 见"测度空间".

勒贝格-斯蒂尔杰斯测度空间(Lebesgue-Stieltjes measure space) 见"测度空间".

波莱尔测度空间(Borel measure space) 见"测度空间".

有限测度空间(finite measure space) 见"测度空间".

σ有限测度空间(σ-finite measure space) 见"测度空间".

测度的支集(support set of a measure) 描述测度集中于某个集合的一个概念. 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,$U\subset\Omega$. 若对任意$V\in\mathscr{F}$,只要$V\cap U=\varnothing$,就有$\mu(V)=0$,则U称为测度μ的支集,记为$\operatorname{supp}\mu=U$,此时称μ支于U,或μ集中于U.

正测度(positive measure) 仅在(环的)零元素上取值为零的测度. 设μ是定义在环上的测度. 若μ的值只在零元素上为零,则称μ是一个正测度.

测度环(measure ring) 定义了正测度的σ环. 若μ是σ环$\mathscr{F}$上的正测度,则称$\mathscr{F}$是一个测度环.

测度代数(measure algebra) 定义了正测度的σ代数. 若$\mathscr{F}$既是代数又是测度环,则称$\mathscr{F}$是一个测度代数.

若测度μ是有限的或σ有限的,则称相应的测度代数(测度环)为有限的或σ有限的测度代数(测度环).

有限测度环(finite measure ring) 见"测度代数".

σ有限测度环(σ-finite measure ring) 见"测度代数".

有限测度代数(finite measure algebra) 见"测度代数".

σ有限测度代数(σ-finite measure algebra) 见"测度代数".

同构测度环(measure ring of isomorphism) 测度环之间保持并与差运算以及测度的映射. 设(Ω_1,μ)和(Ω_2,ν)是两个测度环,T是Ω_1到Ω_2上的一一映射,使得对于Ω_1中任意元素A,B和$A_n(n=1,2,\cdots)$,有

$$T(A\backslash B)=T(A)\backslash T(B),$$

$$T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}T(A_n),$$

$$\mu(A)=\nu(T(A)),$$

则称T是(Ω_1,μ)和(Ω_2,ν)之间的同构映射. 若两个测度环之间存在一个同构映射,则说这两个测度环是同构的.

连带的测度环(associated measure ring) 由定义了测度的一个σ环的元素的某种等价类组成的测度环. 设$\mathscr{F}$是Ω上的σ环,μ是$\mathscr{F}$上的测度. 对于$\mathscr{F}$中二集A和B,若$\mu(A\triangle B)=0$,则A和B称为等价的,相应等价类之集记为$\mathscr{F}(\mu)$,它仍是一个σ环,且μ是$\mathscr{F}(\mu)$上的正测度. 称$(\mathscr{F}(\mu),\mu)$为与Ω连带的测度环.

同构测度空间(measure space of isomorphim) 其连带的测度环同构的测度空间. 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mu_1)$和$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\mu_2)$是两个测度空间,若与它们连带的测度环$(\mathscr{F}_1(\mu_1),\mu_1)$和$(\mathscr{F}_2(\mu_2),\mu_2)$是同构的,则称测度空间$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mu_1)$和$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\mu_2)$是同构的.

概率测度(probability measure) 概率论、遍历理论等数学分支中常用的一种重要的有限测度. 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间,μ是$\mathscr{F}$上的测度. 若$\mu(\Omega)=1$,则称μ为概率测度,并称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为概率空间. 20世纪完成的勒贝格测度和勒贝格积分理论以及随后发展起来的抽象测度和积分理论,为概率论公理体系的确立奠定了理论基础. 概率测度和概率空间就是在这样的历史背景下产生的一种重要测度和测度空间.

概率空间(probability space) 见"概率测度".

δ测度(δ-measure) 亦称狄喇克测度. 是一种具有奇特性质的有限测度. 设$a\in\Omega$是一个定点,对任意$A\subset\Omega$,当$a\in A$时定义$\mu(A)=1$,当$a\notin A$时定义$\mu(A)=0$,则集函数μ是σ代数$\mathscr{P}(\Omega)$(Ω的幂集)上的测度,这种测度称为δ测度. δ测度在局部紧阿贝尔群上的位势论中有应用. 在物理上,δ测度表示单位质点在空间中形成的质量分布. 它最初由意大利统计物理学家狄喇克(Dirac, P. A. M.)引进,称为"δ函数",后经数学上严密化得此概念(参见《泛函分析》中的"广义函数"部分).

狄喇克测度(Dirac measure) 即"δ测度".

计数测度(counting measure) 使得任一可测集的测度等于它含有的元素个数的那种测度. 对测度空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$,若对任意$E\in\mathscr{F}$,都有

$$\mu(E)=\begin{cases}\operatorname{card}E & (\operatorname{card}E<\aleph_0),\\ +\infty & (\operatorname{card}E\geqslant\aleph_0),\end{cases}$$

则μ称为计数测度.

离散测度(discrete measure) 定义在可数集上的测度. 设$(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mu)$是测度空间,其中$\Omega$为可数集,$\mathscr{P}(\Omega)$是$\Omega$的幂集. 若存在$\Omega$上的非负扩

充实值函数 f，使对任意可数集 $E\in\mathscr{P}(\Omega)$，都有

$$\mu(E)=\sum_{x\in E}f(x),$$

则 μ 称为离散测度. 关于离散测度的积分与无穷级数是一致的.

μ 零集(μ-null set) 亦称 μ 零测度集. 是测度论中的一类重要集合. 设 A 是测度空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 中的可测集. 如果 $\mu(A)=0$，则称 A 为 μ 零集. 空集是任何测度的零集；有限集和可数集是勒贝格测度的零集.

μ 零测度集(μ-null measure set) 即"μ 零集".

完备测度(complete measure) 亦称完全测度. 使得零集的任何子集都可测的那种测度. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间. 如果 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 中 μ 零集的子集都是可测集，则称 μ 是完备测度，并称 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是完备测度空间. 勒贝格测度空间 $(\mathrm{R}^n,\mathscr{L},m)$ 和勒贝格-斯蒂尔杰斯测度空间 $(\mathrm{R}^n,\mathscr{L}_g,m_g)$ 都是完备的测度空间，而波莱尔测度空间 $(\mathrm{R}^n,\mathscr{B},\mu)$ 是不完备的测度空间. 完备测度具有一些良好性质. 例如，若测度 μ 完备，则凡是 μ 几乎处处相等的函数，或者都可测，或者都不可测. 又几乎处处收敛的 μ 可测函数列的极限函数也是 μ 可测的. 对于不完备的测度，这些结论未必成立.

完全测度(complete measure) 即"完备测度".

完备测度空间(complete measure space) 见"完备测度".

测度完备化(completion of a measure) 亦称测度完全化. 由任一测度延拓成的完备测度. 设 μ_1，μ_2 分别是 σ 代数 $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2$ 上的测度. 如果满足下列条件，则称 μ_2 为 μ_1 的完备化测度：

1. $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$.
2. μ_2 是 $\mathscr{F}_2$ 上的完备测度.
3. 对 $\mathscr{F}_1$ 中任一 A，均有 $\mu_1(A)=\mu_2(A)$.

下面给出建立完备化测度的一种方法. 设 μ 是 σ 代数 $\mathscr{F}$ 上的任意测度. 令 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 为形如 $A\cup B$ 的集的全体，其中 $A\in\mathscr{F}$，B 为 μ 零集的子集，则 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 为 σ 代数，又若令 $\tilde{\mu}(A\cup B)=\mu(A)$，则 $\widetilde{\mathscr{F}}$ 上的测度 $\tilde{\mu}$ 为 μ 的完备化. 在 R^n 上，勒贝格测度是波莱尔测度的完备化.

测度完全化(completion of a measure) 即"测度完备化".

有限可加测度(finite additive measure) 满足有限可加条件的集函数. 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个集类，μ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的非负扩充实值集函数. 如果满足：

1. 若 $\varnothing\in\mathscr{F}$，则 $\mu(\varnothing)=0$；
2. 对任意有限个互不相交的集 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots,n)$，只要

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F},$$

都有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i);$$

则称 μ 为 $\mathscr{F}$ 上的有限可加测度.

测度问题(measure problem) 测度论中的著名问题. 对于直线而论，人们总希望直线上某个测度，关于它可测的集合越多越好. 可测集多，意味着可测函数多，从而可积函数也多. 对于平面或高维空间的情形也是这样. 所谓测度问题，就是(直线上)是否存在具有下列性质的测度：

1. 具有可列可加性.
2. (直线上的)所有子集都可测.
3. 具有平移不变性.
4. [0,1]的测度是 1.

测度问题是勒贝格(Lebesgue, H. L.)于 1904 年提出的，这个问题已经解决，结论如下：去掉 2，3，4 中任何一条，容易举例说明满足其余三条的测度是存在的. 1，2，3，4 全都满足的测度是不存在的，特别地，直线上必存在不是勒贝格可测的集，这首先是由维塔利(Vitali, G.)于 1905 年指出的. 如果将 1 换成

1′. 具有有限可加性，

则满足 1′，2，3，4 的测度是存在的，但不惟一. 这就是著名的巴拿赫定理. 对于空间 $\mathrm{R}^n(n\geqslant 2)$，则有结论：当 $n=2$ 时，满足 1′，2，3，4 的测度是存在的. 当 $n\geqslant 3$ 时，满足 1′，2，3，4 的测度是不存在的. 这个问题是由豪斯多夫(Hausdorff, F.)于 1914 年提出并于 1923 年解决的.

原子测度(atomic measure) 具有某种奇特性质的测度. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间. 若存在 $A\in\mathscr{F}$，$\mu(A)>0$，而且当任意 $B\in\mathscr{F}$，$B\subset A$ 时，有 $\mu(B)=\mu(A)$ 或 $\mu(B)=0$，二者必居其一，则称 A 是测度 μ 的原子. 含有原子的测度称为原子测度，不含原子的测度称为非原子测度.

非原子测度(non-atomic measure) 见"原子测度".

非原子测度空间(non-atomic measure space) 带有非原子测度的测度空间. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间. 若 μ 是非原子测度，则称 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为非原子测度空间. 勒贝格测度空间和勒贝格-斯蒂尔杰斯测度空间均是非原子测度空间.

简单函数(simple function) 阶梯函数的推广. 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间，$f(x)$ 是定义在 Ω 上的实

值函数，Ω 能表示成 $(\Omega,\mathscr{F})$ 中的有限个互不相交的可测集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 之并，使 $f(x)$ 在每个 A_i 上等于常数 c_i，则称 $f(x)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 中的简单函数或 Ω 上的 $\mathscr{F}$ 简单函数. 简单函数类对四则运算是封闭的. 简单函数是特殊的可测函数. R^n 上的连续函数可以用阶梯函数逼近，而一般的可测函数则可用简单函数逼近；有界可测函数可用简单函数一致逼近.

可测函数(measurable function)　分析学中讨论得最广的函数类. 它有许多等价的定义方式，这里采用如下定义：设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间，$f(x)$ 是定义在 Ω 上的实值(或扩充实值)函数. 若对任意实数 c，恒有 $\{x\mid f(x)>c\}\in\mathscr{F}$，则 $f(x)$ 称为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 中的可测函数或 Ω 上的 $\mathscr{F}$ 可测函数. 在这个定义中，条件 $f(x)>c$ 可用 $f(x)\geqslant c$，$f(x)<c$，$f(x)\leqslant c$ 中任一条件来替代. 当 $\mathscr{F}$ 为与特殊的测度相应的可测集类时，相应的可测函数可以冠以这些测度的名称. 例如说 $f(x)$ 为波莱尔可测函数、勒贝格可测函数等. $f(x)$ 在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上可测的充分必要条件是，对于直线上的任何波莱尔集 M，$f^{-1}(M)$ 是可测集，即 $f^{-1}(M)\in\mathscr{F}$. 勒贝格可测函数的概念是由勒贝格(Lebesgue, H. L.)于 1902 年引入的，拉东(Radon, J.)于 1913 年把它推广到一般的可测空间. 除一些涉及 R^n 中的特殊拓扑性质(如卢津定理)外，可测空间中的可测函数的性质与勒贝格可测函数的性质基本相同. 例如，可测函数类对于四则运算封闭，对于极限运算封闭，几乎处处收敛的可测函数列是近于一致收敛的，也即叶戈罗夫定理(参见本卷《实变函数论》中的相关条目)成立.

几乎处处(almost everywhere)　测度论中的重要概念之一，勒贝格测度理论中相应概念在测度空间上的推广. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathscr{F}$. 称命题 P 在 E 上几乎处处成立，是指 E 中使命题 P 不成立的点的全体(它可能是不可测集)包含在某个 μ 零集中. 对于完备测度空间，命题 P 在 E 上几乎处处成立就是反映使命题 P 不成立的点的全体是 μ 零集. 在不完备的测度空间上，关于 μ 几乎处处相等的两个函数 f 和 g，未必能从 f 的可测性推出 g 的可测性. 几乎处处简记为 a. e..

复值可测函数(complex-valued measurable function)　复值勒贝格可测函数概念的推广. 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间. 若 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 都是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的实值可测函数，则称

$$f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$$

为其上的复值可测函数.

抽象积分(abstract integral)　勒贝格积分的进一步抽象，现代分析数学中的重要工具之一. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间，$f(x)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 中的可测函数. 建立抽象积分

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}\mu$$

的步骤与建立勒贝格积分或勒贝格-斯蒂尔杰斯积分的步骤基本相同，只需在定义中将勒贝格测度换成一般测度 μ，相应的非负简单函数、非负可测函数、一般可测函数换成测度空间中的同名函数即可. 对于积分存在和可积两个概念也做类似定义. 当 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是完备测度空间时，抽象积分的性质与勒贝格积分的性质基本相同，也有关于积分收敛性的三大定理(列维定理、法图引理、勒贝格控制收敛定理，参见本卷《实变函数论》中的相关条目). 也可以引进平均收敛等概念，并且与几乎处处收敛、依测度收敛、近于一致收敛的关系也一样，仅需做明显的文字和记号修改.

一致可积(uniformly integrable)　描述一列函数可积性的整体性态的重要概念. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是测度空间，$f_n(n=1,2,\cdots)$ 在 Ω 上可积，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $k>0$，使

$$\int_{\{x\mid|f_n(x)|>k\}}|f_n(x)|\mathrm{d}\mu<\varepsilon\ (n=1,2,\cdots),$$

则说 $\{f_n\}$ 在 Ω 上一致可积.

积分一致绝对连续(uniformly absolute continuity of integrals)　描述一列函数的积分绝对连续的一致性的重要概念. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间，$f_n(n=1,2,\cdots)$ 在 Ω 上可积. 如果对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $A\in\mathscr{F}$，$\mu(A)<\delta$ 时，有

$$\int_A|f_n(x)|\mathrm{d}\mu<\varepsilon\ (n=1,2,\cdots),$$

则说 $\{f_n\}$ 的积分是一致绝对连续的.

积分一致有界(uniform boundness of integrals)　测度论的重要概念. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间，$f_n(n=1,2,\cdots)$ 在 Ω 上可积. 若

$$\sup_{n\geqslant1}\int_\Omega|f_n(x)|\mathrm{d}\mu<+\infty,$$

则说 $\{f_n\}$ 的积分一致有界. 下述定理揭示了函数列一致可积、积分一致绝对连续与积分一致有界之间的关系：设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为有限测度空间，$f_n(n=1,2,\cdots)$ 在 Ω 上可积，则 $\{f_n\}$ 为一致可积的充分必要条件是 $\{f_n\}$ 的积分一致有界且一致绝对连续.

可测映射(measurable mapping)　亦称可测变换，是可测函数概念的推广，主要用于抽象积分的变数变换. 设 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 和 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 是两个可测空间，f 是 Ω_1 到 Ω_2 中的映射. 如果 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 中每个可测集 A 的原像 $f^{-1}(A)$ 均是 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 中的可测集，那么 f 称为 Ω_1 到 Ω_2 的可测映射. 若 f 是可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的实值函数，则 f 在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上可测的充分必要条件是 f 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(\mathrm{R},\mathscr{B})$ 中的可测映射，其中 R 为实数空间，$\mathscr{B}$ 为波莱尔集类. 若 f 是可测空间

$(\Omega,\mathscr{F})$上的扩充实值函数，则f在$(\Omega,\mathscr{F})$上可测的充分必要条件是f为$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathrm{R}^c,\mathscr{B}^c)$中的可测映射，其中$\mathrm{R}^c$为扩充实数空间，$\mathscr{B}^c$为广义波莱尔集类. 若$f$是测度空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$到可测空间$(\Omega',\mathscr{C})$的可测映射，$g$是$(\Omega',\mathscr{C})$上的可积函数，则

$$\int g\circ f\mathrm{d}\mu=\int g\mathrm{d}(\mu f^{-1}).$$

又若$A\in\mathscr{C}$，则

$$\int_{f^{-1}(A)}g\circ f\mathrm{d}\mu=\int_A g\mathrm{d}(\mu f^{-1}).$$

可测变换(measurable transformation)　即"可测映射".

保测映射(mapping of preserving measurability)　一类重要的可测映射. 设f是可测空间$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$到可测空间$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$上的一一映射. 如果f和f^{-1}都是可测的，则f称为保测映射.

保持测度的映射(mapping of preserving measure)　一类特殊的保测映射，是测度论、概率论、遍历理论等数学分支中的重要概念之一. 如果f是测度空间$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mu)$到测度空间$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\nu)$上的保测映射，且对于$\mathscr{F}_2$中的每个$A$，$\nu(A)=\mu(f^{-1}(A))$，则称$f$为保持测度的映射. 保持测度的映射是以统计力学中的概率守恒运动为物理背景而抽象出来的数学概念，也是遍历理论研究的主要对象.

广义测度(generalized measure)　亦称带符号测度，即可取正、负任何实数及扩充实数值($+\infty$与$-\infty$只取一个)，具有可列可加性，空集对应函数值为0的集函数. 若$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，μ是定义在$\mathscr{F}$上的扩充实值集函数，则μ为广义测度的充分必要条件是μ满足如下条件：

1. $\mu(\varnothing)=0$.

2. 除有限值外，$\pm\infty$中只有一个可能取作μ的值.

3. 具有可列可加性.

对于广义测度μ，命题P在A上关于μ几乎处处成立是指A中使命题P不成立的点的全体包含在某个$|\mu|$零集中. 设$f(x)$是R^n上的勒贝格可积函数. 对勒贝格可测集类$\mathscr{L}$中的任何A，令

$$\mu(A)=\int_A f(x)\mathrm{d}m,$$

由勒贝格积分的可列可加性便知μ是$\mathscr{L}$上的广义测度. 如果令

$$f^+(x)=\max(f(x),0),$$
$$f^-(x)=\max(-f(x),0),$$
$$\mu_+(A)=\int_A f^+(x)\mathrm{d}m,$$
$$\mu_-(A)=\int_A f^-(x)\mathrm{d}m,$$

那么μ_+，μ_-均是$\mathscr{L}$上的测度，并且$\mu=\mu_+-\mu_-$，即μ可以分解为两个测度之差. 对一般的广义测度这种分解也成立(参见"若尔当分解").

带符号测度(signed measure)　即"广义测度".

广义测度空间(generalized measure space)　带有广义测度的可测空间，即把可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$与其上的广义测度μ合并在一起来考虑，它就称为广义测度空间，记为$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$. 若对任意$A\in\mathscr{F}$有$|\mu(A)|<+\infty$，则称μ是有限的，并称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是有限广义测度空间. 若对任何$A\in\mathscr{F}$，存在$A_n\in\mathscr{F}$，使得$|\mu(A_n)|<+\infty(n=1,2,\cdots)$，且

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

则称μ是σ有限的，并称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是σ有限广义测度空间.

有限广义测度(finite generalized measure)　见"广义测度空间".

有限广义测度空间(finite generalized measure space)　见"广义测度空间".

σ有限广义测度(σ-finite generalized measure)　见"广义测度空间".

σ有限广义测度空间(σ-finite generalized measure space)　见"广义测度空间".

广义测度的正集(positive sets of generalized measure)　其子集的广义测度均取非负值的集. 设μ是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，$A\in\mathscr{F}$. 如果$E\in\mathscr{F}$且$E\subset A$时总有$\mu(E)\geqslant0$，则称A是关于μ的正集；如果当$E\in\mathscr{F}$且$E\subset A$时总有$\mu(E)\leqslant0$，则称A是关于μ的负集.

广义测度的负集(negative sets of generalized measure)　见"广义测度的正集".

哈恩分解(Hahn decomposition)　与给定的测度相应的基本空间的分解. 若μ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，则存在两个不相交的关于μ的正集A和负集B，使$\Omega=A\cup B$. 如此的一对集A和B称为μ的哈恩分解. 哈恩分解有各种不同的证明，最早的证明属于哈恩(Hahn,H.)(1921). 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是σ有限的测度空间，$f(x)$是Ω上的可积函数，集函数

$$\gamma(E)=\int_E f(x)\mathrm{d}\mu\quad(E\in\mathscr{F})$$

便是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度. 对于γ，集$A=\{x|f(x)\geqslant0\}$，$B=\{x|f(x)<0\}$就分别是γ的正集、负集. 若取$A_1=\{x|f(x)>0\}$，$B_1=\{x|f(x)\leqslant0\}$，它们也分别是γ的正集、负集. 所以一般地哈恩分解并不惟一.

广义测度的正变差(positive variation of generalized measure)　亦称广义测度的上变差. 类似于有界变差函数的正变差的概念. 设μ是$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，$\Omega=A\cup B$是μ的哈恩分解，A是μ的正

集，B 是负集. 对于每个 $E\in\mathscr{F}$，令

$$\mu^{+}(E)=\mu(E\cap A),$$
$$\mu^{-}(E)=-\mu(E\cap B),$$
$$|\mu|(E)=\mu^{+}(E)+\mu^{-}(E),$$

集函数 μ^{+}，μ^{-} 和 $|\mu|$ 分别称为 μ 的正变差、负变差和全变差，并有 $\mu=\mu^{+}-\mu^{-}$.

广义测度的负变差(negative variation of generalized measure) 见"广义测度的正变差".

广义测度的全变差(total variation of generalized measure) 见"广义测度的正变差".

广义测度的若尔当分解(Jordan decomposition of generalized measure) 有界变差函数的若尔当分解的推广，测度论中的基本定理. 设 μ 是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度，令 μ^{+}，μ^{-} 分别为 μ 的正变差和负变差，对于任意的 $A\in\mathscr{F}$，有 $\mu(A)=\mu^{+}(A)-\mu^{-}(A)$，即可将 μ 表示为它的正、负变差之差，这种表示称为 μ 的若尔当分解.

广义测度的强绝对连续性(strong absolute continuity of generalized measure) 积分绝对连续概念的推广，测度论的重要概念. 设 γ，μ 是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的两个广义测度. 如果对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，使得对任何 $A\in\mathscr{F}$，只要 $|\mu|(A)<\delta$ 时，就有 $|\gamma(A)|<\varepsilon$，则说 γ 关于 μ 强绝对连续. γ 关于 μ 强绝对连续的充分必要条件是，$|\gamma|$ 关于 μ 强绝对连续，或 γ^{+}，γ^{-} 同时关于 μ 强绝对连续.

广义测度的绝对连续性(absolute continuity of generalized measure) 积分绝对连续概念的推广，测度论的基本概念. 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，μ 和 γ 是 $\mathscr{F}$ 上的广义测度，$|\mu|$ 是 μ 的全变差. 若对于每个 $A\in\mathscr{F}$，当 $|\mu|(A)=0$ 时都有 $\gamma(A)=0$，则说 γ 关于 μ 是绝对连续的，记为 $\gamma\ll\mu$. 当 γ 关于 μ 强绝对连续时，γ 必关于 μ 绝对连续，其逆不真. 如果 γ 是有限的，那么 γ 关于 μ 强绝对连续等价于 γ 关于 μ 绝对连续.

测度的等价(equivalence of measures) 互为绝对连续的测度. 设 μ 和 γ 是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的两个广义测度. 如果 $\gamma\ll\mu$，$\mu\ll\gamma$ 同时成立，则 μ 和 γ 称为等价的.

相互奇异的广义测度(mutually singular generalized measures) 不等价测度的极端形式. 设 μ，γ 是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的两个广义测度，$|\mu|$，$|\gamma|$ 分别是 μ 和 γ 的全变差. 如果存在两个不相交的可测集 A 与 B 使得 $\Omega=A\cup B$，且对任意可测集 E，有 $|\mu|(A\cap E)=|\gamma|(B\cap E)=0$，则称 μ 与 γ 是相互奇异的，也称 γ 关于 μ(或 μ 关于 γ)是奇异的，记为 $\mu\perp\gamma$. 奇异性是非绝对连续性的极端形式. 如果 γ 关于 μ 是奇异的，则不但由 $|\mu|(A)=0$ 不能推出 $|\gamma|(A)=0$，而且实际上只对于 $|\mu|$ 为 0 的集，$|\gamma|$ 才有可能不为 0.

勒贝格分解定理(Lebesgue decomposition theorem) 关于 σ 有限广义测度分解为绝对连续部分和奇异部分之和的重要定理，是有界变差函数的勒贝格分解定理的推广. 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是 σ 有限测度空间. 若 γ 是$(\Omega,\mathscr{F})$上的 σ 有限测度，则 γ 可分解为两个 σ 有限测度 γ_s 和 γ_c 之和：$\gamma=\gamma_s+\gamma_c$，使得 $\gamma_s\perp\mu$，$\gamma_c\ll\mu$(γ_s 关于 μ 是奇异的，γ_c 关于 μ 是绝对连续的). γ 的上述分解是惟一的.

拉东-尼科迪姆定理(Radon-Nikodym theorem) 测度论的重要定理，牛顿-莱布尼茨公式的推广. 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是 σ 有限测度空间，γ 是 $\mathscr{F}$ 上的 σ 有限的广义测度. 若 γ 关于 μ 绝对连续，则存在 Ω 上的一个实值 μ 可测函数 f，使得对每个 $A\in\mathscr{F}$ 有

$$\gamma(A)=\int_A f(x)\mathrm{d}\mu,$$

当 γ 为测度时，可取 f 为非负可测函数，函数 f 在关于 μ 几乎处处相等的意义下是惟一的. f 称为广义测度 γ 关于测度 μ 的拉东-尼科迪姆导数，记为 $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}\mu$. 拉东-尼科迪姆导数具有通常点函数导数的某些性质.

积分运算从诞生的时候起，就显示了与微分运算的密切联系. 牛顿(Newton，H. A.)与莱布尼茨(Leibniz，G. W.)首先从几何上发现了下述微积分基本定理，即牛顿-莱布尼茨公式：设 $F(x)$在$[a,b]$上可导，且导函数 $F'(x)=f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积，则

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

但一般地，$F(x)$在$[a,b]$上的导函数 $F'(x)$即使有界，也不一定是黎曼可积的，沃尔泰拉(Volterra，V.)于 1881 年就构造了这样的例子，这就使在分析数学中至关重要的微积分基本定理的应用受到了限制. 勒贝格于 1902 年引入了一类新的积分——勒贝格积分，并于 1904 年证明了，在$[a,b]$上按他的意义可积的函数 $f(x)$的变上限的积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}m\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

对于$[a,b]$上几乎所有的点 x，导数 $F'(x)$存在且等于 $f(x)$. 维塔利(Vitali，G.)于 1905 年引入了绝对连续函数的概念，并且证明了

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}m=F(x)-F(a)$$

成立的充分必要条件是 $F'(x)=f(x)$ a. e. 于$[a,b]$，且 $F(x)$在$[a,b]$上是绝对连续的. 勒贝格积分扩大了使微积分基本定理成立的函数类. 拉东(Radon，J.)于 1913 年把它推广到定义在 n 维欧氏空间中的波莱尔测度的情形. 尼科迪姆(Nikodym，O. M.)于

1929 年进一步推广到一般测度空间上的积分.

测度的相对导数(relative derivative of measures)　亦称拉东-尼科迪姆导数.点函数的导数概念的推广.对关于测度 ν 绝对连续的测度 μ,存在实值 ν 可测函数 $f(x)$,使当 A 为任意 μ 可测集时,有

$$\mu(A)=\int_A f(x)\mathrm{d}\nu,$$

这里的 $f(x)$ 就称为测度 μ 相对于 ν 的导数,记为 $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\nu$.测度的相对导数与普通函数的导数性质十分相似,例如它的线性运算法则是

$$\frac{\mathrm{d}(\mu_1+\mu_2)}{d\nu}=\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}\nu}+\frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}\nu};$$

还有链式法则也成立,即若测度 μ,ν,λ 都是 σ 有限的,且 $\mu\ll\nu,\nu\ll\lambda$,则

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}\cdot\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}$$

关于测度 λ 几乎处处成立.特别地,若 μ 和 ν 都是 R^n 的波莱尔子集类上的 σ 有限测度,且有

$$\mu(E)=\int_E f\mathrm{d}\nu+\gamma(E)\ \ (\gamma\perp\mu,f\text{ 关于 }\nu\text{ 可积}),$$

这是由勒贝格定理和拉东-尼科迪姆定理得到的 μ 的分解,则

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mu(Q_x(h))}{\nu(Q_x(h))}=f(x)$$

关于测度 ν 对 $x\in\mathrm{R}^n$ 几乎处处成立,其中 $Q_x(h)$ 是以 x 为中心,边平行于坐标轴且边长为 h 的 n 维立方体.即这时测度的相对导数可表为极限,进一步与函数的导数相似.

拉东-尼科迪姆导数(Radon-Nikodym derivative)　见“拉东-尼科迪姆定理”及“测度的相对导数”.

关于广义测度的积分(integral with respect to a generalized measures)　关于普通测度的积分的推广.设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是广义测度空间,$\mu=\mu_1-\mu_2$ 是 μ 的哈恩分解.如果 f 关于 μ_1,μ_2 都可积,那么规定

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega f(x)\mathrm{d}\mu_1-\int_\Omega f(x)\mathrm{d}\mu_2,$$

并称

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}\mu$$

为 f 关于广义测度 μ 的积分.

这种积分具有关于普通测度的积分的一些性质,但因 μ 未必是非负的,故当 $f(x)\geqslant 0$ 时未必有

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}\mu\geqslant 0.$$

复测度(complex measure)　取复值的可列可加集函数.设 μ_1 与 μ_2 为可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义(实值)测度,则对任意 $A\in\mathscr{F}$,由

$$\mu(A)=\mu_1(A)+\mathrm{i}\mu_2(A)\ \ (\mathrm{i}\text{ 是虚数单位})$$

确定的 $\mathscr{F}$ 上的集函数 μ 称为$(\Omega,\mathscr{F})$上的复测度.若 μ 为$(\Omega,\mathscr{F})$上的复测度,对任意 $A\in\mathscr{F}$,定义

$$|\mu|(A)=\sup\sum_{k=1}^{\infty}|\mu(A_k)|,$$

这里的上确界是对 A 的所有分划$\{A_i\}$(亦即 $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$,每个 $A_i\in\mathscr{F}$,$i\neq j$ 时 $A_i\cap A_j=\varnothing$)取的,可证集函数 $|\mu|$ 是一个测度,且存在可测函数 h,使得 $|h(x)|=1$ 对所有 $x\in\Omega$ 成立,还有

$$\mathrm{d}\mu=h\mathrm{d}|\mu|.$$

此式称为复测度 μ 的极分解.

复测度的极分解(polar decomposition of a complex measure)　见“复测度”.

复值可测函数的积分(integral of complex valued measurable functions)　实值可测函数的积分的推广.设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,$f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$($f_1,f_2$ 为实值函数)为其上的复值可测函数,定义积分

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}\mu=\int_\Omega f_1(x)\mathrm{d}\mu+\mathrm{i}\int_\Omega f_2(x)\mathrm{d}\mu.$$

当 $f_1(x),f_2(x)$的积分都存在时,称 $f(x)$的积分存在,当 $f_1(x),f_2(x)$都可积时,称 $f(x)$可积.

可测空间的乘积(product of measurable spaces)　测度论的基础概念.设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$及$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$是两个可测空间,令

$$C=\{A_1\times A_2|A_1\in\mathscr{F}_1,A_2\in\mathscr{F}_2\}.$$

由 C 作为空间 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上的集类所生成的 σ 代数 $\sigma(C)$称为 $\mathscr{F}_1$ 与 $\mathscr{F}_2$ 的乘积 σ 代数,以 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 表示,而称$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$为$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$的乘积空间.$C$ 中的元素称为可测矩形,$\sigma(C)=(\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$中的元素称为乘积空间中的可测集.例如,若 Ω_1 和 Ω_2 都是直线$(-\infty,+\infty)$,$\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 都是直线上的波莱尔集的全体,则 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 正是平面上的波莱尔集的全体.然而,当 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 都是直线上的勒贝格可测集时,$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 包含在平面上的勒贝格可测集类中,但确有平面上的勒贝格可测集不在 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 中.同样可以定义多重乘积空间

$$(\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2\times\cdots\times\mathscr{F}_n).$$

乘积空间上可测集 $E\in\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 有如下重要性质:对任何 $x\in\Omega_1$,E 的 x 截口

$$E_x=\{y|(x,y)\in E\}$$

必是$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$上的可测集.同样,对任何 $y\in\Omega_2$,E 的 y 截口

$$E_y=\{x|(x,y)\in E\}$$

必是$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$上的可测集.

乘积σ代数(product σ-algebra)　见“可测空间的乘积”.

可测矩形(measurable rectangle)　见“可测空

间的乘积".

测度空间的乘积(product of measure spaces) 带有乘积测度的乘积空间. 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mu)$,$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\nu)$是两个$\sigma$有限的测度空间,则在$\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$上存在惟一的$\sigma$有限测度$\lambda$,使对任何可测矩形$A\times B$,恒有

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\nu(B).$$

通常称λ为μ与ν的乘积测度,记为$\lambda=\mu\times\nu$,并称测度空间$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,\mu\times\nu)$为$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mu)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\nu)$的乘积. 但是,即使$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,\mu)$与$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,\nu)$都是完备的,$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,\mu\times\nu)$也未必是完备的,例如$\mathrm{R}^n$上的勒贝格测度与$\mathrm{R}^m$上的勒贝格测度之积(不完备)不等于$\mathrm{R}^{n+m}$上的勒贝格测度(完备的). 然而,同勒贝格测度的情况类似,关于重积分和累次积分关系的富比尼定理在一般的测度空间的乘积空间中也成立.

乘积测度(product measure) 见"测度空间的乘积".

维塔利-哈恩-萨克斯定理(Vitali-Hahn-Saks theorem) 测度论的重要定理. 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,$\{\mu_n\}$是定义在$\mathscr{F}$上的具有有限全变差(即$|\mu_n|(\Omega)<+\infty,n=1,2,\cdots$)的复测度列,$\nu$是$\mathscr{F}$上的测度. 如果每个$\mu_n$关于$\nu$绝对连续,且对任何$A\in\mathscr{F}$,

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A)=\mu(A)$$

存在,则$\{\mu_n\}$等度绝对连续,即对任给$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$A\in\mathscr{F}$,$\nu(A)<\delta$时,有

$$|\mu_n(A)|<\varepsilon\ (n=1,2,\cdots).$$

维塔利-哈恩-萨克斯定理有着悠久的历史. 1907年,维塔利(Vitali,G.)证明了,若$\{f_n\}$是$[0,1]$上的(L)可积函数列,几乎处处收敛于函数f,则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$$

存在且相等的充分必要条件是$\{f_n\}$的积分一致绝对连续. 1922年,哈恩(Hahn,H.)证明了,若$\{f_n\}$是$[0,1]$上的(L)可积函数列,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}x$$

对每个(L)可测集$A\subset[0,1]$都存在,则$\{f_n\}$的积分一致绝对连续,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}x$$

收敛于一个集函数. 1933年,萨克斯(Saks,*S.*)把它推广到一般的测度空间.

丹尼尔积分(Daniell integral) 连续函数空间上的正线性泛函. 设$\mathscr{K}$为集Ω上一族实值函数组成的向量格,即$f\in\mathscr{K}$蕴涵$|f|\in\mathscr{K}$,$f\wedge 1\in\mathscr{K}$;I为$\mathscr{K}$上的正线性泛函,即$f,g\in\mathscr{K}$,$\alpha,\beta\in\mathrm{R}^1$蕴涵$I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g)$;又对$f\in\mathscr{K}$,$f\geqslant 0$蕴涵$I(f)\geqslant 0$. 如果$I$满足条件:$f_n\in\mathscr{K}$,$f_n\downarrow 0$蕴涵

$$\lim_{n\to\infty}I(f_n)=0,$$

或等价地,若由$f_n\in\mathscr{K}$,$f_n\uparrow f\in\mathscr{K}$必可推出

$$I(f)=\lim_{n\to\infty}I(f_n),$$

则称I为$\mathscr{K}$上的丹尼尔积分. 它由丹尼尔(Daniell,P. J.)于1919年引入,其意义在于给出一种定义和处理勒贝格积分的方法.

丹尼尔表示定理(Daniell representation theorem) 体现丹尼尔积分与通常抽象积分之间关系的重要定理. 设$\mathscr{K}$是集Ω上的一族实值函数组成的线性空间. 假定$\mathscr{K}$含有常值函数且关于格运算是封闭的,I为$\mathscr{K}$上的丹尼尔积分,且$I(1)=1$,则在$\sigma(\mathscr{K})$上存在惟一的概率测度μ,使每个$f\in\mathscr{K}$是μ可积的,且

$$I(f)=\int_\Omega f\mathrm{d}\mu.$$

拓扑空间上的波莱尔集类(collection of Borel sets in topological space) 拓扑空间上的一种重要集类. 是R^n上的波莱尔集类在一般拓扑空间上的推广. 设(Ω,τ)为拓扑空间. 由τ生成的σ代数称为Ω上的波莱尔集类,记为$\mathscr{B}(\Omega)$. $\mathscr{B}(\Omega)$中的元素称为Ω中的波莱尔集. 显然,Ω的闭集全体生成的σ代数与$\mathscr{B}(\Omega)$一致. R^n上的波莱尔集类与R^n在通常意义下作为拓扑空间的波莱尔集类相同.

波莱尔集(Borel sets) 见"拓扑空间上的波莱尔集类".

拓扑空间上的波莱尔测度(Borel measure in topological space) 以波莱尔集为可测集的测度,R^n上的波莱尔测度在拓扑空间上的推广. 设μ是定义在局部紧豪斯多夫空间Ω的全体波莱尔集组成的σ代数$\mathscr{B}(\Omega)$上的测度,使对每个紧集A,都有$\mu(A)<+\infty$,则称μ为波莱尔测度. R^n上的波莱尔测度是勒贝格测度的限制,这与拓扑空间的波莱尔测度不同.

波莱尔可测函数(Borel measurable functions) 亦称波莱尔函数,R^n上的波莱尔可测函数在拓扑空间上的推广. 设$f(x)$是局部紧空间Ω上的实值函数. 如果对任何实数c,$\{x\,|\,f(x)>c\}$是波莱尔集,则称$f(x)$是Ω上的波莱尔可测函数. 在这个定义中,条件$f(x)>c$可用$f(x)\geqslant c$,$f(x)<c$,$f(x)\leqslant c$中任意一个条件来替代.

波莱尔函数(Borel functions) 即"波莱尔可测函数".

正则测度(regular measure) 一种比较规则的测度. 设Ω是豪斯多夫空间,$\mathscr{B}(\Omega)$是Ω上的波莱尔集类,$\mathscr{F}$为Ω上包含$\mathscr{B}(\Omega)$的σ代数,μ是$\mathscr{F}$上

的测度.如果对每个 $A\in\mathscr{F}$,有

$$\mu(A)=\inf\{\mu(G)\mid A\subset G,G\text{ 为开集}\},$$

则称 μ 为外正则的;如果对每个开集 G,有

$$\mu(G)=\sup\{\mu(K)\mid K\subset G,K\text{ 为紧集}\},$$

则称 μ 为内正则的;既外正则又内正则的测度称为正则测度.

外正则测度(outer regular measure)　见"正则测度".

内正则测度(inner regular measure)　见"正则测度".

正则波莱尔测度(regular Borel measure)　正则的波莱尔测度.设 Ω 是豪斯多夫空间.如果 μ 是 $\mathscr{B}(\Omega)$ 上的波莱尔测度且是正则的,则称 μ 是 $\mathscr{B}(\Omega)$ 上的正则波莱尔测度. R^n 上的勒贝格测度限制在波莱尔集类上是正则波莱尔测度.

卢津定理(Lusin theorem)　用连续函数逼近可测函数的重要定理,R^n 上的卢津定理在拓扑空间上的推广.设 Ω 是豪斯多夫空间,$\mathscr{F}$ 是包含波莱尔集类的 σ 代数,μ 为 $\mathscr{F}$ 上的正则测度,f 是定义在 Ω 上的 $\mathscr{F}$ 可测实值函数.如果 $A\in\mathscr{F}$,$0<\mu(A)<+\infty$,则对任意 $\varepsilon>0$,存在紧集 $K\subset A$,使得 $\mu(A\backslash K)<\varepsilon$,且 f 限制在 K 上是连续的.如果 Ω 还是局部紧的,$C_0(\Omega)$ 代表 Ω 上有紧支集的连续实值函数全体,则存在 $g\in C_0(\Omega)$,使 g 与 f 在 K 上一致,且

$$\sup\{|g(x)|\mid x\in\Omega\}\leqslant\sup\{|f(x)|\mid x\in A\}.$$

由卢津定理可得下述重要结果:设 Ω 为局部紧且 σ 紧的豪斯多夫空间,$\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{B}(\Omega)$ 的 σ 代数,μ 是 $\mathscr{F}$ 上的完备测度.如果 f 是 Ω 上 μ 几乎处处有限的扩充实值函数,则 f 为可测的充分必要条件是存在 Ω 上的实值连续函数列 $\{f_n\}$,使 $\{f_n\}$ 在 Ω 上 μ 几乎处处收敛于 f.

贝尔集类(collection of Baire sets)　拓扑空间上的一种重要集类,R^n 上的波莱尔集类在拓扑空间上的另一推广.设 Ω 是局部紧豪斯多夫空间.Ω 的一切紧 G_δ 型集组成的集类生成的 σ 代数 $\mathscr{F}$ 称为 Ω 上的贝尔集类,其中的元素称为 Ω 的贝尔集.贝尔集的理论在某些方面较波莱尔集的理论简单,同时关于贝尔集的理论还可以用来作为研究波莱尔集的工具.局部紧豪斯多夫空间中的贝尔集必是波莱尔集.在可分的局部紧豪斯多夫空间特别是欧氏空间中,波莱尔集与贝尔集的概念合而为一.

贝尔集(Baire sets)　见"贝尔集类".

拓扑空间上的贝尔测度(Baire measure on topological space)　定义于贝尔集类上的测度.设 μ 是定义在局部紧豪斯多夫空间 Ω 的全体贝尔集组成的 σ 代数上的测度,使得对每个紧 G_δ 型集 C,$\mu(C)<+\infty$,则称 μ 为贝尔测度.

贝尔可测函数(Baire measurable function)　亦称贝尔函数.是 R^n 上的贝尔函数在拓扑空间上的推广.设 f 是局部紧豪斯多夫空间 Ω 上的实值函数.如果对任意实数 c,$\{x\mid f(x)>c\}$ 是贝尔集,则称 f 是 Ω 上的贝尔可测函数.局部紧豪斯多夫空间上的连续函数(或有紧支集的连续函数)是贝尔可测的.

贝尔函数(Baire function)　即"贝尔可测函数".

拉东测度(Radon measure)　一种正则测度.设 $\mathscr{B}(\Omega)$ 是豪斯多夫空间 Ω 上的波莱尔集类,$\mathscr{F}$ 是 Ω 上的 σ 代数且 $\mathscr{F}\supset\mathscr{B}(\Omega)$,$\mu$ 是 $\mathscr{F}$ 上的正则测度,$C_0(\Omega)$ 是 Ω 上有紧支集的实值连续函数的全体.若对一切非负的 $f\in C_0(\Omega)$,都有

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu<+\infty,$$

则称 μ 为拉东测度.若 Ω 是局部紧的豪斯多夫空间,则 $\mathscr{B}(\Omega)$ 上的拉东测度与 $C_0(\Omega)$ 上的正线性泛函之间有如下一一对应关系:若 μ 为 $\mathscr{B}(\Omega)$ 上的拉东测度,令

$$I_\mu(f)=\int_\Omega f\mathrm{d}\mu,$$

则 I_μ 是 $C_0(\Omega)$ 上的正线性泛函;反之,$C_0(\Omega)$ 上的正线性泛函必具有这种形式.故此时的拉东测度即丹尼尔积分(参见"丹尼尔积分").

测度的弱收敛(weak convergence of measures)　一种重要的收敛概念.设 (Ω,ρ) 是度量空间,$\mu,\mu_1,\mu_2,\cdots$ 是 $\mathscr{B}(\Omega)$ 上的有限测度,$C_b(\Omega)$ 是定义在 Ω 上的有界连续函数的全体.如果对任意 $f\in C_b(\Omega)$,都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f\mathrm{d}\mu_n=\int_\Omega f\mathrm{d}\mu,$$

则说 $\{\mu_n\}$ 弱收敛于 μ.

不变测度(invariant measure)　群上的一种测度.如果 $\mathscr{F}$ 是群 Ω 上的 σ 代数,且对于任意的 $x\in\Omega$,$A\in\mathscr{F}$ 有 $xA=\{xy\mid y\in A\}\in\mathscr{F}$,$\mu$ 是 $\mathscr{F}$ 上的测度,满足 $\mu(xA)=\mu(A)$,则 μ 称为左不变测度.与此相仿,若 $\mathscr{F}$ 和 μ 对如上任意的 x 和 A 满足 $Ax=\{yx\mid y\in A\}\in\mathscr{F}$,$\mu(Ax)=\mu(A)$,则 μ 称为右不变测度.左不变测度和右不变测度统称不变测度.

左不变测度(left invariant measure)　见"不变测度".

右不变测度(right invariant measure)　见"不变测度".

哈尔测度(Haar measure)　不恒等于零的不变测度,R^n 上的勒贝格测度在拓扑群上的推广.设 G 是局部紧豪斯多夫拓扑群,$\Omega=G$,sx(或 xs)是群 G 内的乘法.此时把 G 上的非零左不变(右不变)测度称为 G 的左不变(右不变)哈尔测度.这种测度是由

哈尔(Haar,A.)于1930年引入的. 加法群$\mathbb{R}^n$上哈尔测度即为勒贝格测度. 在交换群的情形,左不变哈尔测度与右不变哈尔测度是相同的,在非交换群的情形,二者未必相同. 哈尔测度是建立群上的调和分析理论的工具之一.

哈尔定理(Haar theorem) 关于哈尔测度惟一存在的重要定理. 在任意的局部紧豪斯多夫拓扑群上的左不变(或右不变)哈尔测度,除了正的常数因子外,是惟一存在的.

可测群(measurable group) 从测度论观点来研究局部紧拓扑群而引入的一个概念. 设$(X,\mathscr{F},\mu)$为一σ有限测度空间,若满足下列条件,则称$(X,\mathscr{F},\mu)$是一个豪斯多夫可测群:

1. μ不恒等于零.

2. X是一个群.

3. σ环$\mathscr{F}$是左不变的,即对每个$x\in X$及每个$A\in\mathscr{F}$,都有$xA\in\mathscr{F}$,又测度μ也是左不变的.

4. 由等式$T(x,y)=(x,xy)$确定的$X\times X$到它自身的映射T是保测映射.

例如,若X是局部紧拓扑群,$\mathscr{F}$是X中全体贝尔集类,μ是一个哈尔测度,则$(X,\mathscr{F},\mu)$是一个可测群.

可分的可测群(separated measurable group) 从测度论的观点描述拓扑群的可分公理. 设e是可测群$(X,\mathscr{F},\mu)$的单位元素. 若对X中任意异于e的元素x,存在具有正的有限测度的可测集A,使得$\mu((xA)\triangle A)>0$,则称$(X,\mathscr{F},\mu)$是可分的可测群.

韦伊测度(Weil measure) 群上的一种不变测度. 设$\mathscr{F}$是局部紧豪斯多夫群G上的σ代数,满足条件:当$A\in\mathscr{F}$时,对任意的$s\in G$,有$sA\in\mathscr{F}$. 设μ是$\mathscr{F}$上的σ有限测度. 如果μ满足下列条件,则称μ是G上的左不变韦伊测度:

1. $\mu(sA)=\mu(A)$.

2. 当$f(x)$为$\mathscr{F}$可测时,$f(xy^{-1})$必为$\mathscr{F}\times\mathscr{F}$可测的.

这种测度是由韦伊(Weil,A.)引入的.

相对不变测度(relative invariant measure) 不变测度的推广. 设一切记号与条目"不变测度"中意义相同. 而对任意$s\in\Omega$,存在正实数$\chi(s)$,使得$\mu(A)=\chi(s)\mu(sA)$,则称测度μ为相对不变测度.

拟不变测度(quasi-invariant measure) 不变测度的推广. 设$\mathscr{F}$是群Ω上的σ代数,且对任意的$x\in\Omega$,$A\in\mathscr{F}$,有$xA\in\mathscr{F}$,μ是$\mathscr{F}$上的测度. 由等式

$$(\nu(x)\mu)(xA)=\mu(A) \tag{1}$$

定义了$\mathscr{F}$上的一个测度$\nu(x)\mu$. 对于不同的$x\in\Omega$,相应的集合xA也就不同,因而xA的测度也就不同,即等式(1)未必成立. 若存在μ可测函数$g(x)$满足下列条件,则μ称为$\mathscr{F}$上的拟不变测度:

1. $g(x)$关于μ在Ω上几乎处处大于0.

2. 对任意$A\in\mathscr{F}$,$\mu(A)<+\infty$,$g(x)$在A上均为μ可积,而且有$\nu(x)\mu=g(x)\mu$,即对任意$x\in\Omega$,均有$(\nu(x)\mu)(xA)=g(x)\mu(A)$.

当$g(x)\equiv 1$时,μ即为左不变测度. 拟不变测度的研究来源于量子物理,它的理论为无限维空间上的微分方程、变分方程的研究提供工具.

泛函积分(functional integration) 连续积分、柱测度、正定函数等理论的泛称. 它起源于量子物理学和随机过程. 泛函积分方法已深入到公理化量子场论、基本粒子理论、随机力学、统计物理和湍流理论等领域,并且与数学的其他分支如群表示论、巴拿赫空间几何理论、微分方程理论等相互渗透.

维纳测度(Wiener measure) 定义在连续函数空间上的一种描述布朗运动的测度. 设$t>0$,在区间$[0,t]$上连续并在点0取值为零的函数的全体记为C(C中的每个元可理解为做一维布朗运动的粒子的轨道). 又设$(a_i,b_i)$$(1\leqslant i\leqslant n)$是$n$个区间,$0<t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant t$. 集$A=\{x(t)\mid x(t)\in C,x(t_i)\in(a_i,b_i),1\leqslant i\leqslant n\}$为$C$中的柱集. 轨道$x$落入$A$中的概率是

$$[(2\pi)^n t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\cdot\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

这样在柱集全体上定义了一个柱测度. 维纳(Wiener,N.)证明了它可以延拓成C上的可列可加的测度$\mathrm{d}_w x$,就称它为维纳测度,关于该测度的积分称为维纳积分. 维纳于1921年发表的关于布朗运动的论文中提出了这种测度.

维纳积分(Wiener integral) 见"维纳测度".

柱测度(cylinder measure) 测度概念的推广. 设X,Y是两个实线性空间,$\langle x,y\rangle$$(x\in X,y\in Y)$是$X\times Y$上的实双线性泛函,且对任意非零向量$x\in X$,存在$y\in Y$,使得$\langle x,y\rangle\neq 0$;对$Y$也有同样的假定. 任取$n$个向量$x_i\in X$$(1\leqslant i\leqslant n)$,记$Y$中使$\langle x_1,\cdot\rangle,\langle x_2,\cdot\rangle,\cdots,\langle x_n,\cdot\rangle$均为可测函数的最小$\sigma$代数为$\mathscr{F}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 每个$\mathscr{F}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中的集称为$Y$中的柱集,柱集全体记为$\mathscr{F}$,它是$Y$上的代数. 若$\mu$是$\mathscr{F}$上的集函数且$\mu$限制在每一个$\mathscr{F}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$上是一个概率测度,则$\mu$称为$Y$上的柱测度. 明洛斯(Минлос,Р. А.)于1959年证明了下面的基本定理:若Φ是核空间,则Φ的共轭空间Φ'的任何一个关于Φ的拓扑连续的(即对任何$\varepsilon>0$,存在Φ中点o的邻域U,对任何$x\in U$,都有

$$\mu\{y \mid |\langle x,y\rangle| > 1\} < \varepsilon)$$

柱测度 μ 都是可列可加的.

正定函数(positive definite functions) 一种重要的函数.设 G 是拓扑群,e 是 G 的单位元,$f(g)$是 G 上的实值函数,$f(e)=1$.若对任意 n 个元素 $g_i\in G(1\leqslant i\leqslant n)$及任意 n 个复数 $z_i(1\leqslant i\leqslant n)$,恒有

$$\sum_{i,j} f(g_j^{-1}g_i)\bar{z}_j z_i \geqslant 0,$$

则称 f 是 G 上的正定函数.正定函数的表示如下:设 Φ 是拓扑线性空间,Φ 按向量的加法成为交换的拓扑群.用 $\Phi^{\#}$ 表示 Φ 的代数对偶空间(Φ 上的线性泛函 ξ 的全体),W 是 $\Phi^{\#}$ 的线性子空间,且 $\varphi\in\Phi$,$\varphi=0$ 等价于对任意 $f\in W$,均有 $f(\varphi)=0$.若 f 是 Φ 上的正定函数,则在 W 上存在惟一的柱测度 μ,使

$$f(\varphi)=\int_W e^{i\xi(\varphi)}d\mu(\xi)\quad(\varphi\in\Phi),$$

即正定函数 f 可以表示成泛函积分的形式.可以证明,f 是 Φ 上的连续的正定函数的充分必要条件是相应的柱测度 μ 关于 Φ 的拓扑是连续的.正定函数的表示是无限维分析的主要问题之一,柱测度在其中起了重要作用.

正定函数的表示(express of positive definite functions) 见"正定函数".

向量值测度和积分

向量值函数(vector valued function) 亦称抽象函数.数值函数概念的推广.定义在某个集合上而在某个线性空间(通常是某个拓扑线性空间)内取值的单值映射.因线性空间中的元素一般称为向量,故这种映射常被称为向量值函数.向量值函数不仅仅是数值函数形式上的推广,而是有其自身的理论和实际应用.例如,向量值函数在谱论、巴拿赫空间几何理论等数学分支中都起着重要的作用.这里的向量值函数比数学分析中的意义广泛得多.

可数值函数(countable valued function) 简单函数概念的推广.设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间,$x(t)$是定义在 Ω 上而且取值于赋范线性空间 X 的向量值函数.如果 Ω 可以分解为可数个互不相交的可测集 A_k 的并,在每个 A_k 上,$x(t)$取常值 $x_k\in X$,则称 $x(t)$为可数值函数.

强可测向量值函数(strongly measurable vector valued function) 可测数值函数概念在赋范线性空间上的推广.设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,$x(t)$是定义在 Ω 上而且取值于赋范线性空间 X 的向量值函数.如果存在 Ω 上的一列可数值函数$\{x_n(t)\}$,使得$\{x_n(t)\}$关于 μ 几乎处处强收敛于 $x(t)$,即 $\|x_n(t)-x(t)\|$ 关于 μ 几乎处处收敛于 0,则称 $x(t)$在 Ω 上(取值于 X)是强可测的.可数值函数是强可测的.按强拓扑连续的向量值函数是强可测的.强可测向量值函数的线性组合也是强可测的.如果向量值函数 $x(t)$是强可测的,则数值函数 $\|x(t)\|$ 必是可测的.如果 $x(t)$是强可测向量值函数,而$\alpha(t)$为有限实值可测函数,则$\alpha(t)x(t)$亦为强可测函数.如果强可测向量值函数列$\{x_n(t)\}$关于 μ 几乎处处弱收敛于向量值函数$x(t)$,则$x(t)$亦必是强可测的.此外,对于强可测函数而言,也有相应的叶戈罗夫定理和卢津定理.叶戈罗夫定理断言:如果$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是有限测度空间,而定义在 Ω 上取值于巴拿赫空间 X 的强可测向量值函数列$\{x_n(t)\}$关于 μ 几乎处处强收敛于 $x(t)$,那么对任给 $\varepsilon>0$,存在 $A\in\mathscr{F}$,使得 $\mu(A)<\varepsilon$,且$\{x_n(t)\}$在 $\Omega\backslash A$ 上一致收敛于 $x(t)$.卢津定理断言:如果 Ω 是数集,$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,$x(t)$是定义在 Ω 上 而取值于巴拿赫空间 X 的强可测函数,那么对任意 $\varepsilon>0$,存在闭集 A 使得 $\mu(\Omega\backslash A)<\varepsilon$,且$x(t)$在 A 上按强拓扑是连续的.

弱可测向量值函数(weakly measurable vector valued function) 可测数值函数概念在赋范线性空间上另一种重要的推广.设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,$x(t)$是定义在 Ω 上而在赋范线性空间 X 内取值的向量值函数.如果对任何 $f\in X^*$,数值函数 $f(x(t))$是 μ 可测的,则称 $x(t)$在 Ω 上是弱可测的.强可测函数必是弱可测的,其逆不真.当 $X=\mathrm{R}^1$ 时,强可测、弱可测及实值函数可测这三个概念是等价的.按弱拓扑连续的函数是弱可测的.弱可测函数的线性组合是弱可测的.如果 $x(t)$是弱可测函数,$\alpha(t)$是有限实值可测函数,则 $\alpha(t)x(t)$亦为弱可测函数.弱可测函数列关于 μ 几乎处处弱收敛的极限是弱可测的.

可分值的向量值函数(separably-valued vector valued function) 具有可分值域的向量值函数.设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,$x(t)$是定义在 Ω 上而取值于赋范线性空间 X 的向量值函数.如果它的值域$\{x(t)\mid t\in\Omega\}$是 X 的可分子集,则称 $x(t)$为可分值的.如果存在子集 $\Omega_0\subset\Omega$,使得 $\mu(\Omega_0)=0$,而值域$\{x(t)\mid t\in\Omega\backslash\Omega_0\}$是可分的,则称 $x(t)$是几乎可分值的.

几乎可分值的向量值函数(almost separably-valued vector valued function) 见"可分值的向量值函数".

佩蒂斯可测性定理(Pettis theorem on measurablity) 关于向量值函数强可测与弱可测之间的关系的重要定理.设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是有限测度空间,$x(t)$是定义在 Ω 上而取值于巴拿赫空间 X 的向量值函数,则 $x(t)$强可测的充分必要条件是 $x(t)$弱可测且是几乎可分值的.此定理是由佩蒂斯(Pettis,P. B.

J.)发现的.由佩蒂斯可测性定理推知,对于取值于可分空间的向量值函数,强可测等价于弱可测.

向量值函数的积分(integral of vector-valued function) 向量值函数所定义的各种积分的统称.主要有黎曼-斯蒂尔杰斯积分和勒贝格型积分,它们是数值函数的积分在向量值函数上的直接推广.

博赫纳积分(Bochner integral) 按勒贝格积分方式定义的一种常用的向量值函数的积分.设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是完备的σ有限测度空间,$x(t)$是定义在Ω上而取值于巴拿赫空间X的向量值函数:

1.若$x(t)$是Ω上的可数值函数,即

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,$$

而$\{A_k\}$是Ω中一列互不相交的可测集,

$$x(t)=x_k\ (t\in A_k,k=1,2,\cdots);$$

又

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\mu(A_k)<+\infty,$$

则称$x(t)$在Ω上是博赫纳可积的,并称

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k\mu(A_k)$$

为$x(t)$的博赫纳积分,记为

$$(B)\int_{\Omega}x(t)\mathrm{d}\mu,$$

即

$$(B)\int_{\Omega}x(t)\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\mu(A_k).$$

2.对于一般的强可测函数$x(t)$,若它是博赫纳可积的可数值函数列$\{x_n(t)\}$的关于μ几乎处处强收敛的极限且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|x(t)-x_n(t)\|\mathrm{d}\mu=0,$$

则说$x(t)$在Ω上是博赫纳可积的,并规定$x(t)$的博赫纳积分为

$$(B)\int_{\Omega}x(t)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}(B)\int_{\Omega}x_n(t)\mathrm{d}\mu.$$

对于博赫纳可积函数$x(t)$,它的积分值(向量)不依赖于$\{x_n(t)\}$的选取.博赫纳积分是勒贝格积分在向量值函数情形的直接推广,是由博赫纳(Bochner,S.)在1932年建立的.这种积分在向量值测度理论、算子理论、概率论、随机过程以及巴拿赫空间几何理论等许多数学分支中有广泛的应用.向量值函数$x(t)$为博赫纳可积的充分必要条件是$x(t)$强可测,且

$$\int_{\Omega}\|x(t)\|\mathrm{d}\mu<+\infty.$$

博赫纳积分具有和勒贝格积分类似的若干基本性质.例如,具有线性性、完全可加性、绝对连续性以及控制收敛定理、富比尼定理均成立,但拉东-尼科迪姆定理不成立,就是说,与通常的抽象测度不同,绝对连续的向量值测度不一定能表示成博赫纳积分.

伯克霍夫积分(Birkhoff integral) 一种向量值函数的积分.设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是σ有限测度空间,$x(t)$是定义在Ω上而取值于巴拿赫空间X的向量值函数,给定Ω的一个可列分划

$$\Delta:\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\quad(A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j),$$
$$A_i\in\mathscr{F},\quad\mu(A_i)<+\infty.$$

如果$x(t)$在每个A_i上有界且级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)x(t_i)\ (t_i\in A_i)$$

无条件收敛,则称$x(t)$关于可列分划Δ可求和,此种和的全体

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)x(t_i)\,|\,t_i\in A_i\right\}$$

的凸闭包,称为$x(t)$关于Δ的积分值域,记为$J(x,\Delta)$.如果对任意$\varepsilon>0$,存在Ω的可列分划$\Delta(\varepsilon)$,使$x(t)$关于$\Delta(\varepsilon)$可求和,且$J(x,\Delta(\varepsilon))$的直径$\sup\{\|y-z\|\,|\,y,z\in J(x,\Delta(\varepsilon))\}$小于$\varepsilon$,则说$x(t)$在$\Omega$上伯克霍夫可积,并称由一切可列分划$\Delta$所得到的$J(x,\Delta)$的交集

$$\bigcap_{\Delta}J(x,\Delta)\quad(X\text{ 中的单点集})$$

为$x(t)$在Ω上的伯克霍夫积分,记为

$$(BK)\int_{\Omega}x(t)\mathrm{d}\mu,$$

即

$$(BK)\int_{\Omega}x(t)\mathrm{d}\mu=\bigcap_{\Delta}J(x,\Delta).$$

此积分是伯克霍夫(Birkhoff,G.D.)于1935年提出的.在Ω上伯克霍夫可积的函数在任意的$A\in\mathscr{F}$上仍为伯克霍夫可积函数.伯克霍夫积分作为向量值集函数具有绝对连续性和可列可加性,对于被积函数具有线性性质,但富比尼定理不成立.博赫纳可积函数必是伯克霍夫可积的,其逆不真.

盖尔范德积分(Gelfand integral) 亦称盖尔范德意义下的弱*积分.一种向量值函数的积分.设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是σ有限测度空间,$x(t)$是定义在Ω上而取值于巴拿赫空间X的向量值函数.如果对每个$f\in X^*$,$f(x(t))$在Ω上是μ可积的,则必存在$x^{**}\in X$,使得对于每个$f\in X^*$有

$$x^{**}(f)=\int_{\Omega}f(x(t))\mathrm{d}\mu,$$

x^{**}称为$x(t)$在Ω上的盖尔范德积分,记为

$$(\Gamma)\int_{\Omega}x(t)\mathrm{d}\mu.$$

此积分是由盖尔范德(Гельфанд,И.М.)于1936年建立的.

佩蒂斯积分(Pettis integral) 亦称弱积分.一

种常用的向量值函数的积分. 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为σ有限测度空间,$x(t)$是定义在Ω上而取值于巴拿赫空间X的弱可测向量值函数. 如果对任意$A\in\mathscr{F}$,都存在$x_A\in X$,使得对于一切$f\in X^*$,积分

$$\int_A f(x(t))\mathrm{d}\mu$$

存在,且

$$\int_A f(x(t))\mathrm{d}\mu = f(x_A),$$

则说$x(t)$在Ω上佩蒂斯可积,此时记为

$$(P)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu = x_A,$$

并称x_A为$x(t)$在A上的佩蒂斯积分. 当$x(t)$在Ω上佩蒂斯可积时,在每个$A\in\mathscr{F}$上,佩蒂斯积分

$$(P)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu$$

是惟一确定的. 此积分是佩蒂斯(Pettis,P. B. J.)于1938年建立的. 除去富比尼定理外,勒贝格积分的其他性质对于佩蒂斯积分也成立. 例如,佩蒂斯积分作为向量值集函数具有绝对连续性和可列可加性,对于被积函数具有线性性质. 如果向量值函数$x(t)$是博赫纳可积的,则它也是佩蒂斯可积的,并且该两积分值是相同的,但反之不然. 又,佩蒂斯可积的函数必是盖尔范德可积的,当X是自反的巴拿赫空间时,这两种积分彼此相同.

向量值测度(vector valued measure)　数值测度的推广,定义于σ代数上而取值于巴拿赫空间的可列可加向量值集函数. 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间,E是定义在$\mathscr{F}$上而取值于巴拿赫空间X的向量值集函数. 如果满足下列条件,则称E是$\mathscr{F}$上的向量值测度:

1. $E(\varnothing)=0$($\varnothing$是空集).

2. 可列可加性,即对$\mathscr{F}$中任意互不相交的集列$\{A_i\}$,若下式右端的级数按X中范数收敛,必有

$$E(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) = \sum_{i=1}^{\infty}E(A_i).$$

例如,如果$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是σ有限测度空间,$x(t)$是定义在Ω上而取值于巴拿赫空间X的博赫纳可积函数,对任何$A\in\mathscr{F}$,定义

$$E(A) = (B)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu,$$

则E是定义在$\mathscr{F}$上而取值于X的向量值测度. 特别地,当X是某个巴拿赫空间上的有界线性算子全体按算子范数所成的巴拿赫空间时,就称E为$\mathscr{F}$上的算子值测度.

算子值测度(operator valued measure)　见"向量值测度".

有界变差的向量值测度(vector valued measure of bounded variation)　有界变差函数的推广,一类重要的向量值测度. 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间,E是定义在$\mathscr{F}$上而取值于巴拿赫空间X的向量值测度,$A\in\mathscr{F}$,π是A的一个分划,即$\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,$A_i\in\mathscr{F}$,当$i\neq j$时,$A_i\cap A_j=\varnothing$,且

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

令

$$|E|(A) = \sup_{\pi}\sum_{A_i\in\pi}\|E(A_i)\|,$$

非负扩充实值函数$|E|$称为E的变差. 若$|E|(\Omega)<+\infty$,则称E为有界变差的向量值测度.

半有界变差的向量值测度(vector valued measure of semi-bounded variation)　一类重要的向量值测度,有界变差函数的推广. 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间,E是定义在$\mathscr{F}$上而取值于巴拿赫空间X的向量值测度,$A\in\mathscr{F}$,令

$$\|E\|(A) = \sup\{|f\circ E|(A)\,|\,f\in X^*,\ \|f\|\leqslant 1\},$$

称非负扩充实值函数$\|E\|$为E的半变差. 若$\|E\|(\Omega)<+\infty$,则称E为半有界变差的向量值测度. 对于取值于有限维巴拿赫空间的向量值测度,半有界变差与有界变差的概念是相同的. 对于取值于任一无穷维巴拿赫空间的向量值测度就不是这样.

向量值测度的绝对连续性(absolute continuity of vector valued measure)　数值测度的绝对连续性的推广. 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是有限测度空间,E是定义在$\mathscr{F}$上而取值于巴拿赫空间X的向量值测度. 如果对任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使对任意$A\in\mathscr{F}$,只要$\mu(A)<\delta$,就有$\|E(A)\|<\varepsilon$,则称E关于μ是绝对连续的,它等价于$\mu(A)=0$时必有$E(A)=0$.

拉东-尼科迪姆性质(Radon-Nikodym property)　向量值测度可能具有的一个重要性质,有关问题是理论研究中的重要课题. 设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是有限测度空间,X是巴拿赫空间,$B(\Omega,X,\mu)$代表定义在Ω上而取值于X的博赫纳可积函数全体. 如果对每个定义在$\mathscr{F}$上而取值于X的有界变差且关于μ绝对连续的向量值测度E,均存在$f\in B(\Omega,X,\mu)$,使得

$$E(A) = (B)\int_A f(t)\mathrm{d}\mu\ (A\in\mathscr{F}),$$

则说X关于$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$具有拉东-尼科迪姆性质. 如果X关于一切有限测度空间均具有拉东-尼科迪姆性质,则说X具有拉东-尼科迪姆性质. 博赫纳(Bochner,S.)于1932年提出了如今以他的名字命名的向量值函数的积分——博赫纳积分,并且考虑将数值测度论中的拉东-尼科迪姆定理推广到向量值测度的情况. 但是,博赫纳发现,对巴拿赫空间$L^{\infty}[0,1]$,这种推广是不可行的. 因此,需要讨论拉

东-尼科迪姆定理成立的条件,这样便产生了巴拿赫空间具有拉东-尼科迪姆性质的概念.伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)于1935年证明,希尔伯特空间具有拉东-尼科迪姆性质.克拉克松(Clarkson,J. A.)于1936年引入了一致凸空间的概念,并证明了一致凸巴拿赫空间具有拉东-尼科迪姆性质.盖尔范德(Гельфанд,И. М.)和莫尔斯(Morse,H. M.)于1936年证明了具有有界完全基的巴拿赫空间具有拉东-尼科迪姆性质.盖尔丰德(Гельфонд,А. О.)于1938年证明了自反巴拿赫空间具有拉东-尼科迪姆性质.现在,关于拉东-尼科迪姆性质的研究仍是一个引人注目的课题,并且已经取得了大量的成果.

具有里斯表示的算子(Riesz representable operator) 向量值测度理论中的重要概念之一.设T是$L(\Omega,\mu)$到巴拿赫空间X内的有界线性算子.如果存在$f\in L^{\infty}(\Omega,X,\mu)$,使对任何$g\in L(\Omega,\mu)$,有

$$Tg=\int_{\Omega}f(t)g(t)\mathrm{d}\mu,$$

则称T是具有里斯表示的,简言T是可表示的,这里$L^{\infty}(\Omega,X,\mu)$表示

$$\{f|f\text{ 博赫纳可积},\operatorname{ess}\sup_{t\in\Omega}\|f(t)\|_X<+\infty\}.$$

对$f\in L^{\infty}(\Omega,X,\mu)$,记

$$\|f\|=\operatorname{ess}\sup_{t\in\Omega}\|f(t)\|_X.$$

对于$f\in(L(\Omega,\mu))^*$,熟知有基本的里斯表示定理:存在$y\in L^{\infty}(\Omega,\mu)$,使对任意$x\in L(\Omega,\mu)$,有

$$f(x)=\int_{\Omega}x(t)y(t)\mathrm{d}\mu.$$

对于定义在$L(\Omega,\mu)$而取值于巴拿赫空间X的有界线性算子,相应的结果并不普遍成立,于是便产生算子具有里斯表示的概念.

可以证明,拉东-尼科迪姆性质与任何有界线性算子的可表示性是等价的:巴拿赫空间X是关于有限测度空间$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$具有拉东-尼科迪姆性质的充分必要条件是,定义在$L(\Omega,\mu)$而取值于X的任何有界线性算子T均是可表示的.

向量值测度的尼科迪姆有界性定理(Nikodym's boundedness theorem of vector valued measure)测度论中的深刻定理之一.泛函分析中著名的共鸣定理的一个引人注目的改进.设$\mathscr{F}$是Ω上的σ代数,X是巴拿赫空间,$\{E_\tau|\tau\in T\}$是定义在$\mathscr{F}$上而在X中取值的半有界变差向量值测度族.如果对每个$A\in\mathscr{F}$,

$$\sup_{\tau\in T}\|E_\tau(A)\|<+\infty,$$

则$\{E_\tau|\tau\in T\}$一致有界,即

$$\sup_{\tau\in T}\|E_\tau\|(\Omega)<+\infty.$$

尼科迪姆有界性定理最初是由尼科迪姆(Nikodym,O. M.)于1930年和1933年对于σ代数上的可列可加数值测度建立的.1957年,格罗腾迪克(Grothendieck,A.)把它推广到半有界变差向量值测度.

向量值测度的一致可列可加性(uniformly countable additivity of vector measures) 用以描述一族向量值测度可列可加的整体性态,积分一致绝对连续概念的推广.设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间,X是巴拿赫空间.如果定义在$\mathscr{F}$上而在X中取值的向量值测度族$\{E_\tau|\tau\in T\}$满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\tau}\|E_\tau(\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i)\|=0,$$

其中$\{A_i\}$是$\mathscr{F}$中任意一列互不相交的元,则称$\{E_\tau|\tau\in T\}$是一致可列可加的.

向量值测度的维塔利-哈恩-萨克斯定理(Vitali-Hahn-Saks theorem of vector measure) 测度论的基本定理之一,数值测度论中维塔利-哈恩-萨克斯定理的推广.设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$是测度空间,X是巴拿赫空间,$E_n(n=1,2\cdots)$是定义在$\mathscr{F}$上而取值于X的向量值测度.如果每个E_n关于μ绝对连续,且对任何$A\in\mathscr{F}$,

$$\lim_{n\to\infty}E_n(A)$$

均存在,则

$$\lim_{\mu(A)\to 0}\sup_{n}\|E_n(A)\|=0.$$

这就是向量值测度的维塔利-哈恩-萨克斯定理.由它可得下列重要结果:

1.在定理的条件下,

$$E(A)=\lim_{n\to\infty}E_n(A)$$

是向量值测度.

2.设$\{E_n\}$是一列向量值测度,且对任何$A\in\mathscr{F}$,

$$\lim_{n\to\infty}E_n(A)$$

存在,令

$$E(A)=\lim_{n\to\infty}E_n(A),$$

则E是向量值测度,且$\{E_n\}$是一致可列可加的.

几何测度论

几何测度论(geometric measure theory) 高维欧氏空间中低维点集的测度以及低维点集上积分的理论.

20世纪初测度论的建立,使得人们对于R^n中的子集关于n维勒贝格测度μ_n的性质,有了很好的了解,大部分函数论中的问题,由于应用勒贝格积分论而发生了巨大的变化.但是在处理与R^n中低维点集有关的数学问题时,却遇到了困难.平均曲率为0的曲面称为极小曲面,在R^3中给定一条可求长若尔当闭曲线C,求R^3中以C为边界的极小曲面问题称

为普拉托问题.对于二维曲面,这类问题尚可结合共形变换和狄利克雷原理巧妙地应用勒贝格积分方法来解决,但在曲面的维数大于2,即超曲面的情形,这些经典的方法便不能应用,于是便有 n 维空间中 K 测度的概念,其中最重要的两种 K 测度便是豪斯多夫测度与积分几何测度.几何测度论正是在这种基础上产生的.它始于1914年卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)关于测度论的奠基性工作,经过几十年的努力,结合来自分析、几何、代数拓扑中诸多技巧,产生了许多新的概念与方法,成为数学研究中的一个有力的工具.

豪斯多夫测度(Hausdorff measure) 几何测度论中一类有重要意义的测度.在欧氏空间情形,对任意 $A\subset \mathrm{R}^n$ 和给定的 $\alpha\geqslant 0$,令

$$H_\varepsilon^\alpha(A)=\inf\sum_k(\operatorname{diam}A_k)^\alpha,$$

这里 $\{A_k\}$ 使得

$$A\subset\bigcup_k A_k$$

且每个 A_k 的直径 $\operatorname{diam}A_k<\varepsilon$($\varepsilon$ 是任意给定正数),下确界对所有这样的 $\{A_k\}$ 而取.定义

$$H^\alpha(A)=\lim_{\varepsilon\to 0}H_\varepsilon^\alpha(A)$$

($H_\varepsilon^\alpha(A)$是随 ε 减小而增大的,故此定义有意义),则 H^α 是度量外测度,称为豪斯多夫外测度.由这个外测度所确定的(惟一的)测度即为豪斯多夫测度,仍用 H^α 表示.豪斯多夫测度是正则波莱尔测度,当 $\alpha=n=1$ 时,H^α 就是直线上的勒贝格测度;$\alpha=n>1$ 时,H^α 与 R^n 上的勒贝格测度等价,但不完全相同.豪斯多夫测度的意义在于,对 R^n 的任一子集 A,存在数 $d_H(0\leqslant d_H\leqslant n)$,使 $\alpha>d_H$ 时 $H^\alpha(A)=0$,$\alpha<d_H$ 时 $H^\alpha(A)=+\infty$,因而 d_H 刻画了 R^n 中集合的"维数"(参见"豪斯多夫维数").但一般 d_H 不是整数,例如对于直线上的康托尔集,$d_H=\log_3 2$.这个测度由豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1918年引进,在调和分析、位势论等学科中有应用.豪斯多夫测度还可在一般的度量空间上和更广的意义(将上述定义中的 $(\operatorname{diam}A_k)^\alpha$ 换成某个集函数之值)下定义.

豪斯多夫维数(Hausdorff dimension) 简称 H 维数,一种用测度定义的维数.对于 $A\subset\mathrm{R}^n$,若当 $\alpha>0$ 时,$H^\alpha(A)\equiv 0$(H^α 为豪斯多夫外测度),令 $d_H(A)=0$,否则,令

$$d_H(A)=\sup\{\alpha\,|\,H^\alpha(A)=+\infty\}.$$

这里的 $d_H(A)$就称为 A 的豪斯多夫维数.对于一般的度量空间,也可定义豪斯多夫维数,它依赖于空间中的度量的选择,与拓扑意义下的维数有密切关系,在分形集理论中有重要意义.若用 d_F 表示分形维数,则有 $d_H(A)\leqslant d_F(A)$(参见"豪斯多夫测度").

可求积集(integrable set) 欧氏空间中一种特殊的点集.对于 R^n 中的子集 A,设 A 的 H^k 测度有限($k>0$),若存在 R^k 中某有界子集到 A 的李普希茨映射(即这样的映射 $f:\mathrm{R}^k\to\mathrm{R}^n$,存在正实数 M,使得对于任意 $a,b\in\mathrm{R}^k$,有

$$\rho(f(a),f(b))\leqslant M\rho(a,b)),$$

则称 A 为 k 可求积集($H^0(A)$有限的集,即有限集,也称为可求积集).若 A 除了一个 H^k 测度为0的子集以外,可以为可数多个 k 可求积集所覆盖,则称 A 为(H^k,k)可求积集.集合的可求积性是一阶光滑流形概念的某种推广,事实上,A 为(H^k,k)可求积集的充分必要条件是:除了一个 H^k 测度为0的子集外,它可由 R^n 中可数个 C^1 类 k 维子流形所覆盖.可求积集投影性质的研究是几何测度论的重要内容.当 A 不含 H^k 测度大于0的 k 可求积子集时,称 A 为纯粹(H^k,k)不可求积集.

内积空间的共轭映射(the adjoint map in inner product spaces) 对于内积空间上的任一线性映射,按一定关系与它相伴的一个映射.设 V 为实数域 R^1 上有限维向量空间,则一切线性映射 $\varphi:V\to\mathrm{R}^1$ 在映射的相加与数乘之下,形成一个 R^1 上的向量空间,记为 $\Lambda(V)$,其中的元素称为余向量.设 $f:V\to V'$是内积空间之间的一个线性映射.若

$$\dim V=m\leqslant\dim V'=n,$$

且对$\forall x,y\in V$,有

$$\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle,$$

则称 f 为一个正交内射.记一切正交内射之集为 $O(n,m)$,则当$m=n$时,$O(n,n)=O(n)$便是正交群.设 V,V'为内积空间,对线性映射 $f:V\to V'$,令 $f^*:V'\to V$ 对于一切 $x\in V,y\in V'$,满足内积的关系 $\langle x,f^*(y)\rangle=\langle f(x),y\rangle$,则由 f 惟一确定的线性映射 f^* 称为 f 的共轭.f 是正交内射,当且仅当 $f^*\circ f=I_V$.当 f 是正交内射时,f^* 称为正交投影,因此线性映射 $g:V'\to V$ 为正交投影,当且仅当 $g\circ g^*=I_{V'}$.记一切从内积空间 R^n 到 R^m 的正交投影之集为 $O^*(n,m)=\{f^*\,|\,f\in O(n,m)\}$.

余向量(covector) 见"内积空间的共轭映射".

正交内射(orthogonal injection) 见"内积空间的共轭映射".

正交投影(orthogonal projection) 见"内积空间的共轭映射".

积分几何测度(integral geometric measure) 用积分表示的欧氏空间的子集的一种测度.设 $p:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^k$ 为正交内射,其共轭映射为 p^*,一切 p^* 之集为 $O^*(n,k)$,正交群 $O(n)=O(n,n)$通过右乘可递地作用于 $O^*(n,k)$(对于 $g\in O(n)$,$p^*\in O^*(n,k)$,有 $p^*g\in O^*(n,k)$),成为 $O^*(n,k)$上的一个右平移,这个运算在 $O^*(n,k)$上诱导出惟一的不变测度

θ^*，使得 $O^*(n,k)$ 的 θ^* 测度为 1. 对于 $A \subset \mathbb{R}^n$，令

$$I_1^k(A) = \frac{\int_{O^*(n,k)} \int_{\mathbb{R}^k} H^0(A \cap p(y)) \mathrm{d}\mu_k(y) \mathrm{d}\theta^*(p)}{\beta_1(n,k)},$$

称为 A 的积分几何测度，其中

$$\beta_1(n,k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

μ_k 是 k 维勒贝格测度. 特别当 A 为 (H^k,k) 可求积集时，有 $H^k(A)=I_1^k$. 因此它反映了 (H^k,k) 可求积集的内射性质，它可以看做求平面曲线长度的克罗夫顿方法（参见"积分几何"）的推广，也类似于柯西求凸体周界面积的方法. 另一方面，对于 H^k 测度有限的任何波莱尔集 B，总存在波莱尔子集 $C \subset B$，使得

$$I_1^k(C) = H^k(C), \quad I_1^k(B \backslash C) = 0,$$

且 $B \backslash C$ 为纯粹 (H^k,k) 不可求积集. 进一步，$H^k(B) = I_1^k(B)$，当且仅当 B 为 (H^k,k) 可求积. 以上这些结果，首先为贝斯尔科里奇（Besrkolyqu, A. S.）对于平面上的 H^1 测度而得到. 1947 年，费德雷尔（Federer, H.）证明了一般情形.

面积公式（area formula） 求欧氏空间子集面积的一种公式. 在几何测度论发展的早期就知道，对于 $\mathbb{R}^n$ 中每个勒贝格可测集 W，以及李普希茨映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k (n \geqslant k)$ 有面积公式

$$\int_W J_k f(x) \mathrm{d}\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}^k} H^0(W \cap f^{-1}(y)) \mathrm{d}H^k(y),$$

其中 $J_k f(x)$ 为 $f(x)$ 的雅可比式. 当 f 为一对一映射且 $k=n$ 时，右边积分等于 $H^k(f(W))$. 由此可见，n 可求积集的 H^n 测度即为微分几何中的 n 维体积. 另一方面，利用映射在一点处"近似可微"这个概念，可将这个公式推广到 $\mathbb{R}^n$ 中的 (H^k,k) 可求积集. 但在 $f(W)$ 的 H 维数小于 n 时，上述公式反映的信息很少. 因此，1957 年，费德雷尔（Federer, H.）证明：对于每个李普希茨映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k (n \geqslant k)$，及每个 μ_n 可测集 W，成立下列余面积公式

$$\int_W J_k f(x) \mathrm{d}\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}^k} H^{n-k}(W \cap f^{-1}(y)) \mathrm{d}\mu_k(y).$$

面积公式与余面积公式分别应用于目标空间的维数 k 至少为 n 与至多为 n 的情形，因此可将它们看成对偶的公式，而且余面积公式也已被推广到 (H^k,k) 可求积集的情形. 而这些公式的研究使人们了解到，关于可微映射的积分变换的本质上的假定在于对此映射雅可比式秩的限制.

密度（density） 描写一点附近局部测度的一种概念. 密度与近似切锥是描述一点附近局部测度的两个重要概念，对于子集 A，$0 \leqslant k < +\infty$ 与 $a \in A$，令 $B(a,r)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中以 a 为中心，r 为半径的球体，然后定义在点 a 关于拉东测度 ν 的 k 维上密度与下密度为

$$\theta^{*k}(\nu,a) = \limsup_{r \to 0^+} \omega_k^{-1} r^{-k} \nu(B(a,r)),$$

$$\theta_k^*(\nu,a) = \liminf_{r \to 0^+} \omega_k^{-1} r^{-k} \nu(B(a,r)),$$

其中 ω_k 为 k 维单位球体积，当上密度与下密度相等时，它们的公共值称为点 a 关于 ν 的 k 维密度，记为 $\theta^k(\nu,a)$. 此外，利用上密度概念可以定义集合的近似切锥，它何时成为向量空间与该集合的可求积性质、投影性质有着深刻的联系.

广义高斯-格林公式（Generalized Gauss-Green formula） 一般高斯-格林公式在测度积分形式下的推广. 利用密度概念可以定义的另一个重要概念是集合在一点处的外法线，当所论集合有光滑边界时，这个概念很直观，在一般情形则较为复杂. 给定点集 Q 与测度 ν，可以定义一个新的测度 $\nu \llcorner Q$ 如下：对于集合 G，规定 G 关于 $\nu \llcorner Q$ 的测度 $\nu \llcorner Q(G) = \nu(Q \cap G)$. 因此，$\mathbb{R}^n$ 中集合 A 在一点 b 处的外法向量是如下定义的一个单位向量 $u=n(A,b)$，它使得对于

$$Q_1 = \{x \mid (x-b) \cdot u > 0\},$$

$$Q_2 = \{x \mid (x-b) \cdot u < 0\}$$

有

$$\theta^n(\mu_n \llcorner (Q_1 \cap A), b) = \theta^n(\mu_n \llcorner (Q_2 \backslash A), b) = 0.$$

这个概念只含点集 A 关于 μ_n 的测度性质，而不需要预先知道 A 的几何性质，甚至连边界的概念也未提到. 鉴于这样广义的概念，使人们可将古典的高斯-格林公式推广到相当一般的形式：设 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中的子集，

$$F = \{x \mid \theta^n(\mu_n \llcorner (\mathbb{R}^n \backslash A), x) = 0\},$$

$$G = \{x \mid \theta^n(\mu_n \llcorner A, x) = 0\}.$$

如果对于每个紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$，$I_1^{n-1}((K \backslash F) \cup G) < +\infty$，则对于 $\mathbb{R}^n$ 上每个有紧支集的李普希茨一阶向量场 ξ，有

$$\int \langle \xi(x), n(A,x) \rangle \mathrm{d}H^{n-1}(x) = \int_A \operatorname{div} \xi(x) \mathrm{d}\mu_n(x),$$

此处 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积. 另一方面，若以 $\mathrm{Bd}\, A$ 记 A 的普通边界，则当对于 $\mathbb{R}^n$ 中的每个紧集 K，都有 $I_1^{n-1}(K \cap \mathrm{Bd}\ A) < +\infty$ 时，上述条件满足，从而上述广义高斯-格林定理成立.

整流（integral flow） n 维欧氏空间中 k 维积分区域的分析与拓扑描述. 长期以来，人们寻求着 $\mathbb{R}^n$ 中"k 维积分区域"的分析与拓扑描述. 这个概念

应该保留微分流形的光滑性与整系数多面体链的组合性质所带来的好处，同时为了满足变分的需要，这类区域应该具有某种紧致性质，而“整流”概念正是为了适应这些需要而产生的. 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$\mathscr{D}^m(U)$ 为紧支集落在 U 内的 m 阶光滑微分形式的全体. $\mathscr{D}^m(U)$ 上的线性泛函称为 m 维流. 流 $S\in\mathscr{D}_m(U)$ 的支集 $\operatorname{supp}S$ 理解为 U 内的最小相对紧子集 C，使得对于一切满足 $\operatorname{supp}\varphi\subset U\setminus C$ 的 $\varphi\in\mathscr{D}^m(U)$，有 $S(\varphi)=0$. 流这个概念是由德拉姆(de Rham, G. W.)为研究霍奇理论而引入的. 由于一个曲面决定于对于定义在它上面的任意 m 阶光滑微分形式的积分运算，因此 m 维几何曲面可以分析地表示成一个流. 特别地，由点 $a_0,a_1,\cdots,a_m$ 生成的单纯形若落在 U 内，则它也代表一个流. 这种流的整系数线性组合称为 U 中的一个整系数多面体链. 如果一个流可以用整系数多面体链关于李普希茨映射的像来逼近，就称它为可求积流. 利用边缘算子 ∂，可以得到新的流 ∂S，它被定义为 $\partial S(\varphi)=S(\mathrm{d}\varphi)$，这里 d 表示外微分运算. 对于任意 $m-1$ 阶光滑形式 φ，若 S 与 ∂S 均为可求积流，则称 S 为一个整流. 例如每个 1 维整流总是长度有限的有限条单弧与可数条单闭弧之和. $\mathbb{R}^n$ 中的每个 n 维整流可以表示成

$$\int_A\langle e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n,\varphi\rangle\mathrm{d}\mu_n,$$

其中 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的切空间的标准基，A 为使得推广的高斯-格林公式成立的勒贝格可测集. 当 $1<m<n$ 时，$\mathbb{R}^n$ 中的 m 维整流是相当复杂的，但重要的是，由紧支集在同一有界集内且按某个范数有界的整流组成的集是紧的. 正是这一点形成了变分学中新的几何方法.

可求积流(integrable flow)　见“整流”.

整平坦流(integral flat flow)　满足某种条件的可求积流. 如果流 S 可以表示为 $R+\partial T$，其中 R，T 均为可求积流(参见“整流”)，则称 S 为整平坦流. 利用边缘算子可以建立这类流的同调理论，这种同调理论与局部李普希茨范畴内的整系数的经典奇异同调论同构. 但是对于积分问题、相交理论等，这种链群明显地优于奇异链群. 因为与奇异链不同，一条平坦链与其分割等同，这就简化了闭链的构造，并得到较好的实系数上闭链. 不仅如此，由此还发现所谓等周不等式不仅对于微分几何中的某些特殊情形成立，而且对这种同调论有类似的估计，这就使得代数拓扑与测度论联系起来了.

可以用流的理论来研究普拉托问题. 存在性定理表明，极小曲面总是一个 m 维局部可求积流，即这样的流 $S\in\mathscr{D}_m(U)$，对每个 $x\in U$，总存在紧支集在 U 内的可求积流 R，使 $x\notin\operatorname{supp}(S-R)$. 曲面的光滑性问题就是 $\operatorname{supp}S$ 的光滑性问题. 于 $a\in\operatorname{supp}S$，若存在邻域 $V\subset\mathbb{R}^n$，使 $V\cap\operatorname{supp}S$ 为 C^2 类 m 维子流形，则称 a 为正则点，否则称 a 为奇点. 由于几何测度论的发展，使高维普拉托问题取得重大进展，因此，已知当 $m\leqslant 6$ 时极小曲面是光滑的，当 $m\geqslant 7$ 时，极小曲面的奇点集的 H 维数不超过 $m-7$. 类似于局部可求积流，可以定义局部整流、局部整平坦流. 后者与流形上分析中的实解析子簇与复解析子簇有着十分密切的关系.

弱可微函数(weakly differentiable function)　亦称有界变差函数. 是光滑函数的一种测度积分意义下的推广. 若 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可微函数，则对于 $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的李普希茨向量场 ξ，有

$$\int\langle\xi(x),Df(x)\rangle\mathrm{d}\mu_n=\int-f(x)\operatorname{div}\xi(x)\mathrm{d}\mu_n.$$

然而在上述等式中，对于等式的右边，仅从定义来看，并不一定要求 f 光滑，为了使右边的积分有意义，仅要求 f 局部 μ_n 可积即可，因此，对于局部 μ_n 可积的 f，上式右边的积分可看做由 f 确定的某个线性泛函在 ξ 的值，这个泛函就称为 f 的弱微分. 这种 f 称为弱可微函数. 开集 Ω 上全体弱可微函数之集记为 $BV(\Omega)$，则 $BV(\Omega)$ 按范数

$$\|f\|_{L^1}+\int_\Omega|Df|\mathrm{d}\mu_n$$

形成一个巴拿赫空间. 弱可微函数曾在各种场合下出现，首先是在勒贝格面积论，而后是在偏微分方程论中. 特别地，它是极小曲面理论中的有力工具.

撰　稿　朱玉堦　何伯和　汪　林　常心怡
审　阅　严绍宗　汪　林

泛 函 分 析

泛函分析(functional analysis) 研究一个空间到另一个空间的映射的数学分支,其中至少有一个空间是无穷维的.

泛函分析是分析、代数和几何这三大数学分支,经18—19世纪的发展,相互交叉与渗透,于20世纪30年代形成的具有高度综合性的一门学科.或者说泛函分析是用代数和几何的观念和方法研究分析课题的一门学科.

泛函分析的直接数学源头是变分法和积分方程.这种"函数的函数"的"泛函"观念于19世纪末开始出现于变分学中."局部极值"的研究以及经典分析中"一致收敛",各种"积分平均收敛"的运用促使人们把作为"自变量"的函数视为"点",而这种点与点之间还有远或近的度量,即"距离",赋有"距离"的函数的集合被视为"空间".20世纪初,就出现了由弗雷歇(Fréchet,M.-R.)提出的抽象的度量空间.1900年,弗雷德霍姆(Fredholm,(E.)I.)成功地将线性代数方程组理论推广到连续核积分方程.随后,希尔伯特(Hilbert,D.)在研究连续对称核积分方程时获得更为深入的结果,引入函数的正交展开,从而将积分方程转化成无限阶的线性代数方程组问题,这显示代数的观念和方法对解决某些分析课题的重要性,希尔伯特还发现在函数空间(无限维向量空间)中存在非特征值的连续谱.

20世纪20—30年代,泛函分析在经典分析的经验和发展需要的基础上,特别是受到量子物理大发展的刺激,经哈恩(Hahn,H.)、巴拿赫(Banach,S.)、里斯(Riesz,F.)、冯·诺伊曼(von Neumann,J.)等人的努力,沿着对偶理论和算子谱论这两个基本方向逐渐发展而形成一门独立学科.

关于对偶理论,首先是弗雷歇和里斯独立地给出了希尔伯特空间 l^2 上连续线性泛函的表示定理.然后里斯又相继给出许多具体空间,诸如 $C[a,b]$,$L^p[a,b]$和 $l^p(p>1)$上的连续线性泛函表示定理.随着20年代初赋范线性空间概念的引进,1927年,哈恩以及两年后的巴拿赫相互独立地解决了完备赋范线性空间上泛函延拓定理的证明,从而第一次引入了赋范线性空间的对偶空间.同一时期主要由巴拿赫证明了共鸣定理、开映射定理和压缩映射不动点定理等.1932年,巴拿赫的名著《线性算子理论》问世.

关于线性算子谱理论,在希尔伯特早期工作的基础上,里斯提出了全连续算子概念.先从 l^p,又对 $C[a,b]$,最终就巴拿赫空间讨论了相应的弗雷德霍姆理论,以后又由绍德尔(Schauder,J.P.)于1932年补充完成,即形成所谓的里斯-绍德尔理论.1929—1932年出现了抽象希尔伯特空间,冯·诺伊曼得到了无界自共轭算子、酉算子和正常算子的谱分解,这是线性算子理论的系统的奠基性工作.

跨入20世纪40年代,泛函分析又形成三个新分支,冯·诺伊曼受诺特代数环论影响开始弱闭对称算子环(后人称为冯·诺伊曼代数)的研究,后来盖尔范德(Гельфанд,И.М.)在完备对称环方面出色的研究以及在经典分析和表示理论方面成功的应用,不仅强化了泛函分析在数学中的地位,同时也逐渐形成了一般的 C^* 代数理论分支.索伯列夫(Соболев,С.Л.)对微分方程弱解的研究引发了对一些特定的函数空间的兴趣,这些空间的性质与问题的解的特征密切相关.索伯列夫空间的嵌入定理深刻地揭示了各种特定函数空间之间的关系.随后,施瓦兹(Schwarz,L.)在泛函分析观念下建立了广义函数论,广义函数不仅奠定了物理学家引入的 δ 函数及其相关的形式运算的理论基础,而且还为后来的偏微分方程理论的突破性进展起了基本的作用.在泛函分析形成过程中,提出了种种重要的弱收敛概念,这些收敛都不能纳入距离收敛框架之内,从而逐渐形成一般的拓扑线性空间理论分支,其中特别重要的是局部凸的拓扑线性空间理论.带有偏序结构的拓扑线性空间,因以一些函数空间为背景也得到了发展.

从泛函分析的起源来看,变分法中求的是非线性泛函 $J(y)$ 的极大与极小,在所研究的问题中,只要涉及的空间或映射有一个是非线性的.这就属于非线性泛函的范畴,在现实中非线性问题远比线性问题多,随着非线性问题研究的深入,业已逐渐形成在应用上有一定广泛性的泛函分析的非线性理论,如凸泛函与单调算子理论、隐函数理论、拓扑度理论、临界点理论、分歧理论等.可以预期非线性泛函分析今后会有更广阔的前景,发挥出更大的作用.

拓扑线性空间

线性空间(linear space) 亦称向量空间.具有线性结构的集合.设 E 是一非空集合,K 是实数域 R(或复数域 C),如果下列条件成立,则称 E 是实(或复)线性空间:

1. E 是加法群，即 E 中有加法运算“+”，对任意 $x,y,z\in E$，满足：

1) $x+y=y+x$(交换律).

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$(结合律).

3) 有零元 0，使得 $\forall x, 0+x=x$.

4) 对每个 $x\in E$，有加法逆元 $-x\in E$，使得

$$x+(-x)=0.$$

2. 对任意 $x\in E$ 和 $\alpha\in K$，对应于 E 中一个称为 α 与 x 的积的元素 αx，使得：

1) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.

2) $1\cdot x=x$.

3) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

4) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$(分配律).

线性空间 E 的元素称为向量，向量与向量的相加以及数与向量的乘积称为线性运算. 设 E_0 是 E 的子集，如果对任意 $x,y\in E_0$ 和 $\alpha\in K$，有 $x+y,\alpha x\in E_0$ 成立，则称 E_0 是 E 的线性子空间. 若 $E_0=\{0\}$ 或 E，则称 E_0 是平凡子空间. 若 $E_0\neq E$，则称 E_0 是 E 的真子空间. 向量空间是线性代数的中心内容和基本概念之一，它的理论和方法在科学技术的各个领域都有广泛的应用，同时也是泛函分析的一个基础.

向量空间(vector space)　即“线性空间”.

线性子空间(linear subspace)　见“线性空间”.

线性空间的商空间(quotient linear space)　由线性空间与其线性子空间导出的线性空间. 设 E 是线性空间，M 是 E 的一个线性子空间，将 E 中的向量分类：凡是适合 $x-y\in M$ 的两个向量 x,y 归于同一类，称其为(mod M 的)等价类. 把一个等价类看成是一个新的元，这种元的全体组成的集合记为 E/M，并记 x 所在的等价类为 $\tilde{x}$，在 E/M 中规定线性运算如下

$$\tilde{x}+\tilde{y}=\widetilde{(x+y)},\quad \alpha\tilde{x}=\widetilde{(\alpha x)}$$

(α 是数)，则 E/M 成为线性空间. 称 E/M 为 E 关于 M 的商空间.

线性表示(linear representation)　一种重要的表达形式. 指线性空间中的一个元素可通过另一组元素的线性运算来表示. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是线性空间 E 的有限个向量，$x\in E$，如果存在数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$x=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i,$$

则称 x 可由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性表示，或 x 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性组合.

线性组合(linear combination)　见“线性表示”.

子集张成的线性子空间(linear subspace of subset)　由子集的元的线性组合全体产生的空间. 设 A 是 E 的子集，令 L_A 为 E 中包含 A 的最小线性子空间，即

$$L_A=\{\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\,|\,c_i\in K, x_i\in A,\ i=1,2,\cdots,n;n\text{ 为任意正整数}\},$$

称 L_A 为子集 A 张成的线性子空间或 A 的线性包，常记为 $\operatorname{span}A$.

线性包(linear closure)　见“子集张成的线性子空间”.

线性无关集(linearly independent set)　线性空间中的一类子集. 设 S 是线性空间 E 的一个非空子集，如果 S 中任何有限个元都是线性无关的，则称 S 为 E 的一个线性无关的集合(参见《高等代数》有关条目).

线性无关的子空间(linearly independent subspaces)　线性空间中的一组特殊的子空间. 记 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是线性空间 E 的 n 个线性子空间，如果任取 $x_i\in E_i(x_i\neq0;i=1,2,\cdots,n)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是线性无关的，则称 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是一组线性无关的子空间.

线性空间的基(basis of linear space)　线性空间中的极大线性无关子集. 设 A 是线性空间 E 的一个线性无关子集，如果 A 张成的线性子空间就是 E 本身，即 $\operatorname{span}A=E$，则称 A 是 E 的一个线性基，或称为哈默尔基. A 的基数(势)称为 E 的维数，记为 $\dim E$. 当 $\dim E<+\infty$时，称 E 为有限维的；否则称 E 为无限维的. 任何线性空间都有哈默尔基，而且维数是惟一确定的，即不依赖于基的不同选择.

哈默尔基(Hamel base)　见“线性空间的基”.

线性空间的维数(dimension of linear space)　见“线性空间的基”.

有限维线性空间(finite-dimensional linear space)　见“线性空间的基”.

无限维线性空间(infinite-dimensional linear space)　见“线性空间的基”.

线性子空间的余维数(codimension of linear subspace)　线性子空间的补子空间的维数. 设 M 是线性空间 E 的线性子空间，子空间 M 的余维数就是商空间 E/M 的维数，它也等于 M 的补子空间的维数.

线性空间中的超平面(hyperplane in linear space)　线性空间中的一类子集. 形如 $x+H$ 的集称为线性空间 E 中的超平面，其中 $x\in E$，H 是 E 中的极大真子空间，即 H 的余维数为 1.

线性空间的直接和(direct sum of linear spaces)　线性空间的子空间之间的一种运算. 设 L_1，

$L_2,\cdots,L_n$ 是线性空间 E 的线性子空间，如果对任意 $x\in E$ 都可以惟一表示为 $x=x_1+x_2+\cdots+x_n(x_i\in L_i;i=1,2,\cdots,n)$，则称 E 是 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 的直接和，记为

$$E = L_1 \dotplus L_2 \dotplus \cdots \dotplus L_n.$$

E 是 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 的直接和当且仅当 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 是线性无关的子空间组，且对任何 $x\in E$，都存在 $x_i\in L_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $x=x_1+x_2+\cdots+x_n$. 如果 E 是 L_1 与 L_2 的直接和，则称 L_1 是 L_2 的补子空间，L_2 是 L_1 的补子空间，或 L_1 与 L_2 是互补的.

设 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 是线性空间，若对于由有序组构成的集合 $E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in L_i,i=1,2,\cdots,n\}$，在 E 中规定线性运算如下：$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$，$\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)$，则 E 成为线性空间，并称 E 为线性空间 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 的乘积空间，记为 $E=L_1\times L_2\times\cdots\times L_n$ 或简记为

$$\prod_{i=1}^{n} L_i.$$

如将 L_i 中的向量 x_i 与 E 中的向量 $(0,\cdots,0,x_i,0,\cdots,0)$ 视为同一，则 L_i 便可视为 E 中的线性子空间，在这个意义下，易知 E 又是 $\{L_i\}$ 的直接和.

线性子空间的补子空间(complementary subspace of linear subspace)　见"线性空间的直接和".

线性空间的乘积空间(product space of linear subspace)　见"线性空间的直接和".

线性空间的线性同构(isomorphism of linear spaces)　线性空间之间保持线性运算的一一对应. 设 X 和 Y 是两个线性空间(同为实的或复的)，如果存在由 X 到 Y 上的映射 φ，使得对任何 $x,y\in X$ 及数 α,β，等式

$$\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$$

成立，则称 X 和 Y 线性同态，φ 称为 X 到 Y 上的线性同态映射. 如果 φ 还是一对一的，则称 X 和 Y 线性同构，φ 称为 X 和 Y 之间的线性同构映射.

线性同态(homomorphism of linear spaces)　见"线性空间的线性同构".

度量空间(metric space)　亦称距离空间. 一种拓扑空间，其上的拓扑由距离决定. 设 R 是一个非空集合，$\rho(x,y)$ 是 R 上的二元函数，满足如下条件：

1. $\rho(x,y)\geqslant 0$ 且 $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$；
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；
3. (三角不等式) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$；

则称 $\rho(x,y)$ 为两点 x,y 之间的距离，R 按距离 ρ 成为度量空间或距离空间，记为 (R,ρ). 设 A 是 R 的子集，则 A 按 R 中的距离 ρ 也成为度量空间，称为 R 的(度量)子空间. 如果把上述距离的条件 1 改为 $\rho(x,y)\geqslant 0$ 且 $\rho(x,x)=0$，则称 ρ 为 R 上的拟距离. 当 $\rho(x,y)=0$ 时，记 $x\sim y$. $\sim$ 是 R 上的一个等价关系，记商集(即等价类全体)为 $D=R/\sim$，在 D 上作二元函数 $\tilde{\rho}$：$\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{y})=\rho(x,y)(x\in\tilde{x},y\in\tilde{y})$，则 $\tilde{\rho}$ 是 D 上的距离，而 $(D,\tilde{\rho})$ 称为 R 按拟距离 ρ 导出的商(度量)空间.

度量空间 (R,ρ) 中的子集 A 称为有界的，如果对 $x_0\in R$，存在常数 M，使 $\rho(x_0,x)\leqslant M$ 对 A 中的一切 x 成立. 设 $x_0\in R,r>0$，则称集合 $\{x\mid x\in R,\rho(x,x_0)<r\}$ 为以 x_0 为中心，r 为半径的开球，或 x_0 的 r 邻域，记为 $O(x_0,r)$. 又设 $A\subset R$，若对任何 $x\in A$，存在 x 的某个邻域 $O(x,r)\subset A$，则 A 称为开集；而称开集的补集为闭集. R 中包含子集 A 的最小闭集就称为 A 的闭包.

度量空间是弗雷歇(Fréchet, M.-R.)于 1906 年引进的，它是现代数学中的一种基本而重要并且非常接近于欧几里得空间的抽象空间，也是泛函分析的基础之一.

距离空间(metric space)　即"度量空间".

度量子空间(metric subspace)　见"度量空间".

商度量空间(quotient metric space)　见"度量空间".

距离(distance)　见"度量空间".

拟距离(quasi-distance)　见"度量空间".

可分度量空间(separable metric space)　亦称可析度量空间. 有可数稠密子集的度量空间. 设 A 是度量空间 R 的子集，如果存在有限集或可数集 $\{x_n\}\subset R$ 在 A 中稠密，就称 A 是可分点集. 当度量空间 R 本身是可分点集时，称 R 为可分度量空间.

可析度量空间(separable metric space)　即"可分度量空间".

按度量收敛(convergence in metric)　由距离刻画的收敛. 设 (R,ρ) 是度量空间，点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset R$，如果存在 $x_0\in R$，使当 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n,x_0)\to 0$，就称 $\{x_n\}$ 按距离 ρ 收敛于 x_0，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

或 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，并称 $\{x_n\}$ 为收敛点列，x_0 为 $\{x_n\}$ 的极限. 度量空间中收敛点列的极限是惟一的.

完备度量空间(complete metric space)　一类重要的度量空间. 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (R,ρ) 中的点列，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)>0$，使得当 $n,m>N(\varepsilon)$ 时，恒有 $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$，则 $\{x_n\}$ 称为 R 中的基本点列或柯西点列. 若度量空间 R 中的每个基本点列都收敛(即在 R 中有极限)，则称 R 是完备度量空间. 设 (R,ρ)，(R_1,ρ_1) 是两个度量空间. 如果存在由

R 到 R_1 上的映射 T，使得对一切 $x,y\in R$，有 $\rho_1(Tx,Ty)=\rho(x,y)$ 成立，则称 T 是 R 到 R_1 上的等距映射，并称 R 与 R_1 等距同构. 对于度量空间 R，如果有完备的度量空间 R_1，使 R 等距同构于 R_1 的一个稠密子空间，则称 R_1 是 R 的完备化空间. 任何度量空间都必存在完备化空间，且若除去等距同构不计外，完备化空间是惟一的. 1906 年，弗雷歇(Fréchet, M. -R.)在引进度量空间后，又运用柯西收敛准则提出了度量空间的完备化.

度量空间的完备化空间(completion of metric space)　见"完备度量空间".

基本点列(fundamental sequence of points)　见"完备度量空间".

柯西点列(Cauchy sequence of points)　即"基本点列".

等距映射(isometric mapping)　见"完备度量空间".

等距同构(isometrically isomorphism)　见"完备度量空间".

闭球套定理(closed ball nest theorem)　对度量空间的完备性的一种刻画. 设(R,ρ)是完备的度量空间，$S_n=\{x\mid\rho(x,x_n)\leqslant\varepsilon_n\}$是 R 中一闭球套：

$$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots,$$

如果球的半径 $\varepsilon_n\to0$，则必有惟一的点 x_0 属于每个 S_n，即

$$\{x_0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n.$$

进而，如果在度量空间 R 中上述闭球套定理成立，则 R 必是完备的.

疏朗集(nowhere dense set)　亦称无处稠密集. 度量空间中的一类子集. 如果度量空间 R 的子集 A 不在 R 的任何非空开集中稠密，则称 A 是疏朗集. 如果 R 中的点集 A 可以表成至多可数个疏朗集的并，就称 A 是第一范畴集(或第一纲集). 度量空间的非第一范畴集称为第二范畴集(或第二纲集). 贝尔纲定理断言：完备的度量空间必是第二范畴集. 贝尔纲定理是区间套定理的发展与提高，在证明许多存在定理时是很有用的.

无处稠密集(nowhere dense set)　即"疏朗集".

第一范畴集(set of the first category)　见"疏朗集".

第二范畴集(set of the second category)　见"疏朗集".

第一纲集(first category set)　即"第一范畴集".

第二纲集(second category set)　即"第二范畴集".

贝尔纲定理(Baire category theorem)　见"疏朗集".

列紧集(sequentially compact set)　度量空间中的一类子集. 设 A 是度量空间 R 中的子集，如果 A 中的任何点列必有收敛的子列，就称 A 是 R 中的列紧集. 如果 R 本身是列紧集，就称 R 是列紧空间. 列紧集是有界的. 但一般度量空间与欧氏空间不同，有界闭集不一定列紧.

完全有界集(totally bounded set)　度量空间中的一类子集. 对于度量空间 R 中的子集 A，如果有 $B\subset A$ 和正数 ε，使得以 B 的各点为心，以 ε 为半径的开球全体覆盖 A，即

$$\bigcup_{x\in B}O(x,\varepsilon)\supset A,$$

那么称 B 是 A 的 ε 网. 如果对任何 $\varepsilon>0$，A 总有有限的 ε 网 $\{x_1^{(\varepsilon)},x_2^{(\varepsilon)},\cdots,x_n^{(\varepsilon)}\}$，那么称 A 是完全有界的. 度量空间中的列紧集必是完全有界的，而在完备度量空间中，完全有界性与列紧性等价.

ε 网(ε-net)　见"完全有界集".

紧致集(compact set)　指度量空间 R 中列紧的闭集. 对于紧致集 A，如下的有限覆盖定理成立：设 $\mathscr{U}=\{O_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$是 R 中的一族开集，如果 $\mathscr{U}$ 覆盖 A，即

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha\supset A,$$

那么必有 $\mathscr{U}$ 中的有限个开集 $O_1,O_2,\cdots,O_n$ 覆盖 A：

$$\bigcup_{k=1}^{n}O_k\supset A.$$

反之，如果子集 $A\subset R$ 的任一开覆盖必存在有限覆盖，则 A 必是紧致的.

吸收集(absorbing set)　线性空间中的一类子集. 设 A 是线性空间 E 的子集，如果对每个 $x\in E$，必有正数 λ_0 使得对一切 $|\lambda|\leqslant\lambda_0$，有 $\lambda x\in A$，就称 A 是吸收的. 拓扑线性空间中零元的任何邻域都是吸收的.

凸集(convex set)　线性空间中的一类子集. 设 E 为线性空间，$x,y\in E$，集合$\{tx+(1-t)y\mid0\leqslant t\leqslant1\}$称为以 x,y 为端点的线段，记为$\overline{xy}$. 设 V 是 E 的一个子集，如果对任何 $x,y\in V$，均有$\overline{xy}\subset V$，就称 V 是凸集. 对 E 中任何子集 M，E 中包含 M 的最小凸集称为 M 的凸包(或凸壳)，记为 co$M$.

$$\operatorname{co}M=\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\,\Big|\,x_k\in M,a_k\geqslant0(k=1,2,\cdots,n),\sum_{k=1}^{n}a_k=1;n\text{ 为任意正整数}\Big\}.$$

凸集的几何学是拓扑线性空间理论的特色(参见本卷《凸分析》同名条).

线性空间中的线段(segment in linear space)　见"凸集".

凸包(convex hull)　见"凸集".

凸壳(convex hull)　即"凸包".

均衡集(balanced set)　线性空间中的一类子集. 设 A 是线性空间 E 的子集,如果对一切复数 $\lambda(|\lambda|\leqslant 1)$,均有 $\lambda A\subset A$,就称 A 是均衡(或平衡)的. 如果 A 既是凸集又是均衡集,就称 A 是均衡凸集,或绝对凸集.

平衡集(balanced set,circled set)　即"均衡集".

均衡凸集(balanced convex set)　见"均衡集".

绝对凸集(absolutely convex set)　即"均衡凸集".

均衡凸包(balanced convex hull)　包含给定子集的最小均衡凸集称为该子集的均衡凸包.

拓扑线性空间(topological linear space)　一类具有拓扑结构的线性空间. 如果实数域或复数域 K 上的线性空间 E 同时是有拓扑 τ 的拓扑空间,并且线性空间的基本运算 $x+y$ 和 $\alpha x(x,y\in E,\alpha\in K)$ 分别作为 $E\times E$ 和 $K\times E$ 到 E 中的映射按 τ 是连续的,则称 E 为(实或复)拓扑线性空间或拓扑向量空间. 而 τ 称为 E 的线性拓扑或向量拓扑,零元的均衡的邻域全体组成零元的邻域基. 满足 T_1 分离公理的拓扑线性空间是完全正则的.

拓扑线性空间理论是泛函分析的一个重要分支,其基本概念建立于 20 世纪 30 年代,而今已经发展成为一门完整的学科,在纯粹数学和应用数学、理论物理、现代力学和现代工程理论中都有广泛应用.

线性拓扑空间(linear topological space)　即"拓扑线性空间".

拓扑向量空间(topological vector space)　即"拓扑线性空间".

线性拓扑(linear topology)　见"拓扑线性空间".

向量拓扑(vector topology)　即"线性拓扑".

线性同胚(linear homeomorphism)　用来刻画两个拓扑线性空间结构相似性的概念. 设 E,F 是两个拓扑线性空间,Φ 是从 E 到 F 上的线性双射. 如果关于 E 和 F 的拓扑,Φ 和其逆 Φ^{-1} 都是连续的,就称 Φ 是 E 和 F 之间的一个线性同胚映射,而此时称 E 和 F 是线性同胚的,或是线性拓扑同构的.

线性同胚映射(linear homeomorphic mapping)　见"线性同胚".

线性拓扑同构(linearly topological isomorphism)　即"线性同胚映射".

凸体(convex body)　拓扑线性空间中含有内点的闭凸子集.

有界集(bounded set)　拓扑线性空间中的一类子集. 对于拓扑线性空间 E 的子集 S,若对零元的每个邻域 U,存在正数 $\delta(U)$,使得对一切 $|\lambda|\leqslant\delta(U)$,有 $\lambda S\subset U$ 成立,则 S 称为有界的. 对于拓扑线性空间 E 的子集 S,下面三条是等价的:

1. S 是有界集.

2. 对于趋于 0 的任何数列 $\{\lambda_n\}$ 以及 S 中任何点列 $\{x_n\}$ 均有 $\lambda_n x_n\to 0$.

3. 对每个点列 $\{x_n\}\subset S$,有 $x_n/n\to 0$.

拓扑线性空间中的有界集是赋范线性空间中用范数定义的有界集概念的推广.

完备的拓扑线性空间(complete topological linear space)　赋范线性空间完备性的推广. 设 E 是拓扑线性空间,$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$($\Lambda$ 为有序集)是 E 中的定向列(网),如果对零元的任一邻域 V,有 $\alpha_V\in\Lambda$,使当 $\alpha\succ\alpha_V,\alpha'\succ\alpha_V$ 时有 $x_\alpha-x_{\alpha'}\in V$,则称 $\{x_\alpha|\alpha\in V\}$ 为基本定向列(或柯西网). 如果 E 中每个基本定向列必在 E 中收敛,则称 E 是完备的. 如果 E 中每个基本点列必在 E 中收敛,则称 E 是序列完备的. 如果 E 中每个有界基本定向列必在 E 中收敛,则称 E 是有界完备的或拟完备的. 一般地,完备⇒有界完备⇒序列完备. 对于赋范线性空间,这三者等价.

拓扑线性空间必可完备化,即可拓扑线性同构于一个完备拓扑线性空间的稠密子空间. 普塔克(Ptak,V.)关于拓扑线性空间的完备性的进一步讨论,使得在一类很广的完备拓扑线性空间中开映射定理得到相应的推广. 建立开映射定理和闭图象定理是拓扑线性空间理论中的重要课题之一.

序列完备的拓扑线性空间(sequentially complete topological linear space)　见"完备的拓扑线性空间".

有界完备的拓扑线性空间(boundedly complete topological linear space)　见"完备的拓扑线性空间".

拟完备的拓扑线性空间(quasi-complete topological linear space)　见"完备的拓扑线性空间".

度量线性空间(metric linear space)　一类定义了距离的线性空间. 设 E 是线性空间,又是度量空间,ρ 是 E 上的距离,且 E 按 ρ 导出的拓扑成为拓扑线性空间,则称 E 为度量线性空间、线性度量空间或线性距离空间. 如果对一切 $x,y\in E,\rho(x-y,0)=\rho(x,y)$,则称 ρ 是平移不变距离. 如果对一切数 $\lambda(|\lambda|\leqslant 1)$,有 $\rho(\lambda x,0)\leqslant\rho(x,0)$,就称 ρ 是均衡的. 设 ρ 是 E 上均衡平移不变距离,则 $p(x)=\rho(x,0)$ 是 E 上的准范数. 完备的度量线性空间必可改赋一个均衡平移不变距离,且按这个距离是完备的,从而是弗雷歇空间.

线性距离空间(linear metric space)　即"度量线性空间".

平移不变距离(translation invariant distance)　见"度量线性空间".

均衡平移不变距离(circled translation invariant distance) 见“度量线性空间”.

可度量化的拓扑线性空间(metrizable topological linear space) 可用距离来刻画拓扑结构的拓扑线性空间. 拓扑线性空间 E 称为可度量化的,是指 E 上存在一个距离 ρ,使 ρ 导出的拓扑与 E 中原有拓扑相同. E 可度量化的充分必要条件是 E 的拓扑满足第一可数公理和 T_0 公理. 由上述可知,这时必存在 E 上一个均衡平移不变距离 ρ,命名 E 的拓扑是 ρ 导出的.

局部有界空间(locally bounded space) 一类拓扑线性空间. 如果拓扑线性空间 E 中存在零元的一个有界的邻域,则称 E 是局部有界的. 局部有界空间是亥尔斯(Hyers, D. H.)于 1939 年引入的. 局部有界空间也一定是度量线性空间.

次可加泛函(sub-additive functional) 线性空间上的一类非负值函数. 设 E 为线性空间,$p(x)$ 是 E 上的泛函. 如果:

1. 当 $x\in E$ 时,$p(x)\geqslant 0$;
2. 当 $x,y\in E$ 时,$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$;
3. 当 $x\in E,\alpha\geqslant 0$ 时,$p(\alpha x)=\alpha p(x)$;

则称 p 是一个次可加泛函.

闵科夫斯基泛函(Minkowski functional gauge) 拓扑线性空间上的一类非负值函数. 设 E 是线性空间,V 是 E 中凸吸收子集,E 上如下定义的实值泛函 $p_V(x)=\inf\{\lambda>0 \mid x\in\lambda V\}$ 称为关于 V 的闵科夫斯基泛函. 闵科夫斯基泛函 $p_V(\cdot)$ 是 E 上的次可加泛函,而且当 V 是均衡凸吸收集时,$p_V(\cdot)$ 是半范数. 闵科夫斯基泛函是研究凸集的有效工具.

拓扑线性空间的泛函延拓定理(functional extension theorem of topological linear space) 关于子空间上的线性泛函可延拓到整个空间的重要定理. 设 f 是拓扑线性空间 E 上的线性泛函,则下面三条等价:

1. $f(x)$ 在 E 上连续.
2. 半空间 $\{x\in E \mid \mathrm{Re}\, f(x)>0\}$ 是开集.
3. 超平面 $\{x\in E \mid f(x)=0\}$ 是 E 的闭子空间.

在 E 的线性子空间 F 上定义的线性泛函 $f(x)$ 能扩张为 E 上的连续线性泛函的充分必要条件是,存在零元的凸邻域 V 使它和 $\{x\in F \mid f(x)=1\}$ 不相交,当条件满足时至少有一个扩张在 V 上不取 1 的值. 这称为哈恩-巴拿赫泛函延拓定理. E 上连续线性泛函全体组成的线性空间称为 E 的对偶空间(或共轭空间),常记为 E' 或 E^*.

对偶空间(dual space) 见“拓扑线性空间的泛函延拓定理”.

局部凸空间(locally convex space) 最重要的一类拓扑线性空间. 设 E 是拓扑线性空间,如果 E 中存在由均衡凸集组成的零元的邻域基,就称 E 是局部凸的拓扑线性空间,简称局部凸空间,而 E 的拓扑称为局部凸拓扑. 零元的每个均衡凸邻域 V 的闵科夫斯基泛函 $p_V(x)$ 是 E 上的连续半范数. 反之,设 $\{p_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 是 E 上一族半范数,E 上使 $p_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 均为连续的最弱拓扑是局部凸的,且零元的均衡凸邻域基由下面形式的集组成

$$U=\{x\in E \mid p_{\lambda_k}(x)\leqslant\varepsilon_k, k=1,2,\cdots,n\}.$$

这个局部凸拓扑称为由半范数族 $\{p_\lambda\}$ 确定的局部凸拓扑. 如果对任何 $x\in E(x\neq 0)$,都存在 $\lambda\in\Lambda$ 使 $p_\lambda(x)\neq 0$,则 $\{p_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ 确定的局部凸拓扑是豪斯多夫拓扑. 通常局部凸空间都指豪斯多夫局部凸空间. E 中的定向半序点列 $\{x_\alpha\}$ 收敛于 $x\in E$ 等价于对每个 $\lambda\in\Lambda$,$p_\lambda(x_\alpha-x)\to 0$. 设 E_1 是由另一半范数族 $\{q_\beta\}$ 确定的局部凸空间,则使线性映射 $T:E\to E_1$ 连续的充分必要条件是,对任意的 q_β,总存在有限个 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\Lambda$ 和常数 c,使不等式

$$q_\beta(Tx)\leqslant c(p_{\lambda_1}(x)+p_{\lambda_2}(x)+\cdots+p_{\lambda_n}(x))$$

对一切 $x\in E$ 成立.

局部凸空间的完备化空间也是局部凸的. 根据哈恩-巴拿赫泛函延拓定理,局部凸空间上存在足够多的非零连续线性泛函. 正因为如此,局部凸空间理论成为拓扑线性空间理论中最重要的部分.

关于局部凸空间理论的发展大约是始于迪厄多内(Dieudonné, J.)和施瓦兹(Schwarz, L.)在 1949 年的工作,它的一个主要推动力是分布理论,即广义函数理论.

不交凸集的分隔性定理(separation theorem for disjoint convex sets) 线性泛函延拓定理的几何形式. 由线性泛函的延拓定理可以得到下面的不交凸集的分隔性定理. 设 E 是实局部凸拓扑线性空间,则下列断言成立:

1. 如果 A,B 是 E 中两个不相交的闭凸集且 A 是紧的,则必存在 E 上连续线性泛函 f 强分隔 A 和 B,即存在 $\varepsilon>0$ 和实数 r,使当 $x\in A$ 时,$f(x)\geqslant r$,而当 $x\in B$ 时,$f(x)\leqslant r-\varepsilon$.

2. 如果 A 和 B 是 E 中不相交的凸集且 A 含有内点,则存在 E 上连续线性泛函 f 分隔 A 和 B,即有实数 r,使当 $x\in A$ 时,$f(x)\geqslant r$,而当 $x\in B$ 时,$f(x)\leqslant r$.

如果 A 和 B 是开凸集,则上述分隔是严格的,即相应不等式中严格不等号成立. 对复局部凸空间的情形,只要用实部 $\mathrm{Re}f$ 代替连续线性泛函 f,上述诸结论也成立.

分隔性定理是研究凸集的拓扑性质的一种有用的工具. 对于欧氏空间,闵科夫斯基(Minkowski, H.)早在 1911 年就建立了凸体的分隔性定理(参见

本卷《凸分析》中的“凸集分离定理”).

端点定理(extreme point theorem) 描述局部凸空间端点集合结构的定理.设 A 为线性空间 E 的子集,点 $x\in A$ 称为 A 的端点,如果任何含有点 x 的线段包含在 A 内,则 x 就是该线段的端点.当 A 是局部凸空间 E 的紧凸集时,A 的端点全体所成集合的闭凸包与 A 相等.这个命题称为克列因-米尔曼端点定理,克列因(Крейн,M. Г.)和米尔曼(Мильман,Д. П.)于 1940 年就赋范线性空间的情形证明了上述定理.端点方法已成为研究凸性的一种重要工具(参见本卷《凸分析》中的“端点”).

克列因-米尔曼端点定理(Klein-Milman extreme point theorem) 见“端点定理”.

端点(extreme point) 见“端点定理”.

范数拓扑(norm topology) 赋范线性空间中由范数导出的拓扑.在此拓扑下,收敛的概念即是依范数收敛.对有界线性算子空间的情形,算子范数拓扑有时也称为一致拓扑.

可赋范拓扑线性空间(normable topological linear space) 可用范数来刻画拓扑的拓扑线性空间.设 E 是拓扑线性空间,如果 E 上还存在一个范数 $\|\cdot\|$,使 $\|\cdot\|$ 导出的拓扑与 E 中原来的拓扑相同,则称 E 是可赋范的.拓扑线性空间可赋范的充分必要条件是满足下面三条:

1. E 满足 T_0 公理.
2. E 是局部凸的.
3. E 是局部有界的.

上述充分必要条件是柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А. Н.)于 1934 年给出的,也是最早得到的有关拓扑线性空间理论的一个结果.

赋可列半范线性空间(sequentially semi-normed linear space) 一类局部凸空间.设 E 是局部凸空间,如果 E 的拓扑可由可列个连续半范数 $\{p_n(\cdot)\}$ 确定,则称 E 是赋可列半范线性空间.不失一般性,还可以要求 $p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant\cdots\leqslant p_n(x)\leqslant\cdots(x\in E)$.当 p_n 都是范数时,称 E 为赋可列范线性空间.

局部凸空间为赋可列半范空间的充分必要条件是存在可列的零元邻域基.赋可列半范空间是准范空间.巴拿赫空间上的算子理论大部分可以推广到这类空间上.

赋可列范线性空间(sequentially normed linear space) 见“赋可列半范线性空间”.

线性空间的对偶(duality of linear space,dual pair of linear space) 满足一定条件的一对线性空间.同一数域 K(实数域或复数域)上的线性空间 X,Y,如果由 $X\times Y$ 到 K 的双线性泛函 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足下述分离公理:

1. 若对每个 $y\in Y$,满足 $\langle x,y\rangle=0$,则 $x=0$;
2. 若对每个 $x\in X$,满足 $\langle x,y\rangle=0$,则 $y=0$;

那么 X 和 Y 称为互为对偶的线性空间.亦称 Y(或 X)是 X(或 Y)的对偶.

设 X 是线性空间,$X^{\#}$ 是 X 上的线性泛函全体,如果 $Y\subset X^{\#}$,且 Y 在 X 上是全的(即若 $x\neq0$,则必存在 $y\in Y$ 使 $\langle x,y\rangle=y(x)\neq0$),则 (X,Y) 按双线性泛函 $\langle x,y\rangle=y(x)$ 成为对偶,实际上任何对偶线性空间 (X,Y) 总可以表达为上述形式.如果 E 是局部凸空间,E'(或 E^*)是 E 上的连续线性泛函全体,则 (E,E') 称为自然对偶.在线性空间的对偶概念基础上所形成的对偶理论是局部凸空间理论的中心内容,它也是把局部凸空间和它的共轭空间放在相对称的地位来加以研究的.

自然对偶(natural duality) 见“线性空间的对偶”.

弱拓扑(weak topology) 一种局部凸拓扑.设线性空间对 (X,Y) 关于双线性泛函 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 成为对偶,称 X 上由半范数族 $\{|\langle\cdot,y\rangle|\,|\,y\in Y\}$ 确定的局部凸拓扑为 X 的关于对偶 Y 的弱拓扑,记为 $\sigma(X,Y)$.对称地,Y 上由半范数族 $\{|\langle x,\cdot\rangle|\,|\,x\in X\}$ 确定的局部凸拓扑称为 Y 的关于对偶 X 的弱拓扑,记为 $\sigma(Y,X)$.当 X 为局部凸空间时,(X,X^*) 为自然对偶,$\sigma(X,X^*)$ 称为 X 的弱拓扑,而 $\sigma(X^*,X)$ 称为 X^* 的弱 * 拓扑.相应地,X 中原有的拓扑称为强拓扑.一般地,X 的弱拓扑比强拓扑弱,从而弱闭集必是强闭集;对于凸集,其逆也成立,即强闭凸集也是弱闭的.集合的弱有界性与强有界性是等价的.

赋范线性空间的深入研究必然遇到弱拓扑问题.事实上,1930 年,冯·诺伊曼(von Neumann,J.)就注意到了这一点.这也是需要引入拓扑线性空间的一个原因.

弱 * 拓扑(weak * topology) 见“弱拓扑”.

弱收敛(weak convergence) 一种收敛性,指依弱拓扑收敛.局部凸空间 E 中定向列 $\{x_\alpha\}$ 弱收敛于向量 x,记为 $(w)\lim\limits_{\alpha}x_\alpha=x$,其充分必要条件是对每个 $f\in X^*$,都有 $\lim\limits_{\alpha}f(x_\alpha)=f(x)$.

舒尔空间(Schur space) 点列强、弱收敛等价的空间.设 X 是巴拿赫空间,若 X 中的点列 $\{x_n\}$ 强收敛当且仅当 $\{x_n\}$ 弱收敛,则 X 称为舒尔空间.有如下结论:

1. 有限维赋范线性空间是舒尔空间.
2. 巴拿赫空间 l^1 是舒尔空间.

格罗腾迪克-巴拿赫空间(Grothendieck-Banach space) 其共轭空间中点列的弱收敛与弱 * 收敛等价的空间.设 X 是巴拿赫空间,若 X^* 中的点列 $\{f_n\}$

弱收敛等价于$\{f_n\}$弱 * 收敛，则 X 称为格罗腾迪克-巴拿赫空间，简称 G-B 空间. 有如下结论：

1. 自反空间是 G-B 空间.

2. 巴拿赫空间 l^∞ 是 G-B 空间. 这是格罗腾迪克(Grothendieck, A.)于 1953 年证明的.

巴拿赫-阿劳格鲁定理(Banach-Alaoglu theorem) 关于共轭空间中闭单位球是弱 * 紧的重要定理. 设 X 是巴拿赫空间，则 X^* 中的闭单位球是弱 * 紧的. 巴拿赫(Banach, S.)于 1932 年就可分的巴拿赫空间证明了上述定理，1940 年，阿劳格鲁(Alaoglu, L.)指出，可分性的假设可以去掉. 故人们把上述定理称为巴拿赫-阿劳格鲁定理.

弱 * 收敛(weak * convergence) 一种收敛性. 指依弱 * 拓扑收敛. 设 X^* 为局部凸空间 X 的共轭空间，定向列$\{f_\alpha\}\subset X^*$弱 * 收敛于 $f\in X^*$，记为

$$(w^*)\lim_\alpha f_\alpha = f,$$

其充分必要条件是对任意的 $x\in X$ 都有

$$\lim_\alpha f_\alpha(x) = f(x)$$

成立.

强拓扑(strong topology) 一种拓扑. 局部凸空间 X 中原有的拓扑，相对于弱拓扑 $\sigma(X,X^*)$称为 X 的强拓扑. 例如赋范线性空间的强拓扑即为范数拓扑. 对于共轭空间 X^*，记 $\mathscr{B}$ 为 X 中有界子集全体，对每个有界子集 $B\in\mathscr{B}$，定义半范数

$$P^B(f) = \sup_{x\in B}\{|f(x)|\,|\,f\in X^*\},$$

则由半范数族$\{P^B(\cdot)\,|\,B\in\mathscr{B}\}$确定的 X^* 中的局部凸拓扑称为 X^* 的强拓扑，记为 $\beta(X^*,X)$. X^* 的强拓扑强于弱 * 拓扑 $\sigma(X^*,X)$. 当 X 为赋范线性空间时，X^* 的强拓扑就是由有界线性泛函的范数导出的拓扑.

强收敛(strong convergence) 依强拓扑收敛的简称.

魁特序列空间(Köthe sequence space) 由复数序列组成的一类局部凸拓扑线性空间. 设 λ 是复数序列 $x=\{x_n\}$组成的线性空间，定义

$$\lambda^\alpha = \left\{u=\{u_n\}\,\middle|\,\sum_{n=1}^\infty |u_nx_n| < +\infty, x\in\lambda\right\},$$

称为 λ 的魁特对偶或 α 对偶. 显然有 $\lambda^{\alpha\alpha}\supset\lambda$($\lambda^{\alpha\alpha}$定义为$(\lambda^\alpha)^\alpha$). 当 $\lambda^{\alpha\alpha}=\lambda$ 时，就称 λ 为魁特序列空间. 若规定 λ^α 中的有界集 N 为：对任何 $x\in\lambda$，有

$$\sup_{u\in N}\left|\sum_{n=1}^\infty u_nx_n\right| < +\infty,$$

则 λ 可引进对 λ^α 的有界集为一致收敛的拓扑，称为 λ 的强拓扑，它是一种局部凸拓扑，这时

$$\left\{x\in\lambda\,\middle|\,\sup_{u\in N}\left|\sum_{n=1}^\infty u_nx_n\right| < \varepsilon\right\}$$

(N 为 λ^α 的有界集，$\varepsilon>0$)为强拓扑的零元邻域基. $l^p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，$s$ 是魁特序列空间，并且强拓扑分别与相应的范数拓扑、准范数拓扑一致，而 c 则不是魁特序列空间. 魁特序列空间是德国数学家魁特(Köthe, G.)等人于 1934 年提出的，它对拓扑线性空间理论的形成与发展有重要影响，在求和法等方面也有广泛应用.

弱算子拓扑(weak operator topology) 算子空间中的一种局部凸拓扑. 设 X,Y 为赋范线性空间，$\mathscr{B}(X\to Y)$为 X 到 Y 的有界线性算子全体所成的赋范线性空间. $\mathscr{B}(X\to Y)$中由半范数族$\{P_{x,f}(A)=|f(Ax)|\,|\,x\in X, f\in Y^*\}$确定的局部凸拓扑称为弱算子拓扑，它的零元邻域基由形如$\{A\,|\,|f_i(Ax_i)|<1, f_i\in Y^*, x_i\in X, i=1,2,\cdots,n\}$的集组成. 算子定向列$\{A_\alpha\}$弱收敛于算子 A，记为

$$(w)\lim_\alpha A_\alpha = A,$$

其充分必要条件是对每个 $x\in X$ 及每个 $f\in Y^*$，都有

$$\lim_\alpha f(A_\alpha x) = f(Ax)$$

成立.

强算子拓扑(strong operator topology) 算子空间中的又一种拓扑. 从赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子全体所成的赋范线性空间 $\mathscr{B}(X\to Y)$中由半范族$\{p_x(A)=\|Ax\|\,|\,x\in X\}$确定的局部凸拓扑称为 $\mathscr{B}(X\to Y)$的强算子拓扑，它的零元邻域基由形如$\{A\,|\,\|Ax_i\|<1, x_i\in X, i=1,2,\cdots,n\}$的子集组成. 算子定向列$\{A_\alpha\}$强收敛于算子 A，记为

$$(s)\lim_\alpha A_\alpha = A,$$

其充分必要条件是对任何 $x\in X$，有

$$\lim_\alpha \|A_\alpha x - Ax\| = 0.$$

强算子拓扑比弱算子拓扑强，又比算子范数拓扑弱.

强基本定向列(strong fundamental directed set of points) 基本点列在局部凸空间中的推广. 局部凸空间 E 中的定向列$\{x_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$称为强(弱)基本的，是指$\{x_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$依强(弱)拓扑是基本的，即对任一给定的强(弱)邻域 U，存在 α_0，当 $\alpha_1\succ\alpha_0$，$\alpha_2\succ\alpha_0$ 时，总有 $x_{\alpha_1}-x_{\alpha_2}\in U$. 对于有界线性算子空间 $\mathscr{B}(X\to Y)$(其中 X,Y 是赋范线性空间)，$\mathscr{B}(X\to Y)$中算子定向列$\{A_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$是强(弱)基本的充分必要条件是对每个 $x\in X$，$\{A_\alpha x\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 是 Y 中的强(弱)基本定向列. 算子定向列$\{A_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$弱基本的意思是指：对任何 $x\in X, f\in Y^*$，$\{f(A_\alpha x)\,|\,\alpha\in\Lambda\}$是基本定向列.

弱基本定向列(weak fundamental directed set of points) 见“强基本定向列”.

弱 * 基本定向列(weak * fundamental direct-

ed set of points) 在弱 * 拓扑意义下的基本定向列. 局部凸空间 E 的共轭空间 E^* 的定向列 $\{f_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ 称为弱 * 基本的, 是指 $\{f_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ 按 E^* 中的弱 * 拓扑是基本定向列, 即对任何 $x\in E$, $\{f_\alpha(x) \mid \alpha\in\Lambda\}$ 是基本定向列.

弱序列完备(weak sequential completeness) 关于弱拓扑的序列完备性. 设 X 是赋范线性空间, X^* 是 X 的共轭空间, 称 $X(X^*)$ 是弱(弱 *)序列完备, 是指 $X(X^*)$ 中的任何弱(弱 *)基本序列都在 $X(X^*)$ 中弱(弱 *)收敛.

弱 * 序列完备(weak sequential completeness) 见"弱序列完备".

弱有界集(weak bounded set) 按弱拓扑是有界的集. 例如, 设 X, Y 是赋范线性空间, $\{A_\alpha\}$ 是 X 到 Y 的一族线性算子, 则 $\{A_\alpha\}$ 为弱有界, 是指对任何 $x\in X$, $y^*\in Y^*$, 数集 $\{y^*(A_\alpha x)\}$ 有界.

弱 * 列紧(weak * sequential compactness) 与弱 * 收敛相联系的列紧性. 设 X 是赋范线性空间, S 是共轭空间 X^* 的子集. 如果 S 中任何点列 $\{f_n\}$ 都有弱 * 收敛的子序列, 则称 S 是弱 * 列紧的. 类似可定义 X 中子集的弱列紧概念. 当 X 可分时, X^* 中点集的有界性与弱 * 列紧性等价. 弱(弱 *)列紧以及弱(弱 *)收敛、弱(弱 *)序列完备等都是赋范线性空间理论中的重要概念.

弱列紧(weak sequential compactness) 见"弱 * 列紧".

强列紧(strong sequential compactness) 与强收敛相联系的列紧性. 设 X 是赋范线性空间, S 是 X 的子集, 如果 S 中任何点列都有强收敛(即按范数收敛)的子列, 则称 S 是强列紧的. 赋范线性空间是有限维的充分必要条件是每个有界集都是强列紧的.

马祖尔空间(Mazur space) 一类局部凸空间. 如果局部凸空间上的每一个序列连续线性泛函也是连续的, 那么称这种空间为马祖尔空间. 以某个重要性质成立来刻画空间结构往往很有价值. 在拓扑线性空间理论中如马祖尔空间等重要空间就是这样提出来的.

囿集(bornivore) 拓扑线性空间中的一类子集. 拓扑线性空间的一个子集 S 称为是囿集, 如果它吸收所有的有界集. 显然, 每个零元邻域都是囿集.

囿空间(bornologic space) 一类局部凸空间. 设 E 是局部凸空间, 如果 E 中每个均衡凸的囿集都是零元的邻域, 则称 E 是囿空间或有界型空间. 局部凸空间是囿的, 当且仅当在每个有界集上有界的半范数是连续的. 设 E 是囿空间, E_1 是局部凸空间, 则由 E 到 E_1 的有界线性映射必是连续的.

有界型空间(bornologic space) 即"囿空间".

桶型空间(barreled space) 一类局部凸空间. 设 E 是局部凸空间, E 中的吸收的均衡凸闭集称为桶集. 在序列完备空间中, 因而在有界完备空间中, 桶集吸收每个有界集. 如果局部凸空间 E 的每个桶集都是零元的邻域, 则 E 称为桶型空间. E 成为桶型空间的充分必要条件是每个下半连续的半范数必是连续的. 桶型空间的研究与一致有界定理在拓扑线性空间中的推广有密切的联系.

桶集(barrel) 见"桶型空间".

几乎开线性映射(almost open linearly map) 一类重要的线性映射. 从拓扑线性空间 X 到拓扑线性空间 Y 的线性映射 f 称为是几乎开的, 如果对 X 中零元的每个邻域 V, $\overline{f(V)}$ 是 Y 中的零元邻域. 几乎开映射可用来刻画桶型空间, 并且和开映射定理的研究有紧密联系.

拟桶型空间(quasi-barreled space) 桶型空间概念的推广. 设 E 是局部凸空间, E 中的子集 A 称为拟桶集, 是指 A 是吸收一切有界集的桶集. 如果 E 中每个拟桶集都是零元的邻域, 则称 E 为拟桶型空间. 局部凸空间为拟桶型空间的充分必要条件是在每个有界集上的下半连续半范数是连续的.

拟桶集(quasi-barrel) 见"拟桶型空间".

可允许拓扑(admissible topology) 一种局部凸拓扑. 设 (X,Y) 是对偶线性空间, $\mathscr{Y}$ 是 Y 中的有界集族, 且并 $\bigcup\{A \mid A\in\mathscr{Y}\}$ 的线性包是 Y, 即 Y 是 $\bigcup\{A \mid A\in\mathscr{Y}\}$ 张成的线性空间, 对每个 $A\in\mathscr{Y}$, 定义半范数

$$p_A(x)=\sup_{y\in A}|\langle x,y\rangle|,$$

则由半范数族 $\{p_A(x) \mid A\in\mathscr{Y}\}$ 确定的 X 上局部凸拓扑 $T_{\mathscr{Y}}$ 称为关于对偶线性空间 (X,Y) 的一个可允许拓扑, 或在集类 $\mathscr{Y}$ 上的一致收敛拓扑, 而相应的有界集族 $\mathscr{Y}$ 称为可允许集族. 令 $\mathscr{F}$ 是 Y 中有限集全体形成的集族, 则有 $T_{\mathscr{F}}=\sigma(X,Y)$, 因而弱拓扑是可允许的.

可允许集族(admissible family) 见"可允许拓扑".

相容拓扑(compatible topology) 一种局部凸拓扑. 设 (X,Y) 是对偶线性空间, 若 τ 是 X 上的局部凸拓扑, 使得 X 上关于 τ 连续的线性泛函全体 $(X,\tau)'$ 恰好是 Y, 则称 τ 是 X 上的一个相容拓扑. 弱拓扑 $\sigma(X,Y)$ 是 X 上最弱的相容拓扑. 相容拓扑是对偶线性空间中很值得研究的一种局部凸拓扑, 并且需要刻画出所有这样的拓扑.

麦基空间(Mackey space) 一类局部凸空间. 设 (X,Y) 为对偶线性空间, 在 Y 的每个弱紧凸集上

一致收敛的拓扑是一种可允许拓扑,称为 X 上的麦基拓扑,记为 $\tau(X,Y)$. X 上一个局部凸拓扑成为相容拓扑的充分必要条件是它比弱拓扑 $\sigma(X,Y)$ 强,而比 $\tau(X,Y)$ 弱. 麦基拓扑是最强的相容拓扑. 原来的拓扑与麦基拓扑 $\tau(E,E')$ 相同的局部凸空间 E 称为麦基空间. 拟桶型空间是麦基空间.

麦基拓扑(Mackey topology) 见"麦基空间".

对偶不变性(duality invariant) 指对偶线性空间相容拓扑不变的性质. 设 (X,Y) 是对偶线性空间,对于 X 上任给的相容拓扑 τ_1,τ_2,由定义可知,$(X,\tau_1)'=(X,\tau_2)'=Y$. 如果某命题对某个相容拓扑 τ_1 成立,则必对任何其他的相容拓扑 τ_2 也成立,也就是说命题仅和对偶有关,而与 X 上相容拓扑的选取无关,就称此命题具有对偶不变性. 集合的有界性就是一个对偶不变的性质. 设 (X,Y) 是对偶线性空间,则对 X 的所有相容拓扑,都有相同的闭凸集,有相同的闭线性子空间,有相同的桶集.

极(polar) 在对偶线性空间中,由一个空间的子集通过双线性泛函导出的另一空间的子集. 设 (X,Y) 是对偶线性空间,$A\subset X$,则 Y 中的子集

$$A^0=\{y\in Y \mid |\langle x,y\rangle|\leqslant 1 \text{ 对每个 } x\in A\}$$

称为 A 的极. 同样对 $B\subset Y$,也可定义 B 的极

$$B^0=\{x\in X \mid |\langle x,y\rangle|\leqslant 1 \text{ 对每个 } y\in B\}.$$

设 τ 是 X 上任一相容拓扑,$A\subset X$,则 $A^{00}=(A^0)^0$ 等于 A 的均衡凸闭包. 特别地,A^{00} 是 A 的关于弱拓扑 $\sigma(X,Y)$ 的均衡凸闭包,这个命题称为双极定理. 特别地,当 $X=Y$ 为希尔伯特空间时,X 的子空间 A 的极 $A^0=A^{\perp}$. 又当 X 是巴拿赫空间,$Y=X^*$,而 $A=\{x \mid \|x\|\leqslant r\}$ 时,

$$A^0=\left\{x^* \mid \|x^*\|\leqslant\frac{1}{r}\right\}.$$

由于对极可以进行运算,这为对偶空间理论的研究带来很大方便. 极的运算是拓扑线性空间理论中十分有用的工具之一.

双极定理(bipolar theorem) 见"极".

极拓扑(polar topology) 对偶线性空间中的一种局部凸拓扑. 设 (X,Y) 是对偶线性空间,$\mathscr{A}$ 是有界集族,且

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A=Y,$$

那么由 $\{A^0 \mid A\in\mathscr{A}\}$ 组成的零元邻域基所生成的拓扑称为 X 上的极拓扑. 极拓扑可以把对偶线性空间中各种局部凸拓扑置于统一的形式下来处理.

自反局部凸空间(reflexive locally convex space) 一类局部凸空间. 设 E 是局部凸空间,则赋予强拓扑的共轭空间 E' 的共轭空间 E'' 包含原来的空间 E,当 $E''=E$ 时,称 E 是半自反的. 进一步当 E 的拓扑和强拓扑 $\beta(E,E')$ 一致时,称 E 为自反的. E 为半自反的充分必要条件是 E 的任意有界弱闭凸集是弱紧的. E 为自反的充分必要条件是 E 为半自反的且是拟桶型的. 对于赋可列范线性空间,自反和半自反是一致的.

半自反局部凸空间(semireflexive locally convex space) 见"自反局部凸空间".

蒙泰尔空间(Montel space) 一类桶型空间. 如果桶型空间 E 的任意有界闭集都是紧的,则称它为蒙泰尔空间或 M 空间. M 空间是自反的,其共轭空间也是 M 空间. 蒙泰尔空间是广义函数论中十分有用的一类空间.

核映射(nuclear map) 一类重要的映射. 设 X 是局部凸空间,Y 是巴拿赫空间,T 是从 X 到 Y 的线性映射,如果 T 有如下表示

$$Tx=\sum_{j=1}^{\infty}c_j f_j(x)y_j,$$

其中 $c_j\geqslant 0$ 且

$$\sum_{j=1}^{\infty}c_j<+\infty,$$

$\{f_j\}$ 是 X 上连续线性泛函序列,$\{y_j\}$ 是 Y 中有界序列,则称 T 为核映射.

核型空间(nuclear space) 一类局部凸空间. 局部凸空间 X 称为核型空间,如果对零元的任何均衡凸邻域 V,存在另一零元的均衡凸邻域 $U\subset V$,使得典型映射 $T:X_V\to X_U$ 是核映射. 这里,X_U 是商空间 $(X,P_U(\cdot))/\{x \mid P_U(x)=0\}$,而 X_V 是商空间 $(X,P_V(\cdot))/\{x \mid P_V(x)=0\}$ 的完备化空间,$P_U(\cdot)$ 及 $P_V(\cdot)$ 是由 U 和 V 各自产生的闵科夫斯基泛函. 巴拿赫空间为核型空间的充分必要条件是该空间为有限维的. 核型空间在分析学中有非常重要的应用,是格罗腾迪克(Grothendieck,A.)于 1955 年首先引入的.

归纳极限(inductive limit) 一种通过一族拓扑线性空间构造出的新的拓扑线性空间. 设 $\{X_\alpha \mid \alpha\in\mathscr{A}\}$ 是一族拓扑线性空间(不必要求是局部凸的),Y 是一个固定的线性空间,对每个 $\alpha\in\mathscr{A}$,有线性映射 $u_\alpha:X_\alpha\to Y$ 满足条件:

$$\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}\mathscr{R}(u_\alpha)$$

的线性扩张等于整个 Y,即对任何 $y\in Y$,存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathscr{A}$ 及 $x_i\in X_{\alpha_i}$ 和数 c_i 使得

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_i u_{\alpha_i}(x_i).$$

记 T 是 Y 中使得诸 u_α 都连续的最强局部凸拓扑,则拓扑线性空间 (Y,T) 称为 $\{X_\alpha\}$ 的归纳极限.

严格归纳极限(strict inductive limit) 一类特殊的归纳极限. 设 X 是一线性空间,$\{X_\alpha\}$ 是 X 的线性子空间族使得 $\bigcup X_\alpha=X$. 又设每个 X_α 都是局部凸

空间且当 $X_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_2}$ 时，X_{α_1} 的拓扑就是关于 X_{α_2} 的相对拓扑. X 上使得每个自然嵌入映射 $\tau_\alpha: X_\alpha \to X$ 都连续的最强局部凸拓扑称为严格归纳拓扑. 按此拓扑 X 是一个局部凸空间，称为 $\{X_\alpha\}$ 的严格归纳极限. X 中的吸收均衡凸集 U 是开集当且仅当对一切 X_α，$U \cap X_\alpha$ 是 X_α 中的开集. 严格归纳极限这个概念在广义函数论中有重要应用.

严格归纳局部凸拓扑(strict inductive locally convex topology)　见“严格归纳极限”.

投影拓扑(projective topology)　通过一族映射定义的拓扑. 设 E 和 $E_\alpha(\alpha \in \mathscr{A})$ 是线性空间，$\mathscr{L}_\alpha$ 是 E_α 上的分离局部凸拓扑，$u_\alpha: E \to E_\alpha$ 是 E 到 E_α 中的线性映射，$\mathscr{L}$ 是 E 上满足如下条件的最弱拓扑：使每个线性映射 $u_\alpha(\alpha \in \mathscr{A})$ 都是 $(E, \mathscr{L}) \to (E_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)$ 的连续映射，则称 $\mathscr{L}$ 为 E 上关于 $\{(E_\alpha, \mathscr{L}_\alpha, u_\alpha), \alpha \in \mathscr{A}\}$ 的投影拓扑.

投影极限(projective limit)　通过一族拓扑线性空间定义的新的拓扑线性空间. 设 $(E_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)(\alpha \in \mathscr{A})$ 是一族分离局部凸空间，对任何 $\beta \geqslant \alpha$ 定义了一个连续线性映射 $u_{\alpha\beta}: E_\beta \to E_\alpha$. 如果满足如下条件：

1. $u_{\alpha\alpha} = I(\alpha \in \mathscr{A})$；
2. $u_{\alpha\gamma} = u_{\alpha\beta} \circ u_{\beta\gamma}(\gamma \geqslant \beta \geqslant \alpha)$；

则 $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ 称为局部凸空间的投影系. 做乘积空间 $\prod\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} E_\alpha$. E 是 $\prod\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} E_\alpha$ 的子空间，它是由满足下述条件的所有元素 $x = (x_\alpha)$ 组成，使得

$$x_\alpha = u_{\alpha\beta}(x_\beta) \quad (\beta \geqslant \alpha),$$

则称 E 为 $\{E_\alpha, \alpha \in \mathscr{A}\}$ 关于映射 $u_{\alpha\beta}(\alpha, \beta \in \mathscr{A}, \beta \geqslant \alpha)$ 的投影极限，记为 $E = \varprojlim E_\alpha$ 或 $E = \varprojlim u_{\alpha\beta} E_\beta$. 在投影极限 E 上赋于关于族 $\{(E_\alpha, \mathscr{L}_\alpha, u_\alpha), \alpha \in \mathscr{A}\}$ 的投影拓扑，称为 $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})$ 的拓扑投影极限，或简称投影极限，仍记为 $E = \varprojlim E_\alpha$. 在一定意义下，投影极限和归纳极限这两个概念是相互对偶的.

巴拿赫空间与希尔伯特空间

赋范线性空间(normed linear space)　一类可以引进“长度”概念的线性空间. 设 X 是线性空间，X 上满足下列条件的实值函数 $p(\cdot)$ 称为 X 上的范数：

1. $p(x) \geqslant 0(x \in X)$；$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$($\alpha$ 为数，$x \in X$).
3. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)(x, y \in X)$.

对 $x \in X$，$p(x)$ 称为 x 的范数，通常记为 $\|x\|$. 赋有范数的线性空间 $(X, \|\cdot\|)$ 称为赋范线性空间，简称赋范空间.

范数(norm)　见“赋范线性空间”.

巴拿赫空间(Banach space)　按范数导出的距离完备的赋范线性空间. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间. 对 $x, y \in X$，$\rho(x, y) = \|x - y\|$ 定义了 X 上的一个距离，使 X 成为度量空间. 如果 X 按这个距离是完备的，就称 X 为巴拿赫空间. $L^p(\Omega)(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$，$C(\Omega)$，$c$，$c_0$ 等都是巴拿赫空间的例子.

巴拿赫空间(含赋范空间)是 1922 年巴拿赫(Banach, S.)与维纳(Wiener, N.)相互独立提出的，并且在不到 10 年的时间内便发展为相当完美而又有多方面应用的理论. 1932 年，巴拿赫论述这部分理论的《线性算子理论》一书的问世，是泛函分析作为独立的数学分支出现的标志. 巴拿赫空间至今仍是泛函分析研究的基本对象之一.

半范数(seminorm)　范数的一种推广. 设 X 是线性空间，$p(\cdot)$ 是 X 上的实值函数，满足：

1. $p(x) \geqslant 0(x \in X)$；
2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$($\alpha$ 为数，$x \in X$)；
3. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)(x, y \in X)$；

则称 $p(x)$ 是 x 的半范数. 通常也将向量 x 的半范数记为 $\|x\|$，而称 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋半范线性空间，简称赋半范空间. 设 $p(\cdot)$ 是 X 上的半范数，令 $E = \{x \mid p(x) = 0\}$，则 E 是 X 的线性子空间. 如果在商空间 X/E 上规定 $\|\tilde{x}\| = p(x)$，则 $\|\cdot\|$ 是 X/E 上的范数，称为由半范数 $p(\cdot)$ 导出的范数. 半范数这个概念在拓扑线性空间理论中扮演着重要的角色，是处理一类特殊凸集的解析工具.

准范数(paranorm)　范数的又一种推广. 设 X 是线性空间，$p(\cdot)$ 是 X 上的实值函数，满足：

1. $p(x) \geqslant 0$，$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$；
2. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$；
3. $p(-x) = p(x)$，并且

$\lim\limits_{\alpha_n \to 0} p(\alpha_n x) = 0$，$\lim\limits_{x_n \to 0} p(\alpha x_n) = 0$　(α_n，α 是数)；

则称 $p(\cdot)$ 是 X 上的准范数(有时也称为拟范数)，(X, p) 称为赋准范线性空间(或赋拟范线性空间)，简称赋准范空间. 准范数 $p(\cdot)$ 也常记为 $\|\cdot\|$. 例如，$L^p(\Omega)(0 < p < 1)$ 是赋准范空间.

赋准范线性空间(paranormed linear space)　见“准范数”.

拟范数(quasi-norm)　即“准范数”，有时也指半范数.

弗雷歇空间(Fréchet space)　按准范数导出的距离完备的赋准范空间. 设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋准范空间，则 $\rho(x, y) = \|x - y\|$ 是 X 上的距离. 如果按这个距离还是完备的，则称 X 为弗雷歇空间. 在一些著作中，弗雷歇空间常指完备的可度量化局部凸拓扑线性空间. 有许多关于巴拿赫空间的定理，对弗雷歇空间仍然成立.

保范同构(norm-preserving isomorphism)　亦

称等距同构映射. 指两个赋范线性空间之间存在保范同构映射. 设 X,Y 是两个赋范线性空间, U 是 X 到 Y 的映射, 若对一切 $x\in X$, 有 $\|Ux\|=\|x\|$, 则称 U 是保范映射或等距映射. 如果 U 不仅保范, 而且还是从 X 到 Y 上的线性算子, 则称 U 是 X 到 Y 上的保范同构映射. 如果空间 X,Y 之间存在一个保范同构映射, 就称 X 与 Y 保范同构, 亦称等距同构. 在巴拿赫空间理论中, 常把保范同构的空间视为等同.

保范映射(norm-preserving mapping) 见"保范同构".

等距同构(isometric isomorphism) 即"保范同构".

等距映射(isometric mapping) 即"保范映射".

万有空间(universal space) 具有万有性的一种巴拿赫空间. 设 X 是巴拿赫空间, 如果任何可分的巴拿赫空间都等距同构于 X 的某个闭子空间, 则称 X 为万有空间, 亦称 X 具有万有性. 万有空间的存在性是由乌雷松(Урысон, П. С.)于 1923 年证明的, 巴拿赫(Banach, S.)和马祖尔(Mazur, S.)指出, 函数空间 $C[0,1]$ 是万有空间.

等价范数(equivalence of norms) 同一个线性空间上的两个范数之间的一种关系. 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的两个范数(准范数), 如果存在正数 c_1,c_2, 使得对每个向量 $x\in X$ 都有 $c_1\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant c_2\|x\|_1$, 则称范数(准范数) $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价的. 有限维空间上的任何两个范数必是等价的. 由于等价的范数确定相同的拓扑结构, 因而对由等价范数所确定的赋范空间, 当只考虑拓扑性质时可视为等同.

闭线性子空间(closed linear subspace) 一类子空间. 赋范空间中的按范数导出的距离还是闭的线性子空间称为闭线性子空间.

商赋范线性空间(quotiently normed linear space) 由赋范线性空间与其闭子空间诱导出的新的赋范线性空间. 设 E 是赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 的闭线性子空间, 对于商空间 X/E 中每个元 $\tilde{x}$, 规定范数

$$\|\tilde{x}\|=\inf_{y\in\tilde{x}}\|y\|,$$

则 X/E 成为赋范线性空间, 称为商赋范线性空间, 这个范数称为原来范数的诱导范数. 如果 $(X,\|\cdot\|)$ 是巴拿赫空间, 则商空间 X/E 按诱导范数也是巴拿赫空间.

赋范线性空间的直和(direct sum of normed linear spaces) 由两个赋范(赋准范)线性空间诱导出的新的赋范(赋准范)空间. 设 X_1,X_2 都是赋范(赋准范)线性空间, 对直接和 $X=X_1+X_2$ 中的元 (x_1,x_2), 定义范数(准范数) $\|(x_1,x_2)\|=\|x_1\|+\|x_2\|$, 则 $X=X_1+X_2$ 成为赋范(赋准范)线性空间. 当 X_1,X_2 完备时, X 也是完备的. 另外, 在 $X=X_1+X_2$ 中也常取下面的等价的范数(准范数):

$$\|(x_1,x_2)\|=(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

类似可定义任意有限多个赋范线性空间的直和.

赋范线性空间的共轭空间(conjugate space of normed linear space) 赋范线性空间上连续线性泛函的全体. 赋范线性空间 X 上连续(或等价地, 有界)线性泛函的全体, 记为 X^*. X^* 按泛函的线性运算及泛函的范数构成一个巴拿赫空间, 称 X^* 为 X 的共轭空间, 有时也称为 X 的伴随空间或对偶空间. X^* 的共轭空间 $X^{**}=(X^*)^*$ 称为 X 的二次共轭空间, 连续下去还有三次共轭空间 X^{***}, 四次共轭空间等. 由于经典分析的需要, 例如在矩量问题、偏微分方程理论等方面都会遇到对偶空间, 以及泛函分析本身的需要, 显然通过 X^* 能更好地理解 X. 于是人们研究了 X 与 X^* 之间的关系, 这就是所谓的对偶理论.

赋范线性空间的伴随空间(adjoint space of normed linear space) 即"赋范线性空间的共轭空间".

赋范线性空间的对偶空间(dual space of normed linear space) 即"赋范线性空间的共轭空间".

哈恩-巴拿赫延拓定理(Hahn-Banach extension theorem) 亦称线性泛函延拓定理. 将线性子空间上的线性泛函延拓到整个空间的一个著名定理. 设 $p(x)$ 是线性空间 E 上的半范数, E_0 是 E 的线性子空间, 如果在 E_0 上定义的线性泛函 $f(x)$ 满足 $|f(x)|\leqslant p(x)$, 则能把 $f(x)$ 延拓到全空间 E 上并使得上面不等式在 E 上仍成立. 把此定理应用到赋范线性空间 X 有下列结论:

1. 设 M 是 X 的线性子空间, 则 M 上任何一个有界线性泛函都可保持范数不增大地延拓为 X 上有界线性泛函.

2. 对任一非零向量 $x_0\in X$, 存在 X 上的有界线性泛函 f_0, 满足 $f_0(x_0)=\|x_0\|$, $\|f_0\|=1$.

3. 对 X 的任一闭线性子空间 M 及向量 $x_0\in X\backslash M$, 存在 X 上的有界线性泛函 f_0, 使得 $f_0(x_0)>1$, $\|f_0\|<d^{-1}$, 且当 $x\in M$ 时恒有 $f(x)=0$, 而

$$d=\inf_{x\in M}\|x_0-x\| \text{ (即 } x_0 \text{ 到 } M \text{ 的距离)}.$$

哈恩-巴拿赫延拓定理是泛函分析中的一个重要定理, 它是研究对偶理论的主要工具, 它保证了赋范线性空间的对偶空间是非平凡的.

线性泛函延拓定理(extension theorem of lin-

ear functionals) 即“哈恩-巴拿赫延拓定理”.

扩张性质(extensionality of Banach space) 关于泛函扩张定理推广到有界线性算子而引入的一个概念. 设 M 是赋范线性空间 X 的任意线性子空间, 若由 M 到巴拿赫空间 Y 的每个有界线性算子 T_0 至少有一在 X 上的扩张 T, 即至少存在一个由 X 到 Y 的有界线性算子 T, 当 $x\in M$ 时 $Tx=T_0x$, 使 $\|T\|=\|T_0\|$, 则称 Y 具有扩张性质. 哈恩-巴拿赫定理意味着实数空间 R 具有扩张性质. 巴拿赫空间 Y 具有扩张性质的充分必要条件是: 对于任何包含 Y 为其赋范线性子空间的每个赋范线性空间 Y_0, 都存在一个由 Y_0 到 Y 的范数为 1 的射影算子. 这个结果是由纳赫宾(Nachbin, L.)于 1950 年得到的.

巴拿赫极限(Banach limit) 具有某种极限性质的线性泛函. 空间 l^∞ 中满足下列条件的线性泛函 F 称为巴拿赫极限或广义极限: 对任何 $\{a_n\}\in l^\infty$, 有

1. $F(\{a_n\})=F(\{a_{n+1}\})$.
2. 如果 $a_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$, 则 $F(\{a_n\})\geqslant 0$.
3. 如果 $\{a_n\}$ 是实数列, 则

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant F(\{a_n\}) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

4. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 则 $F(\{a_n\})=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$\{a_n\}$ 的巴拿赫极限常记为

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} a_n \text{ 或 } \mathrm{l.i.m.}\, a_n.$$

由哈恩-巴拿赫延拓定理可证巴拿赫极限的存在性.

广义极限(generalized limit) 即“巴拿赫极限”.

里斯引理(Riesz lemma) 揭示闭子空间与单位球面上某点的距离性质的重要引理. 设 Y 是赋范线性空间 X 的闭线性真子空间, 则对任何 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $x\in X$, $\|x\|=1$, 使得 $d(x,Y)\geqslant\varepsilon$, 其中

$$d(x,Y)=\inf\{\|x-y\| \mid y\in Y\}.$$

上述引理是里斯(Riesz, F.)于 1918 年得到的, 它在泛函分析中有着广泛的应用. 例如, 由里斯引理可得, 赋范线性空间 X 的每一个有界闭集是紧的当且仅当 X 是有限维空间.

1975 年, 考特曼(Kottman, C. A.)把里斯引理向前大大推进了一步: 设 X 是无穷维赋范线性空间, 则存在点列 $\{x_n\}\subset X$, $\|x_n\|=1$, 使得当 $m\neq n$ 时, 有 $\|x_m-x_n\|>1$. 考特曼的这一定理在巴拿赫空间局部理论的研究中有重要作用, 特别是在填球问题(parking problem)中扮演重要角色.

巴拿赫空间的同胚问题(homemorphism problem of Banach spaces) 巴拿赫空间同胚理论中的一个重要问题. 弗雷歇(Fréchet, M.-R.)和巴拿赫(Banach, S.)提出下述问题: 是否所有无穷维可分巴拿赫空间彼此都是同胚的, 这就是所谓巴拿赫空间的同胚问题. 卡舍茨(Кадец, М. И.)于 1953 年指出, 空间 l^1 和 c_0 是同胚的. 1958 年, 他又指出, 一切无穷维自反的可分巴拿赫空间同胚于 l. 1960 年, 贝萨伽(Bessaga, C.)和陪尔钦斯基(Pelczyński, A.)进一步证明了所有常见的无穷维可分的巴拿赫空间都同胚于 l. 1967 年, 卡舍茨证明了所有无穷维可分的巴拿赫空间彼此都同胚, 从而解决了巴拿赫空间的同胚问题. 至于是否每个不可分的巴拿赫空间都同胚于某个希尔伯特空间, 这是尚未解决的一个问题.

一致同胚(uniform homeomorphism) 一致连续意义下的同胚映射. 设 X,Y 都是巴拿赫空间, 若存在 X 到 Y 上的一一对应的映射 f, 使 f 和 f^{-1} 都是一致连续的, 则巴拿赫空间 X 与 Y 称为一致同胚的. 若存在 X 到 Y 上的一对一的映射 f, 适合条件: 存在常数 $C\geqslant 1$, 使对任意 $x,y\in X$, 都有

$$C^{-1}\|x-y\| \leqslant \|f(x)-f(y)\| \leqslant C\|x-y\|,$$

则 X 与 Y 称为李普希茨同胚的. 如果两个巴拿赫空间是李普希茨同胚的, 那么它们必是一致同胚的.

关于巴拿赫空间理论有下述基本问题: 两个一致同胚(或李普希茨同胚)的巴拿赫空间是否一定是线性同胚的? 1978 年, 阿哈罗尼(Aharoni, I.)和林登斯特劳斯(Lindenstrauss, J.)否定地回答了这个问题.

李普希茨同胚(Lipschitz homeomorphism) 见“一致同胚”.

巴拿赫-马祖尔距离(Banach-Mazur distance) 巴拿赫空间局部理论中的一个基本概念. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间, 若 X 与 Y 同构, 即存在 X 到 Y 上的一对一的线性算子 T, 使 T 与 T^{-1} 都是连续的, 则令 $d(X,Y)=\inf\{\|T\|\cdot\|T^{-1}\| \mid T \text{ 是 } X\to Y \text{ 上的同构映射}\}$, 其中, 下确界是对 $X\to Y$ 上的一切同构映射而取的; 若 X 与 Y 不同构, 令 $d(X,Y)=+\infty$. 称 $d(X,Y)$ 为巴拿赫空间 X 与 Y 之间的巴拿赫-马祖尔距离, 它是由巴拿赫(Banach, S.)和马祖尔(Mazur, S.)于 1932 年引入的.

正规结构(normal structure) 关于有界闭凸子集的点到该集的其他点的距离与该集的直径之间关系的一个概念. 设 A 是巴拿赫空间 X 的有界闭凸集, $x\in A$, 若 $\sup\{\|x-y\| \mid y\in A\}<\operatorname{diam}A$, 则 x 称为 A 的非直径点. 设 V 为巴拿赫空间 X 的子集, 若 V 的每个有界闭凸子集都具有非直径点, 则称 V 具有正规结构. 正规结构的概念在巴拿赫空间结构理论和非扩张映射的不动点存在性中均有应用.

自反的赋范线性空间(reflexive normed linear space) 在自然嵌入下与其二次共轭空间相同的赋范线性空间. 设 X 是赋范线性空间, 则每个 $x\in X$, 可视作 X^* 上的线性泛函 x^{**}: 对任一 $f\in X^*$, 定义

$x^{**}(f)=f(x)$. x^{**} 显然是有界的，且 $\|x^{**}\|=\|x\|$，x^{**} 称为由 x 生成的，映射 $x \to x^{**}$ 是 X 到 X^{**}(称为 X 的二次共轭空间)中的保范线性算子，其像域(即值域)记为 $\hat{X}$，于是 X 与 $\hat{X}$ 保范同构. 映射 $x \to x^{**}$ 称为 X 到 X^{**} 中的自然嵌入，把 X 与 $\hat{X}$ 视为等同，便有 $X \subset X^{**}$. 如果 $X=X^{**}$，就称 X 是自反的. 巴拿赫空间 X 自反当且仅当 X^* 是自反的. 巴拿赫空间 $L^p(\Omega)$，$l^p(1<p<+\infty)$ 是自反的，而 $L(\Omega)$，l 不是自反的.

自反空间的概念是由哈恩(Hahn，H.)于 1927 年引入的，他当时把这类空间称为正则的，而自反的名称是劳赫(Lorch，E. R.)于 1939 年给出的. 詹姆斯(James，R. C.)于 1957 年对可分巴拿赫空间 X 证明了 X 自反的一个充分必要条件，是 X 上的每个有界线性泛函在 X 的闭单位球上都能达到上确界. 1964 年，他又把可分性的要求去掉.

如上所述，自反空间刻画了巴拿赫空间的一些重要性质. 在巴拿赫空间理论研究中往往就通过某些重要命题的成立来引进种种类型的巴拿赫空间.

詹姆斯空间(James space)　詹姆斯(James，R. C.)于 1951 年针对当时关于"巴拿赫空间 X 等距同构于 X^{**} 推出 X 必自反"的猜测而构造的空间. 设 J 为满足下述条件的实数列 $x=\{\xi_n\}$ 所组成的实线性空间：$x=\{\xi_n\} \in J$ 当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0,$$

并且

$$\|x\| = \sup\Big[\sum_{i=1}^{n}(\xi_{k_{2i-1}}-\xi_{k_{2i}})^2 + (\xi_{k_{2n+1}})^2\Big]^{\frac{1}{2}} < +\infty, \qquad (1)$$

其中上确界是对一切 n 及所有可能的有限多个正整数 $k_1,k_2,\cdots,k_{2n+1}(k_1<k_2<\cdots<k_{2n+1})$ 取的；由(1)所规定的 $\|\cdot\|$ 为 J 上的范数，并且按此范数构成一个巴拿赫空间. 巴拿赫空间 J 称为詹姆斯空间. 有以下结论：

1. J 为可分的巴拿赫空间.

2. J 与 J^{**} 等距同构，但 J 并不自反.

因此，在巴拿赫空间自反性的定义中必须强调在自然(典则)映射下，$X=X^{**}$. 泛函分析中许多反例的构造常用到詹姆斯空间.

次自反空间(sub-reflexive space)　自反空间概念的推广. 设 X 是赋范线性空间，若 X^* 中在 X 的闭单位球上达到范数的元素 f 的全体在 X^* 中稠密(按范数拓扑)，则称 X 是次自反的. 每个巴拿赫空间都是次自反的.

弱紧生成空间(space generated by a weakly compact subset)　自反空间和可分空间的推广. 设 X 是巴拿赫空间，若存在 X 的一个弱紧集 K，使 $X=\overline{\text{span}}K$，则 X 称为弱紧生成空间. 有以下结论：

1. 自反空间和可分巴拿赫空间都是弱紧生成空间.

2. 罗森塔尔(Rosenthal，H. P.)于 1974 年指出，弱紧生成空间的闭子空间不必是弱紧生成空间.

超自反巴拿赫空间(super-reflexive Banach space)　一类自反空间. 巴拿赫空间 X 称为超自反的，如果每个在 X 中有有限表示的巴拿赫空间 Y 都是自反的. 一个赋范空间 Y 称为在另一个赋范空间 X 中有有限表示是指：如果对 Y 的任何有限维子空间 Y_n 和 $\varepsilon>0$，存在 X 中有限维子空间 X_n，及可逆的连续线性算子 $T: Y_n \to X_n$，使得

$$\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1+\varepsilon.$$

超自反空间一定是自反空间. 两个线性同胚的巴拿赫空间具有相同超自反性. 超自反性和凸性的研究有密切的联系. 例如，巴拿赫空间 X 超自反的一个充分必要条件为，在 X 上可赋予与原范数等价的一致凸范数.

一致凸赋范线性空间(uniformly convex normed linear space)　满足一致凸性的一类赋范线性空间. 赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$称为是一致凸的，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\|x\| \leqslant 1$，$\|y\| \leqslant 1$ 并且 $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$ 时，必有 $\|x+y\| \geqslant 2-\delta$ 成立. $L^p(1<p<+\infty)$ 是一致凸的. 一致凸的巴拿赫空间是自反的.

一致凸空间是巴拿赫空间几何理论的一个重要概念，它是克拉克松(Clarkson，J. A.)于 1936 年为研究拉东-尼科迪姆性质而引入的，他开创了从巴拿赫空间的几何结构出发来研究巴拿赫空间性质的方法. 巴拿赫空间的几何学近年来已成为巴拿赫空间理论研究中人们特别感兴趣的一个领域.

严格凸赋范线性空间(strictly convex normed linear space)　满足严格凸性的一类赋范线性空间. 赋范线性空间 X 称为严格凸的，是指对任何 $x\neq 0$ 和 $y \neq 0$，如果 $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$，则必有 $x=\alpha y$，α 为某一正数. 一致凸赋范空间必是严格凸的. 如果 X^* 是严格凸的，则 X 内任一线性子空间 X_0 上的任一有界线性泛函必可惟一地保范延拓为全空间 X 上的有界线性泛函. 如果 X 自反，则上述命题之逆也成立. 赋范线性空间的严格凸性是一个重要的凸性概念，它可用于最佳逼近的惟一性问题.

平性凸赋范线性空间(flat convex normed linear space)　一类赋范线性空间. 赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$称为是平性凸的，如果存在单位向量 x_0, y_0 $(x_0 \neq y_0)$，使得

$$\left\|\frac{x_0+y_0}{2}\right\| = \|x_0\| = \|y_0\| = 1.$$

巴拿赫-萨克斯性质(Banach-Saks property)

关于点列的算术平均值收敛的一个重要性质.若巴拿赫空间 X 中的每个有界点列 $\{x_n\}$ 有一子列 $\{x_{n_k}\}$,使它的算术平均值按范数收敛于 X 中的一个元 x_0,即

$$\frac{x_{n_1}+x_{n_2}+\cdots+x_{n_k}}{k}\to x_0\in X\ (k\to\infty),$$

则 X 称为具有巴拿赫-萨克斯性质.若 X 中每个弱收敛的点列 $\{x_n\}$ 有一子列 $\{x_{n_k}\}$,使它的算术平均值按范数收敛于 X 中的一个元 x_0,则 X 称为具有弱巴拿赫-萨克斯性质.以下结论成立:

1.若巴拿赫空间 X 有巴拿赫-萨克斯性质,则它必有弱巴拿赫-萨克斯性质.

2.若巴拿赫空间 X 是超自反的,则 X 必有巴拿赫-萨克斯性质.

3.若巴拿赫空间 X 具有巴拿赫-萨克斯性质,则 X 必是自反的.这是尼西乌拉(Nishiura,T.)和瓦特曼(Waterman,D.)于1963年证明的;伯恩施坦(Bernstein,A.R.)于1972年指出,逆命题并不成立.

弱巴拿赫-萨克斯性质(weak Banach-Saks property) 见"巴拿赫-萨克斯性质".

光滑巴拿赫空间(smooth Banach space) 达到范数的泛函具有惟一性的巴拿赫空间.设 X 为巴拿赫空间,x_0 是 X 的单位向量,如果存在惟一的 $f\in X^*$,$\|f\|=1$ 使得 $f(x_0)=1$,则称 X 在 x_0 处是光滑的.如果 X 在每个单位向量处都是光滑的,就称 X 是光滑的,或 X 有光滑的范数或 X 的范数是光滑的.光滑性和严格凸性是对偶的两个性质:如果 X^* 是严格凸的,则 X 是光滑的;如果 X^* 是光滑的,则 X 是严格凸的.光滑性除了与严格凸性对偶外,它还和范数的弱可微性(参见"加托微分")有紧密联系.

绍德尔基(Schauder bases) 有限维空间中基概念的一种推广.设 X 为巴拿赫空间,$\{e_n\}$ 是 X 中的点列,如果对任何 $x\in X$,总存在惟一的数列 $\{a_n(x)\}$ 使得

$$\lim_{N\to\infty}\|x-\sum_{n=1}^{N}a_n(x)e_n\|=0,$$

即

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)e_n,$$

则称 $\{e_n\}$ 为 X 中的绍德尔基或可数基,并称 X 为具有可数基的巴拿赫空间.具有可数基的巴拿赫空间是可分的.序列空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$,$c_0$,$c$ 以及函数空间 $C[0,1]$,$L^p[a,b](1\leqslant p<+\infty)$ 等都是有可数基的巴拿赫空间.

绍德尔基是绍德尔(Schauder,J.P.)于1927年提出的,它是有限维空间中基的概念的一种推广.1973年,恩夫洛(Enflo,P.)举例说明即使巴拿赫空间是可分的也未必存在绍德尔基.关于基的理论的研究已有很丰富的内容.

可数基(countable basis) 即"绍德尔基".

对偶向量族(dual family of vectors) 分别来自赋范线性空间与其共轭空间的满足一定条件的一对子集.设 X 是赋范线性空间,X^* 为其共轭空间.如果 X 的子集 $\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 和 X^* 的子集 $\{f_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 满足条件 $f_\alpha(x_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$,这里

$$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1 & (\alpha=\beta),\\ 0 & (\alpha\neq\beta),\end{cases}$$

则称 $(\{x_\alpha\},\{f_\alpha\})$ 为对偶向量族,或双正交系.此概念对于巴拿赫空间中有关基的理论的研究有用.

双正交系(biorthogonal system) 即"对偶向量族".

巴拿赫空间中的级数(series of Banach space) 数学分析中级数概念的推广.设 X 为巴拿赫空间,$\{x_n\}\subset X$,若对任何 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $m>n\geqslant N$ 时

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m}x_k\right\|<\varepsilon\left(\sum_{k=n+1}^{m}\|x_k\|<\varepsilon\right),$$

则称级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k$$

收敛(绝对收敛).如果对正整数集的每个重排 π,级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_{\pi(k)}$$

都是收敛的,就称级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k$$

是无条件收敛的.显然,级数的绝对收敛性蕴涵无条件收敛性.巴拿赫空间中的无条件收敛级数为绝对收敛的充分必要条件是该空间为有限维的,这就是著名的德窝特茨基-罗杰斯定理.巴拿赫空间中级数的收敛性与基的研究有紧密的联系.

级数的收敛(convergence of series) 见"巴拿赫空间中的级数".

级数的绝对收敛(absolute convergence of series) 见"巴拿赫空间中的级数".

级数的无条件收敛(unconditional convergence of series) 见"巴拿赫空间中的级数".

基的等价性(equivalence of bases) 指两个基能在某个线性同胚映射下保持一一对应.设 X,Y 都是巴拿赫空间,$\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 分别是 X,Y 中的绍德尔基.若存在线性同胚映射 $T:X\to Y$,使对每一个 n,均有 $Tx_n=y_n$,则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 称为等价的.

无条件基(unconditional base) 一种与级数的无条件收敛概念紧密相关的基.设$\{x_n\}$是巴拿赫空间X中的绍德尔基,若对每一$x\in X$,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)x_n$$

都是无条件收敛的,则$\{x_n\}$称为无条件基,其中$\{f_n\}$与$\{x_n\}$是双正交系.若$\{x_n\}$不是无条件基,就称它为条件基.亨内费尔德(Hennefeld,J.)于1973年证明了对于巴拿赫空间的无条件基,只有下列三种可能情况:没有,仅有一个(在等价意义下),有不可数个.林登斯特劳斯(Lindenstrauss,J.)和齐平(Zippin,M.)指出,如果巴拿赫空间X有惟一的无条件基(在等价的意义下),那么X必定线性同胚于空间c_0,l或l^2中的一个.因此,在线性同胚意义下,有而且只有巴拿赫空间c_0,l或l^2有惟一的无条件基.

条件基(conditional base) 见“无条件基”.陪尔钦斯基(Pelczyński,A.)和辛格(Singer,I. M.)于1964年指出,关于巴拿赫空间中的条件基,或者没有,或者有不可数多个.

逼近问题(approximation problem) 巴拿赫空间理论中的一个重要问题.设X是巴拿赫空间,若对X的每个紧子集K及每个$\varepsilon>0$,都存在有限秩线性算子$T:X\to X$(即

$$Tx=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)x_i,$$

对某组$\{x_i\}_{i=1}^n\subset X$,$\{f_i\}_{i=1}^n\subset X^*$,$\forall x\in X$),对每个$x\in K$,均有$\|Tx-x\|<\varepsilon$,则称巴拿赫空间$X$具有逼近性质.是否每个可分巴拿赫空间都有逼近性质,这就是所谓逼近问题.若巴拿赫空间X有绍德尔基,则X必有逼近性质.因此,若基问题的回答是肯定的,则逼近问题的回答也是肯定的;若逼近问题是否定的,则基问题也是否定的.恩夫洛(Enflo,P.)找到了一个可分自反巴拿赫空间不具有逼近性质,从而既解决了逼近问题,也解决了基问题.

逼近性质(approximation property) 见“逼近问题”.

埃伯莱因-斯穆良定理(Eberlein-Šmulian theorem) 揭示巴拿赫空间的子集弱紧与弱序列紧相同的重要定理.巴拿赫空间的子集是相对弱紧的当且仅当它是相对弱序列紧的.特别地,巴拿赫空间的子集是弱紧的当且仅当它是弱序列紧的.上述定理是埃伯莱因(Eberlein,F.)和斯穆良(Šmulian,V.)于1947年得到的,它在泛函分析中有着广泛的应用.

德沃雷茨基-罗杰斯定理(Dvoretzky-Rogers theorem) 见“巴拿赫空间中的级数”.

内积空间(inner product space) 具有内积运算的线性空间,是n维欧氏空间的无限维推广.设K是实数域或复数域,H是K上线性空间,如果对H中任何两个向量x,y,都对应着一个数$(x,y)\in K$,满足条件:

1.(共轭对称性)对任意的$x,y\in H$,有

$$(x,y)=\overline{(y,x)}.$$

2.(对第一变元的线性性)对任何$x,y,z\in H$及$\alpha,\beta\in K$,有$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$.

3.(正定性)对一切$x\in H$,有$(x,x)\geqslant 0$且

$$(x,x)=0\Leftrightarrow x=0,$$

这时$(\cdot,\cdot)$称为H中的内积,而称H为(实或复)内积空间,或准希尔伯特空间.令

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)},$$

则按范数$\|\cdot\|$,H成为赋范线性空间.设$(X,\|\cdot\|)$是赋范线性空间,X中能定义内积$(\cdot,\cdot)$并使$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$恒成立的充分必要条件是X的范数$\|\cdot\|$满足下面的平行四边形公式:对任何$x,y\in X$,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

完备的内积空间称为希尔伯特空间,希尔伯特空间H上连续线性泛函的全体记为H^*,称H^*为H的共轭空间.H的共轭空间H^*就是H本身.事实上,设$f\in H^*$,则存在惟一向量$y\in H$使得对所有$x\in H$都成立着$f(x)=(x,y)$,且$\|f\|=\|y\|$(里斯定理).反之,对每个$y\in H$,$f_y(x)=(x,y)$确定了H上一个连续线性泛函$f_y\in H^*$.做H到H^*的映射C如下:$C:y\to f_y(y\in H)$,则有

$$C(\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}Cy+\bar{\beta}Cz,$$

即C实现了H与H^*之间的保范共轭线性同构,在此同构意义下,把f_y与y视为等同,便得$H^*=H$.这一性质也称为希尔伯特空间的自共轭性,它在希尔伯特空间算子理论中具有很重要的作用.

第一个具体的希尔伯特空间最早是由希尔伯特(Hilbert,D.)在研究积分方程时首先提出的,他在平方可和的无穷实数列$\{x_n\}$全体组成的空间l^2中规定了内积

$$(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n,$$

把空间l^2看做欧几里得空间向无穷维的推广,从而有效地解决了一类积分方程求解及本征展开问题.不久冯·诺伊曼(von Neumann,J.)建立了一般希尔伯特空间的理论.希尔伯特空间的概念和理论已被广泛应用于数学和物理的各个分支.如积分方程、微分方程、随机过程、函数论、调和分析、数学物理和量子物理等.

内积(inner product) 见“内积空间”.

希尔伯特空间(Hilbert space) 见“内积空间”.

希尔伯特空间的共轭空间(dual of Hilbert space) 见"内积空间".

施瓦兹不等式(Schwarz inequality) 内积空间中两个元素的内积与两个元素范数之间的制约关系. 设$(H,(\cdot,\cdot))$为内积空间,对任意的 $x,y\in H$,不等式$|(x,y)|^2\leqslant(x,x)\cdot(y,y)$都成立,这个不等式称为施瓦兹不等式. 由施瓦兹不等式就可以如同欧几里得空间一样,在内积空间中引入两个向量的夹角和垂直正交的重要概念,而在一般赋范线性空间无法引进这些概念.

正交(orthogonal) 亦称直交. 是欧几里得空间中垂直概念的推广. 设$(H,(\cdot,\cdot))$是内积空间,$x,y\in H$,如果$(x,y)=0$,就称 x 与 y 是正交的,或直交的,记为 $x\perp y$. 设 M,N 是 H 的子集,如果对每个 $x\in M,y\in N$ 都有$(x,y)=0$,则称 M 与 N 正交,记为 $M\perp N$. H 中所有与 M 正交的向量全体称为 M 的正交补,或直交补,记为 $M^{\perp}$,它是 H 中的闭线性子空间. 相互正交的两个向量 x,y 满足勾股定理:

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

直交(orthogonal) 即"正交".

直交补(orthocomplementation orthocomplement,orthogonal complement) 见"正交".

正交补(orthogonal complement) 见"正交".

正交投影(orthogonal projection) 欧氏空间中向量投影概念的推广. 设 M 是内积空间 H 中的线性子空间,$x\in H$,如果有 $x_0\in M,x_1\perp M$ 使得 $x=x_0+x_1$,就称 x_0 是 x 在子空间 M 上的投影,更完整地说是"正交投影"或 x 在 M 上的(投影)分量. x_0 如果存在的话,必是惟一的,且

$$\|x-x_0\|=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

如果 M 是 H 的完备子空间,则对任何 $x\in H$,x 在 M 上的正交投影惟一地存在. 这个结果称为投影定理,它不仅在理论研究中,而且在很多应用性科学,如近似理论(包括有限元方法)、预测理论、最优化等方面都有广泛的应用.

直交投影(orthogonal projection) 即"正交投影".

规范正交系(orthonormal system) 是数学分析中正交函数系概念的推广. 如果 F 是内积空间 H 中一族非零向量,且 F 中任意两个不同的向量都相互正交,则称 F 为 H 中的正交系或直交系. 如果正交系 F 中每个向量的范数都等于 1,就称 F 是规范正交系或正规正交系,或就范正交系. 可分内积空间中的正交系,至多只含可数个向量. 有了规范正交系,就可以把傅里叶系数、傅里叶级数等概念推广到内积空间.

直交系(orthogonal system) 见"规范正交系".

正交系(orthogonal system) 见"规范正交系".

正规正交系(orthonormal system) 即"规范正交系".

就范正交系(orthonormal system) 即"规范正交系".

贝塞尔不等式(Bessel inequality) 傅里叶级数的同名不等式的推广. 设 F 是内积空间 H 的一个规范正交系,$F=\{e_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$,则对任何向量 $x\in H$,x 关于 F 的傅里叶系数(x,e_α)至多有可数个不为 0,且

$$\sum_\alpha|(x,e_\alpha)|^2\leqslant\|x\|^2$$

必成立,这个不等式称为贝塞尔不等式.

里斯-菲舍尔定理(Riesz-Fischer theorem) 贝塞尔不等式的逆命题. 设 $F=\{e_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是希尔伯特空间 H 中的规范正交系,F 张成的闭子空间为 E;又设$\{c_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是一族数,满足

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}|c_\alpha|^2<+\infty,$$

则必存在惟一的向量 $x\in E$,使 x 关于$\{e_\alpha\}$的傅里叶系数是$\{c_\alpha\}$,即 $c_\alpha=(x,e_\alpha)$,且

$$x=\sum_{\alpha\in\Lambda}c_\alpha e_\alpha,$$

这一结论通常称为里斯-菲舍尔定理. 里斯(Riesz, F.)和菲舍尔(Fischer,E. S.)于 1907 年最早对特殊的希尔伯特空间 $L^2[0,2\pi]$和规范正交系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}$$

证明了这个定理.

完全正交系(totally orthogonal system) 一种特殊的正交系,该系的正交补中只有零元素. 设 $F=\{e_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$是内积空间 H 中的规范正交系,如果 $F^{\perp}=\{0\}$,则称 F 是 H 中的完全正交系. 如果对每个 $x\in H$,F 使帕塞瓦尔等式

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2$$

成立,就称 F 是完备正交系. 在希尔伯特空间中,下列三条等价:

1. F 是完全正交系.
2. F 是完备正交系.
3. 对每个 $x\in H$,都能展开为傅里叶级数

$$x=\sum_{e_\alpha\in F}(x,e_\alpha)e_\alpha.$$

(参见本卷《调和分析》同名条.)

完备正交系(complete orthogonal system) 见"完全正交系".

帕塞瓦尔等式(Parseval identity) 见"完全正交系".

正交和(orthogonal sum) 是从内积空间的两个(多个)子空间产生新子空间的一种方式. 设 M_1, M_2 是内积空间 H 中互相正交的线性子空间,那么称子空间 $M=\{x_1+x_2 | x_1\in M_1, x_2\in M_2\}$ 为 M_1 与 M_2 的正交和或直交和. 设 H_n 为内积空间($n=1,2,\cdots$),令

$$H = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) | x_n \in H_n, \sum_n \| x_n \|^2 < +\infty\},$$

在 H 中定义内积如下:对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$,令

$$(x,y) = \sum_n (x_n,y_n).$$

于是 H 成为内积空间,如将每个 H_i 中向量 x_i 和 H 中向量 $(0,\cdots,0,x_i,0,\cdots)$ 视为同一,则 H_i 就视为 H 的线性子空间,并且 $\{H_i\}$ 是 H 中相互正交的线性子空间,这样,通常称 H 为内积空间 $\{H_n\}$ 的正交和,记为

$$H = \bigoplus_n H_n.$$

当 H_n 都是希尔伯特空间时,

$$H = \bigoplus_n H_n$$

也是希尔伯特空间.

直交和(orthogonal sum) 即"正交和".

正交化(orthogonalization) 将线性无关向量系转化为正交系的过程. 设 $\{x_n\}$ 是内积空间 H 中有限个或可列个线性无关的向量,则必定有 H 中的规范正交系 $\{e_n\}$ 使得对每个正整数 n(当 $\{x_n\}$ 只含有 m 个向量,要求 $n\leqslant m$), x_n 是 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的线性组合. 这种把线性无关向量系进行正交化的过程,称为格拉姆-施密特正交化过程. 具体方法参见《线性代数》.

格拉姆-施密特正交化过程(Gram-Schmidt orthogonalizing process) 见"正交化".

内积空间的等距同构(isometric isomorphism of inner product spaces) 指两个内积空间之间的一种相似性. 设 H_1,H_2 为两个内积空间,如果存在 H_1 到 H_2 上的可逆线 性算子 T,使得对任何 $x,y\in H$,都有 $(Tx,Ty)=(x,y)$ 成立,则称内积空间 H_1 和 H_2 是等距同构的. 任何可分的无限维希尔伯特空间必等距同构于 l^2.

规范正交基(orthonormal basis) 完备的规范正交系. 设 H 为希尔伯特空间,H 的完备的规范正交系 F 称为 H 的规范正交基或正规正交基. F 的基数称为希尔伯特空间 H 的维数. 两个维数相同的希尔伯特空间是等距同构的. 规范正交基实际上是欧几里得空间中规范正交基的一种推广.

正规正交基(orthonormal basis) 见"规范正交基".

可补空间(complementary subspace) 希尔伯特空间中正交补的概念在巴拿赫空间中的推广. 设 Y 是巴拿赫空间 X 的闭子空间. 若存在一个从 X 到 Y 上的有界线性算子,则称 Y 在 X 中是可补的. X 的闭子空间 Y 在 X 中可补的充分必要条件为存在闭子空间 $Z\subset X$,使 $Y\cap Z=\{0\}$, $X=Y+Z$,即 $X=Y\oplus Z$. 希尔伯特空间 X 的每个闭子空间 M 必在 X 中可补. 巴拿赫(Banach,S.)于 1932 年提出如下两个问题:

1. 空间 $L^p[a,b]$($1<p<+\infty, p\neq 2$)的每个闭子空间 M 是否一定在 $L^p[a,b]$ 中可补?

2. 空间 l^p($1<p<+\infty, p\neq 2$)的每个闭子空间 M 是否一定在 l^p 中可补?

默里(Murray,F. J.)于 1939 年指出,这两个问题的答案都是否定的. 又,巴拿赫和马祖尔(Mazur, S.)于 1933 年指出,$C[0,1]$ 中存在不可补的子空间,这是巴拿赫空间中存在不可补闭子空间的第一个例子. 林登斯特劳斯(Lindenstrauss,J.)和扎弗里里(Tzafriri,L.)于 1971 年进一步证明,如果实巴拿赫空间 X 不等距同构于希尔伯特空间,那么 X 中必定存在不可补的闭子空间.

希尔伯特空间的维数(dimension of Hilbert space) 见"规范正交基".

半双线性泛函(semi-bilinear functional) 线性空间上的一类二元泛函. 设 X 是实或复数域 K 上的线性空间, $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 X 上取值于 K 中的二元泛函,如对任何 $x,y,z\in X$ 及 $\alpha,\beta\in K$,成立

$$\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x,z) + \beta\varphi(y,z),$$
$$\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}\varphi(x,y) + \bar{\beta}\varphi(x,z),$$

就称 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的半双线性泛函,如 φ 还满足 $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$,就称 φ 是 X 上的埃尔米特双线性泛函(当 K 为实数域时,也称为对称双线性泛函). 设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是内积空间 H 上的双线性泛函. 如有正常数 C 使得对一切 $x,y\in H$,都有

$$|\varphi(x,y)| \leqslant C \| x \| \cdot \| y \|,$$

则称 φ 是有界的,并称

$$\| \varphi \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1, \| y \| \leqslant 1} |\varphi(x,y)|$$

为 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 的范数. φ 有界的充分必要条件是 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 二元连续. 设 A 是 H 上的线性算子,则称 $\varphi(x,y)=(Ax,y)$ 为由算子 A 导出的双线性泛函. 希尔伯特空间上的有界双线性泛函必是 H 上的有界线性算子导出的,且有界埃尔米特双线性泛函是由有界自伴算子导出的.

埃尔米特双线性泛函(Hermitian bilinear functional) 见"半双线性泛函".

对称双线性泛函(symmetric bilinear functional) 见"半双线性泛函".

二次泛函(quadratic functional) 内积空间上的一类泛函.设 H 是内积空间,$\varphi(\cdot)$是 H 上的泛函,满足:

1.二次齐性:$\varphi(\alpha x)=|\alpha|^2\varphi(x)$;

2.平行四边形公式

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2(\varphi(x)+\varphi(y));$$

则称 $\varphi(\cdot)$是 H 上一个二次泛函.如

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1}|\varphi(x)|<+\infty,$$

就称 φ 是有界二次泛函,$\|\varphi\|$ 为 φ 的范数.如对一切 $x\in H$,$\varphi(x)$是实数,就称 φ 是实二次泛函.设 $\psi(x,y)$是 H 上的双线性泛函,令 $\varphi(x)=\psi(x,x)$,则 φ 是 H 上二次泛函,称为由双线性泛函 ψ 导出的二次泛函.进而,如果 ψ 是算子 A 导出的,就称 φ 是由算子 A 导出的二次泛函.

极化恒等式(polarization identity) 联系内积与范数的一个重要的等式,是用范数表示内积的公式.设 H 是内积空间,$\|\cdot\|$ 是由内积$(\cdot,\cdot)$导出的范数,下列等式常被称为极化恒等式:当 H 是实空间时,

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2);$$

当 H 是复空间时,

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2).$$

对于实内积空间上的双线性埃尔米特泛函以及复内积空间上的双线性泛函 $\varphi(x,y)$也分别有类似于上述的恒等式.

不定度规空间(indefinite inner product space) 亦称不定内积空间.内积空间的推广.设 H 为线性空间,$[\cdot,\cdot]$是 H 上的一个双线性埃尔米特泛函,称$(H,[\cdot,\cdot])$是拟不定度规空间.设 $x\in H$,当 x 分别满足$[x,x]>0$,$[x,x]<0$,$[x,x]=0$ 时,分别称 x 为正性、负性、零性(或迷向)向量.设 L 是 H 的线性子空间,如果 L 中一切向量都是正性(或负性,或零性)的,则称 L 是 H 的正性(或负性,或零性)子空间;如果 L 中一切 x 都满足$[x,x]\geqslant 0$(或$[x,x]\leqslant 0$),则称 L 是 H 的半正(或半负)子空间.对于 $x,y\in H$,如果$[x,y]=0$,称 x 与 y 相互正交,记为 $x\perp y$.同样可定义两个子集合 M 和 N 的正交概念.子空间 L 若满足 $L\cap L^{\perp}=\{0\}$,则称 L 是非退化的.非退化的拟不定度规空间称为不定度规空间.

1942 年,不定度规空间概念出现在狄喇克(Dirac,P. A. M.)有关量子场论的文章中,后来庞特里亚金(Понтрягин,Л. С.)从研究力学问题的需要开始从数学上探讨不定度规空间上的算子理论,1974 年,波哥纳(Bogner,J.)给出关于一般不定度规空间理论的第一本专著,其上的线性算子也逐渐开始为人们所理解.

不定内积空间(indefinite inner product space) 即"不定度规空间".

正性向量(positive vector) 见"不定度规空间".

负性向量(negative vector) 见"不定度规空间".

迷向向量(isotropic vector) 见"不定度规空间".

零性向量(isotropic vector) 见"不定度规空间".

正性子空间(positive subspace) 见"不定度规空间".

负性子空间(negative subspace) 见"不定度规空间".

零性子空间(isotropic subspace) 见"不定度规空间".

半负子空间(semi-negative subspace) 见"不定度规空间".

半正子空间(semi-positive subspace) 见"不定度规空间".

非退化子空间(nondegenerate subspace) 见"不定度规空间".

庞特里亚金空间(Pontriakin space) 特殊的不定度规空间.设 H_- 和 H_+ 分别是不定度规空间 H 的负性和正性子空间,并且 H_+ 和 H_- 分别按内积 $\pm[\cdot,\cdot]$成为希尔伯特空间.如果有 $H=H_-\oplus H_+$,则称它是 H 的正则分解.设 $H=H_-\oplus H_+$ 是不定度规空间 H 的一个正则分解,如果 $\dim H_-=k<+\infty$(或 $\dim H_+=k<+\infty$),则称$(H,[\cdot,\cdot])$为具有负指标 k(正指标 k)的庞特里亚金空间,记为 Π_k,如果 $\dim H_{\pm}=+\infty$,称$(H,[\cdot,\cdot])$为克列因空间,记为 π.

克列因空间(Klein space) 见"庞特里亚金空间".

庞特里亚金空间的正则分解(regular decomposition of Pontriakin space) 见"庞特里亚金空间".

广 义 函 数

广义函数(generalized function) 亦称分布.定义在一类"性质很好"的函数空间上的连续线性泛函,它来源于量子力学中的狄喇克 δ 函数,是经典的函数概念的推广.考虑某个一维的温度分布 $T(x)$,"测得在点 x_0 的温度 $T(x_0)$"是无法精确实现的,任

何精密的仪器测量到的都至多是 x_0 附近温度的综合平均效应. 粗糙地说,实际能测量的是值

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

这里 φ 表示"综合平均"的权重. 各种各样的测量相当于 φ 在某个函数类 $\mathscr{F}$ 中变化. 原则上说,人们要了解的"点-点函数"$T(x)$等于了解数集

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \mid \varphi\in\mathscr{F}\right\},$$

自然,这里的 $\mathscr{F}$ 是一个充分大的函数类. 换言之,对函数来说不必一定用经典方式,即一定要知道每点 x_0 处相应的 $T(x_0)$,而把函数看做作用于某个函数类 $\mathscr{F}$ 上的泛函:$\varphi \to (T,\varphi)$,其中

$$(T,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

最简单的泛函就是连续线性泛函. 广义函数就是某种函数空间上的连续线性泛函.

在泛函分析观念下的广义函数论中,测试用的函数空间 $\mathscr{F}$ 通常称为基本函数空间(参见"基本函数空间 K"等). 由于 $\mathscr{F}$ 的选择不同,因而出现不同空间上的广义函数,有的是此空间上的广义函数,而非另一空间上的广义函数,但一般总是选择 $\mathscr{F}$ 是由性质既充分良好(例如充分光滑的函数)又充分多的函数构成的线性空间,并按一定拓扑完备. 如此选择的目的无非是使得相当多的普通函数都能视为广义函数,更重要的目的是使广义函数具有预期的很好的分析性质(如可微性,逐项可微性等).

广义函数是泛函分析的一个重要分支,被广泛应用于数学、物理、力学以及分析数学的其他各分支,例如微分方程、随机方程、流形理论等. 它还被应用到群的表示理论,特别是它有力地促进了偏微分方程近 30 年来的发展. 最早用泛函分析观点为广义函数论建立起一整套严格理论,是由施瓦兹(Schwarz,L.)于 1945 年实现的.

分布(distribution) 即"广义函数".

狄喇克 δ 函数(Dirac δ-function) 广义函数的物理原型之一. 理论物理学家狄喇克(Dirac,P. A. M.)在量子物理的研究需要中提出了如下一种怪函数:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & (x=0), \\ 0 & (x\neq 0). \end{cases}$$

但对任何连续函数 $\varphi(x)$,都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0).$$

从数学上经典函数概念(即点对应函数值)和积分理论来看,这是无法理解的. 然而物理学家却大胆使用上述这类怪函数去研究瞬时作用以及点电荷、偶极子作用等问题,把它当成普通函数去做求导和求傅里叶变换等运算,而所得数学结论与物理现实有惊人的吻合. 这就引起了数学家的重视,促使他们去合理地解释这种怪函数. 如果引入特殊的直线质量分布(在 $x=0$ 点置单位质量,其余地方置零质量)的分布函数$F(x)$(表示$(-\infty,x)$的总质量):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x\leqslant 0), \\ 1 & (x>0) \end{cases}$$

的密度函数,就可把难以理解的

$$\int \varphi(x)\delta(x)\mathrm{d}x$$

理解为普通的黎曼-斯蒂尔杰斯积分

$$\int \varphi(x)\mathrm{d}F(x).$$

所以广义函数论又称为分布理论. 后来,泛函分析对这类怪函数提供了更完善的理解方式,泛函分析观念下的广义函数论就是把这类怪函数理解为某类性质良好的函数构成的基本函数空间上的连续线性泛函. 用分布的观念为这些怪函数建立基础比较直观,但对于复杂情况就显得繁琐而且不明确了.

狄喇克分布(Dirac distribution) 即"狄喇克 δ 函数".

基本函数空间 K(fundamental function space K) 一类测试函数. 设 φ 是定义在 n 维欧几里得空间 R^n 上的函数,称$\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid\varphi(x)\neq 0\}$的闭包为 φ 的支集,记为 $\mathrm{supp}\,\varphi$. 设 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$为非负整数组,记

$$|p| = \sum_{i=1}^{n} p_i,\quad \mathrm{D}^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}},$$

当 $p_j=0$ 时,表示不对 x_j 求偏导. 特别地,记 $0=(0,0,\cdots,0)$,$\mathrm{D}^0\varphi=\varphi$. 设 K(或记为 $\mathscr{D}$)是 R^n 上无限次可微而且有紧支集的函数全体,在通常的线性运算下成为线性空间. 设函数列$\{\varphi_m\}\subset K$,$\varphi\in K$,如果:

1. 存在有界集 Ω,使得 $\mathrm{supp}\,\varphi_m\subset\Omega\,(m=1,2,\cdots)$,即$\{\varphi_m\}$的支集一致有界;

2. 对任何 p,$\{D^p\varphi_m\}$在 R^n 上一致收敛于 $\mathrm{D}^p\varphi$;

则称$\{\varphi_m\}$在 K 中收敛于 φ,记为

$$\varphi_m \xrightarrow{K} \varphi.$$

按上述线性运算和极限运算,称 K 是一个基本函数空间,而 K 中每个函数为基本函数或测试函数. K 是非空的,例如对任何 $a>0$,

$$\varphi(x,a) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}} & (|x|<a), \\ 0 & (|x|\geqslant a) \end{cases}$$

是 K 中的函数,其中

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

设 Ω 是 R^n 中的有界闭集,K 中支集包含在 Ω 中的函数全体记为 K_Ω,它是线性空间,且按半范数

族$\{p_{\Omega,m}|m=1,2,\cdots\}$成为局部凸拓扑线性空间，其中

$$p_{\Omega,m}(f)=\sup_{|p|\leqslant m,x\in\Omega}|\mathrm{D}^p f(x)|.$$

基本函数空间K恰是一切K_Ω的严格归纳极限.

广义函数空间K'(generalized function space K') 基本函数空间上连续线性泛函的全体.基本函数空间K上连续线性泛函的全体称为广义函数空间K'(或记为$\mathscr{D}'$).按通常线性运算,K'是一线性空间,由于K'是K的共轭空间,所以在K'中可以引入弱*拓扑.

正则广义函数(regular generalized function) 可以看做局部可积的普通函数的广义函数.设f是n维欧几里得空间R^n上的可测函数,如果对任何有界可测集M,f在M上勒贝格可积,则称f是局部可积函数,用L_{loc}表示R^n上的局部可积函数全体,并将几乎处处相等的函数视为同一函数.这样,对每个$f\in L_{\mathrm{loc}}$,可以定义K上的连续泛函(即K上广义函数)

$$T_f:\varphi\to\langle T_f,\varphi\rangle=\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$
$$(x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\varphi\in K).$$

称T_f为相应于f的K上的广义函数.映射$f\to T_f$是单射,如果把f就直接视为T_f,常称f是K上的正则广义函数.换言之,广义函数空间K'中那些由局部可积的普通函数f产生的广义函数T_f称为正则广义函数.类似地,在其他基本函数空间上也可引入正则广义函数.

局部可积函数(locally integrable function) 见"正则广义函数".

δ式函数列(function sequence of δ-type) 以δ函数为极限的局部可积函数列.设$\{f_n\}$是R^n上一列局部可积函数,而且按广义函数空间K'中的弱*拓扑,$f_n\to\delta(n\to\infty)$,其中δ是狄喇克δ函数,则称$\{f_n\}$是δ式函数列.

广义函数的导数(derivative of generalized function) 函数导数概念在广义函数类上的推广.设F是基本函数空间K上的广义函数,称K上的连续线性泛函(即广义函数):

$$\varphi\to-\left\langle F,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right\rangle$$

为广义函数F对x_j的广义偏导数,记为

$$\frac{\partial}{\partial x_j}F,$$

即对任何$\varphi\in K$,

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x_j}F,\varphi\right\rangle=-\left\langle F,\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\right\rangle.$$

按上述定义,广义函数各阶偏导数存在,且仍是广义函数,同时可以交换广义函数的求导次序.另外广义函数的求导运算和极限运算还可以交换,如果$\{F_m\}$是收敛于F的广义函数列,则对任何非负整数组$p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,广义函数列

$$\left\{\frac{\partial^p}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}}F_m\right\}$$

收敛于

$$\frac{\partial^p}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}}F.$$

这些性质表明广义函数的出现解除了经典分析中对求导运算和对函数列的极限进行运算的种种限制.例如一元局部可积的赫维赛德函数

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

作为(正则)广义函数,有$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x=\delta(x)$,这里$\delta(x)$即狄喇克$\delta$函数.

广义函数的原函数(primitive function of generalized function) 函数的原函数概念在广义函数上的推广.设F,G是单实变量的K空间上的广义函数,如果广义函数G满足$\mathrm{d}G/\mathrm{d}x=F$,则称$G$为$F$的原函数.对于每个广义函数$F\in K'$,必有原函数$G$;$F$的一切原函数必然形如$G+C$,其中$C$是常数.一个广义函数的原函数的一般形式就称为$F$的不定积分.

广义函数的不定积分(indefinite integral of generalized function) 见"广义函数的原函数".

广义函数的支集(support of generalized function) 是普通函数的支集概念的推广.设F是基本函数空间K上的广义函数,U是R^n中的开集,如果对一切支集含在U中的φ,有$\langle F,\varphi\rangle=0$,则称$F$在$U$上等于零.如果广义函数$F_1,F_2$的差$F_1-F_2$在$U$上等于零,则称$F_1,F_2$在$U$上等同.

令U_0是广义函数F在其上等于零的最大开集,则称闭集$\mathrm{R}^n\backslash U_0$为广义函数$F$的支集,记为$\operatorname{supp}F$.任何广义函数必是支集有界的广义函数列的极限.

有限阶广义函数(distribution with finite order) 一类广义函数.在基本函数空间K上引进一列内积如下:对非负整数p,

$$(\psi,\varphi)_p=\sum_{|q|\leqslant p}\int D^q\psi(x)\,\overline{D^q\varphi(x)}\mathrm{d}x$$
$$(\varphi,\psi\in K),$$

q是非负整数组$q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$,而

$$|q|=\sum_{i=1}^n q_i,\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

又记$\|\varphi\|_p=(\varphi,\varphi)_p^{1/2}$.显然,$\{\varphi_m\}$在$K$中收敛于$\varphi$时,必然

$$\lim_{m\to\infty}\|\varphi_m-\varphi\|_p=0$$

对任何 p 成立. 设 F 是 K 上的广义函数，而且关于 $\|\cdot\|_p$ 连续，即当 K 中序列 $\{\varphi_m\}$ 按 $\|\cdot\|_p$ 收敛于 K 中元 φ 时，$\langle F,\varphi_m\rangle\to\langle F,\varphi\rangle$，则称 F 是 p 阶广义函数. $F\in K'$（即 K 上广义函数全体），F 是 p 阶广义函数的充分必要条件是对每个非负整数 q，$|q|\leqslant p$ 时，有相应平方可积函数 F_q，使得

$$F=\sum_{|q|\leqslant p}D^qF_q.$$

任何支集有界的广义函数必是有限阶的. 任何广义函数可以表示成一列有限阶广义函数的极限.

基本函数的傅里叶变换（Fourier transform of fundamental functions） 一种积分变换. 对 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中的元 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$，记

$$x\cdot\sigma=\sum_{i=1}^{n}x_i\sigma_i,\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

而当 $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 是非负整数组时，记 $\sigma^q=\sigma_1^{q_1}\sigma_2^{q_2}\cdots\sigma_n^{q_n}$. 设 φ 是基本函数空间 K 中元，称

$$\psi(\sigma)=\int\varphi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\cdot x}\mathrm{d}x$$

为 φ 的傅里叶变换，记为 $\hat{\varphi}(\sigma)$ 或 $\mathscr{F}(\varphi)$. 又称 $\mathscr{F}:\varphi\to\hat{\varphi}$ 为傅里叶变换，逆映射 $\mathscr{F}^{-1}$ 为傅里叶逆变换.

基本函数空间 Z（fundamental function space Z） 基本函数空间 K 中元的傅里叶变换全体，即 $Z=\mathscr{F}(K)$（这里 $\mathscr{F}$ 表示傅里叶变换）. 在 Z 中引入极限概念如下：设 $\mathscr{F}(\varphi_n),\mathscr{F}(\varphi)\in Z$，当 $\{\varphi_n\}$ 在 K 中收敛于 φ 时，称 $\{\mathscr{F}(\varphi_n)\}$ 在 Z 中收敛于 $\mathscr{F}(\varphi)$. Z 中收敛意义的另一种刻画如下：首先注意 $\psi\in Z$ 的充分必要条件是 ψ 可以解析延拓为整个 $\mathbf{C}^n$ 上的解析函数（即整函数），且存在正数 α，对一切非负整数组 $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 有相应常数 $C_q>0$，使得

$$|s^q\psi(s)|\leqslant C_q\mathrm{e}^{\alpha|\tau|},$$

其中

$$s=\delta+\mathrm{i}\tau,\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n),$$

$$\tau=(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n),|\tau|=\left(\sum_{j=1}^{n}\tau_j^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|s^q|=|\delta_1+\mathrm{i}\tau_1|^{q_1}\cdots|\delta_n+\mathrm{i}\tau_n|^{q_n}.$$

$\psi_n=\mathscr{F}(\varphi_n)$ 收敛于 $\psi=\mathscr{F}(\varphi)$ 的充分必要条件是，存在 α 对一切非负整数组 q，有相应常数 C_q，使得

$$|s^q\psi_m(s)|\leqslant C_q\mathrm{e}^{\alpha|\tau|}\quad(m=0,1,2,\cdots),$$

其中 $\psi_0(s)=\varphi(s)$，且 $\{\psi_m(\sigma)\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的任何有界区域上一致收敛于 $\psi(\sigma)$.

广义函数空间 Z'（generalized function space Z'） 广义函数空间 Z' 是基本函数空间 Z 上的连续线性泛函全体. Z' 中极限运算取为弱 * 收敛.

广义函数与函数的乘积（product of generalized function and function） 广义函数与基本函数空间 K 上的函数之间的一种运算. 对于欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 上的无限次可微函数 $\alpha(x)$ 以及基本函数空间 K 上的广义函数 F，因对任何 $\varphi\in K$，都有 $\alpha\varphi\in K$，所以 $\varphi\to\langle F,\alpha\varphi\rangle$ 是 K 上的广义函数，称它为 α 与 F 的乘积，记为 αF，即 $\langle\alpha F,\varphi\rangle=\langle F,\alpha\varphi\rangle$ $(\varphi\in K)$. 记 $\mathbf{R}^n$ 上无限次可微函数全体为 E，称 E 为 K 上的乘子空间，而称 E 中每个 α 为乘子.

若 $\xi(s)$ 为 n 维复欧几里得空间 $\mathbf{C}^n$ 上的整函数，且存在正数 a,b 和 c，使得

$$|\xi(s)|\leqslant c(|s|^b+1)\mathrm{e}^{a|\tau|},$$

其中

$$s=\sigma+\mathrm{i}\tau,\quad |s|=\left(\sum_{i=1}^{n}|s_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n),\ \tau=(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)),$$

则这种 $\xi(s)$ 就是基本空间 Z 上的乘子，其全体是 Z 上的乘子空间. 即对给定乘子 $\xi(s)$ 和每个广义函数 F，可定义 $\langle\xi F,\psi\rangle=\langle F,\xi\psi\rangle$ $(\psi\in Z)$.

广义函数的直积（tensor product of generalized functions） 亦称广义函数的张量积，是富比尼定理的一个推广. 设 x,y 分别是 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 中的点，$K(\mathbf{R}^n)$，$K(\mathbf{R}^m)$ 分别表示其上的 K 空间，$F\in K'(\mathbf{R}^n)$，$G\in K'(\mathbf{R}^m)$，那么存在一个且仅有一个 $K(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m)$ 上的广义函数，记为 $F\otimes G$，它由下式定义

$$\begin{aligned}\langle F\otimes G,\varphi(x,y)\rangle&=\langle F(x),\langle G(y),\varphi(x,y)\rangle\rangle\\&=\langle G(y),\langle F(x),\varphi(x,y)\rangle\rangle,\end{aligned}$$

式中 $\varphi(x,y)\in K(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m)$. 此外，对 $\varphi(x)\in K(\mathbf{R}^n)$，$\psi(y)\in K(\mathbf{R}^m)$，满足

$$\langle F\otimes G,\varphi(x)\psi(y)\rangle=\langle F,\varphi(x)\rangle\langle G,\psi(y)\rangle.$$

称 $F\otimes G$ 为广义函数 F,G 的直积.

广义函数的张量积（tensor product of generalized functions） 即"广义函数的直积".

广义函数的卷积（convolution of distributions） 普通可积函数卷积概念在广义函数上的推广. 设 f 是基本函数空间 K 上的广义函数，且其支集有界，则对任何 $\varphi\in K$，空间 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 $u:t\to u(t)=\langle f,\tau_t\varphi\rangle$，其中 $\tau_t\varphi(x)=\varphi(x+t)$ 是 K 中的元，记 $u(\cdot)$ 为 $\langle f,\tau(\cdot)\varphi\rangle$. 当 $g\in K'$（K 上的广义函数全体）时，称广义函数 $\varphi\to\langle g,u\rangle=\langle g,\langle f,\tau(\cdot)\varphi\rangle\rangle$ 为 f 与 g 的卷积，记为 $f*g$.

广义函数的傅里叶变换（Fourier transform of distributions） 普通函数傅里叶变换运算的推广. 设 f 是基本函数间 K 上的广义函数，即 $f\in K'$，做基本函数空间 Z 上的广义函数

$$\mathscr{F}(f):\psi\to(2\pi)^n\langle f,J\mathscr{F}^{-1}(\psi)\rangle\quad(\psi\in Z),$$

其中 $J:\varphi(\cdot)\to\varphi(-(\cdot))$. 称 $\mathscr{F}(f)$ 为广义函数 f 的傅里叶变换. 映射 $\mathscr{F}:f\to\mathscr{F}(f)$ $(f\in K')$ 称为广义函数空间 K' 上的傅里叶变换，它的逆映射 $\mathscr{F}^{-1}$

称为傅里叶逆变换. 傅里叶变换 $\mathscr{F}$ 是 K' 到 Z' 上的双射,且连续线性,它还满足:

1. 对任何多项式 $p(\cdot)$, $f\in K'$ 有

$$p(\mathrm{D})\mathscr{F}(f)=\mathscr{F}(p(\mathrm{i}(\cdot))f);$$
$$p(\cdot)\mathscr{F}(f)=\mathscr{F}(p(\mathrm{i}D)f),$$

其中 D 为微分算子.

2. 设 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$, 映射

$$\tau_t:\varphi(\cdot)\to\varphi((\cdot)+t),$$

做 τ_t 的共轭算子 $\tau_t':f\to\tau_t'f$, $\langle\tau_t'f,\varphi\rangle=\langle f,\tau_t\varphi\rangle$, 那么

$$\mathscr{F}(\tau_t'f)=\mathrm{e}^{i(\cdot)t}\mathscr{F}(f),$$
$$\tau_t'\mathscr{F}(f)=\mathscr{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\cdot)t}f)\quad(f\in K').$$

3. 设 f,g 是基本函数空间 K 上的广义函数, f 的支集有界, f 的傅里叶变换 $\mathscr{F}(f)$ 是基本函数空间 Z 上的乘子, 则 $\mathscr{F}(f*g)=\mathscr{F}(f)F(g)$.

基本函数空间 $\mathscr{S}$ (fundamental function space $\mathscr{S}$) 亦称施瓦兹函数空间或急降函数类. 研究偏微分方程理论常用的基本函数空间,此空间使傅里叶变换运算封闭. 设 φ 是 n 维欧几里得空间 R^n 上的无限次可微函数,且对任何非负正数组 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$, $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$, 有

$$\|\varphi\|_{k,q}=\sup_x|x^k\mathrm{D}^q\varphi(x)|<+\infty,$$

其中

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad x^k=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},$$
$$\mathrm{D}^q=\frac{\partial^{|q|}}{\partial x_1^{q_1}\partial x_2^{q_2}\cdots\partial x_n^{q_n}},\quad |q|=\sum_{i=1}^n q_i,$$

满足 $\|\varphi\|_{k,q}<+\infty$ 的函数 φ 全体记为 $\mathscr{S}$, 在 $\mathscr{S}$ 上规定极限运算如下:如果 $\mathscr{S}$ 中函数列 $\{\varphi_m\}$ 和函数 φ 对任何非负整数组 k,q, 都有

$$\|\varphi_m-\varphi\|_{k,q}\to 0\quad(m\to\infty),$$

则称 $\{\varphi_m\}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 φ, 记为 $\varphi_m\xrightarrow{\mathscr{S}}\varphi$. 在 $\mathscr{S}$ 中引入通常的函数的线性运算以及上述极限运算就称为基本函数空间 $\mathscr{S}$. 基本函数空间 $\mathscr{S}$, Z 和 K 之间有如下一些关系:

1. $K\subset\mathscr{S}$ (或 $Z\subset\mathscr{S}$).

2. 如果 $\{\varphi_m\}\subset K$ (或 Z), 且 $\varphi_m\xrightarrow{K}\varphi$ (或 $\varphi_m\xrightarrow{Z}\varphi$), 则

$$\varphi_m\xrightarrow{\mathscr{S}}\varphi.$$

3. K (或 Z) 在 $\mathscr{S}$ 中稠密.

傅里叶变换 $\mathscr{F}:\varphi\to\tilde{\varphi}$ 是 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{S}$ 自身的连续线性双射,其逆变换也是连续的,且

$$\mathscr{F}^{-1}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^nJ\mathscr{F},$$

这里 $J:\varphi(x)\to\varphi(-x)$.

广义函数空间 $\mathscr{S}'$ (generalized function space $\mathscr{S}'$) 亦称缓增广义函数. 是基本函数空间 $\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函全体. 在 $\mathscr{S}'$ 中取弱 * 拓扑, 即 $\{F_m\}\subset\mathscr{S}'$, $F\in\mathscr{S}'$, 如果对每个 $\varphi\in\mathscr{S}$, 都有

$$\lim_{m\to\infty}\langle F_m,\varphi\rangle=\langle F,\varphi\rangle,$$

则称 $\{F_m\}$ 在 $\mathscr{S}'$ 中收敛于 F, 记为 $F_m\xrightarrow{\mathscr{S}'}F$. 函数空间 $K,Z,\mathscr{S},L^2(\mathrm{R}^n)$ 与广义函数空间 $K',Z',\mathscr{S}'$ 之间有如下关系:

$$K\subset\mathscr{S}\subset L^2(\mathrm{R}^n)\subset\mathscr{S}'\subset K',$$
$$Z\subset\mathscr{S}\subset L^2(\mathrm{R}^n)\subset\mathscr{S}'\subset Z'.$$

设 $f\in\mathscr{S}'$, 则必有非负整数组 $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 以及 R^n 上的连续函数 g, 满足:存在正整数 k, 使得

$$\sup_x\frac{|g(x)|}{(1+|x|)^k}<+\infty\quad\left(|x|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

且

$$f=\mathrm{D}^qg\left(\mathrm{D}^q=\frac{\partial^{|q|}}{\partial x_1^{q_1}\partial x_2^{q_2}\cdots\partial x_n^{q_n}},|q|=\sum_{i=1}^n q_i\right).$$

设 $f\in\mathscr{S}'$, 做 $\mathscr{S}$ 上的泛函

$$F(f):\varphi\to(2\pi)^n\langle f,\mathscr{F}(\varphi)\rangle(\varphi\in\mathscr{S}),$$

称 $\mathscr{F}(f)$ 为广义函数 f 的傅里叶变换. 傅里叶变换 $\mathscr{F}$ 是广义函数空间 $\mathscr{S}'$ 到 $\mathscr{S}'$ 自身的连续线性双射, 且 $\mathscr{F}^{-1}$ 也连续, 而

$$\mathscr{F}^{-1}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^nJF,$$

其中 J 是 $\mathscr{S}'$ 上算子: $\langle Jf,\varphi(\cdot)\rangle=\langle f,\varphi(-(\cdot))\rangle$. 这就为讨论带来了很大方便,因此在不少应用场合多采用基本函数空间 $\mathscr{S}$ 上的广义函数.

有序线性空间

有序线性空间 (ordered linear space) 具有序结构的线性空间. 设 E 是实线性空间,并且有序结构,即对 E 中某些向量对 (x,y) 有 $x\geqslant y$ (或写作 $y\leqslant x$), "$\geqslant$"满足如下条件:对任何 $x,y,z\in E$ 及实数 λ,

1. $x\geqslant x$; 若 $x\geqslant y$ 且 $y\geqslant x$, 则 $x=y$; 若 $x\geqslant y$ 且 $y\geqslant z$, 则 $x\geqslant z$.

2. 若 $x\geqslant y$, 则 $x+z\geqslant y+z$.

3. 若 $x\geqslant y$, $\lambda\geqslant 0$, 则 $\lambda x\geqslant\lambda y$.

这时称 E 是有序线性空间(或称 E 是半序线性空间).

有序线性空间这个概念首先由里斯(Riesz,F.)引入,他于 1928 年在波隆那国际数学家大会上的讲演中奠定了半序线性空间这一泛函分析分支的理论轮廓.

半序线性空间 (partially ordered vector space) 即"有序线性空间".

里斯空间 (Riesz space) 一类有序线性空间. 设 E 是有序线性空间, $x,y,z\in E$. 如果 $x\leqslant z$, $y\leqslant z$, 则称 z 是 x 和 y 的一个上界. 进而,如果 x 和 y 的每

个上界 u 都有 $z\leqslant u$，则称 z 是 x 和 y 的最小上界，也称为上确界或上端，记为 $\sup(x,y)$ 或 $x\vee y$. 类似地可以定义 x 和 y 的下界，下确界(下端)，记为 $\inf(x,y)$ 或 $x\wedge y$. 如果半序线性空间 E 中任何两个元都有上、下确界，则称 E 是里斯空间，此时 E 对运算 $\vee,\wedge$ 封闭，故也称为格序空间或向量格. 有时也分别称运算 $\vee,\wedge$ 为并和交. 记 $x\vee 0=x_+$，$(-x)\vee 0=x_-$，$x\vee(-x)=|x|$，分别称为 x 的正部，负部和绝对值. 满足 $x\geqslant 0$ 的元称为正元. 在里斯空间中成立：

1. $(x\vee y)+z=(x+z)\vee(y+z)$，$(x\wedge y)+z=(x+z)\wedge(y+z)$.

2. 对 $\lambda\geqslant 0$，有

$\lambda(x\vee y)=\lambda x\vee\lambda y,\quad \lambda(x\wedge y)=\lambda x\wedge\lambda y.$

3. $x+y=x\vee y+(x\wedge y)$，特别 $x=x_+-x_-$.

4. $(x\wedge y)\vee z=(x\vee z)\wedge(y\vee z)$，

$(x\vee y)\wedge z=(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$.

5. $x_+\wedge x_-=0$，$x_++x_-=|x|$.

6. $|x|\geqslant 0$，$|x|=0$ 等价于 $x=0$，$|\lambda x|=|\lambda||x|$ (λ 为实数)，$|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

7. $|x-y|=(x\vee y)-(x\wedge y)$，

$|x-x_1|=|x\vee y-x_1\vee y|+|x\wedge y-x_1\wedge y|$.

对 $a,b\in E$，$a\leqslant b$，称 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 为区间，记为 $[a,b]$. 如果 E 的子集 B 是某个区间的子集，则称 B 是按序的意义有界. 设 $e\in E$，如果对任何 $x\in E$，$x\geqslant 0$，总存在正整数 n，使 $x\leqslant ne$，则称 e 为 E 的阿基米德单位.

格序空间(lattice-ordered space)　即“里斯空间”.

向量格(vector lattice)　即“里斯空间”.

序有界(order bounded)　见“里斯空间”.

正元(positive element)　见“里斯空间”.

正锥(positive cone)　里斯空间中正元所构成的锥. 设 E 是里斯空间，其正元全体 E^+ 是 E 的一个以 0 为顶点的锥，称为正锥. 一般地，给定实线性空间 E 的以 0 为顶点的锥 C，$C\cap\{-C\}=\{0\}$，则由 C 可引入 E 上的半序 $\geqslant$ (即定义 $x\geqslant y$ 当且仅当 $x-y\in C$) 使 $(E,\geqslant)$ 构成向量格且 C 为其正锥.

阿基米德单位(Archimedean unit)　见“里斯空间”.

序收敛(order convergence)　在里斯空间中引进的一种收敛性. 设 E 是里斯空间，对于 E 中的一族元 $\{x_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$，若存在 x，使 $x_\alpha\leqslant x\,(\alpha\in\Lambda)$，则称 x 为 $\{x_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 的上界. $\{x_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 的上界中最小者称为 $\{x_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 的上确界，用 $\bigvee\limits_\alpha x_\alpha$ 或 $\sup\limits_\alpha x_\alpha$ 表示. 类似地，可定义 $\{x_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 的下界和下确界，用 $\bigwedge\limits_\alpha x_\alpha$ 或 $\inf\limits_\alpha x_\alpha$ 表示 $\{x_\alpha\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 的下确界. 对于定向元列 $\{x_\delta\,|\,\delta\in\Delta\}$，若存在单调元列 $\{u_\delta\,|\,\delta\in\Delta\}$ 满足 $|x_\delta-x|\leqslant u_\delta$，且 $\bigwedge\limits_\delta u_\delta=0$，则称 $\{x_\delta\,|\,\delta\in\Delta\}$ 序收敛于 x，又称 x 为 $\{x_\delta\,|\,\delta\in\Delta\}$ 的序极限，记为

$$x=\operatorname*{o-lim}_\delta x_\delta.$$

序极限如果存在，则必惟一. 当 $\{x_\delta\,|\,\delta\in\Delta\}$，$\{y_\delta\,|\,\delta\in\Delta\}$ 序收敛时，有

$$\operatorname*{o-lim}_\delta(\lambda x_\delta+\mu y_\delta)=\lambda(\operatorname*{o-lim}_\delta x_\delta)+\mu(\operatorname*{o-lim}_\delta y_\delta),$$

$$\operatorname*{o-lim}_\delta(x_\delta\vee y_\delta)=(\operatorname*{o-lim}_\delta x_\delta)\vee(\operatorname*{o-lim}_\delta y_\delta),$$

$$\operatorname*{o-lim}_\delta(x_\delta\wedge y_\delta)=(\operatorname*{o-lim}_\delta x_\delta)\wedge(\operatorname*{o-lim}_\delta y_\delta).$$

当 $x,y\in E$ 时，如果由 $0\leqslant nx\leqslant y\,(n=1,2,\cdots)$ 可推出 $x=0$，则称 E 是阿基米德的. 若 E 为阿基米德的，则由

$$x=\operatorname*{o-lim}_{n\to\infty}x_n,\quad \lambda=\lim_{n\to\infty}\lambda_n$$

必蕴涵

$$\lambda x=\operatorname*{o-lim}_{n\to\infty}\lambda_n x_n.$$

序极限(order limit)　见“序收敛”.

阿基米德向量格(Archimedean vector lattice)　见“序收敛”.

序完备向量格(order-complete vector lattice)　具有序完备性的向量格. 设 E 是向量格，如果任何有上界的子集都必有上确界，则称 E 是序完备的. 如果任何有上界的可数子集都必有上确界，则称 E 是 σ 完备的. σ 完备的向量格必是阿基米德向量格. 当 E 是 σ 完备时，如对有上界族 $\{x_n\}$ 定义：

$$\operatorname*{o-lim\,sup}_{n\to\infty}x_n=\bigwedge_n\bigvee_{m\geqslant n}x_m;$$

而对有下界族 $\{x_n\}$ 定义

$$\operatorname*{o-lim\,inf}_{n\to\infty}x_n=\bigvee_n\bigwedge_{m\geqslant n}x_m,$$

则

$$x=\operatorname*{o-lim}_{n\to\infty}x_n \text{ 和 } x=\operatorname*{o-lim\,sup}_{n\to\infty}x_n=\operatorname*{o-lim\,inf}_{n\to\infty}x_n$$

是等价的. 阿基米德向量格可以扩张为序完备向量格. σ 完备向量格是一类很重要的里斯空间，在 20 世纪 30 年代，坎托罗维奇(Канторович, Л. В.)等人对其进行了系统的研究，现在也有人称 σ 完备向量格为 K 空间.

σ 完备向量格(σ-complete vector lattice)　见“序完备向量格”.

K 空间(K-space)　见“序完备向量格”.

巴拿赫格(Banach lattice)　兼有巴拿赫空间特性的向量格. 如果向量格 X 同时是巴拿赫空间，且序和范数之间有关系：$|x|\leqslant|y|$ 推出 $\|x\|\leqslant\|y\|$ $(x,y\in X)$，则称 X 为格序巴拿赫空间或巴拿赫格. 例如，数列空间 c，$l^p\,(p\geqslant 1)$ 以及函数空间 $C[a,b]$，$L^p[a,b]\,(p\geqslant 1)$ 等，按自然的序关系(即这些空间的元如在每个点或坐标处的值 $\geqslant 0$ 时是正元)形成巴拿赫格. 在巴拿赫格中，当

$$\| x_n - x \| \to 0, \| y_n - y \| \to 0$$

时，必有

$$\| x_n \vee y_n - x \vee y \| \to 0,$$
$$\| x_n \wedge y_n - x \wedge y \| \to 0$$

成立. 关于巴拿赫格中序收敛和范数收敛的强弱的比较，尽管在不同具体空间结论不一样，然而 $\| x_n - x \| \to 0$ 同 $\{x_n\}$ 相对一致 * 收敛于 x（即对 $\{x_n\}$ 的任何子列 $\{x_{n(m)}\}$，存在此子列的子列 $\{x_{n(m(l))}\}$ 和某 $y \in X$，使得 $|x_{n(m(l))} - x| \leqslant y/l (l=1,2,\cdots)$）是等价的. 又，序意义下的有界集必是范数意义下的有界集，但其逆一般不真.

抽象空间 $L^p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$（abstract L^p space $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$） 满足一定条件的巴拿赫格. 设 X 是巴拿赫格，当 X 满足下列条件之一时，分别称 X 为抽象 L^∞（$p=+\infty$ 的 L^p），抽象 L（$p=1$ 的 L^p），抽象 $L^p(1<p<+\infty)$ 空间，并用 AL^∞, AL, AL^p 表示.

L^∞ 的条件：

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0 \Rightarrow \|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|);$$

L 的条件：

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0 \Rightarrow \| x + y \| = \|x\| + \|y\|;$$

L^p 的条件：

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0 \Rightarrow \|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p.$$

对于抽象 L 空间，可以证明有测度空间 Ω 使这种巴拿赫格线性保序同构于 $L^1(\Omega)$. 同样对抽象 L^p 空间也可用某个 $L^p(\Omega)$ 来刻画. 这样的种种表示定理是在 20 世纪 40 年代初由角谷静夫以及克列因（Крейн, М. Г.）和克列因（Крейн. С. Г.）等人给出的.

对偶格（dual lattice） 向量格到实数域 R 的序有界线性算子全体. 设 $\mathscr{L}(X,Y)$ 是向量格 X 到向量格 Y 的序有界线性算子全体所成的集（这里序有界是指把 X 中的任一序有界集映成 Y 中的序有界集）. 对任何 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{L}(X,Y)$，如果 $x \geqslant 0$ 时，有 $\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x)$，则定义 $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$，在此序关系下，$\mathscr{L}(X,Y)$ 也是向量格. 当 Y 序完备时，$\mathscr{L}(X,Y)$ 也是序完备的. 称 $\varphi \in \mathscr{L}(X,Y)$ 是正线性算子，如果 $\varphi \geqslant 0$. 特别地，当 Y 为实数域 R 时，称 $\mathscr{L}(X,\mathrm{R})$ 为 X 的对偶格，记为 X'. 它是序完备的向量格.

向量格 X 的对偶格与范数对偶空间相同，而且任何巴拿赫格的序对偶仍是巴拿赫格. 对 $f \in X'$，f 的正、负部分 f^+ 和 f^-，以及绝对值 $|f|$ 等满足下列关系：

$$f^+(x) = \sup_{0 \leqslant y \leqslant x} f(y),$$
$$f^-(x) = -\inf_{0 \leqslant y \leqslant x} f(y),$$
$$|f|(x) = \sup_{-x \leqslant y \leqslant x} f(y),$$

这里 $x \in X$，且 $x \geqslant 0$. 对偶研究是由克列因（Крейн, М. Г.）等人开始的，他证明了巴拿赫格的序性质如何确定了对偶格的序性质.

序有界线性算子（order-bounded linear operator） 见“对偶格”.

正线性算子（positive linear operator） 见“对偶格”.

拓扑里斯空间（topological Riesz space） 巴拿赫格的一种推广，是带有与其线性结构相协调序关系的拓扑线性空间. 向量格 X 中的集合 S 称为是实心的，如果 $S = \{y \mid \exists\ u \in S, u \geqslant 0$ 且 $u \geqslant y \geqslant -u\}$. 设 X 是里斯空间且 (X,T) 是拓扑线性空间，若 T 存在一实心集组成的零元邻域基，则称 (X,T) 为拓扑里斯空间. 特别地，若 (X,T) 是局部凸拓扑线性空间，则称 (X,T) 为局部凸拓扑里斯空间. 拓扑里斯空间的研究是受到抽象积分理论、魁特空间理论等分支的强烈影响而开始的.

局部序凸空间（locally order-convex space） 一种带有序关系的拓扑线性空间. 设 A 是向量格 X 的子集，若对任何 $a_1, a_2 \in A, a_1 \leqslant a_2$ 有 $\{y \mid a_1 \leqslant y \leqslant a_2\} = [a_1, a_2] \subset A$，则称 A 是序凸子集. X 中的线性拓扑 T 称为是局部序凸拓扑，若其具有由序凸集组成的零元邻域基. 特别地，当 X 中的正锥是 T 的闭集时，则称 (X,T) 为局部序凸里斯空间. 最早研究局部序凸巴拿赫空间的人是克列因（Крейн, М. Г.），他与格罗斯伯格（Grosberg, J.）于 1939 年证明了局部序凸巴拿赫空间的对偶定理.

线 性 算 子

算子理论（operator theory） 算子理论是研究函数空间或更一般的抽象空间之间的变换或算子的一种理论. 算子理论的思想产生于 19 世纪末期，其中可以以沃尔泰拉（Volterra, V.）的几篇论文作为标志. 之后通过阿达马（Hadamard, J. (-S.)）、弗雷歇（Fréchet, M. -R.）、穆尔（Moore, R. E.）、施密特（Schmidt, E.）、里斯（Riesz, F.）、巴拿赫（Banach, S.）、冯·诺伊曼（von Neumann, J.）等一大批数学家的共同努力，到 20 世纪 20 年代，算子理论得以初步成形. 在此之后，特别是 20 世纪后半叶，算子理论得到了突飞猛进的发展.

算子理论产生的原动力是出于研究各类微分方程与积分方程的需要. 出现在各种微分方程与积分方程中的变换的共同特征是把函数变为函数. 算子理论的观点是把一个函数视为相应函数空间中的一个元素或一个点，从而把变换视为函数空间之间把点变为点的算子或映射，进而可把它作为抽象空间（如巴拿赫空间或一般的拓扑线性空间）之间的算子来研究. 这种观点与研究方法具有一般性与统一性. 同时，算子作为（无穷维）空间中把点变为点的映射

也具有几何直观性，特别是经常可以从关于有限维空间中的映射的已知结论中得到启示. 作为抽象的线性空间中的算子，按其是否具有线性属性来分类，可分为线性算子与非线性算子两大类. 这两类理论可以分别看做是有限维空间中线性代数与数学分析理论在无穷维空间上的推广. 这种推广的主要困难也正是来自空间的无穷维属性. 目前，线性算子的理论相对于非线性算子的理论而言要成熟与完备得多.

算子理论的主要应用对象是微分方程与积分方程. 事实上，微分算子与积分算子已成为整个算子理论中两个有机的组成部分.

线性算子(linear operator) 线性空间之间保持线性运算的映射. 设 X,Y 同是数域 K 上的线性空间，D 是 X 的线性子空间，T 是从 D 到 Y 中的映射. 如果对每个 $x,y\in D$，有 $T(x+y)=Tx+Ty$，则称 T 是可加算子；如果对每个 $x\in D$ 和实数 α 有 $T(\alpha x)=\alpha Tx$，则称 T 是实齐次的，如果对一切 $\alpha\in K$ 这个关系式都成立，则称 T 是齐次算子. 如果 T 既是可加的又是齐次的，则称 T 是线性算子或线性映射，D 称为 T 的定义域，常记为 $\mathscr{D}(T)$. 线性子空间 $\mathscr{R}(T)=\{Tx\mid x\in D\}$ 称为 T 的值域(或像域). 当 $\mathscr{D}(T)=X$ 时，称 T 是 X 到 Y 的线性算子. 当 $\mathscr{R}(T)=Y$ 时，称 T 为 X 到 Y 上的或满值域的. 特别地，当 $Y=K$(或 Y 是一维线性空间)时，T 称为 D 上的线性泛函. 线性泛函是线性算子的特殊情形.

线性泛函(linear functional) 见“线性算子”.

线性映射(linear mapping) 见“线性算子”.

可加算子(additive operator) 见“线性算子”.

齐次算子(homogeneous operator) 见“线性算子”.

单射线性算子(injective linear operator) 一对一的线性算子，即若 $x\neq y$，则 $Tx\neq Ty$. 单射线性算子有时也称为内射线性算子.

内射线性算子(injective linear operator) 即“单射线性算子”.

满射线性算子(surjective linear operator) 值域等于全空间的线性算子，亦称为映到上的线性算子.

双射线性算子(bijective linear operator) 既是单射又是满射的线性算子.

恒等算子(identity operator) 将空间元素恒映为自身的映射. 设 X 为线性空间，X 上的恒等算子常记为 I，即对任意 $x\in X$ 有 $Ix=x$.

线性算子的初等运算(elementary operation of linear operators) 包括加法、数乘、乘积等运算. 设 X,Y 是数域 K 上的线性空间，用 $(X\to Y)$ 表示从 X 到 Y 的线性算子全体. 当 $A,B\in(X\to Y)$，$\alpha\in K$，规定 A 与 B 的和 $A+B$ 及 α 与 A 的积 αA 如下：对任何 $x\in X$，$(A+B)x=Ax+Bx$，$(\alpha A)x=\alpha Ax$，于是 $(X\to Y)$ 成为 K 上的线性空间. 设 Z 是数域 K 上的线性空间，如果 $B\in(X\to Y)$，$A\in(Y\to Z)$，定义算子 A 与 B 的乘积为 $(AB)x=A(Bx)$，$AB\in(X\to Z)$. 特别地当 $X=Y=Z$ 时，$(X\to Y)$ 按上述线性运算及乘积成为有单位元的代数，其单位元为恒等算子 I：$Ix=x$.

逆算子(inverse operator) 由给定算子的像到原像的映射. 设 X,Y 均为线性空间，T 是线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，$\mathscr{R}(T)\subset Y$，如果 T 是一一映射，则存在从 $\mathscr{R}(T)\subset Y$ 到 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 上的线性算子 S 使得 $ST=I_{\mathscr{D}(T)}$，$TS=I_{\mathscr{R}(T)}$，这里 $I_{\mathscr{D}(T)}$，$I_{\mathscr{R}(T)}$ 分别表示 $\mathscr{D}(T)$，$\mathscr{R}(T)$ 上的恒等算子，称 S 为 T 的逆算子，T 的逆算子通常记为 T^{-1}.

有界线性算子(bounded linear operator) 泛函分析研究中一类重要线性算子. 设 X,Y 是赋范线性空间，T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 Y 中的线性算子. 如果 T 把 $\mathscr{D}(T)$ 中的每个有界集映射成 Y 中的有界集，就称 T 是有界线性算子. 否则称 T 为无界线性算子. 赋范空间中线性算子的有界性、连续性及在某一点的连续性这三者是等价的. 而 X 上线性泛函 f 为有界的另一充分必要条件是，f 的零空间 $\ker f=\{x\mid f(x)=0\}$ 是 X 中的闭子空间. 同样可以定义线性算子 T 的零空间 $\ker T=\{x\mid Tx=0\}$. 上述结论对赋准范空间的情形也是对的.

注意，通常说“有界线性算子”总是指它的定义域是全空间的有界线性算子. 关于有界线性算子的理论不仅在数学的许多分支中有很好的应用，同时也是量子物理的数学基础之一.

无界线性算子(unbounded linear operator) 见“有界线性算子”.

有界线性泛函(bounded linear functional) 作为特殊的算子为有界的线性泛函.

线性算子的零空间(null space of linear operator) 见“有界线性算子”.

线性算子的核(kernel of linear operator) 即“线性算子的零空间”.

有界线性算子的范数(norm of bounded linear operator) 刻画有界线性算子的“界”的非负实数. 设 X,Y 是赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的线性算子. T 是有界的充分必要条件是存在常数 $M\geqslant 0$，使得 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$ 对一切 $x\in X$ 成立. 这种 M 的下确界称为 T 的范数，记为 $\|T\|$. 显然

$$\|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|.$$

若称

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

为 T 在 x 的伸长系数，则 $\|T\|$ 的几何意义是一切 x 的伸长系数的上确界. 当 f 是有界线性泛函时，f 的范数也记为 $\|f\|$.

有界线性泛函的范数(norm of bounded linear functional)　见"有界线性算子的范数".

有界线性算子空间(space of bounded linear operators)　一类重要空间. 所谓有界线性算子空间，是指赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子全体，用 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 表示. 按算子的线性运算和算子的范数，$\mathscr{B}(X\to Y)$ 成为赋范线性空间. 当 Y 是巴拿赫空间时，$\mathscr{B}(X\to Y)$ 也是巴拿赫空间. 特别地，当 $X=Y$ 是巴拿赫空间时，对任何 $A,B\in\mathscr{B}(X\to X)$，还有 $\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$. 有界线性算子空间是泛函分析中研究的一类重要空间，它在算子理论的研究中起着重要作用.

可逆线性算子(invertible linear operator)　一类具有有界逆映射的线性算子. 设 X,Y 是赋范线性空间，T 是线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，$\mathscr{R}(T)\subset Y$. 如果 $\mathscr{R}(T)=Y$，T 是一对一的，且 T^{-1} 有界，则称 T 是可逆线性算子. 可逆线性算子是线性代数中可逆矩阵概念的一种推广.

正则线性算子(regular linear operator)　巴拿赫空间上的一类线性算子. 设 X 是巴拿赫空间，T 是 X 到 X 的线性算子，定义域是 $\mathscr{D}(T)$. 若 $\mathscr{R}(T)=X$，T 是单射，且 T^{-1} 是有界的，则称 T 是正则线性算子.

闭线性算子(closed linear operator)　连续线性算子的推广. 设 X,Y 是度量线性空间，T 是线性算子，$\mathscr{D}(T)\subset X$，$\mathscr{R}(T)\subset Y$. 如果由

$$\{x_n\}\subset\mathscr{D}(T),\ \lim_{n\to\infty}x_n=x,\ \lim_{n\to\infty}Tx_n=y,$$

能推出 $x\in\mathscr{D}(T)$，且 $Tx=y$ 成立，则称 T 是闭线性算子. 在乘积空间 $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$ 中引入距离

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{\rho(x_1,x_2)^2+\rho(y_1,y_2)^2},$$

$(X\times Y,\rho)$ 成为度量线性空间，子集 $G(T)=\{(x,Tx)\mid x\in\mathscr{D}(T)\}$ 称为映射 T 的图象，T 是闭线性算子的充分必要条件为 $G(T)$ 在 $(X\times Y,\rho)$ 中是闭集. 在赋范线性空间上无界线性算子的讨论中，算子是否为闭相当重要，因为闭性与连续性有密切的联系.

线性映射的图象(graph of linear mapping)　见"闭线性算子".

稠定闭线性算子(densely defined closed linear operator)　无界线性算子理论中一类重要的算子. 设 X,Y 为赋范线性空间，T 是定义域为 $\mathscr{D}(T)\subset X$，值域为 $\mathscr{R}(T)\subset Y$ 的线性算子，如果 $\mathscr{D}(T)$ 在 X 中是稠密的，则称 T 是稠定线性算子. 一个既稠定又闭的算子称为稠定闭线性算子.

稠定线性算子(densely defined linear operator)　见"稠定闭线性算子".

共轭线性算子(conjugate linear operator)　由线性算子诱导出的共轭空间之间的算子. 设 X,Y 为赋范线性空间，T 是 X 到 Y 的稠定线性算子. 记 $\mathscr{D}^*=\{f\mid f\in Y^*$，存在 $g\in X^*$，使对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$，$g(x)=f(Tx)$ 成立$\}$，这里 g 由 f 惟一确定，$\mathscr{D}^*$ 是 Y^* 的线性子空间. 在 $\mathscr{D}^*$ 上定义算子 T^*：$T^*f=g$，T^* 是以 $\mathscr{D}^*$ 为定义域的到 X^* 的线性算子，并称为 T 的共轭算子，也称为 T 的对偶线性算子或伴随线性算子. 当 T 是有界线性算子时，T^* 也是有界的，并且 $\|T^*\|=\|T\|$. 有界线性算子的共轭算子有如下基本性质：

$$(\alpha T+\beta S)^*=\alpha T^*+\beta S^*\quad(\alpha,\beta\text{ 是数});$$

$$(TS)^*=S^*T^*;\ (T^{-1})^*=(T^*)^{-1}.$$

当 X,Y 是内积空间时，T 的共轭算子 T^* 是指满足 $(Tx,y)=(x,T^*y)$ 的线性算子. 内积空间的共轭算子是线性代数中转置共轭矩阵概念的推广，它与赋范空间上共轭算子的性质的区别仅在于 $(\alpha T+\beta S)^*=\bar{\alpha}T^*+\bar{\beta}S^*$ (α,β 是数). 特别地，当 $X=Y$ 是希尔伯特空间时有：

1. 若 $A\in\mathscr{B}(X)$，则 $A^*\in\mathscr{B}(X)$.
2. $A^{**}=A$.
3. $\|A^*A\|=\|A\|^2$.
4. $\ker(A)=\mathscr{R}(A^*)^{\perp}$，$\ker(A^*)=\mathscr{R}(A)^{\perp}$，这里的 $\ker(A)$ 为算子 A 的零空间.

赋范空间中共轭算子是线性代数中转置矩阵概念的推广，所以自然地在研究方程 $Tx=y$ 时它起着重要作用.

伴随线性算子(adjoint linear operator)　即"共轭线性算子".

对偶线性算子(dual linear operator)　即"共轭线性算子".

共鸣定理(resonance theorem)　亦称一致有界性原理或巴拿赫-施坦豪斯定理. 论述有关一族有界线性算子为一致有界的定理. 该定理断言：设 X 是巴拿赫空间，Y 是赋范线性空间，$\{T_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ 是从 X 到 Y 的一族有界线性算子，如果对每个 $x\in X$ 都有

$$\sup_{\alpha\in\Lambda}\|T_\alpha x\|<+\infty,$$

则数集 $\{\|T_\alpha\|\mid\alpha\in\Lambda\}$ 是有界的.

共鸣定理是泛函分析中的一条重要定理. 它是由巴拿赫(Banach, S.)与施坦豪斯(Steinhaus, H. D.)于 1927 年在勒贝格(Lebesgue, H. L.)关于奇异积分、特普利茨(Toeplitz, O.)关于正则求和法以

及哈恩(Hahn,H.)关于插值理论等前人研究成果的基础上提出的.

一致有界性原理(uniform boundedness principle) 即"共鸣定理".

巴拿赫-施坦豪斯定理(Banach-Steinhaus theorem) 即"共鸣定理".

奇异性凝聚原理(principle of the condensation of singularities) 有关算子奇异性的定理. 设 T_{mn} $(m,n=1,2,\cdots)$是由巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 X_{mn}中的有界线性算子,并设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_{mn}\| = +\infty \quad (m=1,2,\cdots), \tag{1}$$

那么存在 X 中的一个第二范畴集 M 使 $X\backslash M$ 是第一范畴的,并且对每个 $x\in M$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\|T_{mn}x\| = +\infty \quad (m=1,2,\cdots). \tag{2}$$

式(1)意味着对每个 m,存在单位向量列$\{x_{mn}\}$使

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_{mn}x_{mn}\| = +\infty \quad (m=1,2,\cdots),$$

故 x_{mn}具有某种奇异性. 而上述结论(2)则说明随 m,n 而变的 x_{mn}可换成固定的 x,从而定理称为奇异性凝聚原理.

开映射定理(open mapping theorem) 亦称开映照定理或开映像定理. 闭线性算子的一个重要性质. 设 X,Y 是弗雷歇空间,T 是闭线性算子,$\mathscr{D}(T)\subset X$,$\mathscr{R}(T)\subset Y$,如果 $\mathscr{R}(T)$是 Y 中的第二范畴集,则 $\mathscr{R}(T)=Y$,且 T 把 $\mathscr{D}(T)$中的(相对)开集映为 Y 中的开集. 该定理在有限维空间中是平凡的,但在无限维空间中却是极为深刻的性质和有力的工具. 通过它不但可以导出关于有界逆算子存在的重要定理,而且还可得到重要的闭图象定理.

开映照定理(open mapping theorem) 即"开映射定理".

开映像定理(open mapping theorem) 即"开映射定理".

巴拿赫逆算子定理(Banach inverse operator theorem) 关于有界逆算子存在的定理. 设 X,Y 为弗雷歇空间,T 是 $\mathscr{D}(T)\subset X$ 到 $\mathscr{R}(T)\subset Y$ 的闭线性算子,如果 T 是一对一的,且 $\mathscr{R}(T)$是 Y 中的第二范畴集,则 T^{-1}是定义在 Y 上的连续线性算子. 特别地,从巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 上的一对一有界线性算子 T 的逆 T^{-1}是定义在 Y 上的有界线性算子.

闭图象定理(closed graph theorem) 从线性算子的闭性推出连续性的定理. 设线性算子 T 是由弗雷歇空间 X 的第二范畴线性子空间到弗雷歇空间 Y 内的闭线性算子,则 T 必是连续的. 闭图象定理是巴拿赫(Banach,S.)于 1931 年提出并证明的. 1956 年,罗伯森兄弟(Robertson,A. & Robertson,W.)把它推广到局部凸拓扑线性空间,证明了桶型空间到全完备空间的闭线性算子是连续的.

线性算子的闭值域定理(closed range theorem of linear operator) 刻画值域为闭的算子的定理. 设 X,Y 是巴拿赫空间,T 是稠定闭线性算子,定义域 $\mathscr{D}(T)\subset X$,值域 $\mathscr{R}(T)\subset Y$. 下面五个条件是等价的:

1. $\mathscr{R}(T)$是 Y 中的闭子空间.
2. $\mathscr{R}(T^*)$是 X^* 中的闭子空间.
3. $\gamma(T)=\inf\{\|Tx\| \mid x\in\mathscr{D}(T), \inf\limits_{h\in\ker T}\|x-h\|\geqslant 1\}>0$,

$\gamma(T)$称为 T 的最小模,$\ker T$ 为 T 的零空间.

4. $\mathscr{R}(T)=\{y\in Y \mid$对所有的 $y^*\in\ker T^*$,都有 $y^*(y)=0\}$.
5. $\mathscr{R}(T^*)=\{x^*\in X^* \mid$对所有的 $x\in\ker T$,都有 $x^*(x)=0\}$.

以上所述汇总起来称为闭值域定理.

算子值域(operator range) 巴拿赫空间中的一类线性子空间. 设 R 是巴拿赫空间 X 的线性子空间,如果存在巴拿赫空间 X_1 以及从 X_1 到 X 中的有界线性算子 T,使得 R 就是 T 的值域(像域),即 $R=T(X_1)$,则称 R 是一个算子值域. 例如,巴拿赫空间中每个闭线性子空间都是算子值域,因此算子值域可视为闭线性子空间概念的推广. 利用算子值域可把闭图象定理做如下推广:设 A 是从巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 中的线性算子,如果 A 的图象是算子值域,则 A 必是有界的(即连续的).

线性算子的闭扩张(closed extension of linear operator) 研究无界线性算子的重要方法之一. 设 X,Y 都是赋范线性空间,T 是 X 到 Y 的线性算子,$\mathscr{D}(T)$是 T 的定义域,T 的值域为 $\mathscr{R}(T)$. 如果有闭线性算子 T',使得 T'是 T 的扩张或延拓,即 $\mathscr{D}(T')\supset\mathscr{D}(T)$,且当$x\in\mathscr{D}(T)$时,$Tx=T'x$,则称 T'是 T 的闭扩张(或闭延拓). 如果 $\overline{T}$ 是 T 的一个闭扩张,而一切 T 的闭扩张 $\tilde{T}$ 都必是 $\overline{T}$ 的闭扩张时,则称 $\overline{T}$ 是 T 的最小闭扩张. 如果 T 有闭扩张,则最小闭扩张是惟一的.

线性算子的闭延拓(closed extension of linear operator) 即"线性算子的闭扩张".

线性算子的最小闭扩张(minimal closed extension of linear operator) 见"线性算子的闭扩张".

稠定线性算子的闭扩张(closed extension of densely defined linear operator) 稠定线性算子在一定条件下经延拓而得到的闭算子. 设 H,G 都是希尔伯特空间,T 是线性算子,$\mathscr{D}(T)\subset H$ 在 H 中稠密,$\mathscr{R}(T)\subset G$. 如果存在闭线性算子 S,使得 $\mathscr{D}(T)\subset\mathscr{D}(S)$,且当 $x\in\mathscr{D}(T)$时,$Sx=Ty$,则称 S 是 T 的闭扩张,而称 T 是可闭化的. 稠定线性算子

T 可闭化的充分必要条件是 $\mathscr{D}(T^*)$ 在 G 中稠密，此时，T 的最小闭扩张 $\overline{T}$ 就是 T^{**}.

特征值(eigenvalue)　矩阵特征值概念的推广，是由算子决定的一些复数. 设 T 是线性空间 X 上的算子，λ 是复数. 如果 X 中有非零向量 x，使 $Tx=\lambda x$，则称 λ 为 T 的特征值(或本征值)，而 x 称为相应于 λ 的特征向量(或本征向量). 当 T 是线性算子时，相应于特征值 λ 的特征向量再加上零向量构成线性子空间，记为 E_λ，称 E_λ 为相应于 λ 的特征子空间. E_λ 的维数称为特征值 λ 的重复度. 对有限维空间，求矩阵的特征值以及与它相应的线性方程组的求解问题在线性代数中已经完全解决. 当空间是无限维时，问题变得复杂得多.

特征向量(eigenvector)　见“特征值”.

本征值(eigenvalue)　即“特征值”.

本征向量(eigenvector)　即“特征向量”.

特征子空间(eigensubspace)　见“特征值”.

特征值的重复度(multiplicity of eigenvalue)　见“特征值”.

正则集(regular set)　正则点的集合，正则点是由算子决定的一些复数. 设 X 是复赋范线性空间，T 是 X 到 X 的线性算子，$\mathscr{D}(T)$ 是 T 的定义域，λ 是复数. 如果 $\lambda I-T$ 是正则算子，即使 $(\lambda I-T)^{-1}$ 是在整个 X 上有定义的有界线性算子，则称 λ 是 T 的正则点. 复平面上正则点全体记为 $\rho(T)$，称为 T 的正则集或预解集. $\rho(T)$ 的余集 $\mathbb{C}\backslash\rho(T)$ 称为 T 的谱集，简称谱，记为 $\sigma(T)$ 或 $\mathrm{Sp}(T)$. 当 X 是巴拿赫空间时，任何线性算子的正则集都是开集，进一步，当 T 是有界时，$\rho(T)$ 和 $\sigma(T)$ 都是非空的.

线性算子 T 的特征值也称为点谱，其全体记为 $\sigma_p(T)$；如果存在单位向量序列 $\{x_n\}$，使得

$$\|(\lambda I-T)x_n\| \to 0,$$

则称 λ 是近似点谱，其全体记为 $\sigma_a(T)$；如果 $\lambda I-T$ 是一对一且值域稠密，则称 λ 是连续谱点，其全体记为 $\sigma_c(T)$；如果 λ 不是特征值，$\lambda I-T$ 的值域也不稠密，则称 λ 为 T 的剩余谱点，其全体记为 $\sigma_r(T)$(也有的文献定义“剩余谱”为 $\sigma(T)\backslash\sigma_a(T)$). 显然，$\sigma_p(T)$，$\sigma_c(T)$ 和 $\sigma_r(T)$ 互不相交，

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T).$$

当 X 是巴拿赫空间时，还有 $\partial\sigma(T)\subset\sigma_a(T)$，这里 $\partial\sigma$ 表示 σ 的边界.

在无限维空间，谱是较矩阵特征值更广泛的概念. 一般特征值只是谱的一部分(点谱). 只有线性算子的谱理论的建立才能完全解决力学、物理和工程技术中所出现的大量的线性方程求解问题.

预解集(resolvent set)　即“正则集”.

谱集(spectrum)　见“正则集”.

谱(spectrum)　谱集的简称. 见“正则集”.

点谱(point spectrum)　见“正则集”.

近似点谱(approximate point spectrum)　见“正则集”.

连续谱(continuous spectrum)　见“正则集”.

剩余谱(residue spectrum)　见“正则集”.

预解算子(resolvent operator)　定义在正则集上的算子函数. 设 T 是复巴拿赫空间 X 上的线性算子，$\rho(T)$ 为 T 的正则集. 对 $\lambda\in\rho(T)$，称有界线性算子 $R(\lambda,T)=(\lambda I-T)^{-1}$ 为 T 的预解算子. $R(\lambda,T)$ 是 $\rho(T)$ 上的局部解析函数，对 $\lambda_1,\lambda_2\in\rho(T)$，有

$$\begin{aligned}&R(\lambda_1,T)-R(\lambda_2,T)\\&=-(\lambda_1-\lambda_2)R(\lambda_1,T)R(\lambda_2,T).\end{aligned}$$

当 T,S 是有界线性算子，$\lambda\in\rho(S)\cap\rho(T)$ 时，有

$$R(\lambda,T)-R(\lambda,S)=R(\lambda,T)(T-S)R(\lambda,S).$$

上述两个等式分别称为第一预解方程和第二预解方程.

预解方程(resolvent equation)　见“预解算子”.

谱半径(spcetral radius)　刻画谱集范围大小的数量. 设 X 为复赋范线性空间，T 是 X 上的有界线性算子，$\sigma(T)$ 是 T 的谱，称

$$r_{\sigma(T)}=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$$

为 T 的谱半径. 当 X 是巴拿赫空间时，

$$r_{\sigma(T)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

上述等式称为盖尔范德谱半径公式.

相似线性算子(similar linear operators)　相似矩阵的推广. 设 A,B 是巴拿赫空间上的有界线性算子，如果存在可逆的有界算子 W(即 W,W^{-1} 都有界)，使得 $B=W^{-1}AW$，则称 A 和 B 相似. 相似算子具有相同的谱.

拟相似线性算子(quasi-similar linear operators)　相似线性算子的推广. 设 A,B 是巴拿赫空间上的有界线性算子，如果存在两个有稠密值域的单射的线性算子 T 和 S，使得 $TA=BT$，$AS=SB$ 成立，则称 A 和 B 拟相似.

幂等算子(idempotent operator)　具有幂等性质的线性算子. 设 P 为线性空间 X 上的线性算子，如果 $P^2=P$，则称 P 为幂等算子或投影.

投影算子(projective operator)　在赋范线性空间 X 上具有幂等性的有界线性算子. 设 P 是 X 上的有界线性算子，如果 $P^2=P$，则称 P 为投影算子. 当 P 是投影算子时，$I-P$ 也是投影算子，且

$$X=PX+(I-P)X.$$

幂零算子(nilpotent operator)　经过有限次幂运算后变成零的算子. 赋范线性空间上有界线性算子 T 称为幂零算子，如果存在非零整数 n，使得 $T^n=0$. 满足 $T^n=0$ 的最小正整数称为幂零算子的阶.

拟幂零算子(quasi-nilpotent operator)　幂零算子概念的推广. 赋范线性空间上有界线性算子 T 称为拟幂零算子,如果

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=0.$$

拟幂零算子又称广义幂零算子. 复巴拿赫空间上拟幂零算子的谱半径 $r_{\sigma(T)}=0$,即谱 $\sigma(T)$ 只有单点 0.

广义幂零算子(quasi-nilpotent operator)　即"拟幂零算子".

代数算子(algebraic operator)　一类有界线性算子. 设 T 是赋范线性空间 X 上的有界线性算子,如果存在多项式 $p(t)$,使 $p(T)=0$,则称 T 是代数算子. 对非零的代数算子,必存在首项系数为 1 的多项式 $p_0(t)$,使得 $p_0(T)=0$,且对任何多项式 $q(t)$,只要 $q(T)=0$,则 $q(t)$ 必含因子 $p_0(t)$,称 $p_0(t)$ 是 T 的最小多项式. 代数算子的谱点都是特征值,且恰为最小多项式的全部根.

有限秩算子(finite rank operator)　具有限维值域的有界线性算子. 设 A 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子,如果值域 $\mathscr{R}(A)$ 是 Y 的有限维线性子空间,则称 A 是有限秩算子.

紧算子(compact operator)　一类重要的有界算子,它最接近于有限维空间上的线性算子. 设 X, Y 是赋范线性空间,A 是 X 到 Y 的连续算子. 如果 A 把定义域中任何有界集映射成 Y 中的列紧集,则称 A 是紧算子,或全连续算子. 紧算子概念是希尔伯特(Hilbert,D.)于 1906 年引入的. 1917 年里斯(Riesz,F.)对紧算子进行了系统的研究. 1930 年绍德尔(Schauder,J. P.)证明了,若 X,Y 都是巴拿赫空间,$A\in(X\to Y)$,则 A 是紧算子的充分必要条件是它的共轭算子 A^* 是紧的. 如果 Y 是巴拿赫空间,则从 X 到 Y 的紧线性算子全体 $\mathscr{K}(X\to Y)$ 是巴拿赫空间 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 的闭线性子空间. 当 Y 或 X 的共轭空间 X^* 是具有可数基的巴拿赫空间时,X 到 Y 的紧线性算子可用有限秩线性算子来逼近. 对一般巴拿赫空间未必如此,恩夫洛(Enflo,P.)曾举出反例说明这一点.

全连续算子(completely continuous operator)　即"紧算子".

多项式紧算子(polynomial compact operator)　紧算子概念的推广. 设 T 是赋范空间 X 上的有界线性算子,如果存在非零多项式

$$p(t)=\sum_{k=0}^{n}a_kt^k,$$

使

$$p(T)=\sum_{k=0}^{n}a_kT^k$$

为紧算子,则称 T 是多项式紧算子. 代数算子是多项式紧算子的重要例子.

里斯-绍德尔理论(Riesz-Schauder theory)　研究紧线性算子谱性质的理论. 设 A 是复巴拿赫空间 X 上的紧线性算子,则下列命题成立:

1. 当 X 是无限维时,$0\in\sigma(A)$.
2. 若 λ 是 A 的谱点,$\lambda\neq0$,则 λ 是 A 的特征值.
3. 若 $\lambda\neq0$,λ 是 A 的特征值,则相应于 λ 的特征向量空间 E_λ 是有限维的.
4. A 的谱最多只是可数集,而且只能以 0 为极限点.
5. 若 $\lambda\neq0$,则 $\ker(A-\lambda I)$ 与 $\ker(A^*-\lambda I)$ 有相同维数,其中 $\ker(A-\lambda I)=\{x\mid(A-\lambda I)x=0\}$.
6. 若 $\lambda\neq\mu$,则 A 的相应于 λ 的特征向量 x 与 A^* 的相应于 μ 的特征向量 f"正交",即 $f(x)=0$.
7. 若 λ 是非零特征值,则方程 $(\lambda I-A)x=y$ 可解的充分必要条件是,y 与 A^* 的相应于 λ 的特征向量 f"正交",而共轭方程 $(\lambda I-A^*)\varphi=f$ 可解的充分必要条件是 f 与 A 相应于 λ 的特征向量"正交".

上述结果称为里斯-绍德尔理论,是里斯(Riesz,F.)和绍德尔(Schauder,J. P.)于 1917 年到 1930 年之间完成的.

实际上,这就是关于巴拿赫空间上的全连续算子与 20 世纪初对第二类积分方程所建立的弗雷德霍姆定理相对应的理论.

施凯特 p 类算子(operator of Schatten p-class)　紧算子中重要的子类. 设 H 是可分的希尔伯特空间,$\mathscr{K}(H)$ 是 H 上的紧算子全体. 对 $T\in\mathscr{K}(H)$,

$$|T|=(T^*T)^{\frac{1}{2}}$$

也是紧的,设其特征值按大小顺序为 $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_n\geqslant\cdots$(按重复度重复编号). $p>0$,$\mathscr{K}(H)$ 中满足

$$\|T\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^p\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty$$

全体记为 $C_p(H)$,简记为 C_p,称为 H 上的施凯特 p 类. 若 $T\in C_p$,则 $T^*\in C_p$. 当 $1\leqslant p<+\infty$ 时,C_p 以 $\|T\|_p$ 为范数成为巴拿赫空间. 有限秩算子全体在 C_p 中按范数 $\|\cdot\|_p$ 稠密. 如果 $1\leqslant p<q$,则 $C_p\subset C_q$. 若 p,q,r 满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r},\quad T\in C_p,S\in C_q,$$

则 $TS\in C_r$.

特别重要的是 $p=1,2$ 的情形. C_1 和 C_2 类算子分别称为迹类算子和希尔伯特-施密特算子,而相应的范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别称为迹范数和希尔伯特-施密特范数. 设 $\{e_n\}$ 是 H 的规范正交基,当 $T\in C_1$ 时,T 的迹 $\mathrm{tr}(T)$ 定义为

$$\mathrm{tr}(T)=\sum_{n}(Te_n,e_n)$$

(此级数绝对收敛,其值不依赖于基的选取),tr(·)是巴拿赫空间 C_1 上的连续线性泛函.设 $\{e_n\}$,$\{x_n\}$ 都是 H 的规范正交基,则

$$\|T\|_1 = \sup_{\{e_n\},\{x_n\}} \sum_n |(Te_n, x_n)|.$$

当 $T \in C_2$ 时,

$$\|T\|_2 = \left(\sum_n \|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{tr}(T^*T),$$

在 C_2 中可定义内积 $(T,S)_2 = \mathrm{tr}(S^*T)$,则 C_2 按 $(\cdot,\cdot)_2$ 成为希尔伯特空间.

迹类算子(operator of trace class) 见"施凯特 p 类算子".

希尔伯特-施密特算子(Hilbert-Schmidt operator) 见"施凯特 p 类算子".

希尔伯特-施密特范数(Hilbert-Schmidt norm) 见"施凯特 p 类算子".

迹范数(trace norm) 见"施凯特 p 类算子".

弗雷德霍姆算子(Fredholm operator) 可逆算子的推广.设 T 是希尔伯特空间 H 上的有界线性算子,即 $T \in \mathscr{B}(H)$,如果 T 的值域 $\mathscr{R}(T)$ 是闭的且

$$\dim(\ker T) < +\infty, \quad \dim(\ker T^*) < +\infty,$$

则称 T 是弗雷德霍姆算子,称

$$i(T) = \dim(\ker T) - \dim(\ker T^*)$$

为 T 的指标数.当 T 是弗雷德霍姆算子时,对 H 上的任何紧算子 K,$T+K$ 也是弗雷德霍姆算子.如果算子 T 的值域是闭的,而 $\dim(\ker T)$ 和 $\dim(\ker T^*)$ 中至少有一个有限,则称 T 为半弗雷德霍姆算子.对于巴拿赫空间上的线性算子也有类似概念.

不变子空间(invariant subspace) 在算子作用下不变的子空间.设 T 是线性空间 X 到 X 的线性算子,L 是 X 的线性子空间.如果 $TL \subset L$,即对 $x \in L$,$Tx \in L$,则称 L 是 T 的不变子空间.当 X 是赋范线性空间,T 是有界线性算子时,T 的不变子空间通常是指闭线性子空间.

设 $\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是一族有界线性算子,$\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 的不变子空间是指对一切 A_α 都不变的闭线性子空间,其全体记为 $\mathrm{Lat}\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$.$\mathrm{Lat}\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 关于集的交以及并的线性闭扩张运算封闭,是按包含关系为序的完全格.故算子族的不变子空间全体称为不变子空间格.异于 $\{0\}$ 和 X 的不变子空间称为非平凡的不变子空间.

是否任何巴拿赫空间上的有界线性算子都有非平凡不变子空间?这个问题就是著名的不变子空间问题.除了很少几种特殊的算子类外(如希尔伯特空间上的正规算子类),对于一般算子的不变子空间的存在性,人们了解得极少.直到 1954 年,阿龙扎扬(Aronszajn,N.)和史密斯(Smith,K. T.)才证明了巴拿赫空间上每个紧算子都有非平凡不变子空间.1966 年,伯恩施坦(Bernstein,A. R.)和鲁宾孙(Robinson,A.)用非标准分析的方法把上述结果推广到多项式紧算子.1973 年,罗蒙诺索夫(Lomonosov,V. I.)利用绍德尔不动点定理对伯恩施坦-鲁宾孙定理进行了较大推广.由罗蒙诺索夫的结果可知,如果巴拿赫空间 X 上不等于恒等算子的常数倍的有界线性算子 T 与 X 上某个非零紧算子 K 交换,即 $T \neq \lambda I$,$TK = KT$,则 T 必有非平凡不变子空间;1978 年,布朗(Brown,S.)证明了每个次正规算子都有非平凡不变子空间.

1984 年,里得(Read,C. J.)举出反例,表明存在无穷维空间 l^1 上的有界线性算子 A,它没有非平凡的不变子空间.但对于希尔伯特空间上的不变子空间问题至今尚未解决.

不变子空间格(invariant subspace lattice) 见"不变子空间".

算子的换位(commutant of operators) 通过交换性质由一算子族产生的另一算子族.设 $\mathscr{M}$ 是巴拿赫空间 X 上的一族有界线性算子,与 $\mathscr{M}$ 中所有算子都可交换的有界线性算子全体记为 $\mathscr{M}'$,称为 $\mathscr{M}$ 的换位.$\mathscr{M}'$ 的换位 $\mathscr{M}''$ 称为 $\mathscr{M}$ 的二次换位.显然,$\mathscr{M} \subset \mathscr{M}''$,$I \in \mathscr{M}'$,$\mathscr{M}'$ 是线性空间.当 $\mathscr{M}$ 是单个算子 T 时,其换位称为 T 的换位,记为 $\{T\}'$.二次换位记为 $\{T\}''$.

超不变子空间(hyperinvariant subspace) 一类不变子空间.所谓超不变子空间,是指巴拿赫空间 X 上有界线性算子 T 的换位 $\{T\}'$ 的不变子空间.超不变子空间一定是不变子空间,但反之不然.1973 年,罗蒙诺索夫(Lomonosov,V. I.)证明了巴拿赫空间上不等于恒等算子的常数倍并与某个非零紧算子交换的有界线性算子存在非平凡的超不变子空间.

循环子空间(cyclic subspace) 一种常用的不变子空间.设 X 是巴拿赫空间,T 是 X 上的有界线性算子,$x \in X$,由 $\{T^n x | n = 0,1,2,\cdots\}$(规定 $T^0 x = x$)张成的闭线性子空间(即包含 $\{T^n x | n \geq 0\}$ 的最小闭线性子空间)称为由 x 经 T 产生的循环子空间.设 $\mathscr{A}$ 是某些有界线性算子的集,$x \in X$,由 $\{Ax | A \in \mathscr{A}\}$ 张成的闭线性子空间称为由 x 经 $\mathscr{A}$ 产生的循环子空间.

谱极大子空间(spectral maximal subspace) 一类不变子空间.设 T 是复巴拿赫空间 X 上的有界线性算子,M 是 T 的不变子空间.如果对于 T 的任何不变子空间 N,只要 $\sigma(T|_N) \subset \sigma(T|_M)$,就必然 $N \subset M$,则称 M 是谱极大子空间.

可分解算子(decomposable operator) 定义在复巴拿赫空间上的一类有界线性算子.设 T 是复巴

拿赫空间 X 上的有界线性算子,如果对谱 $\sigma(T)$ 的任何有限开覆盖 $\{G_i | 1\leqslant i\leqslant n\}$,都存在 T 的谱极大子空间系 $\{M_i | 1\leqslant i\leqslant n\}$ 使得 $X=M_1+M_2+\cdots+M_n$, $\sigma(T|_{M_i})\subset G_i$(或 $\sigma(T|_{M_i})\subset\overline{G}_i$)$(i=1,2,\cdots,n)$,则称 T 是可分解算子.

线性算子的单值扩张性(single-valued extension property of linear operator) 在可分解算子理论中起着基本作用的、可分解算子所具有的重要性质. 设 T 是复巴拿赫空间 X 上的闭线性算子,$\mathscr{D}(T)$是 T 的定义域. 如对任何定义在复平面上的开集 G,取值于 $\mathscr{D}(T)$的向量值解析函数 f,由条件$(\lambda I-T)f(\lambda)=0(\lambda\in G)$可推出 $f(\lambda)=0(\lambda\in G)$,或等价地,对每个 $x\in X$,$(\lambda I-T)^{-1}x$ 的任何两个解析延拓 f,g 必在 f,g 的公共解析域上有 $f(\lambda)=g(\lambda)$,则称 T 具有单值扩张性.

局部谱(local spectrum) 对具有单值扩张性质的闭线性算子定义并依赖于空间点的谱. 对复巴拿赫空间 X 上具有单值扩张性质的闭线性算子 T 及 $x\in X$,必惟一地存在$(\lambda I-T)^{-1}x$ 的最大解析延拓,记为 $\widetilde{x}(\cdot)$,它的定义域记为 $\rho(x,T)$(包含 T 的预解集 $\rho(T)$),并满足$(\lambda I-T)\widetilde{x}(\lambda)=x(\lambda\in\rho(x,T))$. 称 $\rho(x,T)$为 T 对 x 的局部预解集或局部正则集,而称余集 $\sigma(x,T)=\mathbf{C}\backslash\rho(x,T)$为 T 对 x 的局部谱.

具单值扩张性质的有界线性算子的局部谱有下列性质:

1. $\sigma(x+y,T)\subset\sigma(x,T)\cup\sigma(y,T)$.
2. $a\widetilde{x}(\lambda)+b\widetilde{y}(\lambda)=\widetilde{ax(\lambda)+by(\lambda)}$ $(a,b\in\mathbf{C},x,y\in X,\lambda\in\rho(x,T)\cap\rho(y,T))$.
3. $\sigma(x,T)=\varnothing\Leftrightarrow x=0$.
4. 若有界线性算子 S 与 T 可交换,则
$$\sigma(Sx,T)\subset\sigma(x,T).$$
5. $\sigma(\widetilde{x}(\lambda),T)=\sigma(x,T)(x\in X,\lambda\in\rho(x,T))$.

局部预解集(local resolvent set) 见"局部谱".

谱算子(spectral operator) 巴拿赫空间上具有某种谱分解性质的一类算子. 设 X 是复巴拿赫空间,$(\mathbf{C},\mathscr{B})$为复平面上波莱尔可测空间,X 上有界线性算子 A 称为谱算子,如果存在$(\mathbf{C},\mathscr{B})$上谱测度 $E(\cdot)$,满足下列性质:

1. $E(M)A=AE(M)(M\in\mathscr{B})$.
2. $\sigma(A|_{E(M)X})\subset\overline{M}(M\in\mathscr{B})$.
3. 存在 $K\geqslant0$,使 $\|E(M)\|\leqslant K(M\in\mathscr{B})$.

谱算子所相应谱测度 $E(\cdot)$是惟一的,且 $A=S+Q$,其中
$$S=\int_{\mathbf{C}}z\mathrm{d}E(z),$$
Q 是拟幂零算子且 $SQ=QS$. 如果 $Q=0$,则称 A 为纯量算子(参见"谱测度"). 如果用性质

1′. $E(M)A\subset AE(M)(M\in\mathscr{B})$

代替上面的性质 1,类似可定义无界的谱算子概念,这时一般不再有分解 $A=S+Q$. 谱算子理论是邓福德(Dunford,N.)于 20 世纪 50 年代创立的.

纯量算子(scalar operator) 见"谱算子".

线性算子扰动理论(perturbation theory for linear operator) 线性算子扰动理论是研究算子在微小变动的情况下,它的各种性质变化的一种理论. 线性算子扰动理论的基本问题是:设 T 是巴拿赫空间上的线性算子,A 是扰动算子,当 $T+A$ 和 T 在某种意义下很接近时,如何由 T 的性质导出 $T+A$ 的相应性质?扰动理论主要包括以下几方面的内容:

1. 讨论某些重要的算子类(例如闭算子类、弗雷德霍姆算子类等)在扰动下的不变性.
2. 研究在小扰动下,对应的特征值和特征向量的变化情况.
3. 研究算子经过扰动以后,它的谱的变化情况.

算子演算(operational calculus) 亦称算子的函数演算. 一种由函数与线性算子相结合获得新的线性算子的方法. 设 X 为线性空间,T 为从 X 到 X 的线性算子,即 $T\in(X\to X)$. 又设 $\mathscr{C}$ 是复平面中某子集 σ 上定义的数值函数的子类(一般要求 $\mathscr{C}$ 含有常数函数 1,恒等于自变量的函数 λ,并且 $\mathscr{C}$ 对函数的代数运算封闭). 如果存在映射 $\pi:\mathscr{C}\to(X\to X)$,通常记为$\pi(f)=f(T)$,满足条件:

1. $(\alpha f+\beta g)(T)=\alpha f(T)+\beta g(T)$($\alpha,\beta$ 是数,$f,g\in\mathscr{C}$);
2. $(fg)(T)=f(T)g(T)$;
3. 当 $f\equiv1$ 时,$f(T)=I$(X 上恒等算子);
4. 当 $f(\lambda)\equiv\lambda(\lambda\in\sigma)$时,$f(T)=T$;

则称 π 为关于算子 T 的函数演算,$\mathscr{C}$ 为关于 T 的可演算函数类. 下面是常见的算子函数演算:

Ⅰ) 设 T 是复希尔伯特空间上的正规算子,
$$T=\int_{\sigma(T)}\lambda\mathrm{d}E(\lambda)$$
是谱分解,取 $\sigma=\sigma(T)$,$\mathscr{C}$ 是 σ 上有界波莱尔可测函数全体. 对于 $f\in\mathscr{C}$,定义
$$f(T)=\int_{\sigma}f(\lambda)\mathrm{d}E(\lambda),$$
则 $f\to f(T)$的对应满足上述 1－4. 此外还有:

5. $f(T)^*=\overline{f}(T)$($\overline{f}$ 为 f 的复数共轭函数).
6. 当 $|f(\lambda)|\equiv1$ 时,$f(T)$是酉算子.
7. 当 $f(x)$为实值函数时,$f(T)$是自伴算子.

Ⅱ) 设 T 是复巴拿赫空间上的有界线性算子,取 $\sigma=\sigma(T)$,$\mathscr{C}$ 为在 $\sigma(T)$的某邻域内解析函数全体. 对 $f\in\mathscr{C}$,定义

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}d\lambda,$$

这里Γ是有限条可求长若尔当闭曲线，落在f的解析域中，但$\sigma(T)$在其内部. $f\to f(T)$的对应满足(I)的1—4.

谱映射定理(spectral mapping theorem) 有关算子演算的谱的定理. 设T是复巴拿赫空间上的线性算子，对于怎样的一类函数$\mathscr{C}$，使得对$f\in\mathscr{C}$可定义出$f(T)$，并使

$$\sigma(f(T)) = \{f(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(T)\}$$

成立. 此类性质称为谱映射定理. 当T有界，$p(t)$是多项式$a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$时，定义

$$p(T) = a_0I + a_1T + \cdots + a_nT^n,$$

就有$\sigma(p(T))=\{p(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(T)\}$. 当$T$为正规算子，$f(t)$连续时也有$\sigma(f(T))=\{f(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(T)\}$.

导算子(derivation operator) 对所有有界线性算子定义的一种运算. 设$\mathscr{B}(X)$表示巴拿赫空间X上的有界线性算子全体. 对$A,B\in\mathscr{B}(X)$，则

$$\delta_A(T) = AT - TA,\quad \delta_{AB}(T) = AT - TB$$

可视为$\mathscr{B}(X)$上的有界线性算子. 由于

$$\delta_A(TS) = \delta_A(T)S + T\delta_A(S),$$

故分别称δ_A,δ_{AB}为由A，A和B产生的$\mathscr{B}(X)$上的(内)导算子、广义导算子.

更一般地，设$\{A_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}\subset\mathscr{B}(X)$，$\{B_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}\subset\mathscr{B}(X)$，定义$\mathscr{B}(X)$上的线性算子$\Delta$:

$$\Delta(T) = \sum_{i=1}^{n}A_iTB_i,$$

称Δ为$\mathscr{B}(X)$上的初等算子.

广义导算子(generalized derivation operator) 见"导算子".

初等算子(elementary operator) 见"导算子".

正交投影算子(orthogonal projection operator) 把任一元映到该元的正交投影的算子. 设M是希尔伯特空间H的闭线性子空间. 对任意$x\in H$，必有分解$x=x_1+x_2$，$x_1\in M$，$x_2\in M^{\perp}$，定义算子P如下：$Px=x_1$，即Px是x在M上的投影，称算子P为由H到M上的正交(或直交)投影算子，简称投影(或射影)算子. 投影算子P具有下列性质：$P^2=P$(幂等)；P有界(事实上有$\|P\|=1$)；对一切$x,y\in H$，$(Px,y)=(x,Py)$成立(自伴). 反之，H上有界自伴的幂等算子必是投影算子. 正交投影算子与H的闭线性子空间之间成一一对应. 满足$PQ=0$的两个正交投影算子P和Q称为相互正交的，记为$P\perp Q$.

正交投影算子是希尔伯特空间上特别重要的一类算子. 它是希尔伯特空间的很好的几何特征的反映，又是研究其他复杂算子的工具.

直交投影算子(orthogonal projection operator) 即"正交投影算子".

投影算子(projection operator) 见"正交投影算子".

射影算子(projection operator) 见"正交投影算子".

约化子空间(reducing subspace) 一种不变子空间. 设T是希尔伯特空间H上的有界线性算子，M是H的闭线性子空间，如果M和$M^{\perp}$都是T的不变子空间，就称M是T的约化子空间，并称M约化T. 设P为H到M上的正交投影算子，则M约化T的充分必要条件是$TP=PT$. 设M是T的约化子空间，则关于空间分解$H=M\oplus M^{\perp}$，T可分解为$T=T_1\oplus T_2$，其中T_1是T在M上的限制，T_2是T在$M^{\perp}$上的限制，此时$\forall x=x_1\oplus x_2$，有

$$Tx=T_1x_1\oplus T_2x_2,\quad x_1\in M,\quad x_2\in M^{\perp}.$$

线性算子的正交和(orthogonal direct sum of linear operators) 定义在两个希尔伯特空间正交和上的有界线性算子. 设T_1,T_2分别是希尔伯特空间H_1,H_2上的有界线性算子，在H_1与H_2的正交和空间$H=H_1\oplus H_2$上可定义如下的有界线性算子T：对$\forall x=x_1\oplus x_2\in H$，其中$x_1\in H_1$，$x_2\in H_2$，有$Tx=T_1x_1\oplus T_2x_2$，称$T$为算子$T_1$与$T_2$的正交和，记为$T=T_1\oplus T_2$. 类似可定义多个算子的正交和. 注意，$H_1$和$H_2$都是$T$的约化子空间.

谱测度(spectral measure) 算子值的测度. 用$\mathscr{P}$表示希尔伯特空间H中正交投影算子全体. 设Ω是一集，$\mathscr{B}$是Ω中的某些子集所成的σ代数，$E(\cdot)$是$\mathscr{B}\to\mathscr{P}$的映射，满足：

1. $E(\Omega)=I$；

2. (可列可加性)如果$\{A_n\}\subset\mathscr{B}$，$A_n\cap A_m=\varnothing\,(n\neq m)$，则关于$\{A_n\}$的强算子拓扑极限，有

$$E\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}E(A_n).$$

此时映射E称为$(\Omega,\mathscr{B})$上的谱测度，$(\Omega,\mathscr{B},E)$为谱测度空间. 对于巴拿赫空间有类似推广. 设$\mathscr{P}$是巴拿赫空间X上投影算子全体，如果映射$E(\cdot)$：$\mathscr{B}\to\mathscr{P}$满足上述1,2，则也称$E$是$(\Omega,\mathscr{B})$上的谱测度，$(\Omega,\mathscr{B},E)$是谱测度空间. 谱测度又常称为单位分解.

单位分解(resolution of the identity) 见"谱测度".

谱测度空间(spectral measure space) 见"谱测度".

谱积分(spectral integral) 与谱测度相联系的积分. 设$(\Omega,\mathscr{B},E)$是希尔伯特空间H上的谱测度空间，则对任何$x,y\in H$，集函数

$$\mu_{x,y}(A)=(E(A)x,y)$$

是$(\Omega,\mathscr{B})$上的复测度. $B(\Omega,\mathscr{B})$表示可测空间$(\Omega,\mathscr{B})$上有界可测函数全体,则对$f\in B(\Omega,\mathscr{B})$,存在确定的有界线性算子$T_f$,使对一切$x,y\in H$,

$$(T_f x,y)=\int f(t)\mathrm{d}(E(t)x,y).$$

称算子T_f是f关于$(\Omega,\mathscr{B},E)$的(弱)谱积分,记为

$$T_f=\int_\Omega f(t)\mathrm{d}E(t).$$

也可用勒贝格积分方式定义谱积分:对实函数$f\in B(\Omega,\mathscr{B})$,$m<f(t)<M$ $(t\in\Omega)$,做分点组$D:m=t_0<t_1<\cdots<t_n=M$,再做和式

$$S(D)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i E(\Omega(t_{i-1}\leqslant f<t_i))$$
$$(t_{i-1}\leqslant\xi_i<t_i),$$

记$\delta(D)=\max\limits_i(t_i-t_{i-1})$,必存在有界线性算子$T'_f$,使得

$$\lim_{\delta(D)\to 0}\|S(D)-T'_f\|=0,$$

称T'_f为f关于$(\Omega,\mathscr{B},E)$的(一致)谱积分. 注意,$T_f=T'_f$,所以一致谱积分仍记为

$$\int_\Omega f(t)\mathrm{d}E(t).$$

对于复函数f,规定

$$\int_\Omega f(t)\mathrm{d}E(t)=\int_\Omega f_1(t)\mathrm{d}E(t)+\mathrm{i}\int_\Omega f_2(t)\mathrm{d}E(t),$$

这里f_1,f_2分别为f的实部和虚部.

关于谱积分有下列性质:

1.(线性性)

$$\int_\Omega(\alpha f+\beta g)(t)\mathrm{d}E(t)$$
$$=\alpha\int_\Omega f(t)\mathrm{d}E(t)+\beta\int_\Omega g(t)\mathrm{d}E(t).$$

2.(压缩性)

$$\left\|\int_\Omega f(t)\mathrm{d}E(t)\right\|\leqslant\|f\|$$
$$(\|f\|=\sup_{t\in\Omega}|f(t)|).$$

3.(共轭性)

$$\left(\int_\Omega f(t)\mathrm{d}Et\right)^*=\int_\Omega\bar{f}(t)\mathrm{d}E(t),$$

其中$\bar{f}(t)$是$f(t)$的复数共轭函数.

4.(可乘性)

$$\int_\Omega f(t)g(t)\mathrm{d}E(t)=\int_\Omega f(t)\mathrm{d}E(t)\int_\Omega g(t)\mathrm{d}E(t),$$

这是普通数值积分没有的重要性质.

谱积分的概念还可推广到无界可测函数的情况.

弱谱积分(weak spectral integral) 见"谱积分".

一致谱积分(uniform spectral integral) 见"谱积分".

谱测度的支集(support of spectral measure) 满足$E(S)=I$的S中(按包含关系为)最小的闭集. 设Ω为n维欧几里得空间R^n,$(\Omega,\mathscr{B},E)$是希尔伯特空间H上谱测度空间. 如果有R^n中开集G使得$E(G)=0$,则必有按包含关系为最大的开集G_0,使得$E(G_0)=0$. 称闭集$\sigma=\mathrm{R}^n\backslash G_0$为$E$的支集,记为$\mathrm{supp}\,E$. 形象地说,即谱测度$E$集中在闭集$\mathrm{supp}\,E$上,并且不能集中在比$\mathrm{supp}\,E$更小的闭集上. 易知谱积分

$$\int_{\mathrm{R}^n}f(\omega)\mathrm{d}E=\int_{\mathrm{supp}\,E}f(\omega)\mathrm{d}E.$$

对于Ω是拓扑空间,$\mathscr{B}$是Ω上的波莱尔集或贝尔集全体,在适当假设下就能将谱测度及其支集的概念推广到$(\Omega,\mathscr{B},E)$的情况.

谱系(spectral system) 希尔伯特空间H上的一种正交投影算子族. 如果投影算子族$\{E_\lambda\mid\lambda\in(-\infty,+\infty)\}$满足:

1.(单调性)当$\lambda\geqslant\mu$时,$E_\lambda\geqslant E_\mu$;

2.(右连续性)(强)

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0^+}E_\lambda=E_{\lambda_0},\quad\lambda_0\in(-\infty,+\infty);$$

3.(就范性)(强)$\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E_\lambda=0$,(强)$\lim\limits_{\lambda\to\infty}E_\lambda=I$;

则$\{E_\lambda\mid\lambda\in(-\infty,+\infty)\}$称为直线上的谱系. 上述强极限实际上等价于弱极限. 令$\mathscr{B}$是$(-\infty,+\infty)$上波莱尔集全体,如对区间$(a,b]$,规定$E((a,b])=E_b-E_a$,则由谱系$\{E_\lambda\}$可导出$((-\infty,+\infty),\mathscr{B})$上谱测度$E(\cdot)$. 反之,对任何$((-\infty,+\infty),\mathscr{B})$上谱测度$E(\cdot)$,定义$E_\lambda=E((-\infty,\lambda])$时,则$\{E_\lambda\}$必是直线上谱系.

谱系与谱测度的关系类似于单调增加右连续的(点)函数与勒贝格-斯蒂尔杰斯测度(集函数)的关系.

等距算子(isometric operator) 希尔伯特空间上保持范数的线性有界算子. 设V是希尔伯特空间H到希尔伯特空间G的线性算子,如果对所有$x\in H$,$\|Vx\|=\|x\|$,则V称为等距算子. 若V是H上的等距算子,则存在V的约化空间H_1和H_2,使得$H=H_1\oplus H_2$,$V=W\oplus S$,其中W是H_1上的酉算子,S是H_2上的单侧移位算子,称分解$V=W\oplus S$为等距算子的沃尔德分解.

部分等距算子(partial isometric operator) 等距算子的推广. 设H,G是希尔伯特空间,T是H到G的有界线性算子. 如果T在H的子空间M上是等距的,而在$M^\perp$上为0,则称T是以M为初始空间,以$N=TM$为终空间的部分等距算子. T是以M为初始空间,N为终空间的部分等距算子当且仅当T^*T和TT^*分别是M和N上的正交投影算子.

酉算子(unitary operator) 希尔伯特空间之间

满射的等距算子. 设 H,G 是希尔伯特空间,从 H 到 G 上的等距算子称为酉算子. 算子 U 是酉算子的充分必要条件是 $U^*U=I_H$,$UU^*=I_G$,即 $U^*=U^{-1}$. 物理上常称 H 上的酉算子为幺正算子. 对于复希尔伯特空间 H 上的酉算子 U 有下面的谱表示(谱分解)定理:存在 H 中惟一的谱系 $\{E_\theta \mid \theta \in [0,2\pi]\}$ 满足 $E_0=0$,并使

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\theta} dE_\theta.$$

用 E 表示由 $\{E_\theta\}$ 导出的谱测度,E 称为相应于酉算子 U 的谱测度,$\sigma(U)\subset C$(C 是单位圆周)是 E 的支集),U 还可表示为

$$U=\int_{\sigma(U)} \lambda dE(\lambda).$$

酉算子谱分解定理由冯·诺伊曼(von Neumann,J.)于 20 世纪 20 年代首先给出.

酉算子的谱分解(spectral decomposition of unitary operator) 见"酉算子".

酉算子的谱表示(spectral representation of unitary operator) 见"酉算子".

酉等价(unitary equivalent) 线性算子相似概念的一种特殊情形. 设 A,B 是希尔伯特空间上的有界线性算子,如果存在酉算子 U,使得 $B=U^*AU$,则称 A 和 B 是酉等价的. 酉等价的算子具有相同的谱和其他某些性质.

收缩算子(contraction operator) 对任何点的范数都不放大的一类线性算子. 设 X,Y 是赋范线性空间,T 是 X 到 Y 的线性算子,如果对一切 $x\in X$,满足 $\|Tx\|\leqslant\|x\|$,则称 T 为收缩算子或压缩算子. 显然 T 是收缩算子的充分必要条件是 T 的范数 $\|T\|\leqslant 1$. 收缩算子在研究微分方程不动点理论和计算方法中的一类迭代算法的误差估计起重要作用.

压缩算子(contraction operator) 即"收缩算子".

酉膨胀(unitary dilation) 即将某一希尔伯特空间上的算子按一定条件膨胀为另一更大的希尔伯特空间上的酉算子. 它的数学形式是,是否存在希尔伯特空间 $H'\supset H$,以及 H' 上酉算子 U,使得 $T=PU|_H$,其中 P 是 H' 到 H 上的正交投影. 如果存在如此的 (H',U),则称 (H',U) 是 T 的酉膨胀. 这样的算子 T 必定是压缩算子. 复希尔伯特空间 H 上每个压缩算子 T 都存在酉膨胀,例如取 $H'=H\oplus H$,

$$U=\begin{bmatrix} T & (I-TT^*)^{\frac{1}{2}} \\ (I-T^*T)^{\frac{1}{2}} & -T^* \end{bmatrix}.$$

除酉等价外压缩算子的酉膨胀是惟一的.

自伴算子(self-adjoint operator) 希尔伯特空间上的一种重要的线性算子. 设 T 是希尔伯特空间 H 中的稠定线性算子,如果有 $T\subset T^*$,即 T^* 是 T 的延拓,就称 T 是对称算子,或埃尔米特算子. 进而,如果 $T^*=T$,则称 T 是自伴算子,或自共轭算子. 在全空间 H 上定义的对称算子是有界自伴算子. 对于复希尔伯特空间 H 上的自伴算子 A,$\mathscr{D}(A)\subset H$,必有 H 中谱系 $\{E_\lambda \mid \lambda\in(-\infty,+\infty)\}$ 使得

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda.$$

由 $\{E_\lambda\}$ 导出的谱测度 E 集中在 $\sigma(A)\subset(-\infty,+\infty)$ 上,且有谱分解(或谱表示)

$$A=\int_{\sigma(A)} \lambda dE_\lambda.$$

有界自共轭算子的谱分解最初由希尔伯特(Hilbert,D.)于 1906 年给出,里斯(Riesz,F.)于 1913 年用在思想和技巧上更为现代的方法讨论了有界自共轭算子的谱分解. 在 20 世纪 20 年代末,冯·诺伊曼(von Neumann,J.)给出了无界自共轭算子的谱分解定理. 他的经典工作以非常完善和系统的形式发展了无界算子理论. 与此同时,斯通(Stone,M. H.)也独立地得到同样的结果. 自共轭算子理论已广泛应用于其他数学分支,由于量子物理中一切物理量都是用某个希尔伯特空间上的自共轭算子来描述,因此自共轭算子在量子物理中具有特别重要的地位.

自共轭算子(self-adjoint operator) 即"自伴算子".

自伴算子的谱分解(spectral decomposition of self-adjoint) 见"自伴算子".

自伴算子的谱表示(spectral representation of self-adjoint operator) 见"自伴算子".

对称算子(symmetric operator) 见"自伴算子".

埃尔米特算子(Hermitian operator) 即"对称算子".

凯莱变换(Cayley transformation) 一种算子变换. 对于闭对称算子 T,所谓凯莱变换是指由 T 到 $V_T=(T-iI)(T+iI)^{-1}$ 的变换,是研究对称算子的工具. 由于对称算子具有闭扩张,故总可假设对称算子是闭的. 设 T 是对称算子,则 T 的凯莱变换 $V_T=(T-iI)(T+iI)^{-1}$ 是等距算子. 反之,如果 V 是由 H 的闭子空间 M 到另一闭子空间 N 上的等距算子,则 $T=i(I+V)(I-V)^{-1}$ 是对称算子,且 $V_T=V$. T 是自伴算子当且仅当它的凯莱变换 V_T 是酉算子. 当把 $\pm i$ 换成虚部不为 0 的复数 λ 时,上述讨论同样成立.

对称算子的自伴扩张(self-adjoint extension of symmetric operator) 算子的一种扩张.所谓对称算子的自伴扩张,就是将对称算子扩张成自伴算子.讨论对称算子的自伴扩张问题可以使得自伴算子谱理论的应用范围大为扩大.

亏指数(defect index) 与对称算子有关的数对.设 A 是复希尔伯特空间 H 中的对称算子,$\mathscr{R}(A+\mathrm{i}I)^{\perp}$和 $\mathscr{R}(A-\mathrm{i}I)^{\perp}$称为 A 的亏子空间,记

$$n_{+}=\dim\mathscr{R}(A+\mathrm{i}I)^{\perp}\text{和 }n_{-}=\dim\mathscr{R}(A-\mathrm{i}I)^{\perp}$$

(这里空间的维数指该空间中完备规范正交系的势),称数对(n_{-},n_{+})为 A 的亏指数,A 自伴的充分必要条件是 $n_{-}=n_{+}=0$.对称算子 A 具有自伴扩张的充分必要条件是 $n_{-}=n_{+}$.

亏子空间(defect subspace) 见“亏指数”.

半有界算子(semi-bounded operator) 上半有界算子和下半有界算子的统称.设 T 是希尔伯特空间 H 上的稠定线性算子,如果存在实数 α,使得对一切 $x\in\mathscr{D}(T)$都有$(Tx,x)\geqslant\alpha(x,x)$(或$(Tx,x)\leqslant\alpha(x,x)$)成立,就称 T 是下半(或上半)有界的.如果 $\alpha>0$,则称 T 为正定算子(或如果 $\alpha<0$,则称 T 为负定算子),并称 α 为 T 的下界(或上界).

上半有界算子(upper semi-bounded operator) 见“半有界算子”.

下半有界算子(lower semi-bounded operator) 见“半有界算子”.

正定算子(positive definite operator) 见“半有界算子”.

负定算子(negative definite operator) 见“半有界算子”.

本质自伴算子(essentially self-adjoint operator) 具有自伴扩张的对称算子.对称算子 A 为本质自伴的充分条件有(其中条件 1 也是必要的):

1. $n_{-}=n_{+}$,其中(n_{-},n_{+})为 A 的亏指数.
2. A 是半有界的,即存在实数 r 使对一切 $x\in\mathscr{D}(A)$都有$(Ax,x)\geqslant r\|x\|^{2}$.
3. A 是实算子,即存在 H 到 H 的反线性映射 J(即 $J(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}Jx+\bar{\beta}Jy$)满足$(Jx,Jy)=(y,x)$,$J^{2}=I$,$JA=AJ$.

正算子(positive operator) 正定矩阵的推广.设 A 是希尔伯特空间 H 上的有界自伴算子,如果对一切 $x\in H$ 都有$(Ax,x)\geqslant0$,就称 A 是正算子,常用 $A\geqslant0$ 表示.对任意有界算子 T,$T^{*}T$ 必是正的.设 A,B 是两个正算子,$A\geqslant B$(即 $A-B\geqslant0$),则对任何 $\alpha\in[0,1]$也有 $A^{\alpha}\geqslant B^{\alpha}$ 成立.一个正规算子 T 是正算子的充分必要条件是 $\sigma(T)\subset[0,+\infty)$.

线性算子的极分解(polar decomposition of linear operator) 将一有界线性算子化为部分等距算子与一正算子之积的分解.设 T 是希尔伯特空间 H 到希尔伯特空间 K 的有界线性算子,记

$$|T|=(T^{*}T)^{\frac{1}{2}}\quad(\text{它是 }H\text{ 上正线性算子}),$$

则存在从 H 到 K 中的部分等距算子 U 使得 $T=U|T|$,T 的这种形式的分解,称为极分解.如果还要求

$$\ker U=\ker|T|,$$

则极分解中部分等距 U 的选取是惟一存在的.人们称一个部分等距算子是极大的,如果它是一对一的或满值域的.设 $T=U|T|$是 T 的一个极分解,如果 U 是极大的部分等距算子,就称 $U|T|$是 T 的极大极分解.每个有界线性算子都存在极大极分解.

极大极分解(maximal polar decomposition) 见“线性算子的极分解”.

线性算子的直角分解(rectangular decomposition of linear operator) 将一般有界线性算子化为自伴算子的线性组合.设 T 是希尔伯特空间上的有界线性算子,令

$$R=\frac{1}{2}(T+T^{*}),\quad J=\frac{1}{2\mathrm{i}}(T-T^{*}),$$

则 $T=R+\mathrm{i}J$,R,J 都是自伴算子,且 R,J 分别称为 T 的实部和虚部,而分解 $T=R+\mathrm{i}J$ 称为算子 T 的直角分解.

正规算子(normal operator) 酉算子和自共轭算子的推广.希尔伯特空间 H 上的有界线性算子 N 如果满足 $N^{*}N=NN^{*}$,则 N 称为正规算子(或正常算子).对于复空间 H 上的正规算子 N,谱分解(或谱表示)定理成立,即在可测空间$(\sigma(N),\mathscr{B})$上有惟一谱测度 E,使得

$$N=\int_{\sigma(N)}\lambda\mathrm{d}E(\lambda),$$

这里 $\mathscr{B}$ 是 $\sigma(N)$中波莱尔子集全体所成的 σ 代数.有界线性算子 A 与 N 可交换,当且仅当对每个 $\varphi\in\mathscr{B}$,A 与 $E(\varphi)$可交换.当 N 是紧正规算子时,记 $\sigma(N)=\{\lambda_{i}\}$,则

$$N=\sum_{i}\lambda_{i}P_{i},$$

其中 P_{i} 是相应于 λ_{i} 的特征空间上的正交投影算子.一个正规算子 N 是酉的(自伴的)当且仅当 $\sigma(N)$包含于单位圆周(实轴)内.

正规算子的谱分解定理是由冯·诺伊曼(von Neumann,J.)于 20 世纪 20 年代给出的,它实际上是 n 维复线性空间上的正规矩阵对角化理论的推广,也刻画了正规算子的结构,由此可以导出正规算子的许多重要性质.

正常算子(normal operator) 即“正规算子”.

正规算子的谱分解(spectral resolution of normal operator) 见“正规算子”.

正规算子的谱表示(spectral representation of

normal operator） 见“正规算子”.

普特兰姆-富格里德定理(Putnam-Fuglede theorem） 关于正规算子的一个重要命题.设M,N是希尔伯特空间上的正规算子，T是有界线性算子.如果$MT=TN$，则相应有$M^*T=TN^*$.正规算子的这一重要性质称为普特兰姆-富格里德定理，简记为P-F定理.P-F定理有很多推广，例如，若A,B^*是亚正规算子，则当$AT=TB$时，有$A^*T=TB^*$.

拟正规算子(quasi-normal operator） 正规算子概念的推广.设H是复希尔伯特空间，A是H上的有界线性算子，如果A与A^*A可交换，就称A是拟正规(或拟正常)的.正规算子和等距算子都是拟正规的.设A的极分解为

$$A=U|A|,\quad |A|=(A^*A)^{\frac{1}{2}},$$

则A为拟正规算子的充分必要条件是

$$U|A|=|A|U.$$

拟正常算子(quasi-normal operator） 即“拟正规算子”.

次正规算子(subnormal operator） 正规算子概念的推广.复希尔伯特空间H上的有界线性算子A称为是次正规的(或次正常的)，如果它有一个正规的扩张，即存在希尔伯特空间K和K上的正规算子N，使得H是K的闭子空间，且是N的不变子空间，而N在H上的限制$N|_H=A$.正规算子、等距算子、拟正规算子都是次正规的.布朗(Brown，S.)于1978年证得，每个次正规算子都有非平凡不变子空间.设A是次正规算子，定义在K上的N是A的一个正规扩张.如果K中不存在N的包含H且异于K的约化子空间，就称N是A的最小正规扩张，除去酉等价不计，最小正规扩张是由A惟一确定的.

次正规算子由哈尔莫斯(Halmos，P. R.)于1950年引入，其原型是单侧移位算子，而后很快成为算子理论的重要研究对象，且与一致代数和有理逼近理论有着密切的联系.可以说在各类非正规算子中，次正规算子是迄今人们理解得较好的一类.

次正常算子(subnormal operator） 即“次正规算子”.

正规扩张(normal extension） 见“次正规算子”.

最小正规扩张(minimal normal extension） 见“次正规算子”.

亚正规算子(hyponormal operator） 次正规算子概念的推广.设A是复希尔伯特空间上的有界线性算子，如果对任何$x\in H$都有$\|A^*x\|\leqslant\|Ax\|$成立，就称A是亚正规的或亚正常的.算子A是亚正规的充分必要条件是$[A]=A^*A-AA^*\geqslant 0$.次正规算子必是亚正规的，但反之不成立.亚正规算子具有下列重要性质：若A亚正规，则

1. 谱半径$r_{\sigma(A)}=\|A\|$.
2. 对一切$\lambda\in\rho(A)$有

$$\|(\lambda I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(A))}.$$

3. 设λ是A的特征值，则特征空间E_λ约化A.

亚正规算子酉等价于奇异积分算子，所以它的研究有助于作出更一般的拟微分算子的谱分析.另外亚正规算子的研究也与量子力学中波算子、散射算子和摄动理论密切相联.亚正规算子是哈尔莫斯(Halmos，P. R.)于1950年引入的.

亚正常算子(hyponormal operator） 即“亚正规算子”.

移位算子(shift operator） 将希尔伯特空间中规范正交基的每一个基向量的位置向前(后)移动一位或若干位的线性算子.设H是复希尔伯特空间，$\{e_n\}_{n=0}^{+\infty}$是H的规范正交基，由$Se_n=e_{n+1}(n=0,1,2,\cdots)$所确定的线性算子$S$称为重复度为1的单侧移位(或单侧平移)算子.单侧移位算子是次正规算子.设$\{e_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$是$H$的一个规范正交基，由$Ue_n=e_{n+1}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$所确定的线性算子称为重复度为1的双侧移位(或双侧平移)算子.设α是一个基数，α个重复度为1的单(双)侧移位算子的正交和称为重复度为α的单(双)侧移位算子.S和U分别是重复度为α的单、双侧移位时，S必是等距算子，U必是酉算子，且U必是S的正规扩张(当α有限时还是最小正规扩张).$\sigma(S)=\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant 1\}$，$\sigma(U)=\{\lambda\,|\,|\lambda|=1\}$.若$S$和$U$是重复度为1的移位算子，则其共轭算子由$S^*e_0=0$，$S^*e_n=e_{n-1}(n=1,2,\cdots)$和$U^*e_n=e_{n-1}(n=0,\pm1,\cdots)$确定.单、双侧移位算子统称为移位算子.

单侧移位算子(unilateral shift operator） 见“移位算子”.

双侧移位算子(bilateral shift operator） 见“移位算子”.

平移算子(shift operator） 即“移位算子”.

加权移位算子(weighted shift operator） 移位算子的推广.设H是希尔伯特空间，$\{e_n\}_{n=0}^{+\infty}$是H的规范正交基，$\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$是一个数列，则由

$$Se_n=w_{n+1}e_{n+1}\ (n=0,1,2,\cdots)$$

确定的线性算子称为单侧加权移位算子，而$\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$称为S的权序列.设$\{e_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$是$H$的规范正交基，类似可定义权序列为$\{w_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$的双侧加权移位算子$W$：$We_n=w_{n+1}e_{n+1}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.单、双侧加权移位算子统称加权移位算子.$S$和$W$的共轭算子由$S^*e_0=0$，$S^*e_n=w_ne_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，$W^*e_n=$

$w_n e_{n-1}$($n=0,\pm1,\pm2,\cdots$)确定.

洛朗算子(Laurent operator) 一种正规算子. 用 T 表示平面上单位圆周,μ 为其上规格化的勒贝格测度(即 $\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}m/2\pi$,$m$ 为 T 上勒贝格测度). 对每个有界可测函数 $\varphi\in L^\infty(T)$,可定义希尔伯特空间 $L^2(T)$上的乘法算子 $L_\varphi: f\to\varphi f, f\in L^2(T)$. L_φ 称为由 φ 导出的洛朗算子. 洛朗算子 L_φ 是正规的. 相对于 $L^2(T)$中的规范正交基$\{e_n(z)=z^n\mid n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$,$L_\varphi$ 的(双边无限)矩阵表示$\langle\lambda_{ij}\rangle$是一个洛朗矩阵,即对所有 $i,j=0,\pm1,\pm2,\cdots$,都有 $\lambda_{i+1,j+1}=\lambda_{ij}=\alpha_{i-j}$,其中

$$\varphi=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n e_n$$

是 φ 的傅里叶展式. 换句话说,洛朗矩阵是平行于主对角线的每个对角线上的元相同的矩阵.

洛朗矩阵(Laurent matrix) 见"洛朗算子".

特普利茨算子(Toeplitz operator) 一类函数空间算子,是算子理论的重要研究对象之一. 哈代空间 H^2 是希尔伯特空间 $L^2(T)$的由规范正交系$\{e_n(z)=z^n\}_{n=0}^\infty$张成的闭线性子空间(参见"洛朗算子"). 令 P 是从 $L^2(T)$到 H^2 上的正交投影. 洛朗算子 L_φ 在 H^2 上的限制 $T_\varphi=PL_\varphi|_{H^2}$ 称为由有界可测函数 φ 诱导的特普利茨算子. 单侧移位算子 $S(=T_{e_1})$就是特普利茨算子的一个最简单的例子. 相应于 H^2 的规范正交基$\{e_n\}_{n=0}^{+\infty}$,T_φ 的矩阵表示$\langle\lambda_{ij}\rangle$满足条件 $\lambda_{i+1,j+1}=\lambda_{ij}=\alpha_{i-j}$,其中$\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$是 φ 的傅里叶系数,这样的矩阵称为特普利茨矩阵.

特普利茨矩阵(Toeplitz matrix) 见"特普利茨算子".

解析特普利茨算子(analytic Toeplitz operator) 一类次正规算子. 由函数 $\varphi\in H^\infty=H^2\cap L^\infty(T)$诱导的特普利茨算子称为解析特普利茨算子. 洛朗算子 L_φ 便是它的正规扩张,并且 T_φ 的谱 $\sigma(T_\varphi)=\overline{\tilde{\varphi}(D)}$,即 $\tilde{\varphi}$ 的值域之闭包,这里 D 表示开单位圆盘,而 $\tilde{\varphi}$ 是由

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n$$

确定的 D 内解析的函数

$$\tilde{\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n.$$

线性算子的交换子(commutator of linear operators) 线性算子间的一种运算. 设 A,B 是巴拿赫空间 H 上的有界线性算子,记$[A,B]=AB-BA$,称$[A,B]$为 A 与 B 的交换子. 特别地,当 H 为希尔伯特空间且 $B=A^*$时,称$[A,A^*]$为自交换子.

线性算子的自交换子(self-commutator of linear operator) 见"线性算子的交换子".

算 子 半 群

算子半群(operator semi-group) 依赖于参数且对乘法运算封闭的算子族. 设 X 是线性空间,T_t($t\geqslant0$(或 $t>0$))是 X 上的线性算子. 如果对任何 $t_1,t_2\geqslant0$(或>0),有 $T_{t_1}T_{t_2}=T_{t_1+t_2}$,则称$\{T_t|t\geqslant0$(或 $t>0$)$\}$为单参数算子半群,或简称算子半群. 显然,算子半群即把参数 t 的加法半群(因限制 $t\geqslant0$ 或 $t>0$ 故仅是加法半群)变成算子(按算子乘法)的半群. 对于半群$\{T_t|t\geqslant0\}$,通常总加上假设 $T_0=I$. 在泛函分析中,通常要假设 X 是巴拿赫空间或拓扑线性空间(重要的是局部凸拓扑线性空间),并且把$\{T_t|t\geqslant0$(或 $t>0$)$\}$视定义在$[0,+\infty)$(或$(0,+\infty)$)上算子值函数时,还要假设有某种连续性,具体可见 C_0 类算子半群,C_0 类等度连续算子半群,解析算子半群等. 上面谈的是线性算子半群,此外还有非线性算子半群.

算子半群理论是泛函分析的重要分支之一,主要研究各种类型的算子半群和生成元的特征,以及指数公式的各种表达形式. 它在微分方程、概率论(马氏过程)、系统理论、逼近论和量子理论中是经常出现的.

C_0 类算子半群(operator semi-group of class C_0) 一类具有强连续性的算子半群. 设 X 是复的局部凸拓扑线性空间,$L(X)$表示 X 上的连续线性算子全体. 如果 $L(X)$的算子族$\{T_t|t\geqslant0\}$满足条件:

1. $T_sT_t=T_{s+t}$($s,t\in[0,+\infty)$),$T_0=I$;
2. (强)$\lim\limits_{t\to t_0}T_tx=T_{t_0}x$($x\in X,t_0\geqslant0$);

则称$\{T_t|t\geqslant0\}$为 C_0 类算子半群,简称 C_0 类半群. 当 X 是巴拿赫空间时,对 C_0 类算子半群$\{T_t|t\geqslant0\}$必存在 $M>0$ 和 $\beta\geqslant0$,使得 $\|T_t\|\leqslant Me^{\beta t}$($t\geqslant0$). 例如 $X=L^p(-\infty,+\infty)$($1\leqslant p<+\infty$),$(T_tx)(\omega)=x(t+\omega)$是 C_0 类(平移)算子半群. 这类算子半群的理论主要是由希尔(Hille,C. E.)、吉田耕作(Yosida,K.)和菲利普斯(Phillips,R. S.)等人奠定的.

C_0 类等度连续算子半群(equicontinuous operator semi-group of class C_0) 具有等度连续性的 C_0 类算子半群. 设$\{T_t|t\geqslant0\}$是局部凸拓扑线性空间 X 上的 C_0 类算子半群. 如果算子族$\{T_t|t\geqslant0\}$关于 t 还是等度连续的,即对任何连续半范数 p,存在 X 上的连续半范数 q,使得对任何 $t\geqslant0,x\in X$,都有 $p(T_tx)\leqslant q(x)$成立,则这样的半群$\{T_t|t\geqslant0\}$称为 C_0 类等度连续算子半群. C_0 类等度连续算子半群是巴拿赫空间上 C_0 类半群的直接推广.

算子半群的无穷小生成元(infinitesimal generator of operator semi-group) 由算子半群决定的

闭线性算子. 设 X 是序列完备的局部凸拓扑线性空间, $\{T_t|t\geqslant 0\}$是 X 上的 C_0 类等度连续算子半群. 由

$$Ax=\lim_{h\to 0}h^{-1}(T_h-I)x$$

定义出的线性算子 A 称为$\{T_t|t\geqslant 0\}$的无穷小生成元, A 的定义域 $\mathscr{D}(A)$是

$$\{x|\lim_{h\to 0}h^{-1}(T_h-I)x \text{ 存在}\}.$$

$\mathscr{D}(A)$必在 X 中稠密, A 是闭线性算子, 当 λ 的实部大于 0 时, $(\lambda I-A)^{-1}$是 X 上的连续线性算子, 且对任何 $x\in X$,

$$(\lambda I-A)^{-1}x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_t x\mathrm{d}x,$$

算子族$\{\lambda(\lambda I-A)^{-n}|\lambda>0,n=1,2,3,\cdots\}$是等度连续的. 定义微商

$$\mathrm{D}_tT_tx=\lim_{h\to 0}h^{-1}(T_{t+h}-T_t)x$$

(若右边极限存在), 则 $\mathscr{D}(A)\subset\mathscr{D}(\mathrm{D}_tT_t)$, 且对 $x\in\mathscr{D}(A)$,

$$\mathrm{D}_tT_tx=AT_tx=T_tAx.$$

反之, 设 A 是 X 上稠定线性算子, 且使$(nI-A)^{-1}$ $(n=1,2,\cdots)$为连续的, 如果$\{(I-n^{-1}A)^{-m}\}$对 $n=1,2,\cdots$及 $m=0,1,2,\cdots$等度连续, 则 A 必是 X 上惟一确定的 C_0 类等度连续算子半群的无穷小生成元. 由于 C_0 类等度连续半群$\{T_t\}$由它的无穷小生成元 A 惟一确定, 所以常简写为 e^{tA}. 讨论算子半群和无穷小生成元之间的关系是算子半群理论研究的重要课题之一.

巴拿赫空间上的算子半群(operator semi-group on Banach space)　定义在巴拿赫空间上的线性算子半群. 设 X 是巴拿赫空间, $\{T_t|t>0\}$是 X 上的有界线性算子半群. 如果把$\{T_t|t>0\}$视为$(0,+\infty)$上取算子值的函数是强可测的, 则$\{T_t|t>0\}$必是强连续. 当 X 是可分时, 则$\{T_t|t>0\}$是弱可测蕴涵$\{T_t|t>0\}$强连续. 设$\{T_t|t>0\}$是 X 上强连续的算子半群, 则称

$$\omega_0=\inf_{t>0}\frac{\log\|T_t\|}{t}<+\infty$$

为$\{T_t|t>0\}$的指标. 若$\{T_t|t\geqslant 0\}$是强连续的算子半群(补充假设 $T_0=I$ 后, 即 X 上 C_0 类半群), ω_0 是它的指标, 则对任何 $\varepsilon>0$ 必存在常数 M_ε, 使得 $\|T_t\|\leqslant M_\varepsilon e^{t(\omega_0+\varepsilon)}$对一切 t 成立. 因而当 $\mathrm{Re}\lambda>\omega_0$ 时, 下面的博赫纳积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_tx\mathrm{d}t\ \ (x\in X)$$

存在, 称上面的积分为$\{T_t|t\geqslant 0\}$的拉普拉斯变换. 令 A 是$\{T_t|t\geqslant 0\}$的无穷小生成元, 则所有满足 $\mathrm{Re}\lambda>\omega_0$ 的 λ 全是 A 的正则点, 且

$$(\lambda I-A)^{-1}x=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}T_tx\mathrm{d}t\ \ (x\in X).$$

巴拿赫空间上的算子半群理论是研究发展微分方程和随机过程的重要工具.

算子半群的指标(index of operator semi-group)　见"巴拿赫空间上的算子半群".

算子半群的拉普拉斯变换(Laplace transform of operator semi-group)　见"巴拿赫空间上的算子半群".

希尔-吉田耕作定理(Hille-Yosida theorem)　给出闭稠定线性算子是某个 C_0 类算子半群生成元的充分必要条件的定理. 设 A 是巴拿赫空间 X 上的稠定线性算子, 则 A 是 X 上的某个 C_0 类算子半群$\{T_t|t\geqslant 0\}$的无穷小生成元的充分必要条件是, 存在常数 M,β 和实数列 $\lambda_n\to+\infty(n\to\infty)$, 满足:

1. 当 $\lambda_n>\beta$ 时, $(\lambda_nI-A)^{-1}$是有界线性算子.
2. 对任何 m, 当 $\lambda_n>\beta$ 时,

$$\|(\lambda_nI-A)^{-m}\|\leqslant\frac{M}{(\lambda_n-\beta)^m}.$$

上述命题称为希尔-吉田耕作(算子半群)定理. 希尔-吉田耕作定理是半群理论的最基本定理之一, 它有多种表示形式.

算子半群的近似式(approximate expression of operator semi-group)　按强极限逼近该算子半群的算子序列. 设 A 是巴拿赫空间 X 上的有界线性算子, 记

$$e^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n$$

(右边和式按算子范数收敛). 易知, e^{tA}是按算子范数拓扑连续的算子半群. 如果$\{T_t|t\geqslant 0\}$是 X 上的 C_0 类算子半群, A 是无穷小生成元, 则按希尔-吉田耕作定理, 对 $\mathrm{Re}\lambda$ 充分大的 λ, $(\lambda I-A)^{-1}$有界. 从而 $A(\lambda I-A)^{-1}$有界,

$$e^{tA\lambda(\lambda I-A)^{-1}}$$

是按算子范数拓扑连续的算子半群, 且

$$T_t=\lim_{\lambda\to\infty}e^{tA\lambda(\lambda I-A)^{-1}},$$

这里是强极限, 并且在任何闭区间$[0,\alpha]$上关于 t 收敛是一致的. 如果$\{T_t|t\geqslant 0\}$是局部凸拓扑线性空间 X 上的 C_0 等度连续算子半群, 则对 $x\in X$,

$$T_tx=\lim_{\lambda\to\infty}e^{tA\lambda(\lambda I-A)^{-1}}x$$

在$[0,\alpha]$上关于 t 收敛是一致的. 研究算子半群的近似式是算子半群理论的主要课题之一.

算子群(operator group)　按算子乘法运算与实数全体构成加法群同构的算子族. 设$\{T_t|t\in(-\infty,+\infty)\}$为局部凸拓扑线性空间 X 上的一族连续线性算子, 如果对任何 $t,s\in(-\infty,+\infty)$都有 $T_tT_s=T_{t+s}$且 $T_0=I$(恒等算子), 则称$\{T_t|t\in(-\infty,+\infty)\}$为算子群. 显然, 它的子族$\{T_t|t\geqslant 0\}$

及$\{T_{-t}|t\geqslant 0\}$是两个算子半群.

C_0类算子群(operator group of class C_0)　满足某种连续性的算子群. 设$\{T_t|t\in(-\infty,+\infty)\}$是局部凸拓扑线性空间$X$上的算子群,如果$\{T_t|t\geqslant 0\}$和$\{S_t=T_{-t}|t\geqslant 0\}$都是$C_0$类等度连续算子半群,则称$\{T_t|t\in(-\infty,+\infty)\}$为$C_0$类算子群. 设$X$是序列完备的局部凸拓扑线性空间,则$X$中稠定线性算子$A$是某个$C_0$类等度连续算子群$\{S_t|t\in(-\infty,+\infty)\}$的无穷小生成元的充分必要条件是,$\{(I-n^{-1}A)^{-m}\}$对$n=\pm1,\pm2,\cdots,m=0,1,2,\cdots$是等度连续的,由$A$所确定的算子群是惟一的.

压缩算子半群(contraction semi-group)　一类特殊C_0类算子半群. 设$\{T_t|t\geqslant 0\}$是巴拿赫空间X上的C_0类算子半群,如果$\|T_t\|\leqslant 1(t\geqslant 0)$,则称$\{T_t|t\geqslant 0\}$是$C_0$类压缩算子半群. 设$[\cdot,\cdot]$是$X\times X$上的泛函,如果满足

$$[x+y,z]=[x,z]+[y,z],$$
$$[\lambda x,y]=\lambda[x,y],$$
$$[x,x]=\|x\|^2,\ |[x,y]|\leqslant\|x\|\ \|y\|,$$

则称$[\cdot,\cdot]$是X上的半内积. 半内积总是存在的. 设A是X到X的线性算子,定义域是$\mathscr{D}(A)$,如果X上有半内积$[\cdot,\cdot]$使$\mathrm{Re}[Ax,x]\leqslant 0\ (x\in\mathscr{D}(A))$,则称$A$是(关于$[\cdot,\cdot]$)耗散算子. 线性算子$A$是耗散的,当且仅当对每个$x\in\mathscr{D}(A)$和$\lambda>0$满足$\|(\lambda I-A)x\|\geqslant\lambda\|x\|$. 线性算子$A$是$C_0$类压缩算子半群的无穷小生成元,当且仅当$A$是耗散算子,且$I-A$的值域是全空间$X$,这个命题称为菲利普斯定理.

半内积(semi-scalar product)　见"压缩算子半群".

耗散算子(dissipative operator)　见"压缩算子半群".

解析算子半群(operator analytic semigroup)　一类特殊的压缩半群. 如果巴拿赫空间上的压缩半群$\{T_t|t\geqslant 0\}$视为$[0,+\infty)$上的算子值函数可以解析开拓到一个包含正实轴的复平面中的角形区域上去,则称该类半群为解析算子半群. 这类半群在抛物型方程中有重要应用.

紧算子半群(semigroup of compact operators)　一类特殊的C_0类半群. 设$\{T_t|t\geqslant 0\}$为C_0类半群,如果对每个$t>0$,算子T_t是紧算子,则称$\{T_t|t\geqslant 0\}$为紧算子半群.

可微算子半群(semigroup of differentiable operators)　具有某种可微性的C_0类半群. 如果算子半群$\{T_t|t\geqslant 0\}$满足条件:当$t>0$时,对每个$x\in X$,向量值函数$t\to T_tx$是强可微的,则称$\{T_t|t\geqslant 0\}$为可微算子半群.

酉算子群(unitary operator group)　由酉算子构成的算子群. 设$\{U_t|t\in(-\infty,+\infty)\}$是希尔伯特空间$H$上的算子群,如果每个$U_t$都是酉算子,则称其为酉算子群. 当视$\{U_t|t\in(-\infty,+\infty)\}$为$(-\infty,+\infty)$上取酉算子值函数时,它弱连续等价于强连续. 当$H$是可分空间时,由$\{U_t|t\in(-\infty,+\infty)\}$的弱可测性也可推出强连续性. 设$\{U_t|t\in(-\infty,+\infty)\}$是$H$上的$C_0$类酉算子群即强连续酉算子群,则它的无穷小生成元$A=\mathrm{i}B$,其中$B$是$H$上自共轭算子;如令

$$B=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda$$

是自共轭算子B的谱分解,则

$$U_t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}\mathrm{d}E_\lambda\ \ (t\in(-\infty,+\infty)).$$

上述命题称为斯通定理,它是希尔伯特空间上算子半群的重要定理之一,并且在群表示论和量子力学中有重要应用.

酉算子群的斯通定理(Stone theorem of unitary operator group)　见"酉算子群".

对偶半群(dual semi-group)　分别定义在线性空间与其共轭空间上的两个半群. 设$\{T_t|t\geqslant 0\}$是序列完备的局部凸拓扑线性空间X上的C_0类等度连续算子半群,则共轭空间X^*上的$\{T_t^*|t\geqslant 0\}$满足半群性质,关于$t\geqslant 0$等度连续,但一般不是C_0类的. 如果X和X^*都序列完备,把X上C_0类等度连续算子半群$\{T_t|t\geqslant 0\}$的无穷小生成元A的共轭算子A^*的定义域$\mathscr{D}(A^*)$在X^*中强拓扑的闭包记为X^+,又记$T_t^+=T_t^*|_{X^+}$,则$\{T_t^+|t\geqslant 0\}$是X^+上的C_0类等度连续半群,它的无穷小生成元A^+就是把A^*的定义域和值域同时限于X^+内时A^*的最大限制. $\{T_t^+|t\geqslant 0\}$称为$\{T_t|t\geqslant 0\}$的对偶半群.

抽象柯西问题(abstract Cauchy problem)　以向量值函数为解的微分方程的初值问题. 设A是巴拿赫空间X上的线性算子,定义域是$\mathscr{D}(A)$,$y_0\in X$. 是否有取值于X上的向量值函数$y(t)$,满足:

1. $y(t)\in\mathscr{D}(A)\ (t>0)$,在任何$[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)$上强可导.

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=Ay(t)\ (t>0)$.

3. $\lim\limits_{t\to 0}\|y(t)-y_0\|=0$.

此问题称为抽象柯西问题. 如有$y(t)$满足1—3,则称$y(t)$是方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)=Ay(t)$$

适合柯西条件$y(0)=y_0$的解.

通常的热传导方程、薛定谔方程,以及用矩阵表示的波动方程

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

都可纳入抽象柯西问题.用算子半群为工具研究上述抽象柯西问题可得到如下结果:设 A 是 C_0 类算子半群 $\{T_t | t \geqslant 0\}$ 的无穷小生成元,则方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) = Ay(t)$$

的抽象柯西问题对每个 $y_0 \in \mathscr{D}(A)$ 有惟一解 $T_t y_0$.算子半群理论和抽象柯西问题及马尔可夫过程有很密切的联系.

算 子 代 数

巴拿赫代数(Banach algebra) 常简称 B 代数,是定义了乘法运算并满足一定条件的复巴拿赫空间.设 R 是复赋范线性空间且 R 同时又是环,如果 R 中任何两个元素 x,y 的乘积 xy 的范数满足不等式

$$\| xy \| \leqslant \| x \| \; \| y \|,$$

就称 R 是赋范代数或赋范环.完备的赋范代数称为巴拿赫代数,简称 B 代数.当 B 代数 R 有单位元 e 时,通过改赋一个与原范数等价的范数,可假设 $\| e \| = 1$.对于没有单位元的 B 代数 R,令 $\widetilde{R} = \{(\lambda, x) | \lambda \in \mathbb{C}(\text{复数域}), x \in R\}$,则依范数 $\| (\lambda, x) \| = |\lambda| + \| x \|$,乘法

$$(\lambda_1, x_1)(\lambda_2, x_2) = (\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + x_1 x_2),$$

$\widetilde{R}$ 成为有单位元 $(1,0)$ 的 B 代数,且是 R 的扩张.因而任何一个没有单位元的 B 代数都可扩张为有单位元的 B 代数.

巴拿赫代数是泛函分析的一个重要分支,它在调和分析、算子理论等数学领域有着广泛的应用,其理论基础是由盖尔范德(Гельфанд, И. М.)于 1939 年奠定的.

***B* 代数**(Banach algebra) 即"巴拿赫代数".

赋范代数(normed algebra) 见"巴拿赫代数".

赋范环(normed ring) 见"巴拿赫代数".

拟逆元(quasi-inverse element) 巴拿赫代数中的一个概念.在巴拿赫代数 R 中引进运算

$$x \circ y = x + y - xy,$$

当 $x \circ y = 0$(或 $y \circ x = 0$)时,称 y 为 x 的右(或左)拟逆元.当 $x \circ y = y \circ x = 0$ 时,则称 y 为 x 的拟逆元,而称 x 为拟可逆的.设 R 有单位元 e,y 是 x 的拟逆元,则 $e - y$ 就是 $e - x$ 的逆元.可逆元称为正则的,非可逆元称为奇异的.当复数 λ 满足 $|\lambda| > \| x \|$ 时,$\lambda - x$ 有拟逆元 y,它由收敛级数

$$y = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} x^n$$

给出,所有使 $\lambda - x$ 不具有拟逆元的 λ 所成的集合称为 x 的谱,记为 $\mathrm{Sp}(x)$.当 x 本身无逆元,特别当 R 不含单位元时,恒有 $0 \in \mathrm{Sp}(x)$.R 中每个元的谱都是非空的有界闭集,且谱半径

$$\sup\{ |\lambda| \,|\, \lambda \in \mathrm{Sp}(x) \} = \lim_{n \to \infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}.$$

特别地,当 x 是巴拿赫空间上的有界线性算子时,这里所定义的谱就是算子的谱.使 $\mathrm{Sp}(x) = \{0\}$ 的 $x \in R$ 称为广义幂零元或拓扑幂零元,这种元的全体称为 R 的根,当 R 的根只含有零元时,R 称为半单的 B 代数.

拟可逆元(quasi-invertible element) 见"拟逆元".

正则元(regular element) 见"拟逆元".

谱半径(spectral radius) 见"拟逆元".

广义幂零元(generalized nilpotent element) 见"拟逆元".

拓扑幂零元(topological nilpotent element) 见"拟逆元".

巴拿赫代数的根(radical of Banach algebra) 见"拟逆元".

半单的巴拿赫代数(semisimple Banach algebra) 见"拟逆元".

巴拿赫代数的表示(representation of Banach algebra) 巴拿赫代数与某巴拿赫空间上的有界线性算子组成的代数之间的一种同态对应.给定巴拿赫代数 R 和巴拿赫空间 X,如果对于 $x \in R$ 有 X 上的有界线性算子 T_x 与之对应,使 $x \to T_x$ 是代数同态,且满足 $\| T_x \| \leqslant \| x \|$,这样的对应就称为 R 的一个表示,X 称为表示空间.巴拿赫代数总有等距同构的表示.设 Y 是表示空间 X 的子空间(可以闭也可以不闭),若对一切 $x \in R$,有 $T_x Y \subset Y$,则称 Y 为 X 的不变子空间.若除 X 和 $\{0\}$ 外不存在其他不变子空间,则称此表示为巴拿赫代数的不可约表示.又若除 $\{0\}$ 和 X 外不存在其他的闭不变子空间,则称表示为拓扑不可约表示.研究表示定理是巴拿赫代数理论中的一个重要问题.

不可约表示(irreducible representation) 见"巴拿赫代数的表示".

拓扑不可约表示(topologically irreducible representation) 见"巴拿赫代数的表示".

交换巴拿赫代数(commutative Banach algebra) 一种特殊的巴拿赫代数.若 R 是巴拿赫代数且 R 是交换环,则称 R 是交换巴拿赫代数.盖尔范德(Гельфанд, И. М.)研究巴拿赫代数就是从交换情形开始的,交换巴拿赫代数理论一出现,就对三角级数理论中著名的维纳定理给出了简洁证明.

维纳代数(Wiener algebra) 一类交换巴拿赫

代数.绝对收敛的三角级数全体

$$W=\{x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_ne^{\text{int}}\mid\|x\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|<+\infty\}$$

按通常的方法规定加法、数乘和乘法及范数 $\|\cdot\|$ 成为一个有单位元的交换巴拿赫代数.此巴拿赫代数 W 称为维纳代数.1939 年,盖尔范德(Гельфанд, И. М.)正是通过引入维纳代数给出了维纳定理(即点点不为零的绝对收敛的三角级数有逆且逆仍可展成绝对收敛的三角级数)的简洁证明.

函数代数(function algebra)　亦称一致代数.一类重要的交换巴拿赫代数.设 R 是紧豪斯多夫空间 Ω 上的连续函数全体 $C(\Omega)$ 的闭子代数,如果 R 含有常值函数且可分离 Ω 中的点(即对任何 $\omega_1,\omega_1\in\Omega,\omega_1\neq\omega_2$,有 $f\in R$ 使得 $f(\omega_1)\neq f(\omega_2)$),则称 R 为函数代数.函数代数是 20 世纪 50 年代迅速发展起来的一个分支.它与解析函数论、多复变函数论、函数逼近论等有密切关系.

一致代数(uniform algebra)　即"函数代数".

极大代数(maximal algebra)　是一类函数代数.设 A 是 $C(\Omega)$ 中的函数代数,如果对任何函数代数 B,只要 $B\supset A$ 便必有 $B=C(\Omega)$ 或 $B=A$ 成立,则称 A 是极大代数.极大代数在函数代数理论中起着重要的作用.

圆盘代数(disk algebra)　定义在单位圆周上的一类函数代数.设 T 为复平面中单位圆周.圆盘代数是 $C(T)$ 中的可以连续扩张成单位开圆内的解析函数全体所构成的闭子代数 A.圆盘代数是函数代数,而且还是 $C(T)$ 的极大代数.

可乘线性泛函(multiplicative linear functionals)　定义在巴拿赫代数上具有可乘性质的线性泛函.设 R 为巴拿赫代数,f 是 R 上的线性泛函,如果对一切 $x,y\in R$,f 还满足 $f(xy)=f(x)f(y)$,即 f 是 R 到数域的代数同态,则称 f 是 R 上的一个可乘线性泛函.如果 R 有单位元 e,则 R 上可乘线性泛函必是连续的,即 $f\in R^*$(R 的共轭空间),且 $\|f\|=f(e)=1$.设 Ω 为 R 上非零的可乘线性泛函全体,则 Ω 是 R^* 的闭单位球中的弱 * 紧集.当 R 无单位元时,Ω 在 R^* 中是弱 * 局部紧的.

极大理想(maximal ideal)　巴拿赫代数中的一个重要概念.设 R 是有单位元 e 的交换巴拿赫代数,M 是 R 的一个真子代数.如果对 $\forall x\in M,y\in R$,都有 $xy\in M$,则称 M 是 R 的一个理想(或幻).如果对任何理想 M',由 $M'\supset M$ 可推出 $M'=R$,则称 M 为 R 中的极大理想.极大理想必是闭的.R 中任何一个非正则元都含于某一理想中,且任一理想都包含于某一极大理想中.设 M 是 R 的极大理想,则商空间 R/M 同构于复数域.由哈恩-巴拿赫延拓定理,存在 R 上的连续线性泛函 $f_M\neq 0$,使 $f_M(M)=0$,且 f_M 是 R 上的可乘线性泛函.反之,对 R 上任一可乘线性泛函 f,其零空间 $M_f=\{x\mid f(x)=0\}$ 是 R 的一个极大理想,从而 R 中的极大理想与 R 上可乘线性泛函之间形成一一对应关系.这种对应关系在交换巴拿赫代数的表示理论中起重要作用.

交换巴拿赫代数的表示(representation of commutative Banach algebra)　交换巴拿赫代数与某紧豪斯多夫空间上的连续函数空间之间的一种同态对应.若 R 是有单位元 e 的交换巴拿赫代数,则 $\Gamma: x\to x(f)$ 是代数同态,其中 $x(f)$ 为 R 上非零可乘线性泛函全体 Ω 上的连续函数.Γ 称为是交换巴拿赫代数的盖尔范德表示.

盖尔范德表示(Gelfandd representation)　见"交换巴拿赫代数的表示".

巴拿赫 * 代数(Banach algebra with involution)　定义了对合运算的巴拿赫代数.如果巴拿赫代数 R 中还定义了一个对合运算 $x\to x^*$,满足:

1. $(x+y)^*=x^*+y^*$;
2. $(\lambda x)^*=\bar{\lambda}x^*$;
3. $(xy)^*=y^*x^*$;
4. $(x^*)^*=x$;

则称 R 为巴拿赫 * 代数,简记为 B^* 代数.当考虑 B^* 代数 R 的表示时,如果表示空间取为希尔伯特空间 H,而表示满足 $x\to T_x,x^*\to T_{x^*}=(T_x)^*$,则称此表示为 R 的 * 表示.对巴拿赫 * 代数,如果对合还满足 $\|x^*\|=\|x\|$,则称 R 是对称巴拿赫代数.

B^* 代数(Banach algebra with involution)　即"巴拿赫 * 代数".

对合运算(involution)　见"巴拿赫 * 代数".

*** 表示**(*-representation)　见"巴拿赫 * 代数".

对称巴拿赫代数(symmetry Banach algebra)　见"巴拿赫 * 代数".

C^* 代数(C^*-algebra)　一类重要的巴拿赫 * 代数.设 R 是巴拿赫 * 代数,如果对 R 的每个元都有 $\|x^*x\|=\|x\|^2$ 成立,则称 R 为 C^* 代数.当 C^* 代数有单位元 e 时,则 $\|e\|=1$ 自动成立.若 R 没有单位元,做扩张 $\tilde{R}=\{(\lambda,x)\mid\lambda\in\mathbb{C},x\in R\}$,并在 $\tilde{R}$ 中引入范数 $\|(\lambda,x)\|=\|L(\lambda,x)\|$,则 $\tilde{R}$ 成为有单位元 $(1,0)$ 的 C^* 代数,这里 $L(\lambda_0,x_0)$ 表示 $\tilde{R}$ 上算子 $(\lambda,x)\to(\lambda_0,x_0)(\lambda,x)$.$C^*$ 代数是盖尔范德(Гельфанд, И. М.)(部分与奈玛克(Наймарк, М. А.)合作)等于 20 世纪 40 年代提出并做了系统而精美的研究,它在抽象调和分析、量子物理等领域中有重要作用.

C^* 范数(C^* norm)　巴拿赫 * 代数上满足 C^*

代数公理的范数. 设 $\mathscr{A}$ 是一个巴拿赫 * 代数, p 是 $\mathscr{A}$ 上的半范数. 如果对任何 $a,b\in\mathscr{A}$, p 都满足条件 $p(ab)\leqslant p(a)p(b)$, $p(a^*)=p(a)$ 且 $p(a^*a)=p(a)^2$, 则称 p 为 $\mathscr{A}$ 上的一个 C^* 半范数. 单射的 C^* 半范数称为 C^* 范数.

C^* 半范数(C^* seminorm)　见"C^* 范数".

包络 C^* 代数(enveloping C^*-algebra)　由巴拿赫 * 代数与它的 C^* 半范数导出的 C^* 代数. 设 $\mathscr{A}$ 为一巴拿赫 * 代数, p 是 $\mathscr{A}$ 上的任一 C^* 半范数, 则集合 $N=p^{-1}(0)$ 是 $\mathscr{A}$ 的自伴理想. 在商代数 $\mathscr{A}/N$ 上引入范数 $\|a+N\|=p(a)$, 则 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{A}/N$ 上的一个 C^* 范数, 而 $(\mathscr{A}/N,\|\cdot\|)$ 的巴拿赫完备化空间 $(\mathscr{B},\|\cdot\|)$ 是 C^* 代数, 这个 C^* 代数 $\mathscr{B}$ 就称为 $(\mathscr{A},p)$ 的包络 C^* 代数. 当 p 是 $\mathscr{A}$ 的 C^* 范数时, $(\mathscr{A},p)$ 的包络 C^* 代数 $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$ 的完备化, 而 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的稠密 * 子代数.

核 C^* 代数(nuclear C^*-algebra)　一类性质较好的 C^* 代数. 设 $\mathscr{A}$ 为 C^* 代数, 如果对每个 C^* 代数 $\mathscr{B}$, 张量积 $\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 上都只有惟一的 C^* 范数, 则称 $\mathscr{A}$ 是核 C^* 代数. 有限维 C^* 代数和交换 C^* 代数都是核 C^* 代数. 1977 年, 爱弗罗斯(Effros, E.)和兰士(Lance, E. C.)指出, 核 C^* 代数 $\mathscr{A}$ 的二次共轭空间 $\mathscr{A}^{**}$ 是内射的(参见"内射 C^* 代数").

内射 C^* 代数(injective C^*-algebra)　具有某种投影性质的 C^* 代数. 设 $\mathscr{A}$ 是 C^* 代数, $\mathscr{B}(H)$ 是希尔伯特空间 H 上的有界线性算子全体. 如果对 $\mathscr{A}$ 的任何表示 $\pi:\mathscr{A}\to\mathscr{B}(H)$, 都存在从 $\mathscr{B}(H)$ 到 $\pi(\mathscr{A})$ 上的范数为 1 的投影, 则称 $\mathscr{A}$ 是内射 C^* 代数.

简单 C^* 代数(simple C^*-algebra)　不含有非平凡理想的 C^* 代数. 设 $\mathscr{A}$ 是 C^* 代数, 如果除 0 和 $\mathscr{A}$ 外, $\mathscr{A}$ 不含有其他闭理想, 则称 $\mathscr{A}$ 是简单 C^* 代数. 简单 C^* 代数是有着基本重要性的一类 C^* 代数.

一致超有限代数(uniformly hyperfinite algebra)　一类性质较好的 C^* 代数. 设 $\mathscr{A}$ 是含单位元 e 的 C^* 代数, 如果存在 $\mathscr{A}$ 的一列含 e 的有限维简单 C^* 子代数 $\{\mathscr{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}_2\subset\cdots\subset\mathscr{A}_n\subset\cdots$ 且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n$$

在 $\mathscr{A}$ 稠密, 则称 $\mathscr{A}$ 是一致超有限代数, 也称为 UHF 代数.

UHF 代数(UHF algebra)　即"一致超有限代数".

AF 代数(AF algebra)　UHF 代数概念的推广. 设 $\mathscr{A}$ 是 C^* 代数, 如果 $\mathscr{A}$ 含有一列有限维 C^* 子代数 $\{\mathscr{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}_2\subset\cdots\subset\mathscr{A}_n\subset\cdots$ 且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n$$

在 $\mathscr{A}$ 中稠密, 则称 $\mathscr{A}$ 为 AF 代数. UHF 代数必是 AF 代数.

CCR 代数(CCR algebra)　具有紧表示的 C^* 代数. 设 $\mathscr{A}$ 为 C^* 代数, 如果对 $\mathscr{A}$ 的每个不可约表示 (H,π), 都有 $\pi(\mathscr{A})=\mathscr{K}(H)$ (即 H 上紧算子全体), 则称 $\mathscr{A}$ 是 CCR 代数. 每个有限维 C^* 代数都是 CCR 代数. 如果把上述定义中的条件"$\pi(\mathscr{A})=\mathscr{K}(H)$"放宽为"$\pi(\mathscr{A})\subset\mathscr{K}(H)$", 就得到 GCR 代数的概念.

GCR 代数(GCR algebra)　见"CCR 代数".

本原 C^* 代数(primitive C^*-algebra)　一类有着基本重要性的 C^* 代数. 设 $\mathscr{A}$ 是 C^* 代数, $\mathscr{A}$ 的任何一个不可约表示 π 的零空间 $\pi^{-1}(0)=\{a\in\mathscr{A}\mid\pi(a)=0\}$ 都是 $\mathscr{A}$ 中的理想, 称为 $\mathscr{A}$ 的本原理想. 本原理想是研究非交换 C^* 代数的重要工具. 如果 0 是 $\mathscr{A}$ 的本原理想, 则称 $\mathscr{A}$ 是本原 C^* 代数. 因而, $\mathscr{A}$ 是本原 C^* 代数的充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 有一个忠实不可约表示. 特普利茨代数是本原 C^* 代数, 但维数大于 1 的交换 C^* 代数不是本原的.

本原理想(primitive ideal)　见"本原 C^* 代数".

素 C^* 代数(prime C^*-algebra)　一种基本的 C^* 代数. 设 $\mathscr{A}$ 是 C^* 代数, I 是 $\mathscr{A}$ 中的闭理想. 如果 I 满足条件: 对 $\mathscr{A}$ 中任何两个闭理想 J_1,J_2, 只要 $J_1J_2\subset I$, 则必有 $J_1\subset I$ 或者 $J_2\subset I$ 成立, 就称 I 是 $\mathscr{A}$ 中的素理想. 本原理想一定是素的. 如果 C^* 代数 $\mathscr{A}$ 的零理想 0 是素的, 也即 $\mathscr{A}$ 的任何两个非零闭理想都有非零的交, 则称 $\mathscr{A}$ 是素 C^* 代数. 本原 C^* 代数一定是素 C^* 代数.

C^* 代数的素理想(prime ideal of C^*-algebra)　见"素 C^* 代数".

特普利茨代数(Toeplitz algebra)　一种具体的 C^* 代数. 设 T 为复平面上单位圆周, $C(T)$ 是 T 上连续函数全体. 对于 $\varphi\in C(T)$, 设 T_φ 为 φ 导出的哈代空间 $H^2(T)$ 上特普利茨算子. 由 $\{T_\varphi\mid\varphi\in C(T)\}$ 生成的 C^* 代数就称为特普利茨代数, 它是 C^* 代数理论和算子理论的重要研究对象.

交换 C^* 代数的表示(representation of commutative C^*-algebra)　交换 C^* 代数到某紧豪斯多夫空间上连续函数空间的一种代数同构. 若 R 是有单位元 e 的交换 C^* 代数, 则 R 的盖尔范德表示 $\Gamma:R\to C(\Omega)$ 是完全同构, 即 Γ 是保持 * 运算的保范代数同构.

正线性泛函(positive linear functional)　在正元上取非负值的线性泛函. 设 R 是有单位元 e 的 C^* 代数, $x\in R$. 如果 $x=x^*$ 且 $\mathrm{Sp}(x)\subset[0,+\infty)$, 则称

x 为 R 中的正元. 正元的全体记为 R^+. 当 $x,y\in R^+$, $\lambda\geqslant 0$ 时,有 $x+y\in R^+$, $\lambda x\in R^+$,而 $x,-x\in R^+ \Rightarrow x=0$,因此,$R^+$是 R 中的锥. R^+是闭集. 设 f 是 R 上的线性泛函,如果 $f(R^+)\subset[0,+\infty)$,则称 f 是 R 上的正线性泛函. 正线性泛函必是有界的,且

$$\|f\|=f(e).$$

C^*代数中的正元(positive element in C^*-algebra) 见"正线性泛函".

态(state) 有单位元 C^*代数上的一类正线性泛函. 设 R 是含单位元 e 的 C^*代数,R 上满足 $f(e)=1$ 的正线性泛函 f 称为 R 上的态,其全体记为 $\mathscr{S}(R)$. $\mathscr{S}(R)$是 R^* 中的弱紧凸集,$\mathscr{S}(R)$的端点称为 R 的纯态(pure state),纯态的全体记为$\mathscr{P}(R)$,当 R 交换时,纯态就是 R 上的可乘线性泛函.

纯态(pure state) 见"态".

C^*代数上正线性映射(positive linear map on C^*-algebra) 正元的像仍为正元的线性映射. 设 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 是两个 C^*代数,$\varphi:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 为线性映射. 如果对每个正元 $a\in\mathscr{A}$,$\varphi(a)$都是 $\mathscr{B}$ 中的正元,则称 φ 为正线性映射. 对于正整数 n,$\mathscr{A}$ 上 n 阶矩阵全体记为 $\mathscr{A}\otimes M_n=\{(a_{ij})_{n\times n}\mid a_{ij}\in\mathscr{A}\}$,它仍是 C^*代数. 令 $\varphi_n:\mathscr{A}\otimes M_n\to\mathscr{B}\otimes M_n$ 为如下定义的线性映射: $\varphi_n((a_{ij})_{n\times n})=(\varphi(a_{ij}))_{n\times n}$. 如果 φ_n 是正的,则称 φ 是 n 正的;如果对每个正整数 n,φ都是 n 正的,则称 φ 为完全正的. 当 $\mathscr{B}$ 为复数域 $\mathbf{C}$ 时,n 正线性映射和完全正线性映射分别称为 n 正线性泛函和完全正线性泛函. 正线性映射和完全正线性映射是研究 C^*代数理论的重要工具.

***n* 正线性映射**(n-positive linear map) 见"C^*代数上正线性映射".

完全正线性映射(completely positive linear map) 见"C^*代数上正线性映射".

***n* 正线性泛函**(n-positive linear functional) 见"C^*代数上正线性映射".

完全正线性泛函(completely positive linear functional) 见"C^*代数上正线性映射 ".

迹正线性泛函(tracial positive linear funtional) C^*代数上一类具有类似于矩阵迹性质的正线性泛函. 设 φ是 C^*代数 $\mathscr{A}$ 上正线性泛函,如果对任意 $a\in\mathscr{A}$ 都有 $\varphi(a^*a)=\varphi(aa^*)$成立(或等价地,对任意 $b,c\in\mathscr{A}$ 都有 $\varphi(bc)=\varphi(cb)$成立),则称 φ是迹正线性泛函或 φ是迹的. 进而,当 $\varphi(a^*a)=0$ 蕴涵 $a=0$ 时,称 φ是忠实的迹正线性泛函. 这个概念也可推广到正线性映射的情形.

C^*代数的表示(representation of C^*-algebra) C^*代数到某希尔伯特空间上的算子代数的同态. 设 R 是有单位元 e 的 C^*代数,H 是希尔伯特空间. 若存在 R 到 H 上的有界线性算子全体$\mathscr{B}(H)$中的代数同态 ψ,满足 $\psi(e)=1$,$\psi(x^*)=(\psi(x))^*$,则称 ψ 是 R 在 H 上的表示. 如果 ψ 是一一对应,则称 ψ 是忠实的表示. 如果存在 $\xi\in H$,使$\{\psi(x)\xi\mid x\in R\}$在 H 中稠密,则称 ψ 是循环表示,而相应的 ξ 称为循环向量. 忠实表示必是保范的. 对于 R 及 R 的态 φ,必存在希尔伯特空间 H_φ,向量 $\xi_\varphi\in H_\varphi$ 以及 R 在 H_φ 上的表示 ψ_φ,使 ψ_φ 是以 ξ_φ 为循环向量的循环表示,而且还满足 $\varphi(x)=(\psi_\varphi(x)\xi_\varphi,\xi_\varphi)$,这就是 GNS 构造. 由此可知,必存在希尔伯特空间 H 和 ψ,使 ψ是 R 在 H 上的忠实表示.

态与 GNS 构造是 C^*代数中最重要的部分,并且它们还有重要的物理意义. 如果 C^*代数相应于量子系统的观察量代数,那么态就是量子系统的状态,而公式$\varphi(x)=(\psi_\varphi(x)\xi_\varphi,\zeta_\varphi)$恰为观察量 x 在状态 φ中的期望值.

C^*代数的忠实表示(faithful representation of C^*-algebra) 见"C^*代数的表示".

C^*代数的循环表示(cyclic representation of C^*-algebra) 见"C^*代数的表示".

GNS 构造(GNS-structure) 见"C^*代数的表示".

自伴算子代数(self-adjoint operator algebra) 希尔伯特空间上对算子取共轭运算封闭的算子代数. 设 $\mathscr{B}(H)$为希尔伯特空间 H 上的有界线性算子全体,$\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{B}(H)$的一个子代数. 如果 $T\in\mathscr{A}\Rightarrow T^*\in\mathscr{A}$,则称 $\mathscr{A}$ 为自伴算子代数或 $\mathscr{B}(H)$的自伴子代数. 自伴算子代数是巴拿赫 * 代数.

冯・诺伊曼代数(von Neumann algebra) 亦称弱闭对称算子环. 一类由算子构成的弱闭的 C^*代数. 令 $\mathscr{B}(H)$为希尔伯特空间 H 上有界线性算子全体所成的 C^*代数,其中 * 运算为取共轭. 如果 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{B}(H)$的含恒等算子 I 的巴拿赫 * 子代数(即自伴子代数),且关于 $\mathscr{B}(H)$的弱算子拓扑是闭的,则称 $\mathscr{M}$ 为冯・诺伊曼代数,常简称 v. N. 代数(关于算子范数拓扑为闭的巴拿赫 * 子代数是 C^*代数). $\mathscr{M}$ 成为冯・诺伊曼代数,当且仅当下列条件之一成立:

1. $\mathscr{M}$ 是含 I 的巴拿赫 * 子代数,关于强算子拓扑为闭.

2. $\mathscr{M}$ 是含 I 的 C^*代数,且作为巴拿赫空间,它是某个巴拿赫空间的共轭空间.

冯・诺伊曼代数是冯・诺伊曼(von Neumann, J.)等人于 1935 年开始研究的一类算子环,他们得到完整而深入的结果,后人为纪念这一数学理论的奠基者,就以他的名字来命名这类算子环.

注:有些文献把冯・诺伊曼代数定义为$\mathscr{B}(H)$中弱(强)闭自伴子代数(不必含恒等算子 I).

弱闭对称算子环(weakly closed symmetric operator ring)　即"冯·诺伊曼代数".

W^*代数(W^*-algebra)　可表示为冯·诺伊曼代数的C^*代数.设M是C^*代数,如果存在巴拿赫空间M_*,使$M=(M_*)^*$,即M是M_*的共轭空间,则称M为W^*代数.冯·诺伊曼代数必为W^*代数.

卡尔金代数(Calkin algebra)　有单位元的C^*代数.设$\mathscr{B}(H)$是无限维希尔伯特空间H上有界线性算子全体构成的冯·诺伊曼代数,$\mathscr{K}(H)$为H上的紧线性算子全体,$\mathscr{K}(H)$是$\mathscr{B}(H)$中惟一非零按算子范数闭的真双侧理想,商代数$\mathscr{B}(H)/\mathscr{K}(H)$称为卡尔金代数.令$\pi$为$\mathscr{B}(H)$到$\mathscr{B}(H)/\mathscr{K}(H)$的商映射,则对$T\in\mathscr{B}(H)$,$\pi(T)$是$\mathscr{B}(H)/\mathscr{K}(H)$中可逆元当且仅当$T$是弗雷德霍姆算子.记$\sigma_e(T)=\mathrm{Sp}\,\pi(T)$,称$\sigma_e(T)$为$T$的本质谱,它是算子紧扰动理论的重要概念.

本质谱(essential spectrum)　见"卡尔金代数".

极大交换自伴代数(maximal abelian self-adjoint algebra)　一类冯·诺伊曼代数.不能真正包含在任何交换冯·诺伊曼代数中的交换冯·诺伊曼代数称为极大交换自伴代数.

超有限代数(hyperfinite algebra)　一类重要的冯·诺伊曼代数.设$\mathscr{M}$是希尔伯特空间H上的冯·诺伊曼代数,如果在$\mathscr{M}$中存在弱稠密的C^*子代数$\mathscr{A}$,使得$\mathscr{A}$是UHF代数且恒等算子I就是$\mathscr{A}$的单位元,则称$\mathscr{M}$是超有限代数.H上的有界线性算子全体构成的代数$\mathscr{B}(H)$就是超有限的.

二次换位定理(double commutation theorem)　指出冯·诺伊曼代数与其二次换位之间的相等关系.设$\mathscr{M}\subset\mathscr{B}(H)$是冯·诺伊曼代数,则$\mathscr{M}$与$\mathscr{M}$的二次换位$\mathscr{M}''$相等($\mathscr{M}'$表示$\mathscr{M}$的换位),即$\mathscr{M}=\mathscr{M}''$.此结果称为冯·诺伊曼代数的二次换位定理.这是冯·诺伊曼对以他命名的算子环进行研究的主要工具之一.

卡普兰斯基稠密性定理(Kaplansky's density theorem)　关于C^*代数的单位球在它生成的冯·诺伊曼代数的单位球中稠密的定理.该定理断言:若$\mathscr{A}$是希尔伯特空间H上有界线性算子全体$\mathscr{B}(H)$的含I的巴拿赫$*$子代数,则$\mathscr{A}$关于弱算子拓扑(或强算子拓扑)的闭包$\mathscr{M}$是冯·诺伊曼代数.记$\mathscr{A}_1$,$\mathscr{M}_1$分别为$\mathscr{A}$和$\mathscr{M}$的单位球(即范数$\leqslant 1$的元全体),则$\mathscr{A}$关于弱(或强)算子拓扑在$\mathscr{M}_1$中稠密.

迹(trace)　矩阵迹概念的推广.设$\mathscr{M}$是冯·诺伊曼代数,$\mathscr{M}^+$为属于$\mathscr{M}$的正算子全体,如果$\mathrm{tr}(A)$是$\mathscr{M}^+$上的非负实值(不恒为0,可以取值$+\infty$)泛函,满足:

1. $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$;
2. 当$\lambda\geqslant 0$时,$\mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\mathrm{tr}(A)$;
3. 对于$\mathscr{M}$内的任意酉算子V,有

$$\mathrm{tr}(VAV^*)=\mathrm{tr}(A)\quad (A\in\mathscr{M}^+);$$

则称$\mathrm{tr}(\cdot)$是$\mathscr{M}^+$上的迹.若对一切$A\in\mathscr{M}^+$,有$\mathrm{tr}(A)<+\infty$,则称tr为有限迹;若对使得$\mathrm{tr}(A)=+\infty$的任一$A\in\mathscr{M}^+$,必有$B\in\mathscr{M}^+$,使$A\geqslant B\neq 0$,而且$\mathrm{tr}(B)<+\infty$,则称$\mathrm{tr}(\cdot)$是半有限迹;若当$\{A_\alpha\}$为$\mathscr{M}^+$的向上有向族,且A为此族的上确界时,总有$\mathrm{tr}(A)=\sup\mathrm{tr}(A_\alpha)$,则称tr为正规迹.

有限迹(finit trace)　见"迹".

半有限迹(semi-finite trace)　见"迹".

正规迹(normal trace)　见"迹".

冯·诺伊曼代数的分类(classification of von Neumnn algebra)　对冯·诺伊曼代数进行分类,有如下几种.当冯·诺伊曼代数$\mathscr{M}$不存在半有限正规迹时,称$\mathscr{M}$为纯无限冯·诺伊曼代数,或Ⅲ型v.N.代数.与此相反,当对任一$A\in\mathscr{M}^+$,$A\neq 0$,存在半有限正规迹$\mathrm{tr}(A)\neq 0$,$\mathrm{tr}(A)\neq+\infty$时,就称$\mathscr{M}$为半有限v.N.代数.特别地,当存在有限正规迹tr,使得$\mathrm{tr}(A)\neq 0$时,就称$\mathscr{M}$为有限v.N.代数.交换的v.N.代数是有限的.

设E是$\mathscr{M}$的非零投影算子,当属于$E\mathscr{M}E=\{EAE|A\in\mathscr{M}\}$的任意两个算子都可以交换时,称$E$为阿贝尔投影算子.当$\mathscr{M}$含有一个阿贝尔投影算子$E$,且对属于$\mathscr{M}$的中心$\mathscr{C}=\mathscr{M}\cap\mathscr{M}'$($\mathscr{M}'$是$\mathscr{M}$的换位)中的投影算子$P$,只有当$P=\mathrm{I}$才满足$E\leqslant P$时,就称$\mathscr{M}$为Ⅰ型v.N.代数.此时,$\mathscr{M}$是有限的或半有限的,当$\mathscr{M}$是有限或半有限,且不含有任一阿贝尔投影算子时,就称$\mathscr{M}$是Ⅱ型v.N.代数.

纯无限冯·诺伊曼代数(pure-infinite v.N. algebra)　见"冯·诺伊曼代数的分类".

半有限冯·诺伊曼代数(semi-finite v.N. algebra)　见"冯·诺伊曼代数的分类".

有限冯·诺伊曼代数(finite v.N. algebra)　见"冯·诺伊曼代数的分类".

冯·诺伊曼代数的中心(center of v.N. algebra)　见"冯·诺伊曼代数的分类".

Ⅰ型冯·诺伊曼代数(v.N. algebra of type Ⅰ)　见"冯·诺伊曼代数的分类".

Ⅱ型冯·诺伊曼代数(v.N. algebra of type Ⅱ)　见"冯·诺伊曼代数的分类".

Ⅲ型冯·诺伊曼代数(v.N. algebra of type Ⅲ)　见"冯·诺伊曼代数的分类".

阿贝尔投影(Abel projection)　见"冯·诺伊

曼代数的分类”.

冯·诺伊曼代数的分解(decomposation of v. N. algebra) 关于冯·诺伊曼代数分解的一个重要命题. 设 $\mathscr{M}\subset\mathscr{B}(H)$ 是冯·诺伊曼代数,则在 $\mathscr{M}$ 的中心 $\mathscr{C}=\mathscr{M}\cap\mathscr{M}'$ 内存在互相正交的投影算子 $E_{\rm I},E_{\rm II},E_{\rm III}$,使得 $E_{\rm I}+E_{\rm II}+E_{\rm III}=I$,并且 $E_{\rm I}\mathscr{M},E_{\rm II}\mathscr{M},E_{\rm III}\mathscr{M}$ 分别是 $E_{\rm I}H,E_{\rm II}H,E_{\rm III}H$ 上的 I 型,II 型,III 型 v. N. 代数,这样的分解是惟一的. 通过这种分解,对于一般冯·诺伊曼代数的讨论就可化简为分别对 I 型、II 型和 III 型冯·诺伊曼代数的讨论.

因子(factor) 一类冯·诺伊曼代数. 设 $\mathscr{M}$ 是冯·诺伊曼代数,如果中心 $\mathscr{C}=\mathscr{M}\cap\mathscr{M}'=\{\lambda I\}$,则称 $\mathscr{M}$ 是一个因子. 因子的分类为 I_n型($n=+\infty,1,2,\cdots$),II_1型(即 II 型且有限),II_∞型(即 II 型且不是有限)和 III 型因子,I_n型因子同构于一个 n 维希尔伯特空间 H_n 上有界线性算子全体构成的代数 $\mathscr{B}(H_n)$. 冯·诺伊曼(von Neumann, J.)等人所提 v. N. 代数的约化理论是把任何 v. N. 代数的研究归结为对因子的研究.

I_n型因子(factor of type I_n) 见“因子”.

II_1型因子(factor of type II_1) 见“因子”.

II_∞型因子(factor of type II_∞) 见“因子”.

III 型因子(factor of type III) 见“因子”.

等价的投影(equivalent projections) 冯·诺伊曼代数中投影算子之间的一种关系. 设 P,Q 是冯·诺伊曼代数 $\mathscr{M}$ 中的两个投影算子,如果存在 $\mathscr{M}$ 中的一个部分等距算子 V 使得 $P=V^*V,Q=VV^*$,则称 P,Q 在 $\mathscr{M}$ 中等价,记为 $P\sim Q$. $\sim$是 $\mathscr{M}$ 的投影算子全体所成的子集中的一个等价关系.

投影的比较(comparison of projections) 冯·诺伊曼代数中的两个投影之间的比较. 设 P,Q 是冯·诺伊曼代数 $\mathscr{M}$ 中的两个投影,如果有 $PQ=0$,则称 P 垂直于 Q,记为 $P\perp Q$,如果 $PQ=Q$,则称 P 大于 Q(或 Q 小于 P),记为 $P\geqslant Q$(或 $Q\leqslant P$);如果存在投影 $Q_0\in\mathscr{M}$ 使得 $P\sim Q_0\geqslant Q$(参见“等价的投影”),则称 P 比 Q 强(或 Q 比 P 弱),记为 $P\succcurlyeq Q$(或 $Q\preccurlyeq P$). “$\succcurlyeq$”是一个半序关系,且当 $\mathscr{M}$是因子时,$P\preccurlyeq Q,Q\preccurlyeq P$ 中至少有一个成立.

有限投影(finite projection) 冯·诺伊曼代数中的一类投影算子. 设 P 是冯·诺伊曼代数 $\mathscr{M}$ 中的投影,P 称为是有限的(分别地,半有限的、纯无限的、无限的),如果代数 $\mathscr{M}_P=P\mathscr{M}P$ 是有限的(分别地,半有限的、纯无限的、无限的).

半有限投影(semi-finite projection) 见“有限投影”.

纯无限投影(purely infinite projection) 见“有限投影”.

无限投影(infinite projection) 见“有限投影”.

相对维数函数(relative dimension function) 一种投影算子的函数. 设 $\mathscr{M}$ 是一个因子,$\mathscr{M}^+$是 $\mathscr{M}$ 的正元全体,Φ 是 $\mathscr{M}^+$上的一个忠实正规迹. 当 $\mathscr{M}$ 是纯无限时,Φ 在 $\mathscr{M}^+$的非零元处的值恒为 $+\infty$;当 $\mathscr{M}$ 是半有限时,要求 Φ 也是半有限的,这样的 Φ 除去一个常数因子 $\lambda(0<\lambda<+\infty)$外是惟一的. 记 M 为 $\mathscr{M}$ 的投影算子之集合,Φ 到 M 上的限制称为相对维数函数,通常记为 D. 相对维数函数具有下述性质:

1. 如 P 是有限投影,则 $D(P)<+\infty$.
2. 如 P 是无限投影,则 $D(P)=+\infty$.
3. 如 P,Q 是两个有限投影使得 $D(P)=D(Q)$(或 $D(P)\leqslant D(Q)$),则 $P\sim Q$(或 $P\preccurlyeq Q$).

将相对维数函数 D 乘上适当的常数,D 的值域 $\mathscr{D}$ 可以取作如下集合:

1. 如果 $\mathscr{M}$ 是 I_n 型,n 为有限(或 $n=+\infty$),则 $\mathscr{D}=\{0,1,2,\cdots,n\}$(或 $\mathscr{D}=\{0,1,2,\cdots,+\infty\}$). 当 $\mathscr{M}=\mathscr{B}(H)$时,即 $\mathscr{M}$ 为希尔伯特空间 H 上的有界线性算子全体时,则 $D(P)=\dim P(H)$,这里把所有无穷基数都视为$+\infty$.
2. 若 $\mathscr{M}$ 是 II_1 型的,则 $\mathscr{D}$ 是区间$[0,1]$.
3. 若 $\mathscr{M}$ 是 II_∞型的,则 $\mathscr{D}$ 是区间$[0,+\infty]$.
4. 若 $\mathscr{M}$ 是 III 型的,则 $\mathscr{D}=\{0,+\infty\}$.

由于相对维数函数值域的情况与因子的分类相一致,所以因子分类又称维数理论,这是冯·诺伊曼(von Neumann, J.)等人于 20 世纪 30 年代作出的.

三角算子代数(triangular operator algebra) 三角矩阵代数在无限维情形的推广. 设 $\mathscr{B}(H)$为希尔伯特空间 H 上有界线性算子全体构成的冯·诺伊曼代数,$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}(H)$的子代数. 记 $\mathscr{A}^*=\{a^*|a\in\mathscr{A}\}$. 如果 $\mathscr{A}\cap\mathscr{A}^*$是极大交换自伴代数,就称 $\mathscr{A}$ 是三角算子代数,而 $\mathscr{A}\cap\mathscr{A}^*$称为 $\mathscr{A}$ 的对角. 三角算子代数是凯得森(Kadison, R. V.)和辛格(Singer, I. M.)于 1960 年引入的,此后便成为非自伴算子代数理论的重要研究对象.

套代数(nest algebra) 一类重要的非自伴算子代数. 设 $\mathscr{N}$ 是希尔伯特空间 H 中的一个闭子空间链(即按包含关系成为全序的闭子空间族). 如果 0 和 $H\in\mathscr{N}$,且 $\mathscr{N}$ 关于空间的相交及闭线性张运算封闭(即 $\{N_\alpha\subset N\}$ 蕴涵 $\bigcap\limits_\alpha N_\alpha\in\mathscr{N},\overline{\bigcup\limits_\alpha N_\alpha}\in\mathscr{N}$),则称 $\mathscr{N}$ 是 H 的一个子空间套. 令 $\mathscr{A}_{\mathscr{N}}=\{T$

$\in\mathscr{B}(H)\mid TN\subset N$ 对所有 $N\in\mathscr{N}\}$，则 $\mathscr{A}_{\mathscr{N}}$ 是 $\mathscr{B}(H)$的弱闭子代数，称为套代数，或确切地，由子空间套 $\mathscr{N}$ 确定的套代数. 套代数是自反算子代数且其不变子空间格 $\mathrm{Lat}\mathscr{A}(=\mathscr{N})$是全序的. 套代数是林格罗斯(Ringrose, J. R.)于 1965 年引入的，现在已发展成为系统的理论分支.

自反算子代数(reflexive operator algebra) 一类重要的非自伴算子代数. 设 $\mathscr{F}$ 是希尔伯特空间 H 的一族闭子空间，令 $\mathrm{Alg}\mathscr{F}=\{T\in\mathscr{B}(H)\mid \mathscr{F}\subset\mathrm{Lat}T\}$，则$\mathrm{Alg}\mathscr{F}$ 是包含恒等算子 I 的弱闭算子代数. 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}(H)$中的子代数，一般情况下有 $\mathscr{A}\subset\mathrm{Alg\ Lat}\,\mathscr{A}$ 成立. 如果等式成立，即如果 $\mathscr{A}=\mathrm{Alg\ Lat}\,\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为自反算子代数. 自反算子代数是非自伴算子代数理论的重要研究对象，是由雷加维(Radjavi, H.)和罗森塔尔(Rosenthal, H. P.)于 1968 年引入的.

拓扑代数(topological algebra) 巴拿赫代数的推广，是一类特殊的拓扑线性空间. 设 R 是实或复的线性空间且 R 是环，若有 R 上的拓扑 T 使得(R,T)成为拓扑线性空间且使得 R 中乘法连续，则称(R,T)为拓扑代数. 若(R,T)是拓扑代数且为局部凸(局部有界)的拓扑线性空间，就称(R,T)为局部凸(局部有界)的拓扑代数. 对 R 中的子集 V，若有 $VV=\{uv\mid u,v\in V\}\subset V$，则称 V 是幂等集. R 中幂等的凸集称为是 m 凸集. 若拓扑代数(R,T)存在一族平衡、m 凸的零元邻域基，则称它为局部 m 凸的拓扑代数. 虽然很早就有了关于拓扑代数的工作，但普遍认为迈克尔(Michael, E.)1952 年关于局部 m 凸拓扑代数的工作为其奠定了基础.

局部凸拓扑代数(locally convex topological algebra) 见“拓扑代数”.

局部有界拓扑代数(locally bounded topological algebra) 见“拓扑代数”.

局部 m 凸拓扑代数(locally m convex topological algebra) 见“拓扑代数”.

非线性算子

非线性算子(nonlinear operator) 亦称非线性映射. 狭义上讲，是指线性空间中不是线性的算子；广义上讲，是指不必是线性的算子，这时线性算子可视为非线性算子的特例. 对于非线性空间(如一般的巴拿赫流形或度量空间)上的算子，由于已无线性可言，因此也归于非线性算子的范畴.

有限维空间中的非线性算子属于经典数学分析的研究对象. 这里所说的非线性算子通常是指无穷维空间(或无穷维流形)上的算子. 非线性算子来源于自然科学与工程技术中的大量非线性现象. 各类非线性微分算子与积分算子为抽象的非线性算子提供了基本素材.

非线性算子的研究渊源很久，但真正使非线性算子理论成为一个独立的数学分支通常被认为是以弗雷歇(Fréchet, M.-R.)在 20 世纪 20 年代关于无穷维微分学的奠基性工作作为标志. 20 世纪 20 年代的巴拿赫压缩映射原理及 20 世纪 30 年代勒雷(Leray, J.)和绍德尔(Schauder, J. P.)关于全连续映射的理论显示了非线性算子理论的巨大功用与生命力. 自 20 世纪 60 年代以来，这一理论更是迅速地向纵深发展，从而为研究与解决各种重要的非线性问题提供了越来越多的有用的工具与方法.

非线性映射(nonlinear mapping) 见“非线性算子”.

映射的连续性(continuity of mapping) 映射的连续性概念在无穷维赋范线性空间的情形具有多样性，这是由无穷维赋范线性空间中拓扑的多样性所引起的. 设 X 和 Y 是(实)赋范线性空间，$D\subset X$，$f:D\to Y$ 是映射. 分别指定了 X 与 Y 中的某种拓扑(如强拓扑也即范数拓扑，或弱拓扑，在共轭空间中还有弱 * 拓扑等)，就相应有映射 f 的某种连续性概念. 如果在 X 与 Y 中都取强拓扑时 f 是连续的，则称映射 $f:D\to Y$ 是从强拓扑到强拓扑连续的，或称 f 是强-强连续的，这时也简称 f 是连续的. 类似地，对映射 f 可定义弱-弱连续，强-弱连续，弱-强连续等概念.

连续映射(continuous mapping) 通常是指从强拓扑到强拓扑连续的映射. 见“映射的连续性”.

弱连续映射(weakly continuous mapping) 是指从弱拓扑到弱拓扑连续的映射. 见“映射的连续性”.

次连续映射(semicontinuous mapping) 是指从强拓扑到弱拓扑连续的映射. 见“映射的连续性”.

强连续映射(strongly continuous mapping) 是指从弱拓扑到强拓扑连续的映射. 见“映射的连续性”.

映射的依序列连续性(sequence continuity of mapping) 是指映射在序列意义下的连续性. 对于一般的拓扑空间 X 与 Y 间的映射 $f:X\to Y$，若 f 在点 $x_0\in X$ 满足条件：$x_n\to x_0\Rightarrow f(x_n)\to f(x_0)$，则称 f 在 x_0 依序列连续. 若 f 在 X 中每点均依序列连续，则称 f 在 X 上依序列连续. 在一般拓扑空间中，连续蕴涵着依序列连续，反之不真. 在度量空间中二者等价. 现设 X 和 Y 是赋范线性空间，$D\subset X$，$f:D\to Y$ 是映射，$x_0\in D$. 视对 X 与 Y 中拓扑的不

同选取，可得到 f 在 x_0 的多种依序列连续的概念. 如，依序列强-强连续（$x_n\to x_0\Rightarrow f(x_n)\to f(x_0)$）；依序列弱-强连续（$x_n\xrightarrow{w}x_0\Rightarrow f(x_n)\to f(x_0)$）；依序列强-弱连续（$x_n\to x_0\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{w} f(x_0)$）；依序列弱-弱连续（$x_n\xrightarrow{w}x_0\Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{w} f(x_0)$）. 这里 $\to$ 与 $\xrightarrow{w}$ 分别表示序列的强收敛与弱收敛. 其中，依序列强-强连续也简称依序列连续，它与（强-强）连续等价；依序列强-弱连续与强-弱连续即次连续等价；依序列弱-弱连续亦称为依序列弱连续，它不蕴涵弱连续；依序列弱-强连续亦称为依序列强连续，它不蕴涵强连续.

有限连续映射（finitely continuous mapping） 限制在定义域的每个有限维线性子空间上是连续的映射. 设 X 和 Y 是赋范线性空间，$D\subset X$，$f:D\to Y$，$x_0\in D$. 若对于 X 的每个包含 x_0 的有限维线性子空间 E，映射

$$f|_{D\cap E}:D\cap E\to Y$$

在 x_0 是连续的，则称 f 在 x_0 为有限连续. 若 f 在 D 中每点均为有限连续，则称 f 在 D 上有限连续. 当 X 为有限维空间时，有限连续与连续等价. 若在 Y 中取弱拓扑，则相应地可得到有限弱连续映射的概念.

有限 n 连续映射（finitely n-continuous mapping） 限制在定义域中过每点的 n 维线性流形上是连续的映射，这里 n 是某个固定的正整数. 设 $f:D\subset X\to Y$，$x_0\in D$. 若对于 X 的每个 n 维线性子空间 E，映射

$$f|_{D\cap(x_0+E)}:D\cap(x_0+E)\to Y$$

在 x_0 连续，则称 f 在 x_0 为有限 n 连续. 若 f 在 D 中每点均为有限 n 连续，则称映射 f 在 D 上有限 n 连续. 类似地，若在 Y 中取弱拓扑，可得到有限 n 弱连续映射的概念. $f:D\to Y$ 为有限连续映射，等价于对每个正整数 n，$f:D\to Y$ 均为有限 n 连续映射.

半连续映射（semicontinuous mapping） 即有限 1-弱连续映射. 见“有限 n 连续映射”.

一致连续映射（uniformly continuous mapping） 满足某种一致性条件的连续映射. 设映射 $f:D\subset X\to Y$，若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 D 中所有满足条件 $\|x-y\|<\delta$ 的点 x 与 y，均有

$$\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon,$$

则称映射 f 在 D 上一致连续. 一致连续映射必为连续映射，反之不真.

李普希茨连续映射（Lipschitz continuous mapping） 满足所谓李普希茨条件的连续映射. 设有映射 $f:D\subset X\to Y$. 若有正常数 L，使得

$$\|f(x)-f(y)\|\leqslant L\|x-y\| \quad (\forall x,y\in D), \tag{1}$$

则称 $f:D\to Y$ 为李普希茨连续映射. 其中正常数 L 称为李普希茨常数，(1) 式表达的条件称为李普希茨条件. 李普希茨连续映射必是一致连续映射.

李普希茨常数（Lipschitz constant） 见“李普希茨连续映射”.

李普希茨条件（Lipschitz condition） 见“李普希茨连续映射”.

局部李普希茨连续映射（locally Lipschitz continuous mapping） 在每点的局部为李普希茨连续的映射. 设有映射 $f:D\subset X\to Y$. 若对于 D 中的每点 x，存在 x 在 D 中的某邻域 U，使得 $f|_U:U\to Y$ 为李普希茨连续映射，则称 $f:D\to Y$ 为局部李普希茨连续映射. 李普希茨连续映射一定是局部李普希茨连续映射. 局部李普希茨连续映射一定是连续映射. 局部李普希茨连续映射类常记为 C^{1-0}.

有界映射（bounded mapping） 映有界集为有界集的映射. 设有映射 $f:D\subset X\to Y$. 若对于 D 中的每个有界集 S，$f(S)$ 为 Y 中的有界集，则称 $f:D\to Y$ 为有界映射. 当 $f:X\to Y$ 为线性算子而 X,Y 为赋范线性空间时，f 的连续性与有界性是等价的. 对于非线性映射而言，f 的连续性与有界性是两个互不包含的概念.

局部有界映射（locally bounded mapping） 在定义域中每点的某邻域中为有界的映射.

加托微分（Gâteaux differential） 简称 G 微分，亦称弱微分. 是数学分析中方向导数概念和变分法中弱变分概念的推广. 设 X 和 Y 是赋范线性空间，Ω 是 X 中的开集，$f:\Omega\to Y$ 是映射，$x_0\in\Omega$. 设 $h\in X$，若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x_0+th)-f(x_0)]$$

存在，则该极限值称为映射 f 在点 x_0 沿方向 h 的加托微分（或 G 微分）或弱微分，记为 $\mathrm{D}f(x_0;h)$. 若 f 在 x_0 沿任何方向 h 的弱微分均存在，则称 f 在 x_0 加托可微（简称 G 可微）或弱可微. 若 f 在 x_0 加托可微，且 $\mathrm{D}f(x_0;h)$ 关于 $h\in X$ 是线性的，则称 f 在 x_0 有线性弱微分，此时存在线性算子 $A:X\to Y$，使得 $\mathrm{D}f(x_0;h)=Ah\ (\forall h\in X)$. 这个线性算子 A 常记为 $\mathrm{D}f(x_0)$（或 $\mathrm{d}f(x_0)$，或 $f'(x_0)$），称为 f 在 x_0 的加托导算子（简称 G 导算子）或弱导算子. 如果加托导算子 $\mathrm{D}f(x_0)$ 还是有界的，则称 f 在 x_0 有有界线性弱微分. 习惯上，当谈到 f 在 x_0 加托可微时，常指 f 在 x_0 有有界加托导算子的情形. 若 f 在 Ω 中每点均为加托可微，则称 f 在 Ω 上加托可微或弱可微. 弱微分的概念是由加托（Gâteaux, R.）于 1913 年引入的.

G 微分(G differential) 见"加托微分".

弱微分(weak differential) 即"加托微分".

加托导算子(Gâteaux derivative) 见"加托微分".

加托可微(Gâteaux differentiable) 见"加托微分".

G 可微(G differentiable) 见"加托微分".

有界线性弱微分(bounded linear weak differential) 见"加托微分".

弗雷歇微分(Fréchet differential) 简称 F 微分,亦称强微分,是数学分析中全微分概念和变分法中强变分概念的推广.设 X,Y 为赋范线性空间,Ω 是 X 中的开集,$f:\Omega\to Y$ 是映射,$x_0\in\Omega$.若存在有界线性算子 $A:X\to Y$,使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)-Ah=o(\|h\|),$$

其中 $o(\|h\|)/\|h\|\to 0$(当 $\|h\|\to 0$),则称 f 在 x_0 弗雷歇可微(简称 F 可微)或强可微,A 称为 f 在 x_0 的弗雷歇导算子(简称 F 导算子)或强导算子,记为 $\mathrm{d}f(x_0)$ 或 $f'(x_0)$,Ah 称为 f 在 x_0 沿 h 的 F 微分或强微分,记为 $\mathrm{d}f(x_0;h)$ 或 $f'(x_0)h$.若 f 在 Ω 中每点均为 F 可微,则称 f 在 Ω 上 F 可微.f 在 x_0 F 可微蕴涵着 f 在 x_0 连续.f 在 x_0 F 可微等价于 f 在 x_0(有界线性)G 可微且极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x_0+th)-f(x_0)]=\mathrm{D}f(x_0)h$$

关于 $\|h\|=1$ 为一致的.F 可微通常简称可微.

强可微的概念是由弗雷歇(Fréchet,M.-R.)于 1910 年引入的.

F 微分(F differential) 见"弗雷歇微分".

强微分(strong differential) 见"弗雷歇微分".

弗雷歇导算子(Fréchet derivative) 见"弗雷歇微分".

弗雷歇可微(Fréchet differentiable) 见"弗雷歇微分".

F 可微(F-differentiable) 见"弗雷歇微分".

严格可微(strictly differentiable) 较可微有更高一点要求的一种可微性概念.设 X,Y 均为赋范线性空间,Ω 是 X 中的开集,$f:\Omega\to Y$,$x_0\in\Omega$.若存在有界线性算子 $A:X\to Y$,使得

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ \|h\|\to 0}}\frac{1}{\|h\|}[f(x+h)-f(x)-Ah]=0,$$

则称 f 在 x_0 严格可微.严格可微蕴涵(强)可微.

渐近导算子(asymptotic derivative) 映射在无穷远点的 F 导算子.设 X,Y 均为赋范线性空间,$f:X\to Y$.若存在有界线性算子 $A:X\to Y$,使得

$$\lim_{\|x\|\to+\infty}\|f(x)-Ax\|/\|x\|=0,$$

则称 A 为 f 的渐近导算子,记为 $f'(\infty)$.这时也称 f 为渐近线性的.

偏导算子(partial derivative) 数学分析中偏导数概念的推广.设 X,Y,Z 是赋范线性空间,Ω 是 $X\times Y$ 中的开集,$f:\Omega\to Z$,$(x_0,y_0)\in\Omega$.若对于固定的 y_0,以 x 为变元的映射 $g(x)=f(x,y_0)$ 在 x_0 F 可微(相应地,G 可微),则定义 f 在 (x_0,y_0) 关于 x 的偏 F 导算子(相应地,偏 G 导算子)为 $f_x'(x_0,y_0)=g'(x_0)$.类似地,可定义 f 在 (x_0,y_0) 关于 y 的偏 F 导算子(或偏 G 导算子)$F_y'(x_0,y_0)$.若 f 在 (x_0,y_0) 有 F 导算子 $f'(x_0,y_0)$,则 f 在 (x_0,y_0) 的偏 F 导算子 $f_x'(x_0,y_0)$ 与 $f_y'(x_0,y_0)$ 存在,且这时成立公式

$$f'(x_0,y_0)(h,k)=f_x'(x_0,y_0)h+f_y'(x_0,y_0)k\quad(\forall(h,k)\in X\times Y).$$

n 线性算子(n-linear operator) 对 n 个变元分别是线性的算子.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 Y 是赋范线性空间,

$$u:\prod_{i=1}^{n}X_i\to Y.$$

若 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 分别对每一个变元 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是线性的,则称 u 是 n 线性算子.下设 $X_1=X_2=\cdots=X_n=X$.如果 n 线性算子 $u:X^n\to Y$ 的值 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在任意对调 x_i 与 $x_j(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 时不变,则称 u 为对称的 n 线性算子.对于 n 线性算子 $u:X^n\to Y$,令 $\hat{u}:X\to Y$ 为

$$\hat{u}(x)=u(x,\cdots,x)=ux^n\quad(\forall x\in X),$$

则 $\hat{u}$ 称为 u 所对应的 n 次型.不同的 n 线性算子可对应于相同的 n 次型.对称的 n 线性算子与 n 次型之间一一对应.n 次型亦称 n 线性型.

对称的 n 线性算子(symmetric n-linear operator) 见"n 线性算子".

n 线性型(n-linear form) 见"n 线性算子".

有界 n 线性算子(bounded n-linear operator) 映有界集为有界集的 n 线性算子.设

$$u:\prod_{i=1}^{n}X_i\to Y$$

为 n 线性算子.若 u 把 $\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$ 中的任何有界集映为 Y 中的有界集,则称 n 线性算子 u 为有界的.n 线性算子 u 为有界的充分必要条件是

$$\|u\|=\sup\{\|u(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|\mid\|x_i\|=1,\ i=1,2,\cdots,n\}<+\infty.$$

这时,$\|u\|$ 称为 u 的范数.n 线性算子的有界性与连续性是等价的.

高阶加托微分(higher Gâteaux differential) 亦称高阶 G 微分或高阶弱微分.是 G 微分概念的高阶推广形式.设 X,Y 为赋范线性空间,Ω 是 X

中的开集，$f:\Omega\to Y$ 是映射，$x_0\in\Omega$. 若 f 在 Ω 中每点 G 可微，则$\forall h_1\in X$，在 $x\in\Omega$ 有 G 微分 $\mathrm{D}f(x;h_1)$. 这时若映射 $\mathrm{D}f(\cdot;h_1):\Omega\to Y$ 在 x_0 为 G 可微，则称 f 在x_0为二阶 G 可微，映射 $\mathrm{D}f(\cdot;h_1)$在 x_0 沿方向 $h_2\in X$ 的 G 微分记为 $\mathrm{D}^2f(x_0;h_2,h_1)$，称为 f 在 x_0 的二阶 G 微分. 归纳地，若 f 在 Ω 中每点有 n 阶 G 微分 $\mathrm{D}^nf(x;h_n,h_{n-1},\cdots,h_1)$，且映射 $\mathrm{D}^nf(\cdot;h_n,h_{n-1},\cdots,h_1)$在点 x_0 为 G 可微，则称 f 在x_0为 $n+1$ 阶 G 可微，这时映射 $\mathrm{D}^nf(\cdot;h_n,h_{n-1},\cdots,h_1)$在 x_0 沿 h_{n+1}的微分，记为 $\mathrm{D}^{n+1}f(x_0;h_{n+1},h_n,\cdots,h_1)$，称为 f 在 x_0 的 $n+1$ 阶 G 微分. 如果 $\mathrm{D}^nf(x_0;h_n,h_{n-1},\cdots,h_1)$对每个变元 $h_1,h_2,\cdots,h_n$ 分别是线性的，则称 f 在x_0有 n 阶线性微分，这时 $\mathrm{D}^nf(x_0;h_n,h_{n-1},\cdots h_1)$确定一 n 线性算子，记为 $\mathrm{D}^nf(x_0)$，即有

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}^nf(x_0)(h_n,h_{n-1},\cdots,h_1)\\&=\mathrm{D}^nf(x_0;h_n,h_{n-1},\cdots,h_1).\end{aligned}$$

$\mathrm{D}^nf(x_0)$称为 f 在 x_0 的 n 阶加托导算子或 n 阶 G 导算子或 n 阶弱导算子. 若 $\mathrm{D}^nf(x_0)$还是有界的，则称 f 在x_0有有界 n 阶线性 G 微分.

高阶弱微分(higher weak differential)　见“高阶加托微分”.

高阶 G 微分(higher G differential)　即“高阶加托微分”.

高阶加托导算子(higher Gâteaux derivative)　亦称高阶 G 导算子或高阶弱导算子. 见“高阶加托微分”.

高阶 G 导算子(higher G derivative)　即“高阶加托导算子”.

高阶弱导算子(higher weak derivative)　见“高阶加托导算子”.

高阶弗雷歇微分(higher Fréchet differential)　亦称高阶强微分，简称高阶 F 微分或高阶微分，是 F 微分概念的高阶推广形式. 设 X,Y 为赋范线性空间，Ω 是 X 中的开集，$f:\Omega\to Y$，$x_0\in\Omega$. 归纳定义 f 在 x_0 的 n 阶 F 微分，记为 $\mathrm{d}^nf(x_0;h_n,\cdots,h_1)$：一阶 F 微分 $\mathrm{d}f(x_0;h_1)$，即 F 微分已有定义. 设 f 在 x_0 的某邻域中有 n 阶 F 微分 $\mathrm{d}^nf(x;\cdots)$，若存在有界$(n+1)$线性算子

$$u:\prod_{i=1}^{n+1}X_i\to Y\quad(X_i=X,i=1,2,\cdots,n),$$

使得对任意的 $h_1,h_2,\cdots,h_n,h_{n+1}\in X$，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}^nf(x_0+h_{n+1};h_n,h_{n-1},\cdots,h_1)\\&\quad-\mathrm{d}^nf(x_0;h_n,h_{n-1},\cdots,h_1)\\&=u(h_{n+1},h_n,\cdots,h_1)+r(x_0;h_{n+1},h_n,\cdots,h_1),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\sup\{\|r(x_0;h_{n+1},h_n,h_{n-1},\cdots,h_1)\|\mid\|h_1\|\\&=\|h_2\|=\cdots=\|h_n\|=1\}\\&=o(\|h_{n+1}\|)\ (\|h_{n+1}\|\to0),\end{aligned}$$

则 $u(h_{n+1},h_n,\cdots,h_1)$称为 f 在 x_0 的$(n+1)$阶 F 微分，记为 $\mathrm{d}^{n+1}f(x_0;h_{n+1},h_n,\cdots,h_1)$.

高阶强微分(higher strong differential)　即“高阶弗雷歇微分”.

高阶 F 微分(higher F differential)　见“高阶弗雷歇微分”.

高阶微分(higher differential)　见“高阶弗雷歇微分”.

高阶弗雷歇导算子(higher Fréchet derivative)　亦称高阶强导算子，简称高阶 F 导算子或高阶导算子，是 F 导算子概念的高阶推广形式. 设 X,Y 为赋范线性空间，Ω 是 X 中的开集，$f:\Omega\to Y$，$x_0\in\Omega$. 若 f 在 Ω 上 F 可微，则有 f 的 F 导映射 $f':\Omega\to\mathscr{B}(X\to Y)$，其中 $\mathscr{B}(X\to Y)$表示由从 X 到 Y 的全体有界线性算子组成的赋算子范数的赋范线性空间. 若映射 f'在 x_0 为 F 可微，则称 f 在x_0二阶 F 可微，这时 f'在 x_0 的 F 导算子记为$f''(x_0)$(或 $\mathrm{d}^2f(x_0)$)，称为 f 在 x_0 的二阶 F 导算子. 用归纳法可定义 f 在 x_0 的 n 阶 F 导算子$f^{(n)}(x_0)$(或 $\mathrm{d}^nf(x_0)$). f 在 x_0 有 n 阶 F 导算子$f^{(n)}(x_0)$等价于 f 在 x_0 有 n 阶 F 微分，且此时成立

$$f^{(n)}(x_0)h_n\cdots h_2h_1=\mathrm{d}^nf(x_0;h_n,\cdots,h_2,h_1).$$

巴拿赫空间中映射的 n 阶 F 导算子作为 n 线性算子必是对称的.

高阶强导算子(higher strong derivative)　即“高阶弗雷歇导算子”.

高阶 F 导算子(higher F derivative)　见“高阶弗雷歇导算子”.

高阶导算子(higher derivative)　见“高阶弗雷歇导算子”.

C^r 映射(C^r-mapping)　具有连续的 r 阶导映射的映射. 设 X,Y 为赋范线性空间，Ω 是 X 中的开集，$f:\Omega\to Y$，r 是某正整数. 若 f 在 Ω 上 r 阶 F 可微，且 r 阶 F 导映射 $f^{(r)}$在 Ω 上是连续的，则称 $f:\Omega\to Y$ 是 C^r 映射，记为 $f\in C^r(\Omega,Y)$. 若对任何正整数 r，均有 $f\in C^r(\Omega,Y)$，则称 f 是 C^∞映射，记为$f\in C^\infty(\Omega,Y)$. 通常约定，C^0 映射即为连续映射.

加托幂级数(Gâteaux power series)　简称 G 幂级数，以 n 线性型为一般项的级数 $\sum u_nx^n$. 这里 $u_n:X^n\to Y$ 为 n 线性算子，u_0x^0 表示 Y 中某元. G 幂级数是通常幂级数的一种较弱意义下的无穷维推广形式，它的部分和是赋范线性空间 X 上的“多项式”.

G 幂级数(G power series)　见“加托幂级数”.

弗雷歇幂级数(Fréchet power series) 简称F幂级数,以有界n线性型为一般项的级数$\sum u_n x^n$. 这里$u_n: X^n \to Y$是有界n线性算子. F幂级数是通常幂级数的一种较强意义下的无穷维推广形式,它的部分和是赋范线性空间X上的"连续多项式".

F幂级数(F power series) 见"弗雷歇幂级数".

加托全纯映射(Gâteaux holomorphic mapping) 简称G全纯映射,指可展成G幂级数的映射.

G全纯映射(G holomorphic mapping) 见"加托全纯映射".

弗雷歇解析映射(Fréchet analytic mapping) 简称F解析映射,指可展成F幂级数的映射.

F解析映射(F analytic mapping) 见"弗雷歇解析映射".

加托-泰勒公式(Gâteaux-Taylor formula) 经典的泰勒公式在G微分意义下的推广. 设X和Y是巴拿赫空间,Ω是X的开凸子集,$x_0 \in \Omega$,$f: \Omega \to Y$. 设$h \in X$使得$x_0 + h \in \Omega$. 若f在Ω中每点x有有界n阶线性G微分$\mathrm{D}^n f(x) h^n$,则成立下述泰勒公式

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \mathrm{D}^{(k)} f(x_0) h^k + R_n^*,$$

且

$$\| R_n^* \| \leqslant \frac{1}{n!} \sup \{ \| \mathrm{D}^n f(x_0 + \tau h) h^n \| \mid 0 < \tau < 1 \}.$$

若映射$x \to D^n f(x) h^n$在Ω上连续,则有

$$R_n^* = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{D}^n f(x_0 + \tau h) h^n \mathrm{d}\tau.$$

弗雷歇-泰勒公式(Fréchet-Taylor formula) 经典的泰勒公式在F微分意义下的推广. 设X和Y是巴拿赫空间,Ω是X的开凸子集,$x_0 \in \Omega$,$f: \Omega \to Y$. 若f在Ω上存在n阶F导算子$f^{(n)}$,则对任意的$h \in X$,$x_0 + h \in \Omega$,成立下述泰勒公式

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k + R_n,$$

且

$$\| R_n \| \leqslant \frac{1}{n!} \sup \{ \| f^{(n)}(x_0 + \tau h) h^n \| \mid 0 < \tau < 1 \}.$$

若$f^{(n)}$在Ω上还是连续的,则有

$$R_n = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \tau h) h^n \mathrm{d}\tau.$$

反函数定理(inverse function theorem) 亦称逆映射定理. 古典分析中反函数定理的无穷维推广形式. 设X和Y是巴拿赫空间,Ω是X中的开集,$f \in C^p(\Omega, Y)$, $p \geqslant 1$,$x_0 \in \Omega$. 若f在x_0的导算子$f'(x_0)$有有界逆,则f在x_0局部C^p同胚,即存在x_0的开邻域U与$f(x_0)$的开邻域V,使得$f|_U: U \to V$有逆映射$f^{-1}: V \to U$,且$f^{-1} \in C^p$. 上述仅是巴拿赫空间中最基本的一个局部反函数定理,此外尚有许多变种与推广,还有全局反函数定理. 首先把古典分析中局部反函数定理进行无穷维推广的是拉姆森(Lamson, K.)(1920),海德伯兰特(Hidebrandt, T.)和格雷夫斯(Graves, L.)(1927)及米歇尔(Michal, A. D.)和克利福德(Clifford, A.)(1933). 对全局反函数进行研究的,在阿达马(Hadamard, J. (-S.))(1904)之后,有约翰(John, F.)(1968)及波拉克托克(Plactock, R.)(1974)等人.

隐函数定理(implicit function theorem) 古典分析中隐函数定理的无穷维推广形式. 设X,Y与Λ都是巴拿赫空间,Ω是$X \times \Lambda$中的开集,$f: \Omega \to Y$,满足$f(x_0, \lambda_0) = 0$. 设f在Ω上连续,f对变元x可微,且(偏)导映射f_x'在点(x_0, λ_0)连续. 若$f_x'(x_0, \lambda_0): X \to Y$有有界逆,则存在$\gamma, \delta > 0$使得当$\| \lambda - \lambda_0 \| < \delta$时,方程$f(x, \lambda) = 0$在$\| x - x_0 \| < \gamma$中存在惟一的满足条件$x(\lambda_0) = x_0$的连续解$x = x(\lambda)$. 当$f \in C^p (p \geqslant 1)$时,解$x(\cdot) \in C^p$. 关于隐函数定理也有许多变种与推广,具有特别重要意义的是莫泽-纳什广义隐函数定理.

非线性特征值(nonlinear eigenvalue) 亦称非线性本征值. 线性算子的特征值概念在非线性算子中的推广. 设X是(实)赋范线性空间,$A: X \to X$是非线性算子. 若存在X中的非零元x与(实)数λ,使得$A(x) = \lambda x$,则λ称为非线性算子A的一个特征值,x称为A的一个特征向量或特征元. 更一般地,设X和Y是赋范线性空间,A,B是两个非线性算子,若存在X中的向量$x \neq 0$与实数λ,使得$A(x) = \lambda B(x)$,则称λ为A相对于B的一个特征值,x称为A相对于B的特征向量或本征元.

非线性本征值(nonlinear eigenvalue) 即"非线性特征值".

非线性特征向量(nonlinear eigenvector) 亦称非线性特征元. 见"非线性特征值".

非线性特征元(nonlinear eigenvector) 即"非线性特征向量".

分歧理论(bifurcation theory) 亦称分叉理论. 研究不满足隐函数定理正常条件时方程$f(x, \lambda) = 0$的解$x = x(\lambda)$的分布状况的理论. 它特别要研究方程的解在何处出现分叉. 分歧问题有重要的实际背景,是非线性分析的中心问题之一. 设X,Λ和Z为巴拿赫空间,$f: X \times \Lambda \to Z$. 考察含参量$\lambda \in \Lambda$的以$x \in X$为未知量的方程

$$f(x, \lambda) = 0. \tag{1}$$

设$(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$满足方程(1),即有$f(x_0, \lambda_0) = 0$. 设已知方程(1)在$\lambda_0$附近有经过点$(x_0, \lambda_0)$的

解 $x=x(\lambda)$. 要研究的是方程(1)在(x_0,λ_0)附近是否还有异于$x(\lambda)$的解. 如果存在序列 $\lambda_n\to\lambda_0$ 与 $x_n\to x_0$，使得 $f(x_n,\lambda_n)=0$ 但 $x_n\neq x(\lambda_n)(\forall n)$，则称$(x_0,\lambda_0)$或 λ_0 为方程的分歧点，解(x_n,λ_n)称为方程(1)的相对于解 $x(\lambda)$的分歧解. 上述概念属于静态分歧理论的范畴. 此外，尚有动态分歧理论，参见“常微分方程的分歧理论”.

分歧点(bifurcation point) 亦称歧点、分叉点，见“分歧理论”.

歧点(bifurcation point) 即“分歧点”.

分叉点(bifurcation point) 即“分歧点”.

分歧解(bifurcation solution) 见“分歧理论”.

李亚普诺夫-施密特过程(Liapunov-Schmidt procedure) 亦称李亚普诺夫-施密特方法. 一种无穷维空间中方程的分歧解约化为有限维空间中方程的分歧解的方法. 设 X,Y 为巴拿赫空间，$f:X\times\mathrm{R}\to Y\in C^p(p\geqslant1)$，$(x_0,\lambda_0)$满足方程 $f(x,\lambda)=0$. 设 $A=f_x'(x_0,\lambda_0)$是弗雷德霍姆算子，记 $X_2=\ker A$，$Y_1=AX$. 设 $X=X_1\oplus X_2$，$Y=Y_1\oplus Y_2$. 表 $x-x_0\in X$ 为 $x-x_0=v+u$，其中 $v\in X_1$，$u\in X_2$. 令 P 为 Y 到 Y_2 上的自然投影，据隐函数定理，方程

$$(id-P)f(x_0+v+u,\lambda)=0$$

在局部存在惟一的满足条件 $v(0,\lambda_0)=0$ 的 C^p 解 $v=v(u,\lambda)$. 这时求方程

$$f(x,\lambda)=0 \qquad (1)$$

在(x_0,λ_0)的分歧解等价于求下述有限维方程在$(0,\lambda_0)$的分歧解

$$\psi(u,\lambda)=Pf(x_0+v(u,\lambda)+u,\lambda)=0. \qquad (2)$$

方程(2)称为方程(1)的分歧方程. 此方法因李亚普诺夫(Ляпунов, A. M.)与施密特(Schmidt, E.)的工作而得名.

分歧方程(bifurcation equation) 见“李亚普诺夫-施密特过程”.

巴拿赫流形(Banach manifold) 有限维流形的无穷维推广. 设 M 是豪斯多夫拓扑空间，E 是巴拿赫空间. 若对于 M 上的每一点 p，均存在 p 的开邻域 U 与从 U 到 E 中某开集上的同胚映射 $\varphi:U\to\varphi(U)\subset E$，则称 M 为以 E 为模的巴拿赫拓扑流形或者 C^0 巴拿赫流形. 这时每个(U,φ)称为 M 上的一个区图. 现设 M 是以 E 为模的 C^0 巴拿赫流形，r 是某个正整数或$+\infty$. 设$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$与$(U_\beta,\varphi_\beta)$是 M 上的两个区图. 若 $U_\alpha\cap U_\beta=\varnothing$，或当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时其传递函数

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是 C^r 微分同胚，则称这两个区图是 C^r 相容的. 设 $\mathscr{D}$ 是由 M 上的一些区图所成之族. 若 $\mathscr{D}$ 中任意两个成员均是 C^r 相容的，且 $\mathscr{D}$ 构成 M 的开覆盖，则称 $\mathscr{D}$ 为 M 上的一个 C^r 图册. 如果 M 上的一个 C^r 图册 $\mathscr{D}$ 在 C^r 相容的意义下还是极大的，即不能在 $\mathscr{D}$ 中再添加新的成员使其仍保持 C^r 相容性，则称 $\mathscr{D}$ 为 M 上的一个 C^r 微分结构. M 连同其上指定的一个 C^r 微分结构 $\mathscr{D}$，称为以 E 为模的 C^r 巴拿赫流形，记为$(M,\mathscr{D})$. 由于 M 上的一个 C^r 图册总可惟一地生成一个极大的 C^r 图册，因此，当给定了 M 上的一个 C^r 图册 $\mathscr{D}$(不必极大)时，亦称$(M,\mathscr{D})$是 C^r 巴拿赫流形. C^r 巴拿赫流形$(M,\mathscr{D})$上的区图指的是 $\mathscr{D}$ 中的成员. 当 $p\in U_\alpha$ 时，$(M,\mathscr{D})$上的区图$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$亦称为在点 p 处的局部坐标系. $r\geqslant1$时的 C^r 巴拿赫流形称为巴拿赫微分流形. 如无特别说明，巴拿赫流形一般均指巴拿赫微分流形，光滑流形一般是指 C^∞流形.

巴拿赫空间 E 本身，连同其上的一个 C^∞图册 $\mathscr{D}=\{(E,I)\}$(此图册仅由一个成员组成，其中 I 为 E 上的恒同映射)，成为一个以 E 为模的 C^∞巴拿赫流形. 通常说到 E 是巴拿赫流形时即是在此意义下而言.

巴拿赫流形上的 C^r 映射(C^r-mapping on Banach manifold) 有限维流形上 C^r 映射概念的无穷维推广，也是巴拿赫空间中 C^r 映射概念的推广. 设$(M,\mathscr{D})$和$(N,\mathscr{D}')$是两个 C^s 巴拿赫流形，它们的模空间分别是 E 和 F，$f:M\to N$ 是连续映射. 设正整数 $r\leqslant s$，$p\in M$. 在 N 上取 $f(p)=q$ 处的局部坐标系$(V,\psi)\in\mathscr{D}'$，在 M 上取 p 处的局部坐标系$(U,\varphi)\in\mathscr{D}$，使得 $f(U)\subset V$. 若巴拿赫空间中的映射

$$\psi f\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$$

在点 $\varphi(p)$是 C^r 的，则称映射 f 在点 p 是 C^r 的. 若 f 在 M 上每点均是 C^r 的，则称 $f:M\to N$ 是 C^r 映射. $\mathscr{D}$ 及 $\mathscr{D}'$的 C^s 相容性保证了上述定义与局部坐标系的选取无关.

巴拿赫流形的切向量(tangent vector of Banach manifold) 有限维流形的切向量概念的无穷维推广. 设 M 是以 E 为模的巴拿赫微分流形，$p\in M$. 考虑点 p 处的下述三元组的集合

$$\Gamma_p=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha,e)\mid(U_\alpha,\varphi_\alpha)\text{是 }p\text{ 处的区图},e\in E\}.$$

在 Γ_p 中引入等价关系“$\sim$”如下：

$$(U_\alpha,\varphi_\alpha,e)\sim(U_\beta,\varphi_\beta,w)\Leftrightarrow(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})'(\varphi_\alpha(p))e=w,$$

Γ_p 中每一个三元组$(U_\alpha,\varphi_\alpha,e)$所在的等价类记为$[(U_\alpha,\varphi_\alpha,e)]$，称为 M 中点 p 的一个切向量. 切向量的另一等价定义可通过 M 上过点 p 的 C^1 曲线在相切意义下的等价类给出.

巴拿赫流形的切空间(tangent space of Banach manifold) 由 M 上指定点处的所有切向量

所成的线性空间. 设 M 是以 E 为模的巴拿赫微分流形, $p\in M$, 令 $T_pM=\{X\mid X$ 是 M 在点 p 的切向量$\}$, 则 T_pM 是与 E 同构的线性空间, 称为 M 在点 p 的切空间.

巴拿赫向量丛(Banach vector bundle) 每点处的纤维均拓扑线性同构于某巴拿赫空间且局部平凡的丛. 一个丛指的是三元组 $\xi=(G,\pi,B)$, 其中 G 和 B 是拓扑空间, $\pi:G\to B$ 是连续满映射. G 和 B 分别称为丛 ξ 的全空间与底空间, π 称为投影. 对每点 $b\in B$, $\pi^{-1}(b)$ 称为丛 ξ 在点 b 的纤维, 记为 G_b. 设 $\xi=(G,\pi,B)$ 是一个丛, 称丛 $\xi=(G,\pi,B)$ 为巴拿赫向量丛. 若存在 B 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$, 且对每个 $\alpha\in\Lambda$, 对应有某个巴拿赫空间 Y_α 及连续映射 $\tau_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\to U_\alpha\times Y_\alpha$, 使得:

1. τ_α 是同胚, 且 $P_\alpha\tau_\alpha=\pi$, 其中 $P_\alpha:U_\alpha\times Y_\alpha\to U_\alpha$ 为自然投影.

2. $\forall b\in U_\alpha$, 导出映射 $\tau_{\alpha b}:\pi^{-1}(b)\to Y_\alpha$ 是拓扑线性同构.

3. $\forall\alpha,\beta\in\Lambda$, 当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时, $b\mapsto\tau_{\beta b}\tau_{\alpha b}^{-1}$ 是从 $U_\alpha\cap U_\beta$ 到 $\mathscr{B}(Y_\alpha\to Y_\beta)$ 的连续映射, 其中 $\mathscr{B}(Y_\alpha\to Y_\beta)$ 为从 Y_α 到 Y_β 的有界线性算子空间.

对于巴拿赫向量丛 $\xi=(G,\pi,B)$, 若 B 是连通的, 则上述诸巴拿赫空间 Y_α 彼此拓扑线性同构, 这时可将诸 Y_α 取作同一个巴拿赫空间 Y. 当 B 为以 E 为模的连通的巴拿赫流形时, 巴拿赫向量丛 $\xi=(G,\pi,B)$ 的全空间 G 成为以 $E\times Y$ 为模的巴拿赫拓扑流形. 进而, 若 B 还是 C^r 流形, 且上述条件 3 中所述的映射是 C^r 的, 则 G 是 C^r 巴拿赫流形, 这时称 ξ 为 C^r 巴拿赫向量丛.

巴拿赫流形的切丛(tangent bundle of Banach manifold) 由巴拿赫流形上所有点处的切空间所构成的巴拿赫向量丛. 设 M 是 C^r 巴拿赫流形, 模空间为 E. 令

$$TM=\bigcup_{p\in M}T_pM,$$

$\pi:TM\to M$ 为到基点的投影, 即当 $X_p\in T_pM$ 时, $\pi X_p=p$. 由 M 上的微分结构可自然诱导出 TM 中的微分结构与向量丛结构使得 (TM,π,M) 成为 C^r 巴拿赫向量丛, 称这个丛, 或简单地称 TM 为 M 的切丛. 这时 TM 是以 $E\times E$ 为模的 C^{r-1} 巴拿赫流形.

巴拿赫流形的余切丛(cotangent bundle of Banach manifold) 切丛的对偶丛. 设 M 是模为 E 的 C^r 巴拿赫流形, $p\in M$, 切空间 T_pM 的对偶空间称为 M 在点 p 的余切空间, 记为 T_p^*M, 它与 E^* 拓扑线性同构. T_p^*M 中的元称为 M 在点 p 的余切向量. 令

$$T^*M=\bigcup_{p\in M}T_p^*M,$$

在 T^*M 中可用自然的方式引入流形结构与丛结构, 使之成为 C^{r-1} 巴拿赫向量丛, 这个丛称为 M 的余切丛. T^*M 是以 $E\times E^*$ 为模的 C^{r-1} 巴拿赫流形.

巴拿赫流形的余切向量(cotangent vector of Banach manifold) 见"巴拿赫流形的余切丛".

巴拿赫流形的余切空间(cotangent space of Banach manifold) 见"巴拿赫流形的余切丛".

切映射(tangent mapping) 巴拿赫空间中映射的导映射概念到巴拿赫流形上映射情形的推广. 设 $(M,\mathscr{D})$ 与 $(N,\mathscr{D}')$ 是两个巴拿赫流形, 模空间分别为 E 和 F, $f\in C^r(M,N)$, $r\geqslant 1$. 设 $p\in M$, $f(p)=q$. 分别取点 p 与点 q 的局部坐标系 (U,φ) 与 (V,ψ) 使 $f(U)\subset V$. 定义映射 $f_{*p}:T_pM\to T_qN$ 如下: 任取 $X\in T_pM$, 设 $X=[(U,\varphi,e)]$, 令 $f_{*p}(X)=[(V,\psi,w)]$, 其中 $w=(\psi f\varphi^{-1})'(\varphi(p))e$, 则 $f_{*p}:T_pM\to T_qN$ 是连续线性算子, 称为 f 在点 p 的导算子. 由 f 在 M 上每点 p 的导算子自然得到 M 与 N 的切丛间的映射 $f_*:TM\to TN$, f_* 称为 f 的切映射, 且有 $f_*\in C^{r-1}(TM,TN)$. f_* 也常记为 $\mathrm{d}f$.

导算子(derivative operator) 见"切映射".

局部浸入(local immersion) 指映射在该点的导算子双裂且为单射的情形. 设 M 和 N 是巴拿赫微分流形, $f\in C^1(M,N)$, $p\in M$. 若

$$(\mathrm{d}f)_p:T_pM\to T_{f(p)}N$$

是双裂的, 且为单射, 则称 f 在点 p 为局部浸入. 这里, 拓扑线性空间中的连续线性算子 $A:E\to F$ 称为核裂的, 是指 E 可表为 A 的核空间 $\ker A$ 与 E 的另一子空间的直和; A 称为值裂的, 是指 F 可表为 A 的像空间 $\operatorname{Im}A$ 与 F 的另一子空间的直和. 当 A 既为核裂又为值裂时称为双裂.

核裂(kernel split) 见"局部浸入".

值裂(range split) 见"局部浸入".

双裂(bisplit) 见"局部浸入".

局部浸盖(local submersion) 指映射在该点的导算子双裂且为满射的情形. 见"局部浸入".

嵌入(embedding) 在每点为局部浸入且整体为单射的映射. 设 $f\in C^1(M,N)$, 若 f 在 M 上每点为局部浸入, 且 $f:M\to N$ 为单射, 则称映射 $f:M\to N$ 为嵌入. 若 $f:M\to N$ 为嵌入, 且 $f:M\to f(M)$ 为微分同胚, 则映射 $f:M\to N$ 称为正则嵌入.

正则嵌入(regular embedding) 见"嵌入".

映射的正则点(regular point of mapping) 使映射为局部浸盖的定义域中的点. 设 $f\in C^1(M,N)$, $p\in M$, 若 f 在 p 为局部浸盖, 即 $(\mathrm{d}f)_p$ 为满射且核裂, 则 p 称为 f 的正则点. 若 $p\in M$ 不是正则点, 则

称 p 为 f 的奇异点或临界点. 设$q\in N$,若$f^{-1}(q)$中不含奇异点,则称 q 为 f 的正则值. 若$q\in N$不是正则值,则 q 称为 f 的奇异值或临界值.

映射的奇异点(singular point of mapping) 见"映射的正则点".

映射的临界点(critical point of mapping) 见"映射的正则点".

映射的正则值(regular value of mapping) 见"映射的正则点".

映射的奇异值(singular value of mapping) 见"映射的正则点".

映射的临界值(critical value of mapping) 见"映射的正则点".

巴拿赫流形的子流形(submanifold of Banach manifold) 有限维流形的子流形概念到巴拿赫流形情形的推广. 设$(M,\mathscr{D})$是模为 E 的 C^r 巴拿赫流形,$E=E_1\oplus E_2$,N 是 M 的拓扑子空间,$(N,\mathscr{D}')$是模为 E_1 的 C^r 巴拿赫流形. 若$\forall p\in N$,存在 p 在$(M,\mathscr{D})$中的局部坐标系(U,φ),使得 $\varphi(U\cap N)=\varphi(U)\cap E_1$,且$(U\cap N,\varphi|_{U\cap N})$是 p 在$(N,\mathscr{D}')$中的局部坐标系,则称$(N,\mathscr{D}')$是$(M,\mathscr{D})$的正则 C^r 子流形. 通常所说的子流形均指正则子流形. $(N,\mathscr{D}')$是$(M,\mathscr{D})$的(正则)子流形等价于包含映射 i: $N\to M$ 是正则嵌入.

正则子流形(regualar submanifold) 见"巴拿赫流形的子流形".

横截性(transversality) 映射与流形间某种规则相处状态的刻画. 设 M 和 N 是巴拿赫微分流形,$f\in C^r(M,N)$,W 是 N 的 C^r 子流形$(r\geqslant 1)$. 设 $p\in f^{-1}(W)$, $f(p)=q$. 若复合映射

$$T_pM\xrightarrow{(\mathrm{d}f)_p}T_q(N)\xrightarrow{\pi}T_qN/T_qW$$

为满射且核裂,其中 π 为到商空间的自然投影,则称 f 在点 p 与 W 横截,记为 $f\pitchfork_p W$. 如果对 $f^{-1}(W)$中的每点 p,均有 $f\pitchfork_p W$,则称 f 与 W 横截,记为 $f\pitchfork W$. 特别地,当$f^{-1}(W)=\varnothing$时,也有 $f\pitchfork W$. 设 $q\in N$,则 $f\pitchfork\{q\}$等价于 q 是 f 的正则值. 设 W_1 与 W_2 是 N 的两个子流形,$i_1:W_1\to N$ 为包含映射,若 $i_1\pitchfork W_2$,则称 W_1 与 W_2 横截. 设 M_1, M_2,N 为 C^1 流形,$f_2\in C^1(M_2,N)$,若映射

$$f_1\times f_2:M_1\times M_2\to N\times N$$

与 $N\times N$ 中的对角线流形$\Delta=\{(q,q)\mid q\in N\}$横截,则称映射 f_1 与 f_2 横截. 下述原像定理反映了横截概念的重要性:设 $f\in C^r(M,N)$, W 是 N 的 C^r 子流形. 若 $f\pitchfork W$,则当 $f^{-1}(W)\neq\varnothing$ 时, $f^{-1}(W)$是 M 的 C^r(正则)子流形,且$f^{-1}(W)$在 M 中的余维数等于 W 在 N 中的余维数. 特别地,若 q 是 f 的正则值,且 $f^{-1}(q)\neq\varnothing$,则 $f^{-1}(q)$是 M 的 C^r 子流形.

萨德-斯梅尔定理(Sard-Smale theorem) 经典的萨德定理的无穷维推广. 设 M 和 N 是巴拿赫微分流形,其中 M 连通,可分,$f\in C^r(M,N)$. 若 f 是弗雷德霍姆映射,且 $r>\mathrm{ind}f$, 则 f 的临界值集合是 N 中至多可数个无处稠密闭集之并,因而是第一范畴集. 此定理由斯梅尔(Smale,S.)于 1964 年所得到.

弗雷德霍姆映射(Fredholm mapping) 在每点的导算子为线性弗雷德霍姆算子的映射. 设 M 和 N 是 C^1 巴拿赫流形,$f\in C^1(M,N)$. 若$\forall p\in M$, $(\mathrm{d}f)_p:T_pM\to T_{f(p)}N$ 是弗雷德霍姆算子,则称 f: $M\to N$ 为弗雷德霍姆映射. 当 M 连通时,$(\mathrm{d}f)_p$ 的弗雷德霍姆指标记为 $\mathrm{ind}\,f$. 弗雷德霍姆映射是非线性分析中最常遇到的一类映射.

切向量场(tangent vector field) 即切丛的截片. 设 M 为巴拿赫微分流形,$TM\xrightarrow{\pi}M$ 为其切丛,若 C^r 映射 $\xi:M\to TM$ 满足条件 $\pi\xi=\mathrm{id}$,其中 id 为 M 上的恒同映射,则称 ξ 为 M 上的一个 C^r 切向量场. 切向量场也常简称向量场.

向量场(vector field) 即"切向量场".

余切向量场(cotangent vector field) 即余切丛的截片. 设 $T^*M\xrightarrow{\pi}M$ 为巴拿赫流形 M 的余切丛,M 上的余切向量场指的是满足条件 $\pi\xi=\mathrm{id}$ 的映射 $\xi:M\to T^*M$.

向量场的积分曲线(integral curve for vector field) 在每点以所给向量场的值为速度向量的曲线. 设 M 是巴拿赫微分流形,X 是 M 上的切向量场,$\alpha:(a,b)\to M$ 是 C^1 曲线. 若

$$\alpha'(t)=X_{\alpha(t)}\quad(\forall t\in(a,b)),$$

则 α 称为向量场 X 的一条积分曲线. 设 $X\in C^{1-0}$, 即 X 为局部李普希茨向量场,则对任意的 $p\in M$, 初值问题 $\alpha'(t)=X_{\alpha(t)}$,$\alpha(0)=p$ 存在惟一的极大解曲线 $\alpha:(t^-(p),\ t^+(p))\to M$,其中$-\infty\leqslant t^-(p)<0<t^+(p)\leqslant+\infty$. 记这个解为$\varphi(p,t)$,亦称为 X 的过点 p 的流线. 令 $\Omega=\{(p,t)\in M\times\mathrm{R}\mid p\in M,\ t^-(p)<t<t^+(p)\}$, 则 $\varphi:\Omega\to M$ 称为由 X 产生的(局部)流. 对 $t\in\mathrm{R}$,记$\varphi_t(\cdot)=\varphi(\cdot,t)$及 $\Omega_t=\{p\in M\mid(p,t)\in\Omega\}$,则 $\varphi_0=\mathrm{id}:M\to M$,$\varphi_t(\Omega_t)=\Omega_{-t}$,$\varphi_{-t}=\varphi_t^{-1}$,$\varphi_t:\Omega_t\to M$ 是正则嵌入,且关系式$\varphi_s\varphi_t(p)=\varphi_{s+t}(p)$当其中一边有意义时就成立(这时另一边也有意义).

向量场产生的流(flow generated by vector field) 见"向量场的积分曲线".

芬斯勒结构(Finsler structure) 巴拿赫向量丛上的范数结构. 设 $\xi=(G,\pi,M)$是巴拿赫流形 M 上的巴拿赫向量丛,丛 ξ 上的一个芬斯勒结构是指

满足下述条件的连续函数 $\|\cdot\|: G\to \mathbb{R}_+$:

1. $\forall p\in M$, $\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{G_p}$ 是 G_p 上的一个等价范数.

2. $\forall p_0\in M$, 对于 p_0 在 M 上的任意使得 G 在其上可平凡化的邻域 U 与任意的 $k>1$, 有 p_0 的邻域 $V\subset U$, 使得

$$\frac{1}{k}\|\cdot\|_p\leqslant\|\cdot\|_{p_0}\leqslant k\|\cdot\|_p\quad(\forall p\in V).$$

当 M 仿紧时, 丛 ξ 上 芬斯勒结构总是存在的. 芬斯勒结构因芬斯勒(Finsler, P.)的工作而得名.

巴拿赫-芬斯勒流形(Banach-Finsler manifold) 在切丛上指定了芬斯勒结构的巴拿赫流形. 设 M 是巴拿赫流形, $\|\cdot\|$ 为 TM 上的芬斯勒结构, 则 $(M,\|\cdot\|)$ 称为巴拿赫-芬斯勒流形, 或简称芬斯勒流形. 切丛上的芬斯勒结构自然诱导出余切丛上的芬斯勒结构.

切丛上的芬斯勒结构亦称为芬斯勒度量. 它按下述方式诱导出 M 上的度量. 设 $\alpha:[a,b]\to M$ 是 C^1 曲线(或逐段 C^1 曲线), 则可定义曲线 α(从 a 到 b)的长度为

$$\int_a^b\|\alpha'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

设 M 连通(否则考虑其每个连通分支), 可定义 M 上任取两点 p 和 q 间的距离为

$$\rho(p,q)=\inf\{M\text{ 上从 }p\text{ 到 }q\text{ 的逐段 }C^1\text{ 曲线的长度}\},$$

则 ρ 满足距离公理, (M,ρ) 成为距离空间, 且 ρ 诱导的拓扑与 M 上原有的拓扑一致. 若距离空间 (M,ρ) 是完备的, 则称 M 是完备的巴拿赫-芬斯勒流形.

芬斯勒度量(Finsler metric) 见"巴拿赫-芬斯勒流形".

完备的巴拿赫-芬斯勒流形(complete Banach-Finsler manifold) 见"巴拿赫-芬斯勒流形".

希尔伯特流形(Hilbert manifold) 模空间为希尔伯特空间的巴拿赫流形.

希尔伯特-黎曼流形(Hilbert-Riemann manifold) 指定了黎曼度量的希尔伯特流形. 设 M 是希尔伯特微分流形, M 上的黎曼度量指的是 M 上的一个连续的正定对称二阶协变张量场 g. M 连同其上给定的黎曼度量 g 称为希尔伯特-黎曼流形, 记为 (M,g), 这时, $\forall p\in M$, 由

$$g_p: T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$$

给出了 T_pM 上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p=g_p(\cdot,\cdot)$. 当 M 连通时, 黎曼度量 g 诱导出了 M 上的距离 ρ. 若 (M,ρ) 是完备的度量空间, 则称 (M,g) 是完备的希尔伯特-黎曼流形(参见"巴拿赫-芬斯勒流形"). 当 M 仿紧时, M 上的黎曼度量是存在的. 黎曼度量是一种特殊的芬斯勒结构. 希尔伯特-黎曼流形是特殊的巴拿赫-芬斯勒流形.

黎曼度量(Riemann metric) 见"希尔伯特-黎曼流形".

完备的希尔伯特-黎曼流形(complete Hilbert-Riemann manifold) 见"希尔伯特-黎曼流形".

紧连续映射(compact continuous mapping) 像集为相对紧集的连续映射. 设 X 和 Y 是拓扑空间, $\Omega\subset X$, $f:\Omega\to Y$ 是连续映射. 若 $\overline{f(\Omega)}$ 是紧集, 则称 f 为紧连续映射, 或简称紧映射.

紧连续向量场(compact continuous vector field) 恒同映射的紧连续摄动. 设 X 是巴拿赫空间, I 为 X 上的恒同映射, $\Omega\subset X$, $f:\Omega\to X$ 为紧连续映射, 则映射 $I-f:\Omega\to X$ 称为 Ω 上的紧连续向量场, 简称紧向量场或紧场.

全连续映射(completely continuous mapping) 映有界集为相对紧集的连续映射. 设 $\Omega\subset X$, $f:\Omega\to Y$ 是连续映射. 若对于 Ω 中的任何有界子集 S, $\overline{f(S)}$ 是 Y 中的紧集, 则称 f 为全连续映射. 紧连续映射必为全连续映射. 当 Ω 为有界集时, Ω 上的全连续映射与紧连续映射是等价的概念. 设 Ω 为 X 中的有界集, 则 $f:\Omega\to Y$ 为全连续映射的充分必要条件是 f 能用 Ω 上的有限维值连续映射一致逼近. 可微的全连续映射在每点的导算子是全连续线性算子. 设 D 为 X 中的有界闭集, $f:D\to Y$ 全连续, 则存在 f 在 X 上的全连续延拓 $\tilde{f}:X\to Y$, 使得

$$\tilde{f}(X)\subset\overline{\mathrm{co}}f(D).$$

全连续向量场(completely continuous vector field) 恒同映射的全连续摄动.

固有映射(proper mapping) 紧集的原像是紧集的映射. 设 X 和 Y 是拓扑空间, $f:X\to Y$ 是映射. 若对于 Y 中任意的紧集 C, $f^{-1}(C)$ 是 X 中的紧集, 则称映射 f 是固有的. 当 X 和 Y 为度量空间时, 映射 $f:X\to Y$ 为固有映射的充分必要条件是, f 是闭映射(映闭集为闭集)且 Y 中每点的原像是 X 中的紧集. 当 X 和 Y 是巴拿赫空间时, 连续线性算子 $A:X\to Y$ 为固有映射的充分必要条件是, A 为单射且 A 的像空间 $\mathrm{Im}\,A$ 是闭的. 赋范线性空间中闭集上的紧连续场, 特别地有界闭集上的全连续场, 是固有的. 设 X 和 Y 是道路连通的度量空间, $f:X\to Y$ 是局部同胚, 那么, f 是固有映射 $\Leftrightarrow f$ 是闭映射 $\Leftrightarrow f$ 是有限层覆盖映射. 设 X 和 Y 是道路连通的度量空间, 且 Y 单连通, 那么, $f:X\to Y$ 是同胚 $\Leftrightarrow f$ 是局部同胚且固有 $\Leftrightarrow f$ 是局部同胚的闭映射.

压缩映射(contractive mapping) 亦称巴拿赫压缩映射. 是指在度量意义下压缩的映射. 设

(X,d_X)与(Y,d_Y)是度量空间，$f:X\to Y$是映射. 若存在常数$k\in[0,1)$，使得

$$d_Y(f(x),\ f(y))\leqslant kd_X(x,y)\quad(\forall x,y\in X),$$

则称f为压缩映射，k称为压缩系数. 压缩映射必是连续映射(且为李普希茨连续). 当X为赋范线性空间，$f:X\to X$为压缩映射时，映射$I-f$称为X上的压缩向量场.

压缩向量场(contractive vector field) 见“压缩映射”.

非扩张映射(nonextension mapping) 每两点间的距离不变大的映射. 设X和Y是度量空间，$f:X\to Y$. 若$d(f(x),f(y))\leqslant d(x,y)(\forall x,y\in X)$，则称$f$为非扩张映射. 若成立$d(f(x),f(y))<d(x,y)(\forall x,y\in X)$，则称$f$为严格非扩张映射.

严格非扩张映射(strictly nonextension mapping) 见“非扩张映射”.

扩张映射(expansive mapping) 每两点间的距离不变小的映射. 设X和Y是度量空间，$f:X\to Y$. 若$d(f(x),f(y))\geqslant d(x,y)(\forall x,y\in X)$，则称$f$为扩张映射. 若有$d(f(x),f(y))>d(x,y)(\forall x,y\in X)$，则称$f$为严格扩张映射. 若有常数$h>1$使得$d(f(x),f(y))\geqslant hd(x,y)(\forall x,y\in X)$，则称$f$为$h$扩张映射，这时$h$称为扩张系数.

非紧性测度(measure of noncompactness) 非紧集合丧失紧性程度的一种数值刻画. 设X是完备度量空间，$\mathscr{B}$表示X的全体非空有界子集所成之族. 若非负函数$\psi:\mathscr{B}\to[0,+\infty)$满足条件：

1. $\psi(A)=0\Leftrightarrow\overline{A}$紧；
2. $\psi(A)=\psi(\overline{A})(\forall A\in\mathscr{B})$；
3. $\psi(A\cup B)=\max\{\psi(A),\psi(B)\}(\forall A,B\in\mathscr{B})$；

则称ψ为X上的一个非紧性测度. 这时，对于$A\in\mathscr{B}$，$\psi(A)$称为A的非紧性测度. 当X是巴拿赫空间时，常将上述非紧性测度定义中的条件2加强为：

2′. $\psi(A)=\psi(\overline{\mathrm{co}}A)(\forall A\in\mathscr{B})$.

常用的非紧性测度有库拉托夫斯基(Kuratowski, K.)的集-非紧性测度α与豪斯多夫(Hausdorff, F.)的球-非紧性测度γ. α与γ的定义分别是

$\alpha(A)=\inf\{d\mid X$中存在有限多个直径均$\leqslant d$的集覆盖了$A\}$；

$\gamma(A)=\inf\{r\mid X$中存在有限多个半径均$\leqslant r$的球覆盖了$A\}$.

当X为巴拿赫空间时，α与γ除了满足条件1,2′,3外，还有性质：

4. $\psi(\lambda A)=|\lambda|\psi(A)(\forall A\in\mathscr{B},\lambda\in\mathrm{R})$；
5. $\psi(A+B)\leqslant\psi(A)+\psi(B)(\forall A,B\in\mathscr{B})$.

非紧性测度的概念最早由库拉托夫斯基于1930年提出.

集压缩映射(set contractive mapping) 在集合的非紧性测度意义下压缩的映射. 设X,Y为完备度量空间，$f:X\to Y$连续有界，ψ_X与ψ_Y分别为X与Y上的非紧性测度. 若有非负常数k，使得对于X中每个有界集A，有$\psi_Y(f(A))\leqslant k\psi_X(A)$，则称$f$为$k$集压缩的，或更明确地，称$f$为$k(\psi_X,\psi_Y)$压缩的. 当$k<1$时，称$f$为严格集压缩的，也常简称集压缩的. 若对于$X$中每个有界的非相对紧集$A$，均有$\psi_Y(f(A))<\psi_X(A)$，则称$f$为$(\psi_X,\psi_Y)$凝聚映射. (严格)集压缩映射必是凝聚的. f是全连续映射，当且仅当f是0集压缩的.

常取非紧性测度为集-非紧性测度或球-非紧性测度. 这时，巴拿赫k压缩映射是k集压缩的，非扩张映射是1-集压缩的，但严格非扩张映射不一定是凝聚的. 若$\forall x\in X$，存在x的邻域U，使得$f|_U$为k集压缩(相应地，凝聚)，则称f在X上为局部k集压缩(相应地，局部凝聚)映射. 设X为巴拿赫空间，D为X中的闭集. 若$f:D\to X$为k集压缩(或凝聚)映射，则$I-f$称为D上的k集压缩向量场(或凝聚向量场). 有界闭集D上的凝聚向量场是固有的. 可微的k集压缩映射在每点的导算子是k集压缩线性算子.

集压缩向量场(set contractive vector field) 见“集压缩映射”.

凝聚映射(condensing mapping) 见“集压缩映射”.

凝聚向量场(condensing vector field) 见“集压缩映射”.

局部集压缩映射(locally set contractive mapping) 见“集压缩映射”.

局部凝聚映射(locally condensing mapping) 见“集压缩映射”.

映射的基本集(fundamental set for mapping) 包含该映射的不动点集且具某种特殊性质的凸集. 设X是巴拿赫空间，$\Omega\subset X$，$f:\overline{\Omega}\to X$，$M\subset X$. X中的一个凸集S称为映射f相对于集M的基本集，是指下述两条件成立：

1. $f(S\cap M)\subset S$.
2. 若$x_0\in M$，$x_0\in\mathrm{co}\{f(x_0),S\}$，则$x_0\in S$.

这时，S必包含f在M中的所有不动点，且$N=\mathrm{co}(f(S\cap M))$也是$f$相对于$M$的基本集. 当基本集$S$为闭集时，$\overline{N}$也是基本集. 任意多个基本集之交仍为基本集. 当$f$在$M$上无不动点时，空集是它的一个基本集. f相对于$M=\overline{\Omega}$的基本集对于研究映射f在$\overline{\Omega}$中的不动点具重要意义.

紧支撑映射(compactly supported mapping)

一种具有紧致基本集的映射. 设 X 是巴拿赫空间, $\Omega\subset X, f:\overline{\Omega}\to X, M\subset X$. 若 X 的一个非空有界闭凸集 C 满足下述条件:

1. C 包含 f 相对于 M 的一个闭基本集;

2. $f(C\cap M)\subset C$;

3. f 在 $C\cap M$ 上全连续;

则称 C 为 f 相对于 M 的一个支撑. 如果 f 具有一个相对于 M 的紧支撑集, 则称 f 是相对于 M 的紧支撑映射. 常用到的情形是, Ω 是 X 中的有界开集, $M=\overline{\Omega}$, $f:\overline{\Omega}\to X$ 连续. 这时, 若 f 是(严格)集压缩映射, 或凝聚映射, 或终归紧映射, 则 f 是 $\overline{\Omega}$ 上的紧支撑映射. 若 $f:\overline{\Omega}\to X$ 是紧支撑映射, 则 $I-f$ 称为 $\overline{\Omega}$ 上的紧支撑向量场.

紧支撑向量场(compactly supported vector field) 见"紧支撑映射".

终归紧映射(ultimately compact mapping) 在超限迭代意义下最终可归结为紧映射的一种映射. 设 Ω 是 X 中的有界开集, $f:\overline{\Omega}\to X$ 连续. 定义超限集列 R_α 如下:

$$R_1=\overline{\mathrm{co}}f(\overline{\Omega}).$$

当 α 是第一类序数时, 令 $R_\alpha=\overline{\mathrm{co}}f(R_{\alpha-1}\cap\overline{\Omega})$.

当 α 是第二类序数时, 令 $R_\alpha=\bigcap\{R_\beta\mid\beta\prec\alpha\}$.

超限集列 R_α 是递减的, 故存在某个序数 α_0, 使得当 $\alpha\succ\alpha_0$ 时, 诸集 R_α 均相同, 记之为 R^*. 若 R^* 是紧集, 则称 f 为 $\overline{\Omega}$ 上的终归紧映射. 如果

$$R_\infty=\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$$

是紧的, 则称 f 为极限紧映射. 极限紧映射是终归紧映射的特例. 凝聚映射是终归紧的. 若 $f:\overline{\Omega}\to X$ 是终归紧的(或极限紧的), 则 $I-f$ 称为 $\overline{\Omega}$ 上的终归紧向量场(相应地, 极限紧向量场).

终归紧向量场(ultimately compact vector field) 见"终归紧映射".

极限紧映射(limit compact mapping) 见"终归紧映射".

极限紧向量场(limit compact vector field) 见"终归紧映射".

锥映射(cone mapping) 亦称正算子. 指值含在某锥中的映射. 设 X 为巴拿赫空间, P 为 X 中的锥, $M\subset X, A:M\to X$ 是映射. 若 $A(M)\subset P$, 则称 A 为 M 上的锥映射. 锥 P 上的锥映射简称锥映射. 由锥 P 可在 X 中引入半序"$\leqslant$". 这时 P 中的元称为正元. 因而锥映射亦称正算子.

正算子(positive operator) 即"锥映射".

增算子(increasing operator) 半序意义下单调递增的算子. 设 $(X,\leqslant)$ 是半序巴拿赫空间, $D\subset X, A:D\to X$. 若有

$$x_1,x_2\in D,\ x_1\leqslant x_2\Rightarrow Ax_1\leqslant Ax_2,$$

则称 A 为 D 上的增算子. 若有

$$x_1,x_2\in D,\ x_1\leqslant x_2\Rightarrow Ax_2\leqslant Ax_1,$$

则称 A 为 D 上的减算子.

减算子(decreasing operator) 见"增算子".

u_0 凹算子(u_0-concave operator) 一种具有较弱非线性性的特殊的正算子. 设 P 为 X 中的锥, $A:P\to P$ 为正算子, $u_0>\theta$, 称 A 是 u_0 凹算子, 如果:

1. $\forall x>\theta$, 存在 $\alpha=\alpha(x)>0$ 与 $\beta=\beta(x)>0$ 使得 $\alpha u_0\leqslant Ax\leqslant\beta u_0$.

2. 对任何满足条件 $\alpha_1u_0\leqslant x\leqslant\beta_1u_0$ 的 $x\in P$(其中 $\alpha_1=\alpha_1(x)>0, \beta_1=\beta_1(x)>0$)及 $0<t<1$, 均存在 $\eta=\eta(x,t)>0$, 使得 $A(tx)\geqslant(1+\eta)tAx$.

u_0 凸算子(u_0-convex operator) 一种具有较强非线性性的特殊的正算子. 设 P 是 X 中的锥, $A:P\to P$ 为正算子, $u_0>\theta$, 称 A 为 u_0 凸算子, 如果:

1. $\forall x>\theta$, 存在 $\alpha=\alpha(x)>0$ 与 $\beta=\beta(x)>0$, 使得 $\alpha u_0\leqslant Ax\leqslant\beta u_0$.

2. 对于任何满足条件 $\alpha_1u_0\leqslant x\leqslant\beta_1u_0$ 的 $x\in P$(这里 $\alpha_1=\alpha_1(x)>0$, $\beta_1=\beta_1(x)>0$)及 $0<t<1$, 均存在 $\eta=\eta(x,t)>0$ 使得 $A(tx)\leqslant(1-\eta)tAx$.

弱内向映射(weakly inward mapping) 锥映射的一种推广. 设 X 是巴拿赫空间, C 为 X 中闭凸集, $A:C\to X$ 是映射. A 称为弱内向映射, 如果 $Ax\in\overline{I_C(x)}$ $(\forall x\in C)$. 这里 $I_C(x)=\{x+t(y-x)\mid t\geqslant 0,\ y\in C\}$. 当 $C=P$ 是 X 中锥, $A:P\to P$ 是锥映射时, A 必是弱内向的.

单调映射(monotone mapping) 单调递增一元函数概念在对偶作用意义下的无穷维推广. 设 X 是巴拿赫空间, X^* 为 X 的对偶空间, $D\subset X, T:D\to X^*$. 若有

$$\langle Tx-Ty,x-y\rangle\geqslant 0\ (\forall x,y\in D),$$

则称 T 为单调映射. 若上式中的等号仅当 $x=y$ 时成立, 则称 T 为严格单调映射. 若存在连续函数

$$\alpha:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+,\alpha(0)=0,$$
$$\alpha(t)>0\quad(\forall t>0),$$
$$\lim_{t\to+\infty}\alpha(t)=+\infty,$$

使得

$$\langle Tx-Ty,x-y\rangle\geqslant\alpha(\|x-y\|)\|x-y\|\quad(\forall x,y\in D),$$

则称 T 为强单调映射. 强单调$\Rightarrow$严格单调$\Rightarrow$单调.

严格单调映射(strictly monotone mapping) 见"单调映射".

强单调映射(strongly monotone mapping) 见"单调映射".

极大单调映射(maximally monotone map-

ping) 不能再进行单调延拓的单调映射. 设 X 是巴拿赫空间, $D\subset X, T:D\to X^*$ 是单调映射. 若 T 满足条件:

$$\langle \bar{y}-y,\bar{x}-x\rangle \geqslant 0 \ (\forall x\in D),$$
$$y=Tx \Rightarrow \bar{x}\in D,\quad \bar{y}=T\bar{x},$$

则称 T 为极大单调映射.

(S)型映射(mapping of type (S)) 一种与单调映射有密切关系的映射. 设 D 为巴拿赫空间 X 中的闭凸集, $T:D\to X^*$. 若有:

$$\{u_n\}\subset D,\quad u_n\xrightarrow{w}u,$$
$$\lim_{n\to\infty}\langle Tu_n,u_n-u\rangle=0\Rightarrow u_n\to u,$$

则称 T 为(S)型的.

$(S)_+$型映射(mapping of type $(S)_+$) 一种特殊的(S)型映射. 设 D 是巴拿赫空间 X 中的闭凸集, $T:D\to X^*$. 若有:

$$\{u_n\}\subset D,\quad u_n\xrightarrow{w}u,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle Tu_n,u_n-u\rangle\leqslant 0\Rightarrow u_n\to u,$$

则称 T 为$(S)_+$型的.

D 上的全体$(S)_+$型映射构成 D 上的(S)型映射类的凸子类. 强单调映射及其全连续摄动是$(S)_+$型的. 特别地, 希尔伯特空间中的全连续向量场是$(S)_+$型的.

伪单调映射(pseudo-monotone mapping) 单调映射的一种推广. 设 X 是自反巴拿赫空间, D 是 X 中的闭凸集, $T:D\to X^*$. 若 T 是有限弱连续的, 且满足条件:

$$\{x_n\}\subset D,\quad x_n\xrightarrow{w}x,$$
$$\lim_{n\to\infty}\langle Tx_n,x_n-x\rangle\leqslant 0\Rightarrow\langle Tx,x-y\rangle$$
$$\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\langle Tx_n,x_n-y\rangle\quad(\forall y\in D),$$

则称 T 是伪单调的. 非自反巴拿赫空间中的伪单调映射的定义是将上述定义中的序列$\{x_n\}$换成网$\{x_\alpha\}$. 有限弱连续的单调映射, 次连续的$(S)_+$型映射及全连续映射均是伪单调的.

(M)型映射(mapping of type (M)) 伪单调映射的一种推广. 设 X 是自反巴拿赫空间, $T:X\to X^*$. 若 T 是有限弱连续的, 且满足条件:

$$\{x_n\}\subset X,\ x_n\xrightarrow{w}x,\ Tx_n\xrightarrow{w}f,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle Tx_n,x_n-x\rangle\leqslant 0\Rightarrow f=Tx,$$

则称 T 是(M)型映射. 伪单调映射 $T:X\to X^*$ 是(M)型的.

增生映射(accretive mapping) 单调映射在自映射情形的变种. 设 X 是巴拿赫空间, $D\subset X$, $T:D\to X$. 设映射$J:X\to 2^{X^*}$是由下式定义的正规对偶映射,

$$J(x)=\{f\in X^*\mid\langle x,f\rangle=\|x\|\cdot\|f\|,$$
$$\|f\|=\|x\|\}\ (x\in X).$$

若 T 满足条件: 对任意的 $x,y\in D$, 存在 $j(x-y)\in J(x-y)$使得

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant 0,$$

则称 T 为增生映射. 在希尔伯特空间中, 增生映射与单调映射是同一概念.

极大增生映射(maximally accretive mapping) 一种特殊的增生映射. 不能再进行增生延拓的增生映射称为极大增生映射.

逼近格式(approximation scheme) 用有限维空间逼近的方法研究无穷维空间中映射的一种工具. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间. (X,Y)上的一个逼近格式指的是

$$\Gamma=\{\{X_n\},\{P_n\};\{Y_n\},\{Q_n\}\},$$

其中$\{X_n\}$与$\{Y_n\}$是两个定向有限维空间序列, 对每个 n, 有 $\dim X_n=\dim Y_n$, $P_n:X_n\to X$ 与 $Q_n:Y\to Y_n$ 是连续映射. 如果 Γ 还满足条件:

$$\bigcup_n\overline{P_n(X_n)}=X,$$

则称逼近格式 Γ 是允许的. 逼近格式可视不同情况而做不同的选取. 通常, $\{X_n\}$取作 X 的有限维子空间的递增序列, P_n 取为包含映射 $i_n:X_n\to X$. 若取$\{Y_n\}$为 Y 的有限维子空间的递增序列, $Q_n:Y\to Y_n$ 为线性投影, 这时 $\Gamma=\{\{X_n\},\{i_n\};\{Y_n\},\{Q_n\}\}$ 称为投影逼近格式. 特别地, 当 $Y=X$ 时, 则取$\{Y_n\}=\{X_n\}$, 这时的投影逼近格式简记为 $\Gamma=\{\{X_n\},\{Q_n\}\}$. 如果这时 Γ 还是允许的, 且有 $\|Q_n\|=1(\forall n)$, 则称 X 为(π_1)空间. 当 $Y=X^*$ 时, 常取 $Y_n=X_n^*$ 为 X_n 的共轭空间, 取 $Q_n=i_n^*$ 为 i_n 的共轭算子, 这时 $\Gamma=\{\{X_n\},\{i_n\};\{X_n^*\},\{i_n^*\}\}$称为$(X,X^*)$上的内射逼近格式.

逼近固有映射(approximating proper mapping) 一种具有在有限维逼近意义下的固有性的映射. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间, Ω 是 X 中的开集, $T:\bar{\Omega}\to Y$ 是映射, $\Gamma=\{\{X_n\},\{P_n\};\{Y_n\},\{Q_n\}\}$是$(X,Y)$上的一个逼近格式. 对每个 n, 记$\Omega_n=P_n^{-1}(\Omega)$, $\bar{\Omega}_n$ 为 Ω_n 在 X_n 中的闭包, 令 $T_n=Q_nTP_n:\bar{\Omega}_n\to Y_n$. 若:

1. 对充分大的 n, $T_n:\bar{\Omega}_n\to Y_n$ 连续;

2. 若有正整数序列$\{n_j\}$, $n_j\to\infty$, 与序列$\{x_{n_j}\}$, $x_{n_j}\in X_{n_j}$, $\{P_{n_j}x_{n_j}\}$有界, $y\in Y$, 使得

$$\|T_{n_j}(x_{n_j})-Q_{n_j}y\|\to 0,$$

则存在$\{n_j\}$的子列$\{n_{j_k}\}$与 $x\in\bar{\Omega}$, 使得

$$P_{n_{j_k}}x_{n_{j_k}}\to x\ \text{且}\ Tx=y;$$

则称 $T:\bar{\Omega}\to Y$ 为关于 Γ 的逼近固有映射.

逼近固有映射的紧连续摄动仍是逼近固有的. (π_1)空间上的球-凝聚场是关于投影格式逼近固有的. 可分自反巴拿赫空间上的有界次连续(S)型映

射是关于内射逼近格式逼近固有的.

梯度映射(gradient mapping) 泛函的(弱)导映射. 设 X 是巴拿赫空间, Ω 是 X 中的开集, $f:\Omega\to X^*$. 若存在泛函 $\varphi:\Omega\to\mathrm{R}$, φ 在 Ω 中具有线性有界 G 微分, 使得 $f(x)=D\varphi(x)$ $(\forall\ x\in\Omega)$, 则称 f 为 φ 的梯度映射, 常记为 $f(x)=\mathrm{grad}\ \varphi$. 这时 φ 称为 f 的位势函数. 设 Ω 为 X 中的凸开集, $f:\Omega\to X^*$ 具有有界线性 G 微分, 且对于任何固定的 $h,k\in X$, 泛函 $(\mathrm{D}f(x)h)k$ 关于 $x\in\Omega$ 连续. 那么, f 是梯度映射的充分必要条件是泛函 $(\mathrm{D}f(x)h)k$ 关于 h,k 是对称的, 即

$$(\mathrm{D}f(x)h)k=(\mathrm{D}f(x)k)h\ (\forall\ x\in\Omega;h,k\in X).$$

此时, f 的位势函数 φ 可由下式确定

$$\varphi(x)=c+\int_0^1 f(x_0+t(x-x_0))(x-x_0)\mathrm{d}t \quad (\forall x\in\Omega),$$

其中 x_0 可取为 Ω 中任一点, c 可为任一常数.

集值映射(setvalued mapping) 亦称多值映射. 映射概念的推广. 设 X 和 Y 是两个集合. 记 $2^Y=\{A\mid A\subset Y\}$, 称之为 Y 的幂集. 从 X 到 Y 的一个集值映射指的是从 X 到 2^Y 的一个单值映射 $F:X\to 2^Y$. 对于 $A\subset X$, $F(A)=\bigcup\{F(x)\mid x\in A\}$ 称为 A 在 F 下的像. $\mathrm{graph}(F)=\{(x,y)\in X\times Y\mid x\in X, y\in F(x)\}$ 称为 F 的图象. 任意给定 $\Gamma\subset X\times Y$, 则由 $F(x)=\{y\in Y\mid(x,y)\in\Gamma\}$ $(\forall x\in X)$ 可惟一确定集值映射 $F:X\to 2^Y$, 使得 $\mathrm{graph}(F)=\Gamma$. 由 $F^{-1}(y)=\{x\in X\mid(x,y)\in\mathrm{graph}(F)\}$ $(\forall y\in Y)$ 定义的集值映射 $F^{-1}:Y\to 2^X$ 称为 F 的逆映射.

设有 $F:X\to 2^Y$. $\mathrm{dom}(F)=\{x\in X\mid F(x)\neq\varnothing\}$ 称为 F 的有效域. 若 $\forall x\in X$ 有 $F(x)\neq\varnothing$, 则称 F 具非空值. 这时 $\mathrm{dom}(F)=X$. 当 Y 是拓扑空间或赋范线性空间时, 若 $\forall x\in X$, $F(x)$ 为闭集(相应地, 紧集, 凸集, 有界集等), 则称 F 具闭值(相应地, 具紧值, 凸值, 有界值等)(参见本卷《凸分析》同名条).

多值映射(multivalued mapping) 即"集值映射".

上半连续集值映射(upper semicontinuous setvalued mapping) 单值连续映射概念到集值映射情形的一种推广. 设 X 和 Y 都是拓扑空间, $F:X\to 2^Y$ 具非空值. 设 $x_0\in X$, 若对于任给的 Y 中的开集 $V\supset F(x_0)$, 存在 x_0 在 X 中的邻域 U, 使得 $F(U)\subset V$, 则称 F 在 x_0 上半连续. 若 F 在 X 中每点均为上半连续, 则称 $F:X\to 2^Y$ 上半连续. 上半连续常简记为 u. s. c.. $F:X\to 2^Y$ 为上半连续的充分必要条件是, 对于 Y 中的任意闭集 A, $F^{-1}(A)=\{x\in X\mid F(x)\cap A\neq\varnothing\}$ 是 X 中的闭集. 当 X 和 Y 是赋范线性空间时, 由于 X 和 Y 中除有通常的强拓扑外, 还有弱拓扑等, 因此当谈到集值映射 $F:X\to 2^Y$ 的上半连续性时, 应指明是在 X 和 Y 的何种拓扑意义下而言. 按照惯例, 若不特别指明, 则是在 X 和 Y 中的强拓扑意义下而言.

下半连续集值映射(lower semicontinuous setvalued mapping) 单值连续映射概念到集值映射情形的另一种推广. 设 X 和 Y 是拓扑空间, $F:X\to 2^Y$ 为集值映射, $x_0\in X$. 若对于 $F(x_0)$ 中任一点 y 在 Y 中的任一开邻域 V, 存在 x_0 在 X 中的开邻域 U, 使得

$$F(x)\cap V\neq\varnothing \quad (\forall x\in U),$$

则称 F 在 x_0 下半连续. 若 F 在 X 中每点均为下半连续, 则称 $F:X\to 2^Y$ 下半连续, 下半连续常简记为 l. s. c.. $F:X\to 2^Y$ 为下半连续的充分必要条件是, 对于 Y 中任意开集 A,

$$F^{-1}(A)=\{x\in X\mid F(x)\cap A\neq\varnothing\}$$

是 X 中的开集. 当 X 和 Y 是赋范线性空间时, 视 X 与 Y 中所取拓扑的不同, 集值映射 $F:X\to 2^Y$ 有多种下半连续性概念. 若无特别说明, 则是指在 X 与 Y 中的强拓扑意义下而言.

连续集值映射(continuous setvalued mapping) 既上半连续又下半连续的集值映射.

ε 上半连续集值映射(ε-upper semicontinuous setvalued mapping) 对度量空间中的集值映射提出的一种特殊的上半连续性概念. 设 X 是拓扑空间, (Y,d) 为度量空间. $F:X\to 2^Y$ 是集值映射, $x_0\in X$. 若对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在 x_0 的邻域 U, 使得

$$F(U)\subset N_\varepsilon(F(x_0)),$$

其中 $N_\varepsilon(F(x_0))=\{y\in Y\mid d(y,F(x_0))<\varepsilon\}$, 则称 F 在 x_0 为 ε 上半连续. 若 F 在 X 中的每一点均为 ε 上半连续, 则称 $F:X\to 2^Y$ 为 ε 上半连续. 若 F 在 x_0 上半连续, 则 F 在 x_0 为 ε 上半连续. 当 $F(x_0)$ 为紧集时, 反之亦真.

ε 下半连续集值映射(ε-lower semicontinuous setvalued mapping) 对度量空间中的集值映射提出的一种特殊的下半连续性概念. 设 X 是拓扑空间, (Y,d) 是度量空间. $F:X\to 2^Y$ 是集值映射, $x_0\in X$, 若对于任给的正数 ε, 存在 x_0 的邻域 U, 使得 $F(x_0)\subset N_\varepsilon(F(x))$ $(\forall x\in U)$, 则称 F 在 x_0 为 ε 下半连续. 若 F 在 X 中的每一点均为 ε 下半连续, 则称 $F:X\to 2^Y$ 为 ε 下半连续. F 在 x_0 为 ε 下半连续 $\Rightarrow F$ 在 x_0 下半连续. 当 $F(x_0)$ 是紧集时, 其逆亦真.

ε 连续集值映射(ε-continuous setvalued mapping) 同时为 ε 上半连续与 ε 下半连续的映射.

豪斯多夫距离(Hausdorff distance) 在度量空间中任意两个集合之间定义的一种距离. 设 (X,d) 是度量空间. 定义 $d^*:2^X\times 2^X\to[0,+\infty]$ 如下:

对于 $A,B\subset 2^X\setminus\{\varnothing\}$，令

$$d^*(A,B)=\sup_{x\in A} d(x,B).$$

约定 $d^*(\varnothing,B)=0(\forall B\in 2^X)$，$d^*(A,\varnothing)=+\infty$ $(\forall A\in 2^X\setminus\{\varnothing\})$. 定义 $h:2^X\times 2^X\to[0,+\infty]$为

$$h(A,B)=\max\{d^*(A,B),d^*(B,A)\}\quad(\forall A,B\in 2^X).$$

$d^*(A,B)$称为从 A 到 B 的豪斯多夫上半距离，$h(A,B)$称为 A 与 B 之间的豪斯多夫距离. h 具有下述性质：

$h(A,B)=h(B,A)$；$h(A,B)=0\Leftrightarrow \overline{A}=\overline{B}$；

$h(A,C)\leqslant h(A,B)+h(B,C)(\forall A,B,C\in 2^X)$.

记 $\mathscr{P}_f(X)=\{A\subset X\mid A$ 闭$\}$，$\mathscr{P}_k(X)=\{A\subset X\mid A$ 紧$\}$，则$(\mathscr{P}_f(X),h)$成为度量空间(允许度量取$+\infty$值). $\varnothing$是$(\mathscr{P}_f(X),h)$中的孤立点. 当(X,d)完备时，$(\mathscr{P}_f(X),h)$与$(\mathscr{P}_k(X),h)$也完备.

设 X 是拓扑空间，(Y,d)为度量空间，$F:X\to\mathscr{P}_f(Y)$为集值映射，那么，F 是 ε 连续集值映射当且仅当 F 作为从 X 到度量空间$(\mathscr{P}_f(Y),h)$中的单值映射是连续的. 集值映射$F:X\to\mathscr{P}_k(Y)$连续当且仅当 F 作为从 X 到度量空间$(\mathscr{P}_k(Y),h)$中的单值映射是连续的.

集值映射的单值选择(singlevalued selection of setvalued mapping)　指在集值映射每点的像(集合)中选择一个值而得到的单值映射. 它是利用单值映射来研究集值映射的重要手段之一. 设$F:X\to 2^Y$ 为具非空值的集值映射，若单值映射$f:X\to Y$ 满足条件：$f(x)\in F(x)(\forall x\in X)$，则称 f 为 F 的一个单值选择，简称 F 的一个选择. 研究集值映射的具某种特殊性质的选择的存在性是一个重要课题. 这方面最著名的一个结果是下述由迈克尔(Michael,E.)于 1956 年得到的连续选择定理：设 X 是仿紧空间，Y 是巴拿赫空间，$F:X\to 2^Y$ 具非空闭凸值且下半连续，则 F 有连续选择.

集值映射的单值逼近(singlevalued approximation for setvalued mapping)　利用单值映射研究集值映射的重要工具，它要求单值映射的图象落入集值映射的图象的充分小的邻域中. 最常用到的是下述逼近定理. 设 X 是度量空间，Y 是巴拿赫空间，$F:X\to 2^Y$ 具非空凸值且上半连续，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在局部李普希茨连续映射 $f_\varepsilon:X\to Y$，使得 $\mathrm{Range}(f_\varepsilon)\subset \mathrm{co\,Range}(F)$，且 $\mathrm{graph}(f_\varepsilon)\subset N_\varepsilon(\mathrm{graph}(F))$，其中 $N_\varepsilon(\Gamma)$表示乘积空间 $X\times Y$ 中的子集 Γ 的 ε 邻域.

可测集值映射(measurable setvalued mapping)　可测函数集的推广. 单值映射有多种可测性概念，对于集值映射更是如此. 最常用到的是下述定义. 设$(T,\mathscr{C})$是可测空间，其中 T 为某个集合，$\mathscr{C}$ 为 T 中的可测子集族，X 为拓扑空间，$F:T\to 2^X$ 为集值映射. 若对于 X 中每一开集 U，$F^{-1}(U)=\{t\in T\mid F(t)\cap U\neq\varnothing\}\in\mathscr{C}$，则称集值映射 F 为可测的.

当 X 是可分度量空间，且 $F:T\to 2^X$ 具非空紧值时，集值映射 F 是可测的当且仅当 F 作为从 T 到$(\mathscr{P}_k(X),h)$中的单值映射是可测的(其中 $\mathscr{P}_k(X)$表示 X 的一切紧子集所成之族，h 为豪斯多夫度量). 它等价于：对 X 中每个闭集 A，$F^{-1}(A)\in\mathscr{C}$.

当(X,d)是可分度量空间，且 $F:T\to 2^X$ 具非空完备值时，F 的可测性等价于下述条件之一：

1. $\forall x\in X$，函数 $d(x,F(\cdot))$是可测的.
2. F 有一列可测单值选择$\{\sigma_n\}$使得

$$F(t)=\overline{\{\sigma_n(t)\mid n=1,2,\cdots\}}.$$

当 X 是局部凸可度量化可分向量空间，且 $F:T\to 2^X$ 具非空紧凸值时，F 的可测性也等价于：$\forall x^*\in X^*$，支撑函数 $\delta^*(x^*\mid F(\cdot))$是可测的，其中 X^*为 X 的对偶空间，对于 $x^*\in X^*$与 $A\subset X$，

$$\delta^*(x^*\mid A)=\sup\{\langle x^*,x\rangle\mid x\in A\}.$$

集值映射的积分(integral of setvalued mapping)　单值映射的积分到集值映射情形的推广. 集值映射有多种可积性概念. 设$(T,\mathscr{C},\mu)$是测度空间，X 是可分巴拿赫空间，$F:T\to 2^X$ 是具非空紧凸值的可测集值映射. 记 $S_F=\{f\mid f$ 是 F 的可测单值选择$\}$. 若$\forall f\in S_F$，f 为佩蒂斯可积(相应地，博赫纳可积)，则称 F 为佩蒂斯可积(相应地，博赫纳可积)，且其积分定义为

$$\int F\mathrm{d}\mu=\left\{\int f\mathrm{d}\mu \,\middle|\, f\in S_F\right\}.$$

集值映射的积分现有多种不同的概念. 例如，还有下述集值映射的积分概念. 设$(T,\mathscr{C},\mu)$是测度空间，X 是可分巴拿赫空间，$F:T\to 2^X$ 是具非空闭值的可测集值映射. 记 $B_F=\{f\mid f$ 是 F 的可测单值选择，且 f 在 T 上为博赫纳可积$\}$与 $P_F=\{f\mid f$ 是 F 的可测单值选择，且 f 在 T 上为佩蒂斯可积$\}$. 集值映射 F 在 T 上的博赫纳积分与佩蒂斯积分分别定义为

$$(B)\int_T F\mathrm{d}\mu=\left\{(B)\int_T f\mathrm{d}\mu \,\middle|\, f\in B_F\right\}$$

与

$$(P)\int_T F\mathrm{d}\mu=\left\{(P)\int_T f\mathrm{d}\mu \,\middle|\, f\in P_T\right\},$$

其中

$$(B)\int_T f\mathrm{d}\mu$$

与

$$(P)\int_T f\mathrm{d}\mu$$

分别表示 f 在 T 上的博赫纳积分与佩蒂斯积分.

博赫纳积分(Bochner integral)　见"集值映射的积分".

佩蒂斯积分(Pettis integral)　见"集值映射的积分".

集值压缩映射(setvalued contractive mapping)　在豪斯多夫距离意义下的压缩映射. 设 (X,d_X) 与 (Y,d_Y) 是度量空间, $F:X\to 2^Y$ 具非空值. 若存在非负常数 k, 使得

$$h(F(x),F(y))\leqslant kd_X(x,y)\quad(\forall x,y\in X),$$

其中 h 为由 d_Y 诱导的豪斯多夫距离, 则称映射 F 为 k 压缩的. 当 $k<1$ 时称为严格压缩的. 若 F 满足条件

$$h(F(x),F(y))\leqslant d_X(x,y)\quad(\forall x,y\in X),$$

则称 F 为非扩张的.

集值非扩张映射(setvalued nonextension mapping)　见"集值压缩映射".

集值紧映射(setvalued compact mapping)　单值紧映射到集值映射情形的推广. 设 X 和 Y 是拓扑空间, $F:X\to 2^Y$ 具非空紧值. 若 $\overline{F(X)}$ 是 Y 中的紧集, 则称集值映射 F 是紧的.

集值全连续映射(setvalued completely continuous mapping)　单值全连续映射到集值映射情形的推广. 设 X 是度量空间, Y 是拓扑空间, $F:X\to 2^Y$ 具非空紧值且上半连续. 若对于 X 中每一有界子集 A, $\overline{F(A)}$ 是 Y 中的紧集, 则称集值映射 F 是全连续的.

集值集压缩映射(setvalued set-contractive mapping)　单值集压缩映射到集值映射情形的推广. 设 X 和 Y 是度量空间, $F:X\to 2^Y$ 具非空紧值且上半连续, ψ_X 与 ψ_Y 分别是 X 与 Y 中的非紧性测度. 若存在常数 $k\in[0,1)$, 使得对 X 中任何非空有界集 A, 有 $\psi_Y(F(A))\leqslant k\psi_X(A)$, 则称集值映射 F 为 (ψ_X,ψ_Y)-k 集压缩的. 若对于 X 中任何有界非相对紧集 A, 有 $\psi_Y(F(A))\leqslant\psi_X(A)$, 则称集值映射 F 为 (ψ_X,ψ_Y) 凝聚的. 类似地, 还可以定义集值局部凝聚映射、集值终归紧映射、集值紧支撑映射等概念.

集值凝聚映射(setvalued condensing mapping)　见"集值集压缩映射".

集值向量场(setvalued vector field)　恒同映射的集值摄动. 设 X 是拓扑线性空间, $D\subset X$, $F:D\to 2^X$ 具非空值, I 为 X 上的恒同映射, 这时集值映射 $(I-F):D\to 2^X$ 称为 D 上的一个集值向量场. 当 F 具凸值且 F 为集值全连续映射(相应地, 凝聚映射等)时, 称 $I-F$ 为集值全连续向量场(相应地, 集值凝聚向量场等).

集值锥映射(setvalued cone mapping)　单值锥映射在集值映射情形的推广. 所谓集值锥映射, 是指其像含在巴拿赫空间中的指定锥中的集值映射(参见"锥映射"). 半序巴拿赫空间中的正算子、增算子等概念可用自然的方式推广到集值映射的情形. 例如, 设 $(X,\leqslant)$ 是半序巴拿赫空间, $D\subset X$, $F:D\to 2^X$ 具非空值. 若 $\forall x,y\in D$, 当 $x\leqslant y$ 时有 $F(x)\leqslant F(y)$, 即 $F(x)$ 中的每一元 $\leqslant F(y)$ 中的每一元, 则称 F 为集值增算子.

集值逼近固有映射(setvalued approximating proper mapping)　单值逼近固有映射在集值映射情形的推广. 设 X,Y 是巴拿赫空间, $\Gamma=\{\{X_n\},\{P_n\};\{Y_n\},\{Q_n\}\}$ 为 (X,Y) 上的逼近格式, Ω 为 X 中的开集, $F:\overline{\Omega}\to 2^Y$ 具非空闭凸值, 对 $n=1,2,\cdots$, 记 $F_n=Q_nFP_n:\overline{\Omega}_n\to 2^{Y_n}$. 若:

1. 当 n 充分大时, $F_n:\overline{\Omega}_n\to 2^{Y_n}$ 具紧凸值且上半连续.

2. 由 $n_j\to\infty$, $x_{n_j}\in\overline{\Omega}_{n_j}$, $y_0\in Y$, 及

$$\|F_{n_j}(x_{n_j})-Q_{n_j}y_0\|\to 0$$

可推出存在子列 $n_{j_k}\to\infty$ 与 $x_0\in\overline{\Omega}$, 使得

$$P_{n_{j_k}}x_{n_{j_k}}\to x_0\quad 且\quad y_0\in F(x_0),$$

则称 F 为关于 Γ 的集值逼近固有映射.

集值单调映射(setvalued monotone mapping)　单值单调映射到集值映射情形的推广. 设 X 为巴拿赫空间, X^* 为 X 的对偶空间. $T:X\to 2^{X^*}$ 是集值映射. 若 $\forall x,y\in\mathrm{dom}(T)=\{x\in X\mid Tx\neq\varnothing\}$, 有 $\langle Tx-Ty,x-y\rangle\geqslant 0$, 即 $\forall u\in Tx$ 与 $v\in Ty$, 有 $\langle u-v,x-y\rangle\geqslant 0$, 则称 T 为集值单调映射. 若当 $x\neq y$ 时, 有 $\langle Tx-Ty,x-y\rangle>0$, 则称 T 为严格单调的. $X\times X^*$ 中的集合 Γ 称为是一个单调集, 指的是 Γ 满足条件: $\forall(x,u)\in\Gamma$ 与 $(y,v)\in\Gamma$, 有

$$\langle u-v,x-y\rangle\geqslant 0.$$

$T:X\to 2^{X^*}$ 为单调映射, 当且仅当 T 的图象 graph(T) 是 $X\times X^*$ 中的单调集.

集值极大单调映射(setvalued maximal monotone mapping)　不能再进行单调延拓的集值单调映射. 设 X 是巴拿赫空间, $T:X\to 2^{X^*}$ 为单调映射. 若 graph(T) 是 $X\times X^*$ 中的极大单调集, 即在 $X\times X^*$ 中不存在真包含 graph(T) 的单调集, 则称 T 为极大单调的. 若 X 自反, 则 $T:X\to 2^{X^*}$ 为极大单调映射 $\Leftrightarrow T^{-1}:X^*\to 2^X$ 为极大单调映射. 极大单调映射 $T:X\to 2^{X^*}$ 必具闭凸值, 且是半闭的, 即由 $(x_n,u_n)\in$ graph(T), $x_n\to x$, $u_n\xrightarrow{w}u$ 可推出 $(x,u)\in$ graph(T), 且 T 在 int dom(T) 中还是次上半连续的, 即从 X 中的强拓扑到 X^* 中的弱拓扑是上半连续的.

集值(S)型映射(setvalued mapping of type (S)) 单值(S)型映射到集值映射情形的推广. 设 X 是自反巴拿赫空间,D 是 X 中的闭集,$T:D\to 2^{X^*}$ 具非空闭凸值. 若 T 满足条件:

$$x_n\in D,\ x_n\xrightarrow{w}x_0,\ u_n\in Tx_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}\langle u_n,x_n-x_0\rangle=0\Rightarrow x_n\to x_0,$$

则称 T 为(S)型的. 若 T 满足条件:

$$x_n\in D,\ x_n\xrightarrow{w}x_0,\ u_n\in Tx_n,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle u_n,x_n-x_0\rangle\leqslant 0\Rightarrow x_n\to x_0,$$

则称 T 为$(S)_+$型的. $(S)_+$型映射构成(S)型映射类的凸子类.

集值$(S)_+$型映射(setvalued mapping of type $(S)_+$) 见"集值(S)型映射".

集值伪单调映射(setvalued pseudo-monotone mapping) 单值伪单调映射到集值映射情形的推广. 设 X 是自反巴拿赫空间,D 是 X 中的闭凸集,$T:D\to 2^{X^*}$ 具非空闭凸值. 若 T 是有限弱上半连续的,即 T 限制在 X 中的任何有限维线性子空间与 D 的交上是到 X^* 中的弱拓扑上半连续的,且 T 满足条件:由

$$\{x_n\}\subset D,\ x_n\xrightarrow{w}x_0,\ u_n\in Tx_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}\langle u_n,x_n-x_0\rangle\leqslant 0,\ y\in D$$

可以推出,$\exists\ u_0\in Tx_0$,使得

$$\langle u_0,x_0-y\rangle\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\langle u_n,x_n-y\rangle,$$

则称 T 为伪单调的. 闭凸集 D 上的具非空有界闭凸值的有限弱上半连续的集值单调映射或次上半连续的集值$(S)_+$型映射均是伪单调的.

集值(M)型映射(setvalued mapping of type (M)) 单值(M)型映射到集值映射情形的推广. 设 X 是自反巴拿赫空间,$T:X\to 2^{X^*}$ 具非空闭凸值且有限弱上半连续. 若有

$$\{x_n\}\subset X,\ x_n\xrightarrow{w}x_0,\ u_n\in Tx_n,\ u_n\xrightarrow{w}u_0$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle u_n,x_n-x_0\rangle\leqslant 0\Rightarrow u_0\in Tx_0,$$

则称 T 是(M)型的. 集值伪单调映射 $T:X\to 2^{X^*}$ 是(M)型的.

对偶映射(duality mapping) 由对偶关系确定的从巴拿赫空间到其对偶空间的集值映射. 设 X 是巴拿赫空间,X^* 为其对偶空间. 设 μ 是一个规范函数,即 $\mu:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$满足条件:$\mu(0)=0$, μ 严格递增,

$$\lim_{t\to+\infty}\mu(t)=+\infty.$$

定义集值映射 $J_\mu:X\to 2^{X^*}$ 为

$$J_\mu(x)=\{x^*\in X^*\mid\langle x^*,x\rangle=\|x^*\|\,\|x\|,\ \|x^*\|=\mu(\|x\|)\}.$$

这样定义的集值映射 J_μ 称为是以 μ 为规范函数的对偶映射. $\mu(t)=t$ 时对偶映射 J 称为标准对偶映射. 对偶映射是齐次的,此外有下述结论:

1. J 为满值$\Leftrightarrow X$ 是自反的.
2. J 为严格单调$\Leftrightarrow X$ 是严格凸的.
3. J 为单值映射$\Leftrightarrow X$ 是光滑的.
4. J 为线性算子$\Leftrightarrow X$ 是希尔伯特空间.

对于自反巴拿赫空间,总可取 X 中的等价范数使得 X 和 X^* 都是严格凸的,此时 $J:X\to X^*$ 是单值、严格单调、有界满值、次连续的$(S)_+$型映射.

集值增生映射(setvalued accretive mapping) 单值增生映射到集值映射情形的推广. 设 X 是巴拿赫空间,$D\subset X$,$T:D\to 2^X$ 具非空值. 设 $J:X\to 2^{X^*}$ 是正规对偶映射. 如果对任意的 $x,y\in X$,存在 $j(x-y)\in J(x-y)$,使得对任意的 $u\in Tx$,$v\in Ty$ 有

$$\langle u-v,j(x-y)\rangle\geqslant 0,$$

则称 T 为增生的. 若 T 为增生映射,且不存在另一增生映射 T_1 使得 graph(T)是 graph(T_1)的真子集,则称 T 为极大增生的.

单调型映射的满值性定理(surjectivity theorems for mappings of monotone type) 各类单调型映射在一定条件下具有满值性的定理. 这类定理很多,这里仅叙述最基本的强制单调型映射的满值性结果. 映射 $T:X\to 2^{X^*}$ 称为强制的,是指它满足条件

$$\lim_{\substack{\|x\|\to+\infty\\ x\in\mathrm{dom}(T)}}\frac{\langle Tx,x\rangle}{\|x\|}=+\infty.$$

特别地,当 dom(T)有界时,T 是强制的. 设 X 是自反巴拿赫空间,C 是 X 中的闭凸集,$T:C\to 2^{X^*}$ 是具非空值的极大单调映射,$P:C\to 2^{X^*}$ 是有界强制伪单调映射,则 $T+P$ 满值,即$(T+P)(C)=X^*$. 由此定理,可推出下述结论:有界强制伪单调映射 $P:X\to 2^{X^*}\setminus\{\varnothing\}$是满值的. 若 T_1 和 $T_2:X\to 2^{X^*}$ 极大单调,$\mathrm{dom}(T_2)=X$,T_2 是有界与强制的,则 T_1+T_2 满值. 有界强制极大单调映射 $T:X\to 2^{X^*}\setminus\{\varnothing\}$是满值的.

非光滑分析(nonsmooth analysis) 对在经典意义下不可微的映射建立的广义微分学. 凸分析是非光滑分析的第一步,其奠基性的工作属于莫里奥(Moreau, J. J.)与洛卡费勒(Rockafellar, R. T.). 在非凸映射的多种广义微分的概念中,最著名的是克拉克(Clarke, F. H.)提出的广义梯度与广义雅可比. 奥邦(Aubin, J. P.)等人对于集值映射提出了多种广义微分的概念. 由于广义微分的概念通常与集值映射相联系,因此非光滑分析亦被称为集值

分析. 有关非光滑分析方面的具体内容详见本卷"凸分析"同名条.

概率度量空间(probabilistic metric space) 以分布函数作为度量尺度的一种广义度量空间. 若函数 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}^+$ 是非减的, 右连续的,

$$\inf_{t\in\mathrm{R}} f(t)=0 \text{ 且 } \sup_{t\in\mathrm{R}} f(t)=1,$$

则称 f 为一个分布函数. 用 $\mathscr{D}$ 表示一切分布函数所组成之集. 用 $H(t)$ 表示由 $H(t)=0(\forall t\leqslant 0)$, $H(t)=1(\forall t>0)$ 所定义的这一特殊的分布函数. 设 E 是集合, 映射 $F:E\times E\to\mathscr{D}$. 记 $F(x,y)$ 为 $F_{x,y}$, $F_{x,y}(t)$ 表示 $F_{x,y}$ 在 $t\in\mathrm{R}$ 的值, 称 F 为 E 上的一个概率度量, 如果 F 满足下述条件:

1. $F_{x,y}(0)=0(\forall x,y\in E)$.
2. $F_{x,y}(t)=H(t)\Leftrightarrow x=y$.
3. $F_{x,y}=F_{y,x}(\forall x,y\in E)$.
4. 若有 $x,y,z\in E$ 及 $t_1,t_2\in\mathrm{R}$, 使得 $F_{x,y}(t_1)=1$, $F_{y,z}(t_2)=1$, 则 $F_{x,z}(t_1+t_2)=1$.

集合 E 连同其上指定的一个概率度量 F 称为概率度量空间, 简称 PM 空间, 记为 (E,F). $F_{x,y}(t)$ 可理解为 x 到 y 的距离小于 t 的概率. 若 (E,d) 是一度量空间, 令

$$F_{x,y}(t)=H(t-d(x,y)),$$

则 (E,F) 为概率度量空间. 在此意义下, 度量空间可视为特殊的概率度量空间. 概率度量空间的概念首先由门杰(Menger, K.)于 1942 年提出.

三角范数(triangle norms) 亦称 t 范数. 一种定义在正方形上在单位闭区间中取值的具有特殊性质的函数, 它是研究概率度量的三角不等式的重要工具. 指的是满足下述条件的函数 $\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$:

1. $\Delta(a,1)=a$, $\Delta(0,0)=0$.
2. $\Delta(a,b)=\Delta(b,a)$.
3. $\Delta(c,d)\geqslant\Delta(a,b)$, 当 $c\geqslant a$, $d\geqslant b$.
4. $\Delta(\Delta(a,b),c)=\Delta(a,\Delta(b,c))$, 其中 $a,b,c,d\in[0,1]$.

两个三角范数 Δ 与 Δ' 若有关系 $\Delta\leqslant\Delta'$, 即 $\Delta(a,b)\leqslant\Delta'(a,b)(\forall(a,b)\in[0,1]\times[0,1])$, 则称 Δ 弱于 Δ', 或称 Δ' 强于 Δ. 下述是三个最简单的常用到的三角范数:

$\Delta_1(a,b)=\max\{a+b-1,0\}$;

$\Delta_2(a,b)=ab$;

$\Delta_3(a,b)=\min\{a,b\}$.

显然, $\Delta_1\leqslant\Delta_2\leqslant\Delta_3$. 在全体三角范数中, Δ_3 是最强的.

门杰空间(Menger space) 规定了三角范数且满足门杰广义三角不等式的概率度量空间. 设 (E,F) 是概率度量空间, Δ 是一个三角范数. 若成立下述门杰广义三角不等式, 即"概率度量空间"定义中 4 的推广:

$$4'.\ F_{x,z}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(F_{x,y}(t_1),F_{y,z}(t_2))$$
$$(\forall x,y,z\in E;t_1,t_2\geqslant 0),$$

则称 (E,F,Δ) 为门杰概率度量空间, 简称门杰空间.

瓦尔德空间(Wald space) 满足瓦尔德广义三角不等式的概率度量空间. 设 (E,F) 是概率度量空间. 若 F 满足下述瓦尔德广义三角不等式

$$F_{x,z}(t)\geqslant[F_{x,y}*F_{y,z}](t)$$
$$(\forall x,y,z\in E;t\geqslant 0),$$

则称 (E,F) 为瓦尔德概率度量空间, 简称瓦尔德空间. 其中 $*$ 表示卷积, 定义为

$$[F_{x,y}*F_{y,z}](t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,y}(t-s)\mathrm{d}F_{y,z}(s)$$
$$=\int_0^t F_{x,y}(t-s)\mathrm{d}F_{y,z}(s).$$

瓦尔德空间由瓦尔德(Wald, A.)的工作而得名. 施维则(Schweizer, B.)和斯克拉(Sklar, A.)于 1960 年证明了瓦尔德空间是以 Δ_2 为三角范数的门杰空间.

概率度量空间中的收敛序列(convergent sequence in probabilistic metric space) 在概率度量意义下收敛的序列. 设 (E,F) 是 PM 空间, 而 $\{x_n\}\subset E$, $x\in E$. 如果对任给的 $\varepsilon>0$ 与 $\lambda>0$, 存在正整数 $N=N(\varepsilon,\lambda)$, 使当 $n\geqslant N$ 时有 $F_{x_n,x}(\varepsilon)>1-\lambda$, 则称 E 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 E 中的点 x, 记为 $x_n\to x$. $x_n\to x$ 的充分必要条件是:

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,x}(t)=H(t)\quad(\forall t\in\mathrm{R}).$$

设 $\{x_n\}\subset E$, 若对任给的 $\varepsilon>0$ 与 $\lambda>0$, 存在正整数 $N=N(\varepsilon,\lambda)$, 使当 $n,m\geqslant N$ 时, 有 $F_{x_n,x_m}(\varepsilon)\geqslant 1-\lambda$, 则称 $\{x_n\}$ 为 E 中的一个柯西列. 若 E 中每个柯西列均为 E 中的收敛序列, 则称 (E,F) 为完备的概率度量空间.

概率度量空间中的柯西列(Cauchy sequence in probabilistic metric space) 见"概率度量空间中的收敛序列".

完备的概率度量空间(complete probabilistic metric space) 见"概率度量空间中的收敛序列".

概率度量空间中的连续映射(continuous mapping on probabilistic metric spaces) 在概率度量空间中映收敛列为收敛列的映射. 设 (E,F) 与 $(\widetilde{E},\widetilde{F})$ 为两个 PM 空间. $f:E\to\widetilde{E}$ 是映射, $x\in E$. 若由 $x_n\to x$ 可推出 $f(x_n)\to f(x)$, 则称 f 在点 x 连续. 若 f 在 E 中每点均连续, 则称 f 在 E 上连续.

概率度量空间中的等距(isometry on probabilistic metric spaces) 在概率度量意义下的等

距. 设(E,F)与$(\widetilde{E},\widetilde{F})$为两个 PM 空间. 若存在满映射 $f:E\to\widetilde{E}$ 使得

$$\widetilde{F}_{f(x),f(y)} = F_{x,y} \quad (\forall x,y \in E),$$

则称(E,F)与$(\widetilde{E},\widetilde{F})$为等距的 PM 空间,映射 f 称为从(E,F)到$(\widetilde{E},\widetilde{F})$上的一个等距.

概率赋范线性空间(probabilistic normed linear space) 赋范线性空间的概念到概率度量空间情形的推广. 设 E 是实线性空间,$\mathscr{D}$ 为分布函数集,$F:E\to\mathscr{D}$ 是映射. 记 $F_x=F(x)$及

$$F_x(t)=(F(x))(t).$$

如果 F 满足下述条件:

1. $F_x(0)=0(\forall x\in E)$;
2. $F_x(t)=H(t)(\forall t\in\mathrm{R})\Leftrightarrow x=0$;
3. $F_{ax}(t)=F_x\left(\dfrac{t}{|a|}\right)(\forall x\in E,a\neq 0)$;
4. 设 $x,y\in E,t_1,t_2\in\mathrm{R}$,由 $F_x(t_1)=1$ 和 $F_y(t_2)=1$ 可推出

$$F_{x+y}(t_1+t_2)=1;$$

那么称(E,F)为一概率赋范线性空间,简称 PN 空间,这时 F 称为 E 上的概率范数. 在 PN 空间中,可定义概率度量为 $F_{x,y}=F_{x-y}$,则它成为 PM 空间.

门杰概率赋范线性空间(Menger probabilistic normed linear space) 满足门杰广义三角不等式的 PN 空间. 设(E,F)是 PN 空间,Δ 为三角范数,若有

$$F_{x+y}(t_1+t_2)\geqslant \Delta(F_x(t_1),F_y(t_2))$$
$$(\forall x,y\in E,t_1,t_2\in\mathrm{R}^+),$$

则称(E,F,Δ)为门杰概率赋范线性空间,简称门杰 PN 空间. 当 Δ 连续时,由邻域系

$$\{U_y(\varepsilon,\lambda)\mid y\in E,\varepsilon>0,\lambda>0\}$$
$$=\{y+U_\theta(\varepsilon,\lambda)\mid y\in E,\varepsilon>0,\lambda>0\}$$

导出 E 中的豪斯多夫拓扑 $\mathscr{T}$,使$(E,\mathscr{T})$成为拓扑线性空间,其中

$$U_\theta(\varepsilon,\lambda)=\{x\in E\mid F_x(\varepsilon)>1-\lambda\}.$$

在$(E,\mathscr{T})$中点列 $x_n\to x$ 的充分必要条件是:

$$\lim_{n\to\infty} F_{x_n-x}(t)=H(t)\quad(\forall t\in\mathrm{R}).$$

瓦尔德概率赋范线性空间(Wald probabilistic normed linear space) 满足瓦尔德广义三角不等式的 PN 空间. 设(E,F)为 PN 空间,若有

$$F_{x+y}(t)\geqslant[F_x * F_y](t)\quad(\forall x,y\in E,t\geqslant 0),$$

则称(E,F)为瓦尔德概率赋范线性空间,简称瓦尔德 PN 空间,其中卷积 * 定义为

$$[F_x * F_y](t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_x(t-s)\mathrm{d}F_y(s)$$
$$=\int_0^t F_x(t-s)\mathrm{d}F_y(s).$$

概率度量空间上的压缩映射(contractive mapping on probabilistic metric space) 度量空间中压缩映射概念到概率度量空间情形的推广. 设(E,F)是 PM 空间,f 是 E 到其自身的映射. 若存在 $k\in(0,1)$,使得

$$F_{f(x),f(y)}\geqslant F_{x,y}\left(\frac{t}{k}\right)\ (\forall x,y\in E),$$

则称 f 为(严格)压缩的. 此概念首先由塞戈尔-巴鲁查-拉德(Sehgal, V. M. Bharucha, A. T. -Reid)于 1972 年引入,并证明了下述不动点定理:设(E,F,Δ)为完备的门杰 PM 空间,且 Δ 满足条件:$\Delta(t,t)\geqslant t(\forall t\in[0,1])$,则任一(严格)压缩映射 $T:E\to E$ 在 E 中存在惟一不动点 $\bar{x}$,而且以任一 $x_0\in E$ 为初值的迭代序列$\{T^n x_0\}$均收敛于 $\bar{x}$.

概率直径(probabilistic diameter) 对概率度量空间中的子集提出的用分布函数描述的一种"直径"的概念. 设(E,F)是 PM 空间,$A\subset E$. A 的概率直径记为 D_A,是由下式定义的一个分布函数:

$$D_A(t)=\sup_{s<t}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(s)\quad(\forall t\in\mathrm{R}).$$

若有 $\sup\{D_A(t)\mid t\in\mathrm{R}\}=1$,则称 A 为概率有界的.

概率有界集(probabilistic bounded subset) 见"概率直径".

概率预紧集(probabilistic precompact subset) 度量空间中的预紧集概念到概率度量空间情形的推广. 设(E,F)是 PM 空间,A 是 E 中的概率有界集. 若对于任给的 $\varepsilon>0$ 与 $\lambda>0$,存在 A 的有限覆盖$\{A_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$使得

$$D_{A_i}(\varepsilon)>1-\lambda\ (i=1,2,\cdots,n),$$

则称 A 为 E 中的概率预紧集.

概率非紧性测度(probabilistic measures of noncompactness) 度量空间中的非紧性测度概念到概率度量空间情形的推广. 设(E,F)是 PM 空间. 对于 E 中的概率有界集 A,定义 A 的库拉托夫斯基概率非紧性测度为由下式确定的分布函数 α_A,$\alpha_A(t)=\sup\{\varepsilon>0\mid$存在 A 的有限覆盖$\{A_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$,使得 $D_{A_i}(t)\geqslant\varepsilon,i=1,2,\cdots,n\}$.

α 有下述性质:(其中 A,B 为 E 中概率有界集).

1. $\alpha_A\geqslant D_A$.
2. 若 $A\neq\varnothing$,$A\subset B$,则 $\alpha_A\geqslant\alpha_B$.
3. $\alpha_{A\cup B}(t)=\min\{\alpha_A(t),\alpha_B(t)\}(\forall t\in\mathrm{R})$.
4. $\alpha_A=\alpha_{\bar{A}}$,其中 $\bar{A}$ 为 A 的闭包.
5. $\alpha_A=H\Leftrightarrow A$ 为概率预紧集.

库拉托夫斯基概率非紧性测度的概念由博克桑(Bocsan, G.)等人于 1973 年引入.

设(E,F,Δ)是门杰空间. 对于 E 中的非空子集 A 与 B,定义 A 与 B 间的概率距离 $F_{A,B}\in\mathscr{D}$ 为

$$F_{A,B}(t)=\sup_{s\leqslant t}\Delta(\inf_{x\in A}\sup_{y\in B}F_{x,y}(s),\inf_{y\in B}\sup_{x\in A}F_{x,y}(s)).$$

现对于(E,F,Δ)中的概率有界子集A，定义A的豪斯多夫概率非紧性测度$\psi_A\in\mathscr{D}$为

$$\psi_A(t)=\sup\{\varepsilon>0\mid 存在E中的有限集合S使得F_{A,S}(t)>\varepsilon\}\ (\forall t\in\mathrm{R}).$$

ψ具有与α类似的性质.

概率集压缩映射(probabilistic set contractive mapping)　度量空间中的集压缩映射概念到概率度量空间情形的推广.设(E,F,Δ)是门杰空间，f：$E\to E$是映射，α表示E中的库拉托夫斯基概率非紧性测度.若存在常数$k\in(0,1)$使得对E中每个概率有界集A，有$\alpha_{f(A)}(t)\geqslant\alpha_A(t/k)(\forall t\in\mathrm{R})$，则称$f$为$E$上的概率$\alpha$-$k$-集压缩映射.若对于$E$中每个概率有界集$A$，有$\alpha_{f(A)}(t)>\alpha_A(t/k)(\forall t\in\mathrm{R})$，则称$f$为$E$上的概率$\alpha$凝聚映射.在上述定义中，若将$\alpha$换为豪斯多夫概率非紧性测度$\psi$，则得相应的概率$\psi$-$k$-集压缩映射与概率$\psi$凝聚映射的概念.

概率凝聚映射(probabilistic condensing mapping)　见“概率集压缩映射”.

非线性分析拓扑与变分方法

拓扑度(topological degree)　对算子方程解的个数给出某种估计的一种同伦不变量.映射T在区域Ω上关于点p的拓扑度$\deg(T,\Omega,p)$是一个整数，它是方程$T(x)=p$在Ω中解的“代数个数”的某种稳定的度量.1912年，布劳威尔(Brouwer,L.E.J.)对有限维空间中的连续映射用代数拓扑的方法建立了拓扑度，它是整个拓扑度理论的出发点.1934年，勒雷(Leray,J.)与绍德尔(Schauder,J.P.)对巴拿赫空间中的全连续向量场建立了拓扑度，它在微分方程与积分方程中有着广泛的应用，成为拓扑度理论发展史上的新的里程碑.通过众多数学家的努力，现已对许多映射类(包括集值映射类)建立了拓扑度理论.拓扑度理论现已成为研究非线性问题的基本方法之一，被称为非线性分析的拓扑方法.

布劳威尔度(Brouwer degree)　对有限维空间中的连续映射建立的拓扑度.设X是有限维(实)赋范线性空间，Ω是X中的有界开集，$f:\overline{\Omega}\to X$是连续映射，$p\in X\setminus f(\partial\Omega)$.那么可定义一个整数，记为$\deg(f,\Omega,p)$，称之为$f$在$\Omega$上对点$p$的拓扑度.它具有下述基本性质：

1.标准性.当$p\in\Omega$时，$\deg(I,\Omega,p)=1$，其中I为X上的恒同映射.

2.区域可加性.若Ω_1,Ω_2是Ω的不交开子集，$p\in X\setminus f(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p).$$

3.双同伦不变性.若$h:\overline{\Omega}\times[0,1]\to X$连续及$\theta:[0,1]\to X$连续，且$\theta(t)\notin h_t(\partial\Omega)(\forall t\in[0,1])$，其中$h_t(\cdot)=h(\cdot,t)$，则$\deg(h_t,\Omega,\theta(t))$与$t\in[0,1]$无关.

布劳威尔度具有惟一性，即对于有限维空间中的连续映射而言，具有上述三性质的整值函数deg是惟一确定的.

性质3等价于下述两性质4和5：

4.同伦不变性.若$h:\overline{\Omega}\times[0,1]\to X$连续，且$p\notin h_t(\partial\Omega)(\forall t\in[0,1])$，则$\deg(h_t,\Omega,p)$与$t$无关.

5.平移不变性.若$f:\overline{\Omega}\to X$连续，$p\notin f(\partial\Omega)$，令$g(x)=f(x)-p$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,0).$$

由度数的上述基本性质还可推出下面一些性质：

6.平凡性.若$p\notin f(\overline{\Omega})$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=0.$$

7.可解性.若$\deg(f,\Omega,p)\neq 0$，则存在$x\in\Omega$，使得$f(x)=p$.

8.切除性.设有闭集$K\subset\overline{\Omega}$，$p\notin f(K)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega\setminus K,p).$$

9.边界值性.设f与$g:\overline{\Omega}\to X$是两个连续映射，且当$x\in\partial\Omega$时，$f(x)=g(x)$，则对任意的$p\notin f(\partial\Omega)$，有$\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$.

10.连通区性.若p与q属于$X\setminus f(\partial\Omega)$的同一连通分支，则$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega,q)$.

11.缺方向性质.若存在$y_0\in X,y_0\neq 0$，使$f(x)\neq p+ty_0(\forall x\in\partial\Omega,t\geqslant 0)$，则

$$\deg(f,\Omega,p)=0.$$

12.锐角原理.设$0\in\Omega$，$f:\overline{\Omega}\to X$连续.若当$x\in\partial\Omega$时，$\langle f(x),x\rangle>0$，则$\deg(f,\Omega,0)=1$.

13.降维性质.若f映$\overline{\Omega}$入X的某个低维空间，则对任何$p\in X\setminus f(\partial\Omega)$，有$\deg(f,\Omega,p)=0$.

由平移不变性，不妨设$p=0$而研究度数$\deg(f,\Omega,0)$.若$x_0\in\Omega$是f的孤立零点，即$f(x_0)=0$，且存在x_0的某邻域$U\subset\Omega$，使得f在U中无其他零点.这时$\deg(f,U,0)$有意义，且与x_0的充分小的邻域U的选取无关，这个度数记为$\mathrm{index}[f,x_0]$，称之为孤立零点x_0的(拓扑)指数.若f在Ω中的零点均是孤立的，则其零点个数为有限，设为$\{x_i\mid i=1,2,\cdots,k\}$.这时有

$$\deg(f,\Omega,0)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{index}[f,x_i].$$

若零点x_0是C^1映射f的正则点，则

$$\mathrm{index}[f,x_0]=\mathrm{sgn}\det f'(x_0)=(-1)^{\beta},$$

其中β为线性算子$f'(x_0)$的所有负特征值的代数重数之和.由边界值性质，$\deg(f,\Omega,0)$仅与f在

$\partial\Omega$ 上的值有关. 因此,对于连续映射 $f:\partial\Omega\to X\setminus\{0\}$,令 $\tilde{f}$ 为 f 在 $\bar{\Omega}$ 上的任一连续延拓,则 $\deg(\tilde{f},\Omega,0)$ 有意义且与 $\tilde{f}$ 的选取无关. 这个度数记为 $\gamma(f,\partial\Omega)$,称之为 f 在 $\partial\Omega$ 上的旋度. 旋度与拓扑度表达方式不同,实质相同.

孤立零点的指数(index of isolated zero point) 见"布劳威尔度".

旋度(rotation) 见"布劳威尔度".

锐角原理(acute angle principle) 见"布劳威尔度".

勒雷-绍德尔度(Leray-Schauder degree) 对无穷维赋范线性空间中的全连续向量场建立的拓扑度. 设 X 是赋范线性空间,Ω 是 X 中的有界开集,$F:\bar{\Omega}\to X$ 全连续,$f=I-F$ 是全连续向量场,$p\in X\setminus f(\partial\Omega)$,那么,距离 $\mathrm{dist}(p,f(\partial\Omega))=\varepsilon>0$. 取 X 的有限维线性子空间 X_n 与连续映射 $F_n:\bar{\Omega}\to X_n$,使得 $p\in X_n$,且 $\|F(x)-F_n(x)\|<\varepsilon(\forall x\in\bar{\Omega})$. 这时,布劳威尔度 $\deg(I-F_n,\Omega\cap X_n,p)$ 有意义,且与 X_n 和 F_n 的选取无关,把它作为 f 在 Ω 上关于点 p 的拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$ 的定义,此即勒雷-绍德尔度. 勒雷-绍德尔度具有与布劳威尔度类似的性质(降维性质除外),其中同伦不变性为:设 $h:\bar{\Omega}\times[0,1]\to X$ 全连续,若 $h(x,t)\neq p(\forall x\in\partial\Omega,\forall t\in[0,1])$,则 $\deg(I-h_t,\Omega,p)$ 与 $t\in[0,1]$ 无关.

紧支撑向量场的拓扑度(topological degree for compactly supported vector field) 勒雷-绍德尔度到紧支撑向量场的推广. 设 X 是巴拿赫空间,Ω 是 X 中的有界开集,$F:\bar{\Omega}\to X$ 是连续的紧支撑映射,$0\notin(I-F)(\partial\Omega)$. 设紧凸集 C 是 F 在 $\bar{\Omega}$ 上的支撑集,那么 $F|_{C\cap\bar{\Omega}}:C\cap\bar{\Omega}\to C$ 全连续. 设 $\tilde{F}$ 是 $F|_C\cap\bar{\Omega}$ 到 X 上的全连续延拓. 定义

$$\deg(I-F,\Omega,0)=\deg(I-\tilde{F},\Omega,0),$$

其中右端为勒雷-绍德尔度. 这样定义的度 $\deg(I-F,\Omega,0)$ 是合理的,且具有度数的基本性质,其中同伦不变性表述如下:设 $h:\bar{\Omega}\times[0,1]\to X$ 连续,对每个 $t\in[0,1]$,$h_t:\bar{\Omega}\to X$ 是紧支撑映射,且诸 h_t 有公共的紧支撑集 C. 若

$$h(x,t)\neq x\quad(\forall\,(x,t)\in\partial\Omega\times[0,1]),$$

则 $\deg(I-h_t,\Omega,0)$ 与 t 无关.

集压缩向量场、凝聚向量场及终归紧向量场,作为紧支撑向量场的特例,它们的拓扑度均有意义,并分别具有其特殊的性质,其特殊性主要表现在具有特殊的同伦不变性. 例如,凝聚向量场的拓扑度的同伦不变性表述如下:设 $h:\bar{\Omega}\times[0,1]\to X$ 连续有界,$h(x,t)\neq x(\forall(x,t)\in\partial\Omega\times[0,1])$,若 h 关于非紧性测度 ψ 是一致凝聚的,即对 $\bar{\Omega}$ 中的每个非相对紧集 M,有

$$\psi(\bigcup_t h_t(M))<\psi(M),$$

则 $\deg(I-h_t,\Omega,0)$ 与 t 无关.

集压缩向量场的拓扑度(topological degree for set contractive vector field) 见"紧支撑向量场的拓扑度".

凝聚向量场的拓扑度(topological degree for condensing vector field) 见"紧支撑向量场的拓扑度".

终归紧向量场的拓扑度(topological degree for ultimately compact vector field) 见"紧支撑向量场的拓扑度".

锥映射的拓扑度(topological degree for cone mapping) 通常空间中映射的拓扑度到锥映射情形的推广或变种,是研究方程正解的重要工具. 锥上的全连续向量场的拓扑度定义如下:设 P 是巴拿赫空间 X 中的闭凸锥,Ω 是 P 中的有界相对开集,$F:\bar{\Omega}\to P$ 全连续,且 $F(x)\neq x(\forall x\in\partial\Omega)$,这里 $\partial\Omega$ 为 Ω 在 P 中的相对边界. 取 X 中的有界开集 Ω^*,使得 $\Omega^*\cap P=\Omega,\partial\Omega^*\cap P=\partial\Omega$. 设 $F^*:X\to P$ 是 F 在 X 上的全连续延拓. 定义

$$\deg(I-F,\Omega,0)=\deg(I-F^*,\Omega^*,0),$$

其中右端为勒雷-绍德尔度.

这样定义的度 $\deg(I-F,\Omega,0)$ 有意义且具有勒雷-绍德尔度类似的性质. 用类似的办法可对锥上的集压缩向量场、锥上的凝聚向量场、锥上的紧支撑向量场等建立拓扑度理论.

逼近固有映射的广义度(generalized degree for approximating proper mapping) 用一列布劳威尔度逼近的产物. 这种广义度一般不再是一个单值整数,而是一个由某些整数或 $\pm\infty$ 组成的集合. 设 X,Y 是巴拿赫空间,$\Gamma=\{\{X_n\},\{P_n\};\{Y_n\},\{Q_n\}\}$ 是 (X,Y) 的一个允许逼近格式,Ω 为 X 中的有界开集,$T:\bar{\Omega}\to Y$ 是关于 Γ 的逼近固有映射,$p\in Y\setminus T(\partial\Omega)$. 这时,对每个充分大的 n,布劳威尔度 $\deg(T_n,\Omega_n,Q_np)$ 有意义. 定义 T 在 Ω 上对点 p 的广义度为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Deg}(T,\Omega,p)\\&=\{\gamma\mid\exists\ n_j\to\infty\text{使得}\lim_{n_j\to\infty}\deg(T_{n_j},\Omega_{n_j},Q_{n_j}p)=\gamma\}.\end{aligned}$$

广义度有下述基本性质:

1. 可解性. 若 $\mathrm{Deg}(T,\Omega,P)\neq\{0\}$,则存在 $x\in\Omega$,使得 $T(x)=p$.

2. 可加性. 若 Ω_1 和 Ω_2 是 Ω 的不交开子集,且 $p\notin T(\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$,则

$$\mathrm{Deg}(T,\Omega,p)\subset\mathrm{Deg}(T,\Omega_1,p)+\mathrm{Deg}(T,\Omega_2,p).$$

当上式右端有一项为单值时成立等号.

3. 同伦不变性. 设 $H:\bar{\Omega}\times[0,1]\to Y$ 满足条件:

1）当 n 充分大时，$H_n:\overline{\Omega}_n\times[0,1]\to Y_n$ 连续，其中 $H_n(x,t)=Q_nH(P_nx,t)(\forall\ x\in\overline{\Omega}_n,t\in[0,1])$.

2）若有 $n_j\to+\infty,x_{n_j}\in\overline{\Omega}_{n_j},t_{n_j}\in[0,1]$，使得 $\|H_{n_j}(x_{n_j},t_{n_j})-Q_{n_j}p\|\to 0$，则存在 n_j 的子列 $n_{j_k}\to+\infty$ 与 $x\in\overline{\Omega}$ 及 $t\in[0,1]$，使得

$$x_{n_{j_k}}\to x,\quad t_{n_{j_k}}\to t,$$

且 $H(x,t)=p$.

3）$p\notin H(x,t)(\forall x\in\partial\Omega,t\in[0,1])$，

则 $\deg(H_t,\Omega,p)$ 与 t 无关.

有限维流形上映射的拓扑度(topological degree for mapping on finite dimensional manifold) 布劳威尔度在有限维流形上映射情形的变种形式. 设 M 和 N 是两个 n 维定向流形，Ω 是 M 中的开集，$f:\Omega\to N$ 连续固有，则对任意的 $p\in N$，可定义拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$. 特别地，当 M 紧且 N 连通时，度数 $\deg(f,M,p)$ 与 $p\in N$ 的选取无关. 常简记为 $\deg(f)$，亦称为 f 的映射度.

弗雷德霍姆映射的拓扑度(topological degree for Fredholm mapping) 对巴拿赫流形间的固有的零指标或正指标弗雷德霍姆映射建立的拓扑度. 设 M 与 N 是两个巴拿赫流形，其模空间分别为 X 与 Y，Ω 为 M 中的开集，$f:\overline{\Omega}\to N$ 是固有的零指标弗雷德霍姆映射，$p\in N\backslash f(\partial\Omega)$. 由 f 的固有性及 f 在每点的通过局部坐标变换可表为全连续向量场 $I-K$ 的形式，其中 K 为有限维值映射，可对 f 定义一种拓扑度. 但由于局部坐标变换选取的不同，只能得到模 2 度 $\deg_2(f,\Omega,p)$. 如果 M 和 N 还是定向的，并对 M 和 N 上的局部坐标系加以限制，即赋予所谓弗雷德霍姆结构，这时可定义整数度 $\deg(f,\Omega,p)$. 对固有的正指标弗雷德霍姆映射也可建立度理论，但这种度不再是整数，而是一个庞特里亚金标架协边类.

叠合度(coincidence degree) 亦称重合度. 为了讨论方程 $Lx=Nx$ 的解，利用勒雷-绍德尔度来定义的一种度. 这里 $L:\mathrm{dom}\,L\subset X\to Z$ 是零指标的弗雷德霍姆线性算子，$N:\overline{\Omega}\subset X\to Z$ 是非线性算子，X,Z 是巴拿赫空间，Ω 是 X 中有界开集. 由假定可知，存在有限维子空间 $N_0\subset Z$ 与商空间 $Z/\mathrm{Im}\,L$ 同构，且存在连续投影算子 $P:X\to\ker L,Q:Z\to N_0$ 满足 $\mathrm{Im}\,P=\ker L,\ker Q=\mathrm{Im}\,L,X=\ker L\oplus\ker P,Z=\mathrm{Im}\,L\oplus\mathrm{Im}\,Q$. 记 $K_P:\mathrm{Im}\,L\to\mathrm{dom}\,L\cap\ker P$ 为 L 在 $\mathrm{dom}\,L\cap\ker P$ 上的限制的逆算子，并令 $K_{P,Q}=K_P(I-Q):Z\to\mathrm{dom}\,L\cap\ker P$，这里 I 为恒同映射. 设 $J:\mathrm{Im}\,Q\to\ker L$ 是一同构，并令 $H_{J,P,Q}=JQ+K_{P,Q}:Z\to\mathrm{dom}\,L$. 设 N 是 L 紧的(即 $QN:\overline{\Omega}\to Z$ 和 $K_{P,Q,N}:\overline{\Omega}\to X$ 都是紧的)且 $0\notin F(\mathrm{dom}\,L\cap\partial\Omega)$，这里 $F=L-N$. 于是，易知 $H_{J,P,Q}=I-A$，其中 $A=P+JQN+K_{P,Q}N:\overline{\Omega}\to X$ 是全连续算子，且 $0\notin(I-A)(\partial\Omega)$，故勒雷-绍德尔度 $\deg(I-A,\Omega,0)$ 存在，它就定义为 F 在 Ω 上关于 L 的叠合度，记为 $D_L(F,\Omega)$. 可证 $D_L(F,\Omega)$ 与 P,Q 以及 J(保持定向)的选择无关，并具有可加性、同伦不变性、可解性等性质. 例如，可解性指的是：若 $D_L(F,\Omega)\neq 0$，则 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{dom}\,L\cap\Omega$ 中有解. 叠合度是讨论非线性常微分方程边值问题的一个有力工具.

重合度(coincidence degree) 即"叠合度".

博苏克-乌拉姆定理(Borsuk-Ulam theorem) 关于有限维空间中的连续奇映射的著名定理. 设 X 和 Y 是有限维赋范线性空间，且 $\dim Y<\dim X$，S 为 X 中的单位球面，$f:S\to Y$ 为连续奇映射($f(-x)=-f(x),\forall x\in S$)，则存在 $x\in S$ 使 $f(x)=0$. 换言之，不存在降维的无零点的连续奇映射 $f:S\to Y$. 这个定理的一个等价形式是：若 $f:S\to Y$ 连续，则存在 $x\in S$ 使 $f(x)=f(-x)$. 这个定理的度数表达形式是：设 Ω 为 X 中的单位开球(或一般地，Ω 为 X 中含原点的有界对称开集)，$f:\overline{\Omega}\to X$ 连续，f 在 $\partial\Omega$ 上为奇映射，且 $0\notin f(\partial\Omega)$，则 $\deg(f,\Omega,0)$ 是奇数. 简言之，即奇映射的度数是奇数.

上述定理首先由博苏克(Borsuk,K.)于 1933 年得到，常简称博苏克定理. 博苏克定理有许多推广的形式. 例如奇的全连续向量场(或凝聚向量场)的度数是奇数，奇的逼近固有映射的广义度不含偶数. 另一方面，奇映射即在群 $\mathbf{Z}_2$ 作用下等变的映射. 若考虑在其他某些紧群(如 $\mathbf{Z}_p$ 群，p 为素数，S^1 群)作用下的等变映射，可有相应的博苏克定理.

霍普夫同伦分类定理(Hopf homotopy classification theorem) 布劳威尔度的同伦不变性定理的一个逆定理. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位开球，$f,g:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 连续，$0\notin f(\partial\Omega),0\notin g(\partial\Omega)$. 若 $\deg(f,\Omega,0)=\deg(g,\Omega,0)$，则 f 与 g 非退化同伦，即存在连续映射 $H:\overline{\Omega}\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$，使得 $H_0=f,H_1=g$，且 $0\notin H(\partial\Omega\times[0,1])$. 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面，$f,g:S\to S$ 是两个连续映射，霍普夫定理可表述为：

$$\deg(f)=\deg(g)\Leftrightarrow f\simeq g.$$

此定理由霍普夫(Hopf,H.)于 1927 年得到.

杜俊基延拓定理(Dugundji extension theorem) 蒂茨(Tietze,H.)关于实函数的延拓定理到无穷维空间中映射情形的一种推广. 设 X 是度量空间，D 为 X 中的闭集，Y 为局部凸拓扑线性空间，$f:D\to Y$ 连续，则存在 f 的连续延拓 $\tilde{f}:X\to\overline{\mathrm{co}}f(D)$. 此定理由杜俊基(Dugundji,J.)于 1951 年得到.

不动点理论(fixed point theory) 研究自映射的不动点的理论. 设有映射 $F:D\subset X\to X$. 若有点 $x\in D$ 使得 $F(x)=x$,则 x 称为映射 F 的一个不动点. 确定映射在某条件下存在不动点的定理称为不动点定理. 各种不动点定理构成不动点理论的基本内容.

不动点(fixed point) 见“不动点理论”.

不动点指数(fixed point index) 与拓扑度类似的用以刻画映射的不动点的“代数个数”的同伦不变量. 映射 $F:\Omega\subset X\to X$ 在区域 Ω 中的不动点指数,记为 $i(F,\Omega)$,反映了 F 在 Ω 中的不动点的“代数个数”. 若 X 是线性空间,则 F 的不动点即向量场 $f=I-F$ 的零点. 当拓扑度 $\deg(I-F,\Omega,0)$ 有意义时,不动点指数 $i(F,\Omega)$ 也有意义,且 $i(F,\Omega)=\deg(I-F,\Omega,0)$. 设 X 是有限维赋范线性空间,Ω 是 X 中的有界开集,$F:\overline{\Omega}\to X$ 连续,F 在 $\partial\Omega$ 上无不动点,这时布劳威尔不动点指数 $i(F,\Omega)$ 有意义,它等于布劳威尔度 $\deg(I-F,\Omega,0)$. $i(F,\Omega)$ 有下述基本性质:

1. 标准性. 设 $F(x)\equiv p$,则 $p\in\Omega$ 时,$i(F,\Omega)=1$. 当 $p\notin\overline{\Omega}$ 时,$i(F,\Omega)=0$.

2. 可加性. 设 Ω_1 和 Ω_2 是 Ω 中的不交开子集,若 F 在 $\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)$ 中无不动点,则

$$i(F,\Omega)=i(F,\Omega_1)+i(F,\Omega_2).$$

3. 同伦不变性. 设 $H:\overline{\Omega}\times[0,1]\to X$ 连续,若 $H(x,t)\neq x(\forall x\in\partial\Omega,t\in[0,1])$,则 $i(H_t,\Omega)$ 与 t 无关.

由此特别推出:若 $i(F,\Omega)\neq 0$,则 F 在 Ω 中存在不动点. 类似地,对于全连续映射,可定义勒雷-绍德尔不动点指数. 对于集压缩映射、凝聚映射、紧支撑映射等,均可定义相应的不动点指数. 利用不动点指数或拓扑度理论,可以得到许多不动点定理或零点存在定理.

巴拿赫不动点定理(Banach fixed point theorem) 关于压缩映射的不动点定理. 设 (X,d) 是完备度量空间,$F:X\to X$ 是 k 压缩映射,即

$$d(Fx,Fy)\leqslant kd(x,y)\quad(\forall x,y\in X),$$

其中 $k\in[0,1)$,则 F 在 X 上存在惟一不动点 x,且任取初值 $x_0\in X$,由迭代 $x_{n+1}=Fx_n(n=0,1,2,\cdots)$ 确定的序列 $\{x_n\}$ 收敛到不动点 x,并有下述估计式:

$$d(x_n,x)\leqslant k^n(1-k)^{-1}d(x_0,x_1),$$
$$d(x_{n+1},x)\leqslant k(1-k)^{-1}d(x_n,x_{n+1}),$$
$$d(x_{n+1},x)\leqslant kd(x_n,x).$$

巴拿赫不动点定理亦称压缩映射不动点定理,由巴拿赫(Banach,S.)于 1922 年得到,是最基本的不动点定理之一.

压缩映射不动点定理(contraction mapping fixed point theorem) 即“巴拿赫不动点定理”.

非扩张映射不动点定理(fixed point theorem for nonexpansive mapping) 关于巴拿赫空间中有界闭凸集上的非扩张映射的不动点定理. 有例子表明,在一般巴拿赫空间中有界闭凸集上的非扩张映射可以不存在不动点. 关于非扩张映射不动点理论的第一个重要结果属于德马尔(de Marr,R.). 之后不久,布劳德(Browder,F. E.)和歌德(Gohde, D.),克尔克(Kirk, W. A.),佩出里逊(Petryshyn,W. V.)等得到了下述定理:设 X 是一致凸的巴拿赫空间,C 是 X 中的有界闭凸集,$F:C\to C$ 非扩张,则 F 在 C 中存在不动点.

克尔克的结论指出,上述定理中的条件“X 是一致凸的巴拿赫空间”可减弱为“X 是具有正规结构的自反巴拿赫空间”.

布劳威尔不动点定理(Brouwer fixed point theorem) R^n 中紧凸集上的连续自映射的不动点存在定理. 若 D 是 R^n 中的有界闭凸集,$F:D\to D$ 连续,则 F 在 D 中存在不动点. 此定理与下述任一结论相互等价:

1. R^n 中闭球 B 的边界 S 不是 B 的收缩核.

2. R^n 中的球面 S 不是可缩的,即 S 与单点空间的伦型不同.

布劳威尔不动点定理由布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)于 1912 年得到.

莱夫谢茨不动点定理(Lefschetz fixed point theorem) 关于有限多面体上连续自映射的不动点定理. 设 $|K|$ 为有限多面体,$f:|K|\to|K|$ 为连续映射,若 f 的莱夫谢茨数 $L(f)\neq 0$,则 f 有不动点. 此定理由莱夫谢茨(Lefschetz,S.)于 1926 年得到. 布劳威尔不动点定理为其特例.

绍德尔不动点定理(Schauder fixed point theorem) 布劳威尔不动点定理到巴拿赫空间情形的推广. 设 X 是巴拿赫空间,C 是 X 中的紧凸集. $F:C\to C$ 连续,则 F 有不动点. 此定理的一个等价形式是:设 D 是 X 中的非空有界闭凸集,$F:D\to D$ 全连续,则 F 有不动点. 此定理由绍德尔(Schauder,J. P.)于 1930 年得到.

勒雷-绍德尔边界条件(Leray-Schauder boundary condition) 为保证全连续映射在某区域中存在不动点而对映射在区域边界上的值提出的一种条件. 设 Ω 是巴拿赫空间 X 中的有界开集,$0\in\Omega$,$F:\overline{\Omega}\to X$ 全连续. 在 $\partial\Omega$ 上加于 F 的条件有:

1. $x\neq tF(x)(\forall x\in\partial\Omega,t\in(0,1))$,则 F 在 $\overline{\Omega}$ 中有不动点.

上述条件称为勒雷-绍德尔边界条件. 类似的

条件还有:

2.(罗铁(Rothe,E.))条件:$\|F(x)\|\leqslant\|x\|$ $(\forall x\in\partial\Omega)$.

3.(阿尔特曼(Altman,M.))条件:$\|F(x)-x\|^2\geqslant\|F(x)\|^2-\|x\|^2(\forall x\in\partial\Omega)$.

4.(罗铁)条件:Ω 是凸集,$F(\partial\Omega)\subset\overline{\Omega}$.

5.(克拉斯诺塞尔斯基(Красносельский,M. A.))条件:X 是希尔伯特空间,

$$\langle F(x),x\rangle\leqslant\|x\|^2\ (\forall x\in\partial\Omega).$$

若 F 满足上述条件之一,则 F 在 $\overline{\Omega}$ 中有不动点. 这时,若 F 在 $\partial\Omega$ 上无不动点,则有

$$\deg(I-F,\Omega,0)=i(F,\Omega)=1.$$

吉洪诺夫不动点定理(Tychonoff fixed point theorem) 关于局部凸拓扑线性空间中的紧凸集上的连续自映射的不动点定理. 设 X 是局部凸拓扑线性空间,C 是 X 中的紧凸集,$F:C\to C$ 连续,则 F 有不动点. 此定理由吉洪诺夫(Тихонов,А. Н.)于 1935 年得到.

达伯-萨多夫斯基不动点定理(Darbo-Sadovskii fixed point theorem) 绍德尔不动点定理到集压缩映射或凝聚映射情形的推广. 设 X 是巴拿赫空间,D 是 X 中非空有界闭凸集,$F:D\to D$ 是连续的集压缩映射或凝聚映射,则 F 在 D 中有不动点. 达伯(Darbo,G.)于 1955 年与萨多夫斯基(Sadovskii,B. N.)于 1967 年分别就集压缩映射与凝聚映射证明了上述结果.

卡里斯梯不动点定理(Caristi fixed point theorem) 继巴拿赫不动点定理之后关于完备度量空间中映射的又一重要的不动点定理. 设(X,d)为完备度量空间,$F:X\to X$ 是映射,$\varphi:X\to[0,+\infty)$下半连续. 若

$$d(x,F(x))\leqslant\varphi(x)-\varphi(F(x))\ (\forall x\in X),$$

则 F 在 X 中有不动点. 此定理由卡里斯梯(Caristi,J.)于 1976 年得到.

偏序集上映射不动点定理(fixed point theorems for mappings on partially ordered sets) 偏序集上的各类特殊映射的不动点定理. 下面列出这方面的几个重要结果,其中$(X,\leqslant)$为偏序集:

1.(克那斯特(Knaster,B.)-库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)-马祖尔克维奇(Mazurkiewicz,S.),1929). 设 $F:X\to X$ 是保序映射$(x\leqslant y\Rightarrow F(x)\leqslant F(y))$. 若存在 $b\in X$ 使得 $b\leqslant F(b)$,且 $Q=\{x\in X\mid b\leqslant x\}$中的每个链均有上界,则 F 在 Q 中有不动点,且存在 F 在 X 上的最大不动点.

2.(布尔巴基,1940;克纳塞(Kneser,A.),1950). 设 X 中每个链有上确界,$F:X\to X$ 满足条件:$x\leqslant F(x)(\forall x\in X)$,则 F 在 X 中有不动点.

3.(塔尔斯基(Tarski,A.),1955). 完备格 X 上的每个保序映射必有最小与最大不动点.

4.(阿曼(Amann,H.),1977). 设 X 中每个链有上确界,$F:X\to X$ 保序,且存在 $x_0\in X$ 使得 $x_0\leqslant F(x_0)$,则 F 在集$\{x\in X\mid x_0\leqslant x\}$中有最小不动点.

锥映射不动点定理(fixed point theorems for cone mappings) 有序巴拿赫空间中各类锥映射的不动点定理. 下面列出这方面的几个重要结果,其中$(X,\leqslant)$是有序巴拿赫空间,半序$\leqslant$由锥 P 确定.

1.(增算子的不动点定理). 设 P 正规,$[u_0,v_0]$是 X 中的序区间,$F:[u_0,v_0]\to X$ 是连续的凝聚映射(特别地,严格集压缩映射,全连续映射),且是增算子. 若有 $u_0\leqslant F(u_0)$,$F(v_0)\leqslant v_0$,则 F 在$[u_0,v_0]$中有最大不动点 x^* 与最小不动点 x_*,且

$$x^*=\lim_{n\to\infty}v_n,\quad x_*=\lim_{n\to\infty}u_n,$$

其中 $v_n=F(v_{n-1})$,$u_n=F(u_{n-1})(n=1,2,\cdots)$,满足:

$$u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_1\leqslant v_0.$$

在上述定理中,若将 P 正规加强为 P 正则,则 F 的凝聚性可去掉而只要求 F 为连续;若要求 P 是强极小的,则 F 的连续性假设也可去掉.

2.(锥拉伸与锥压缩不动点定理). 设 Ω_1 和 Ω_2 是 P 中的两个有界相对开集,$\partial\Omega_1$ 和 $\partial\Omega_2$ 表示在 P 中的相对边界,$\theta\in\Omega_1$,$\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$,$F:\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1\to P$ 全连续. 若 F 是锥拉伸的,即

$$Fx\ngeq x\ (\forall x\in\partial\Omega_1);\quad Fx\nleq x\ (\forall x\in\partial\Omega_2),$$

或 F 是锥压缩的,即

$$Fx\ngeq x\ (\forall x\in\partial\Omega_2);\quad Fx\nleq x\ (\forall x\in\partial\Omega_1),$$

则 F 在 $\Omega_2\backslash\overline{\Omega}_1$ 中有不动点.

映射族不动点定理(fixed point theorems for families of mappings) 关于映射族的公共不动点存在定理. 设 $F=\{f_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$是一映射族,其中 Λ 是指标集,$\forall\alpha\in\Lambda$,$f_\alpha:X\to X$ 是映射. 若 $x\in X$ 使得 $f_\alpha(x)=x\ (\forall\alpha\in\Lambda)$,则称 x 为映射族 F 的不动点. 下面是几个著名的映射族的不动点定理,其中 X 是局部凸豪斯多夫空间,$C\subset X$. F 是 C 上的某映射族,即 $F=\{f_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$,$f_\alpha:C\to C(\forall\alpha\in\Lambda)$. 映射族 F 称为可交换的,指的是 $f_\beta f_\alpha=f_\alpha f_\beta(\forall\alpha,\beta\in\Lambda)$. 映射族 F 称为仿射的,指的是 F 中的每个成员 $f:C\to C$ 是仿射的,即 $f(tx+(1-t)y)=tf(x)+(1-t)f(y)(\forall x,y\in C,\forall t\in(0,1))$.

1.(马尔可夫(Марков,А. А.),1936). 设 C 是 X 中的紧凸集,F 是 C 上的一个可交换的仿射的连续映射族,则 F 在 C 上有不动点.

2.(角谷静夫,1938). 设 C 是 X 中的紧凸集,F 是 C 上的一个仿射等度连续的映射族,且 F 在

映射的复合运算下构成群，则 F 在 C 中有不动点.

3.（赖尔-纳尔德泽夫斯基（Ryll-Nardzewski，C.），1967）. 设 X 是巴拿赫空间，C 是 X 中的凸弱紧集，C 上的映射族 F 是一半群. 令 $D=\{f(x)-f(y)\mid f\in F,x,y\in C,x\neq y\}$. 若 $0\notin\overline{D}$，则 F 在 C 中有不动点.

4.（德马尔（de Marr，R.），1963）. 设 X 是巴拿赫空间，C 是 X 中的紧凸集，F 是 C 上的可交换映射族，且 F 中的成员均为 C 上的非扩张映射，则 F 在 C 上有不动点.

集值映射的拓扑度（topological degree for setvalued mappings） 单值映射拓扑度到集值映射情形的推广. 各种单值映射的拓扑度理论大多已被推广到相应的集值映射类. 例如，布劳威尔度、勒雷-绍德尔度、集压缩与凝聚向量场的拓扑度、终归紧向量场的拓扑度、锥映射的拓扑度、逼近固有映射的广义度等均有相应的集值映射情形的推广，这里仅以勒雷-绍德尔度为例说明如下. 设 X 是巴拿赫空间，Ω 为 X 中的有界开集，$F:\overline{\Omega}\to 2^X$ 是具非空紧凸值的全连续集值映射，且 $p\in X\setminus(I-F)(\partial\Omega)$. 任给 $\varepsilon>0$，由逼近定理，存在单值连续映射 $f:\overline{\Omega}\to X$，使得 $f(\overline{\Omega})\subset\overline{\mathrm{co}}\,F(\overline{\Omega})$，且 $\mathrm{graph}(f)\subset N_\varepsilon(\mathrm{graph}(F))$. 此时 f 为全连续映射，且当 $\varepsilon>0$ 充分小时，有 $p\notin(I-f)(\partial\Omega)$，于是勒雷-绍德尔度 $\deg(I-f,\Omega,p)$ 有意义，将它作为 $\deg(I-F,\Omega,P)$ 的定义. 可证此定义的合理性及这样定义的度具有与勒雷-绍德尔度类似的性质.

上述提到的诸类集值映射均要求具凸值. 对于具非凸值时的某些类集值映射也可建立度理论. 这方面的基本结果由果尔尼维茨（Gorniewicz，L.）与波里索维奇（Борисович，Ю. Г.）等给出.

集值映射的不动点（fixed point of setvalued mapping） 单值映射不动点到集值映射情形的推广. 设 $D\subset X$，$F:D\to 2^X$ 为集值映射. 若 $x_0\in D$ 满足 $x_0\in F(x_0)$，则称 x_0 为 F 的一个不动点.

集值映射的不动点定理已有许多.

集值压缩映射不动点定理（fixed point theorem for setvalued contractive mapping） 巴拿赫压缩映射原理到集值映射情形的推广. 设 (X,d) 是完备度量空间. $F:X\to 2^X$ 是具非空有界闭值的压缩映射，即存在 $k<1$ 使得 $h(F(x),F(y))\leqslant kd(x,y)(\forall x,y\in X)$，其中 h 为豪斯多夫度量，则 F 有不动点. 集值压缩映射不动点定理由纳德勒（Nadler，S. B.）于 1969 年得到.

角谷静夫-樊𪟝-格里克斯伯格不动点定理（Kakutani-Fan-Glicksberg fixed point theorem） 吉洪诺夫不动点定理到集值映射情形的推广. 设 X 是局部凸拓扑线性空间，C 是 X 中的非空紧凸集，$T:C\to 2^C$ 是具非空闭凸值的上半连续集值映射，则 T 有不动点. 此定理由樊𪟝（Ky，Fan）于 1952 年得到. 角谷静夫于 1941 年得到了此定理在 $X=\mathbb{R}^n$ 时的特殊情形. 波嫩拉斯特（Bohnenlust，H.）和卡尔林（Karlins，S.）得到了此定理在 X 为巴拿赫空间时的特殊情形.

布劳德不动点定理（Browder fixed point theorem） 由布劳德（Browder，F. E.）提出的带边界条件的集值映射不动点定理. 设 X 是局部凸拓扑线性空间，C 为 X 中非空紧凸集，$F:C\to 2^X$ 具非空闭凸值且上半连续. 记 $\delta(C)=\{x\in C\mid$ 存在 X 的有限维线性子空间 E，使得 x 属于 $C\cap E$ 在 E 中的边界$\}$. 若 F 满足下述两边界条件之一，则 F 有不动点：

1. 任取 $x\in\delta(C)$，存在 $y\in F(x)$ 与 $u\in C$ 及 $\lambda>0$ 使得 $y=x+\lambda(u-x)$.

2. 任取 $x\in\delta(C)$，存在 $y\in F(x)$ 与 $u\in C$ 及 $\lambda<0$ 使得 $y=x+\lambda(u-x)$.

此定理由布劳德于 1968 年得到.

泛函的临界点（critical point of functional） 泛函的梯度为零的点. 设 M 是巴拿赫微分流形，$f\in C^1(M,\mathbb{R})$，$p\in M$. 若 $\mathrm{d}f(p)=0$，则称 p 为 f 的临界点. 若 $\mathrm{d}f(p)\neq 0$，则称 p 为 f 的正则点. 设 $c\in\mathbb{R}$，若 $f^{-1}(c)$ 中包含 f 的临界点，则称 c 为 f 的临界值. 否则，称 c 为 f 的正则值. 泛函的临界点、正则点、临界值、正则值的概念是一般映射的相应概念在泛函情形下的具体化. 关于泛函的临界点的研究成果形成了颇为系统的临界点理论，它为研究非线性梯度算子方程的解提供了理论工具. 由于一些散度型微分方程的解恰是相应的积分泛函（亦称变分泛函）的临界点，因此，用临界点理论研究非线性方程的方法被称为非线性分析的变分方法.

泛函的临界值（critical value of functional） 见“泛函的临界点”.

下半连续函数（lower semicontinuous function） 其上方图形为闭集的函数. 设 X 是拓扑空间，$f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，$f\not\equiv+\infty$. 若在 $x_0\in X$ 有网

$$x_\alpha\to x_0\Rightarrow\varliminf_{\alpha} f(x_\alpha)\geqslant f(x_0),$$

则称 f 在 x_0 为下半连续. 若 f 在 X 中每点均为下半连续，则称 f 在 X 上为下半连续. $f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 为下半连续 $\Leftrightarrow\forall c\in\mathbb{R}$，$f_c=\{x\in X\mid f(x)\leqslant c\}$ 是 X 中的闭集 $\Leftrightarrow epi(f)=\{(x,t)\in X\times\mathbb{R}\mid f(x)\leqslant t\}$ 是 $X\times\mathbb{R}$ 中的闭集. 若在上述定义中，将网 x_α 换为序列 x_n，则得到 f 为依序列下半连续的概念. 当然，在度量空间中，此二概念等价. 当函数 $(-f):X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 为下半连续时，则称函数 $f:X\to\mathbb{R}\cup$

$\{-\infty\}$为上半连续. f 在某点为连续,等价于 f 在此点既上半连续又下半连续. 紧拓扑空间上的下半连续函数或序列紧拓扑空间上的依序列下半连续函数可达到其下确界.

依序列下半连续函数(sequentially lower semicontinuous function) 见"下半连续函数".

弱下半连续泛函(weakly lower semicontinuous functional) 在巴拿赫空间中弱拓扑的意义下为下半连续的泛函. 设 X 是巴拿赫空间, $f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. 若在 X 中取弱拓扑时 f 为下半连续(或依序列下半连续),则称 f 为弱下半连续(相应地,依序列弱下半连续). 在临界点理论中常用到下述结果:设 X 是自反巴拿赫空间, M 是 X 中的非空弱闭集, $f:M\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $f\not\equiv+\infty$. 若 f 是依序列弱下半连续的,且 f 是强制的(即,当 $x\in M$, $\|x\|\to+\infty$时有 $f(x)\to+\infty$),则 f 在 M 上可达到下确界. 巴拿赫空间中的下半连续凸泛函是弱下半连续的. 具有全连续梯度映射的泛函是依序列弱连续的.

依序列弱下半连续泛函(sequentially-weakly lower semicontinuous functional) 见"弱下半连续泛函".

强制泛函(coercive functional) 赋范线性空间中随着范数的无限增大而一致趋向于无穷大的泛函. 设 X 是赋范线性空间, $M\subset X$, $f:M\to\mathbb{R}$. 若当 $x\in M$, $\|x\|\to+\infty$时,有 $f(x)\to+\infty$,则称 f 为强制的. 特别地,当 M 为有界集时,总认为 $f:M\to\mathbb{R}$是强制的.

艾克兰德变分原理(Ekeland variational principle) 关于完备度量空间上的有下界的下半连续泛函的近似极小点的存在性定理. 设(X,ρ)是完备度量空间, $f:X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$下半连续有下界,且 $f\not\equiv+\infty$. 设有 $\varepsilon>0$ 及 $x_\varepsilon\in X$ 使得

$$f(x_\varepsilon)<\inf\{f(x)\,|\,x\in X\}+\varepsilon,$$

则存在点 $y_\varepsilon\in X$,使得 $f(y_\varepsilon)\leqslant f(x_\varepsilon)$, $\rho(y_\varepsilon,x_\varepsilon)\leqslant 1$ 且 $f(x)>f(y_\varepsilon)-\varepsilon\rho(y_\varepsilon,x)$ $(\forall x\neq y_\varepsilon)$. 上述定理中的点 y_ε 称为 f 的近似极小点. 当 X 是完备的芬斯勒流形且 $f\in C^1$ 时,在点 y_ε 处有 $\|df(y_\varepsilon)\|\leqslant\varepsilon$. 此定理由艾克兰德(Ekeland, I.)于 1974 年得到.

(P. S)条件((P. S) condition) 由帕莱斯 Palais, R. S)与斯梅尔(Smale, S.)提出的一种对巴拿赫流形上泛函的紧性要求. 设 M 是巴拿赫-芬斯勒流形, $f\in C^1(M,\mathbb{R})$,若由$\{x_n\}\subset M$, $\{f(x_n)\}$有界及 $\|df(x_n)\|\to 0$ 可推出$\{x_n\}$有收敛子列,则称 f 在 M 上满足(P. S)条件. 若在此定义中将$\{f(x_n)\}$有界换为 $f(x_n)\to c$,其中 c 为某给定的实数,则称 f 满足$(P.S)_c$ 条件. 若对所有的正数 c, f 均满足$(P.S)_c$ 条件,则称 f 满足$(P.S)^+$条件. 类似有$(P.S)^-$条件. (P. S)条件在临界点理论中起着关键的作用.

$(P.S)_c$ 条件($(P.S)_c$ condition) 见"(P. S)条件".

$(P.S)^+$条件($(P.S)^+$ condition) 见"(P. S)条件".

$(P.S)^-$条件($(P.S)^-$ condition) 见"(P. S)条件".

梯度向量场(gradient vector field) 由希尔伯特流形上的 C^1 泛函的梯度所形成的切向量场. 设 M 是希尔伯特流形, $f\in C^1(M,\mathbb{R})$,这时 df 是 M 上的余切向量场. 由于希尔伯特流形 M 上的余切丛与切丛之间有着标准同构 $i:T^*(M)\cong T(M)$,记$\nabla f=i\circ df$,则∇f 是 M 上的切向量场,称为 f 的梯度向量场. 当 M 是巴拿赫流形, $f\in C^1(M,\mathbb{R})$ 时,也常把 M 上的余切向量场 df 称为 f 的梯度向量场.

梯度下降流(gradient descent flow) 由希尔伯特流形上泛函的负梯度向量场所生成的流. 设 M 是希尔伯特流形, $f\in C^{2-0}(M,\mathbb{R})$. 在 M 上由 f 的负梯度向量场$-\nabla f$ 所生成的流 η 称为 f 的梯度下降流,或负梯度流,有时亦称为梯度流. 在过 M 上每点 p 的流线 $\eta(p,t)$上,泛函 f 的值 $f(\eta(p,t))$是随 t 的增大而递减的.

伪梯度向量场(pseudo-gradient vector field) 梯度向量场在不适合用来构造下降流时的一种替代物. 当 M 是一般巴拿赫流形, $f\in C^{2-0}(M,\mathbb{R})$时,余切向量场 df 不能用来构造下降流. 当 M 是希尔伯特流形而 $f\in C^1(M,\mathbb{R})$时梯度向量场∇f 也不能用来构造下降流. 伪梯度向量场是克服这两种困难的工具. 设 M 是 C^{2-0}巴拿赫-芬斯勒流形, $f\in C^1(M,\mathbb{R})$,记 K 为 f 在 M 上的所有临界点所成之集,令 $\widetilde{M}=M\backslash K$. 若 V 是 $\widetilde{M}$ 上的一个 C^{1-0}(切)向量场,且满足条件:

1. $\|V(p)\|\leqslant 2\|df(p)\|$ $(\forall p\in\widetilde{M})$;
2. $\langle df(p),V(p)\rangle\geqslant\|df(p)\|^2$ $(\forall p\in\widetilde{M})$;

则称 V 是 f 的一个伪梯度向量场. C^{2-0}巴拿赫-芬斯勒流形上任一 C^1 泛函的伪梯度向量场总是存在的. 由$-V$ 在 $\widetilde{M}$ 上生成的流称为 f 的伪梯度下降流,或负伪梯度流,也常简称伪梯度流. f 在负伪梯度流的流线上是下降的. 伪梯度向量场的概念及其存在性最早由帕莱斯(Palais, R. S.)于 1966 年给出.

伪梯度流(pseudo-gradient flow) 见"伪梯度向量场".

合痕(isotopy) 指在每一时刻均为同胚的一种特殊的形变. 设 X 是拓扑空间, X 上的一个形变

指的是一个连续映射 $\eta:[0,1]\times X\to X$ 使得 $\eta_0=\mathrm{id}:X\to X$. X 上的一个合痕指的是 X 上的一个形变 η，使得 $\forall t\in[0,1]$，$\eta_t:X\to X$ 为同胚，这里 $\eta_t(\cdot)=\eta(t,\cdot)$. 设 $A\subset X$，A 在 X 上的形变是指连续映射 $\eta:[0,1]\times A\to X$，使得 $\eta_0=\mathrm{id}_A:A\to A$. A 在 X 上的合痕指的是 A 在 X 上的形变 η，使得 $\forall t\in[0,1]$，$\eta_t:A\to\eta_t(A)$ 为同胚.

形变引理(deformation lemmas)　研究临界点的有力工具. 指在巴拿赫流形上利用泛函的伪梯度向量场对泛函的水平集进行所需形变的一些定理. 这方面的结果很多，下述是其中之一.

设 M 是完备的 C^{2-0} 芬斯勒流形，$f\in C^1(M,\mathbf{R})$ 满足(P. S)条件，设 $c\in\mathbf{R}$，$K_c=\{x\in M\mid \mathrm{d}f(x)=0,f(x)=c\}$. U 是 K_c 的开邻域，则存在 M 上的合痕 $\eta:[0,1]\times M\to M$ 与两个正常数 $\varepsilon<\bar{\varepsilon}$，使得：

1. $\eta_t|_{M\setminus f^{-1}((c-\bar{\varepsilon},c+\bar{\varepsilon}))}=\mathrm{id}|_{M\setminus f^{-1}((c-\bar{\varepsilon},c+\bar{\varepsilon}))}(\forall\ t\in[0,1])$.

2. $\eta_1(f_{c+\varepsilon}\setminus U)\subset f_{c-\varepsilon}$.

3. $f(\eta(t,x))\leqslant f(x)(\forall t\in[0,1],x\in M)$，其中对实数 b，$f_b=\{x\in M\mid f(x)\leqslant b\}$.

特别地，当 $K_c=\varnothing$ 时，取 $U=\varnothing$，则上述之 2 成为 $\eta_1(f_{c+\varepsilon})\subset f_{c-\varepsilon}$.

极小极大原理(minimax principle)　用来确定泛函的临界点存在性的一个较为一般的原理. 设 M 是完备的 C^{2-0} 芬斯勒流形，$f\in C^1(M,\mathbf{R})$ 满足(P. S)条件，$\mathscr{F}$ 是 M 的一个非空子集族. 记

$$c=\inf_{F\in\mathscr{F}}\sup_{x\in F}f(x).$$

若 c 是有限数，且存在 $\varepsilon_0>0$，使得 $\mathscr{F}$ 关于收缩映射族 $\Phi^s_{c-\varepsilon_0}(f)$ 或同胚映射族 $\Phi^h_{(c-\varepsilon_0,c+\varepsilon_0)}(f)$ 是不变的，则 c 是 f 的临界值，其中

$\Phi^s_{c-\varepsilon_0}(f)=\{\varphi\mid\varphi=\eta_1,\eta:[0,1]\times M\to M$ 是形变，$\exists d>c>a\geqslant c-\varepsilon_0$，使 $\eta_t|_{f_a}=\mathrm{id}|_{f_a}$，$\forall t\in[0,1]$；$\eta_1(f_b)\subset f_a$；$f(\eta(t,x))\leqslant f(x)$，$\forall t\in[0,1]$，$\forall x\in M\}$，

$\Phi^h_{(c-\varepsilon_0,c+\varepsilon_0)}(f)=\{\varphi\mid\varphi=\eta_1,\eta:[0,1]\times M\to M$ 是合痕，$\exists\ a<c<b$，$[a,b]\subset(c-\varepsilon_0,c+\varepsilon_0)$，$\eta_t:f_b\to f_a$ 同胚，$\eta_t|_{M\setminus f^{-1}([c-\varepsilon_0,c+\varepsilon_0])}=\mathrm{id}|_{M\setminus f^{-1}([c-\varepsilon_0,c+\varepsilon_0])}$，$f(\eta(t,x))\leqslant f(x)$，$\forall t\in[0,1]$，$x\in M\}$.

子集族 $\mathscr{F}$ 称为关于映射族 Φ 是不变的，指的是 $\forall F\in\mathscr{F}$，$\forall\varphi\in\Phi$，有 $\varphi(F)\in\mathscr{F}$. 上述原理中的(P. S)条件还可减弱. 在实用中灵活选取子集族 $\mathscr{F}$ 与映射族 Φ 可得到不同的临界点存在定理.

山路引理(mountain pass lemma)　极小极大原理的一个简单而重要的特殊情形. 设 X 是巴拿赫空间，$f\in C^1(X,\mathbf{R})$，Ω 是 X 中的开集，$x_0\in\Omega$，$x_1\notin\bar{\Omega}$. 令

$$\Gamma=\{g\in C([0,1],X)\mid g(0)=x_0,g(1)=x_1\},$$

$$c=\inf_{g\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]}f(g(t)).$$

若

$$\max\{f(x_0),f(x_1)\}<\inf_{x\in\partial\Omega}f(x)=\beta,$$

且 f 满足$(\mathrm{P.S})_c$ 条件，则 c 是 f 的临界值，且 $c\geqslant\beta$. 此定理由阿姆布罗塞蒂(Ambrosetti，A.)与拉比诺维茨(Rabinowitz，P. H.)于 1973 年提出.

环绕(link)　拓扑空间中子集之间的一种特殊的位置关系. 设 X 是拓扑空间，Q，S 是 X 中的非空子集，且 $A\subset Q$，若 $A\cap S=\varnothing$，且对任意的连续映射 $\varphi:Q\to X$，只要 $\varphi|_A=\mathrm{id}|_A$，就有 $\varphi(Q)\cap S\neq\varnothing$，则称$(Q,A)$与 S 环绕. 在实用中，常取 Q 为某带边流形，$A=\partial Q$ 为其边界，这时也常简称 ∂Q 与 S 环绕. 对于环绕的情形使用极小极大原理可得下述环绕型临界点存在定理：设 X 是完备的 C^{2-0} 芬斯勒流形，$f\in C^1(X,\mathbf{R})$满足(P. S)条件，(Q,A)与 S 环绕，记 $\Gamma=\{\varphi\in C(Q,X)\mid\varphi|_A=\mathrm{id}|_A\}$. 令

$$c=\inf_{\varphi\in\Gamma}\sup_{x\in Q}f(\varphi(x)),$$

若

$$\alpha=\sup_{x\in A}f(x)<\inf_{x\in S}f(x)=\beta,$$

则 c 是 f 的临界值，且 $c\geqslant\beta$. 山路引理是上述定理的简单特例. 此外，常用到的环绕的例子有：

设 X 是巴拿赫空间，$X=X_1\oplus X_2$，$\dim X_1<+\infty$，取 Q 为 X_1 中以原点为心的闭球，$A=\partial Q$ 为 Q 在 X_1 中的边界，$S=X_2$，则 ∂Q 与 S 环绕.

设 X 是巴拿赫空间，$X=X_1\oplus X_2$，$\dim X_1<+\infty$，r_1，r_2，ρ 为正常数，且 $r_2>\rho$，$S=\{x\in X_2\mid\|x\|=\rho\}$，$e\in X_2$，$\|e\|=1$，$Q=\{x=x_1+te\mid x_1\in X_1,\|x_1\|\leqslant r_1,t\in[0,r_2]\}$，$A=\partial Q$ 为 Q 在 $X_1\oplus\{te\mid t\in\mathbf{R}\}$中的边界，则 ∂Q 与 S 环绕.

畴数(category)　一种在拓扑空间的子集族上定义的具有指定性质的非负整值函数，它对估计泛函的临界点的个数十分有用. 设 M 是拓扑空间，$\mathscr{F}=\{A\subset M\mid A$ 是闭集$\}$. 定义函数 $\mathrm{Cat}_M(\cdot):\mathscr{F}\to\mathbf{Z}_+\cup\{+\infty\}$如下，当 $A=\varnothing$ 时，令 $\mathrm{Cat}_M(\varnothing)=0$；当 $A\in\mathscr{F}$，$A\neq\varnothing$ 时，若 A 可表为有限个在 M 中可缩的闭集之并，则令

$$\mathrm{Cat}_M(A)=\min\{m\mid A=\bigcup_{i=1}^m F_i,F_i\ \text{是在}\ M\ \text{中可缩的闭集}\}.$$

否则，令 $\mathrm{Cat}_M(A)=+\infty$. 如此定义的函数 $\mathrm{Cat}_M(\cdot)$称为 M 上的柳斯捷尔尼克-施尼雷尔曼畴数，简称畴数，值 $\mathrm{Cat}_M(A)$称为 A 在 M 上的畴数. 当 M 是可度量的巴拿赫流形时，$\mathrm{Cat}_M(\cdot)$具有下述性质(下面简记 $\mathrm{Cat}_M(\cdot)$为 $\mathrm{Cat}(\cdot)$)：

1. 平凡性. $\mathrm{Cat}(A)=0\Leftrightarrow A=\varnothing$.

2. 规范性. $\mathrm{Cat}(\{p\})=1(\forall p\in M)$.

3. 单调性. $A, B\in\mathscr{F}$,

$$A\subset B\Rightarrow \mathrm{Cat}(A)\leqslant \mathrm{Cat}(B).$$

4. 次可加性. $\forall A,B\in\mathscr{F}$,

$$\mathrm{Cat}(A\cup B)\leqslant \mathrm{Cat}(A)+\mathrm{Cat}(B).$$

5. 形变不减性. 若 $A\in\mathscr{F}$, $\eta:[0,1]\times A\to M$ 是 A 在 M 上的形变,则 $\mathrm{Cat}(\overline{\eta_1(A)})\geqslant \mathrm{Cat}(A)$.

6. 连续性. $\forall A\in\mathscr{F}$,存在 A 在 M 中的邻域 U,使得 $\mathrm{Cat}(\overline{U})=\mathrm{Cat}(A)$.

下述公式对于畴数的计算是有用的:

$$\mathrm{Cat}_M(A)\leqslant \dim A+1,$$

$$\mathrm{Cat}_M(M)\geqslant \mathrm{cuplength}(M)+1,$$

其中 $\dim A$ 为 A 的豪斯多夫维数,$\mathrm{cuplength}(M)$ 为 M 的奇异上同调环的上积长度.

柳斯捷尔尼克-施尼雷尔曼重数定理(Ljusternik-Schnirelman multiplicity theorem) 利用畴数对流形上泛函的临界点的个数进行估计的重要定理. 设 M 是完备的巴拿赫-芬斯勒流形,$f\in C^1(M,\mathbb{R})$满足(P. S)条件,对每个 $n=1,2,\cdots$,记 $\mathscr{F}_k=\{A\subset M\mid A$ 闭,$\mathrm{Cat}_M(A)\geqslant k\}$. 令

$$c_k=\inf_{A\in\mathscr{F}_k}\sup_{x\in A}f(x)$$

$$(\text{约定当 } \mathscr{F}_k=\varnothing \text{ 时}, c_k=+\infty).$$

若对某个正整数 k 与 p,有

$$-\infty<c_{k+1}=c_{k+2}=\cdots=c_{k+p}=c<+\infty,$$

则 $\mathrm{Cat}_M(K_c)\geqslant p$,其中 $K_c=\{x\in M\mid \mathrm{d}f(x)=0, f(x)=c\}$. 此时 c 是 f 的临界值,且 K_c 中至少包含 p 个不同的临界点. 作为重数定理的特例($p=1$ 时)有:若某个 c_k 是有限数,则 c_k 是 f 的临界值.

由重数定理可推出:若 f 在 M 上有下界,则 f 在 M 上至少有 $\mathrm{Cat}_M(M)$个不同的临界点. 畴数概念与重数定理最早由柳斯捷尔尼克(Люстерник, Л. А.)与施尼雷尔曼(Шнирельман, Л. Г.)对紧流形给出,后被帕莱斯(Palais, R. S.)于 1966 年推广到巴拿赫流形的情形.

非退化临界点(nondegenerate critical point) 在该点处的二阶导算子有有界逆的临界点. 设 X 是希尔伯特空间,$f\in C^2(X,\mathbb{R})$,x_0 是 f 的临界点. 若 $f''(x_0):X\to X$ 有有界逆,则称 x_0 是 f 的非退化临界点. 否则,称临界点 x_0 是退化的. 设 M 是 C^2 希尔伯特流形,$f\in C^2(M,\mathbb{R})$,x_0 是 f 的临界点,取 x_0 处的局部坐标系(U,φ). 若 $\varphi(x_0)$是泛函 $f\circ\varphi^{-1}$ 的非退化临界点,则称 x_0 是 f 的非退化临界点. 否则称 f 的临界点 x_0 是退化的. M 上泛函 f 的临界点的非退化性不依赖于局部坐标系的选取. 非退化临界点必是孤立临界点.

退化临界点(degenerate critical point) 见"非退化临界点".

莫尔斯泛函(Morse functional) 一种特殊泛函. 所有临界点为非退化的泛函称为莫尔斯泛函.

莫尔斯指数(Morse index) 指临界点处的二阶导算子的最大负定子空间的维数. 设 X 是希尔伯特空间,$f\in C^2(X,\mathbb{R})$,x_0 是 f 的临界点. X 的线性子空间 V 称为是 $f''(x_0)$的负定子空间,指的是

$$\langle f'(x_0)\eta,\eta\rangle<0\quad(\forall\eta\in V\backslash\{0\}).$$

$f''(x_0)$的负定子空间的维数的上确界称为临界点 x_0 的莫尔斯指数. $f''(x_0)$的正定子空间的维数的上确界称为 x_0 的莫尔斯余指数. $\ker f''(x_0)$的维数称为 x_0 的零化数. 对于希尔伯特流形上 C^2 泛函 f 的临界点 p,可利用点 p 处的局部坐标系(U,φ),把泛函 $f\circ\varphi^{-1}$的临界点 $\varphi(p)$的莫尔斯指数、余指数及零化数作为 f 的临界点 p 的莫尔斯指数、余指数及零化数的定义.

广义莫尔斯引理(generalized Morse lemma) 经典莫尔斯引理到希尔伯特空间中泛函的退化临界点情形的推广. 设 X 是希尔伯特空间,U 为 X 中原点的开邻域,$f\in C^2(U,\mathbb{R})$,0 是 f 的临界点,$L=f''(0)$是弗雷德霍姆算子,X 中的元 $x=y+z$,其中 $y\in\ker(L)$,$z\in R(L)$,则存在 0 在 X 中的开邻域 V,0 在 $\ker(L)$中的开邻域 W,局部同胚 $h:V\to U$,及函数 $\varphi\in C^2(W,\mathbb{R})$,使得 $h(0)=0$,$\varphi'(0)=0$,$\varphi''(0)=0$,且

$$f(h(x))=\frac{1}{2}\langle Lz,z\rangle+\varphi(y)$$

$$(\forall x=y+z\in V).$$

经典的莫尔斯引理由莫尔斯(Morse, H. M.)在 1925 年就有限维空间中的非退化临界点情形给出. 之后,帕莱斯(Palais, R. S.),格罗莫尔(Gromoll, D.),迈耶(Meyer, W.),奎泊尔(Kuiper, C.),康比尼(Cambini, A.),霍夫尔(Hofer, H.)等人给予推广. 上述形式的推广属于冒鑫(Mawhin, J.)和威伦姆(Willem, M.).

临界群(critical group) 用以反映临界点性态的有关水平集的相对同调群. 设 X 是希尔伯特流形,$f\in C^1(X,\mathbb{R})$,x_0 是 f 的孤立临界点,$f(x_0)=c$. 取 x_0 的邻域 U 使 $\overline{U}$ 中仅含 f 的惟一临界点 x_0,记 $C_q(x_0,f)=H_q(f_c\cap\overline{U},(f_c\backslash\{x_0\})\cap\overline{U};Q)$,$q=0,1,2,\cdots$,其中 H_q 为 q 阶奇异(相对)同调群,Q 为系数群,则 $C_q(x_0,f)$称为 f 的孤立临界点 x_0 的 q 阶临界群. 若 $f\in C^2(X,\mathbb{R})$,x_0 是 f 的非退化临界点,其莫尔斯指数为 j,则有

$$C_j(x_0,f)\approx Q;\ C_q(x_0,f)=0\ (q\neq j).$$

一般地,设 $a<b$ 为 f 的两个正则值,$K_{[a,b]}=\{x\in X\mid \mathrm{d}f(x)=0, f(x)\in(a,b)\}$,并设 X 完备,f 满足(P. S)条件,这时同调群 $H_q(f_b,f_a;Q)$称为 $K_{[a,b]}$的 q 阶临界群.

莫尔斯型数(Morse type numbers) 临界群

的秩数. 记 $C_q(x_0,f)$ 是 f 的孤立临界点 x_0 的临界群(参见"临界群"),记 $m_q=\operatorname{rank}C_q(x_0,f)$,则数列 $(m_0,m_1,\cdots,m_q,\cdots)$ 称为 x_0 的莫尔斯型数,其中 m_q 称为 x_0 的 q 阶莫尔斯型数. 当 x_0 是非退化临界点时,若其莫尔斯指数为 j,则有 $m_j=1,m_q=0,\forall q\neq j$. 类似地,临界点集合 $K_{[a,b]}$ 的临界群的秩数称为 $K_{[a,b]}$ 的莫尔斯型数.

莫尔斯不等式(Morse inequalities) 反映流形的拓扑性质与其上泛函的临界点状况二者之间联系的一组不等式. 它是莫尔斯临界点理论的基本内容. 设 X 是完备的 C^2 希尔伯特-黎曼流形,$f\in C^2(X,\mathbf{R})$ 满足(P. S)条件,且 f 是莫尔斯泛函,$a<b$ 是 f 的两个正则值,用 M_k 表示 f 在 $f_b\backslash f_a$ 中莫尔斯指数等于 k 的临界点的个数,β_k 表示奇异同调群 $H_k(f_b,f_a)$ 的秩,则成立下述关系式:

$$M_k\geqslant\beta_k\ (k=0,1,2,\cdots),$$

$$\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda-k}M_k\geqslant\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^{\lambda-k}\beta_k\ (\lambda=0,1,2,\cdots),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kM_k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\beta_k.$$

特别地,若 f 在 X 上有下界,且 f 的临界值集合有上界,取 a 充分小,取 b 充分大,则在上述莫尔斯不等式中,M_k 为 f 在 X 上的莫尔斯指数为 k 的临界点个数,β_k 为 $H_k(X)$ 的秩. 莫尔斯不等式还可用庞加莱多项式形式表出,在上述记号下,若记

$$M(t)=\sum_{k=0}^{\infty}M_kt^k \text{ 与 } P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_kt^k,$$

则存在非负整系数的多项式 $Q(t)$,使得

$$M(t)=P(t)+(1+t)Q(t).$$

群作用下的不变泛函(invariant functional under group action) 具有某种对称性的泛函,它在群作用下的每条轨道上取相同的值. 设 X 是巴拿赫空间,$U(X)$ 是从 X 到 X 上的等距线性算子的全体所成的线性空间,G 是某个拓扑群,$T:G\to U(X)$ 是连续同态. 这时 X 称为 $T(G)$ 空间. 若泛函 $f:X\to\mathbf{R}$ 满足条件:

$$f(T_gx)=f(x)\ (\forall x\in X,g\in G),$$

则称 f 是 $T(G)$ 不变的. X 中的子集 E 若满足条件:$T_gE=E(\forall g\in G)$,则称 E 是 $T(G)$ 不变的. $\forall x\in X$,$[x]=\{T_gx\,|\,g\in G\}$ 称为 x 的 $T(G)$ 轨道. $\mathrm{Fix}_G=\{x\in X\,|\,T_gx=x,\forall g\in G\}$ 称为 $T(G)$ 不动点空间.

等变映射(equivariant mapping) 指与群作用可交换的映射. 设 G 是拓扑群,巴拿赫空间 X 与 Y 分别是 $T(G)$ 空间与 $\widetilde{T}(G)$ 空间,$\varphi:X\to Y$ 是映射,若有 $\varphi(T_gx)=\widetilde{T}_g\varphi(x)(\forall x\in X,g\in G)$,则称 φ 是 $(T(G),\widetilde{T}(G))$ 等变映射.

指标理论(index theory) 畴数理论在 $T(G)$ 不变泛函情形的变种形式. 设 G 是紧拓扑群,X 是 $T(G)$ 空间,$\Sigma=\{A\subset X\,|\,A$ 是 $T(G)$ 不变闭集$\}$. 若函数 $i:\Sigma\to\mathbf{Z}_+\cup\{+\infty\}$ 满足下述条件:

1. 平凡性. $i(A)=0\Leftrightarrow A=\varnothing$.
2. 单调性. $A,B\in\Sigma,A\subset B\Rightarrow i(A)\leqslant i(B)$.
3. 次可加性. $\forall A,B\in\Sigma$,
$$i(A\cup B)\leqslant i(A)+i(B).$$
4. 超变性. 若 $A\in\Sigma,h=\eta(\cdot,1),\eta:[0,1]\times X\to X$ 是 $T(G)$ 等变形变,则 $i(\overline{h(A)})\geqslant i(A)$.
5. 连续性. 若 $A\in\Sigma$,A 紧,则存在 A 的某个闭邻域 $N\in\Sigma$,使得
$$i(N)=i(A),$$

则称 i 为 X 上的一个 $T(G)$ 指标.

若指标 i 还具有性质:

6. 规范性. $\forall p\in X$. 若 $[p]\cap\mathrm{Fix}_G=\varnothing$,则 $i([p])=1$,其中
$$[p]=\{T_gp\,|\,g\in G\},$$
$$\mathrm{Fix}_G=\{x\in X\,|\,T_gx=x,\forall g\in G\},$$

则称指标 i 是规范的. 若存在正整数 d,使对 X 的 dk 维 $T(G)$ 不变子空间 $V^{dk}(k=1,2,\cdots)$,只要

$$V^{dk}\cap\mathrm{Fix}_G=\{0\},$$

就有 $i(V^{dk}\cap S_1)=k$,其中 S_1 为 X 中的单位球面,则称指标 i 具有 d 维数性质.

类似于畴数理论,有下述指标意义下的重数定理:设 M 是 X 中的 $T(G)$ 不变闭子流形,$f\in C^1(M,\mathbf{R})$ 满足(P. S)条件,i 是 X 上的 $T(G)$ 指标,记 $\Sigma_n(M)=\{A\in\Sigma\,|\,A\subset M,i(A)\geqslant n\}$. 令

$$c_n=\inf_{A\in\Sigma_n(M)}\sup_{x\in A}f(x)\ (n=1,2,\cdots).$$

若对某正整数 n 与 p,有

$$-\infty<c_n=c_{n+1}=\cdots=c_{n+p-1}=c<+\infty,$$

则 c 是 f 的临界值,且 $i(K_c)\geqslant p$. 这时如果 i 是规范的,且 $K_c\cap\mathrm{Fix}_G=\varnothing$,则 K_c 中至少含有 p 条不同的临界点轨道.

最常用到的指标是 $G=\mathbf{Z}_2$ 与 $G=S^1$ 时的情形. 作为指标概念的推广或变种,尚有伪指标. 相对指标等多种概念.

$\mathbf{Z}_2$ 指标($\mathbf{Z}_2$-index) 亦称亏格. 是在整数模 2 群 $\mathbf{Z}_2$ 作用下的指标. 设 X 是巴拿赫空间,$\Sigma=\{A\subset X\,|\,A$ 是闭集且 $A=-A\}$,定义 $\gamma:\Sigma\to Z_+\cup\{+\infty\}$ 如下:

当 $A=\varnothing$ 时,令 $\gamma(\phi)=0$.

当 $A\in\Sigma,A\neq\varnothing$ 时,令 $\gamma(A)=\min\{n\in\mathbf{Z}_+\,|$ 存在连续奇映射 $\varphi:A\to\mathbf{R}^n\backslash\{0\}\}$. 若对任何 $n\in\mathbf{Z}_+$ 均不存在连续奇映射 $\varphi:A\to\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$,则令 $\gamma(A)=+\infty$.

这样定义的 γ 就是 X 上的 $\mathbf{Z}_2$ 指标. $\mathbf{Z}_2$ 指标最早是由克拉斯诺塞尔斯基(Красносельский, M. A.)

于 1952 提出. 之后,杨(Yang,C. T.),康纳(Conner,P. E.)和福洛依德(Floyd,E. E.)及施瓦克(Švarc,A. S.)给出了其变种与推广形式.

S^1 指标(S^1-index)　在圆周群 S^1 作用下的指标. 设 $S^1=\mathrm{R}/[0,2\pi]$, X 为 $T(S^1)$空间, $\Sigma=\{A\subset X \mid A$ 是 $T(S^1)$不变闭子集$\}$. 定义 $\gamma:\Sigma\to\Sigma_+\cup\{+\infty\}$如下:

当 $A=\varnothing$时,令 $\gamma(\varnothing)=0$.

当 $A\in\Sigma, A\neq\varnothing$时,令 $\gamma(A)=\min\{n\in Z_+ \mid$存在 $k\in Z_+$与连续映射 $\varphi: A\to\mathrm{C}^n\setminus\{0\}$,使得 $\varphi(T_\theta x)=e^{ik\theta}\varphi(x), \forall x\in A, \forall\theta\in S^1\}$,其中 C^n 为复 n 维线性空间. 若所述之 n 不存在,则令 $\gamma(A)=+\infty$.

如此定义的 γ 就是 X 上的 S^1 指标. S^1 指标最早是由拉比诺维茨(Rabinowitz,P. H.)等人引进的.

微分算子与积分算子

现代微分算子理论(the theory of modern differential operators)　20 世纪 50 年代,由米赫林(Михлин,С. Г.)、考尔德伦(Calderón,A. P.)和赞格蒙(Zygmund,A.)等人发展起来的奇异积分算子理论在处理线性微分方程中显示了它的作用. 20 世纪 60 年代,尼伦伯格(Nirenberg,L.)、科恩(Kohn,J. J.)、赫尔曼德尔(Hörmander,L. V.)及翁特伯格(Unterberger,A.)等人推广了奇异积分算子理论,创建了拟微分算子理论. 继而,又出现了傅里叶积分算子理论. 它们结合微局部分析方法,在线性微分方程理论的研究中发挥了"革命"性的作用(尼伦伯格的话). 到了 20 世纪 80 年代,上述理论又被推广及应用于非线性问题的研究,其中特别是出现了仿微分算子理论. 近年来,又提出了仿傅里叶积分算子概念. 所有这些理论的出现,使得对微分方程理论的研究呈现崭新的局面,并且已逐步渗透及影响着数学中其他的分支学科. 它们组成了一套新的算子理论,即所谓现代微分算子理论.

微分算子(differential operator)　一类常见而又重要的算子. 它是微分方程中研究的核心对象. 设 A 是由某函数空间 E_1 到函数空间 E_2 的映射, $f=Au$ $(u\in E_1, f\in E_2)$. 如果像 f 在每个点 x 处的值 $f(x)$ 由原像 u 和它的某些导函数在 x 处的值所决定,则称 A 为微分算子. 当 A 还是线性时,称 A 是线性微分算子. 例如

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha$$

就是线性微分算子,其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为非负的整数组,

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n},\quad D_j=\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, $a_\alpha(x)$是定义在 n 维欧几里得空间某个开集 Ω 上的函数. 当 $n=1$ 时, $P(x,D)$是常微分算子;当 $n\geqslant 2$ 时, $P(x,D)$是偏微分算子(参见《流形上的分析》同名条).

常微分算子(ordinary differential operator)　见"微分算子".

偏微分算子(partial differential operator)　见"微分算子".

线性微分算子(linear differential operator)　见"微分算子".

位相函数(phase function)　定义在开锥子集 Γ 上的无临界点的函数. 设 X 是 R^n 中的子集, Γ 是 $X\times(\mathrm{R}^N\setminus\{0\})$中的开锥子集(即若$(x,\theta)\in\Gamma$,则对任意 $t>0$ 有$(x,t\theta)\in\Gamma$). 若实值函数 $\varphi(x,\theta)\in C^\infty(\Gamma)$关于 θ 是正齐一次的(即对任意 $t>0$,有 $\varphi(x,t\theta)=t\varphi(x,\theta)$),且 φ 关于 x,θ 无临界点(即在 Γ 上 $d_{x,\theta}\varphi(x,\theta)\neq 0$),则称 $\varphi(x,\theta)$是 Γ 上一个位相函数. 记 $C_\varphi=\{(x,\theta)\in\Gamma \mid \varphi_\theta(x,\theta)=0\}$. 它是 φ 关于 θ 的临界点集. 若一个位相函数 $\varphi(x,\theta)$在 C_φ 上的 N 个 $n+N$ 维向量$\{d_{x,\theta}\varphi_{\theta_j}\}(j=1,2,\cdots,N)$是线性无关的,则称 φ 为非退化的位相函数. 设 $\varphi(x,y,\theta)$是一个位相函数. 若它对任一固定的 x 而言又是 y,θ 的位相函数;且它对任一固定的 y 而言是 x,θ 的位相函数,则称这样的 $\varphi(x,y,\theta)$是算子位相函数.

$$\langle x-y,\theta\rangle=\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)\theta_j$$

是 $X\times\mathrm{R}^n$ 上的算子位相函数,但不是非退化的.

振幅函数(amplitude function)　关于任意多重指标的偏导数满足某种类型不等式的函数. 设 X 是 R^n 中开子集, $0\leqslant\rho,\delta\leqslant 1$, m 为任意实数. 若函数 $a(x,\theta)\in C^\infty(X\times\mathrm{R}^N)$满足如下条件:对任意多重指标 α,β 及 X 中的紧集 K,存在常数 $C_{\alpha,\beta,K}>0$,使当 $x\in K,\theta\in\mathrm{R}^N$ 时有

$$|\partial_x^\beta\partial_\theta^\alpha a(x,\theta)|\leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\quad(1)$$

则称 $a(x,\theta)$是 m 次(ρ,δ)型振幅,记为 $a\in S_{\rho,\delta}^m(X\times\mathrm{R}^N)$. $S_{\rho,\delta}^m$ 振幅函数类首先由赫尔曼德尔(Hörmander,L. V.)引进. 从历史上看,最古典的振幅函数类是其中函数 $a(x,\theta)\in C^\infty(X\times\mathrm{R}^N)$关于 θ 为 m 次齐次函数(它显然属于 $S_{1,0}^m(X\times\mathrm{R}^N)$). 而赫尔曼德尔所引入的上述 $S_{\rho,\delta}^m$,其主要特色在于用微分不等式代替了齐次性.

$S_{\rho,\delta}^m$类是较为典型的振幅函数类. 而在处理具体问题时,将出现一些新的特殊的振幅函数类,并且还要对它们建立一套与相应的算子相配合的运

算规则以及相应的振荡积分理论等.

下面仍以 $S^m_{\rho,\delta}$类为例来叙述振幅函数类的一些概念及性质. 取 X 中的上升紧集序列$\{K_j\}$使

$$\bigcup_j K_j = X.$$

对于$a(x,\theta) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathrm{R}^N)$,记使上述微分不等式(1)成立的最小常数$C_{\alpha,\beta,K_j}$为$\rho_{\alpha,\beta,j}[a]$. 易知它们构成一个可分离的可列半模族,且用它装备函数类$S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathrm{R}^N)$后使得$S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathrm{R}^N)$成为一个弗雷歇空间. 一般地,振幅函数$a(x,\theta)$常取渐近展开的形式:

$$a(x,\theta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\theta).$$

具体地,设$\{m_j\}(j=0,1,2,\cdots)$是一个单调下降趋于$-\infty$的实数列. 又设$a(x,\theta)\in S^{m_0}_{\rho,\delta}$,$a_j\in S^{m_j}_{\rho,\delta}$. 若对任意非负整数 l 有 $a(x,\theta)-a_j(x,\theta)\in S^{m_l}_{\rho,\delta}$,则称

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\theta)$$

是$a(x,\theta)$的渐近展开. 运用古典的波莱尔技巧可以证明,对于$\{a_j(x,\theta)\,|\,a_j\in S^{m_j}_{\rho,\delta}\}(j=0,1,2,\cdots)$,其中$\{m_j\}$如上,则存在$a(x,\theta)\in S^{m_0}_{\rho,\delta}$使得

$$a(x,\theta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\theta),$$

且在$\mathrm{mod}S^{-\infty}_{\rho,\delta}$下此$a(x,\theta)$是惟一确定的. 此处

$$S^{-\infty}_{\rho,\delta} = \bigcap_m S^m_{\rho,\delta}.$$

振荡积分(oscillatory integral) 用某种积分表示的线性形式. 它依赖于位相函数与振幅函数. 考虑积分

$$I_\varphi(au) = \iint e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta,$$

其中$u\in C_0^\infty(X)$,$\varphi(x,\theta)$是$X\times(\mathrm{R}^N\backslash\{0\})$上的位相函数,$a(x,\theta)\in S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathrm{R}^N)(0\leqslant\rho,\delta\leqslant 1)$. 为确定起见,设$\rho>0,\delta<1$.

这个积分收敛与否,很大程度上取决于 m 所取的值. 例如$m<-N$时,此积分收敛. 但对大于$-N$的任意实数,它却是一个发散的积分. 尽管如此,可以用以下方法赋予此积分新的合适的意义. 其主要思想是像通常处理发散积分那样,在广义函数意义下研究这个积分. 针对上述具体形式,可做如下处理. 固定φ和u,可得线性形式

$$l:\ a\in S^{-\infty}_{\rho,\delta}(X\times\mathrm{R}^N)\to l(a)=I_\varphi(au)\in\mathrm{C}.$$

根据振幅函数空间的拓扑结构特性及φ是位相函数,此线性形式可以惟一地拓广成

$$S^{+\infty}_{\rho,\delta}(X\times\mathrm{R}^N)\quad (S^{+\infty}_{\rho,\delta}=\bigcup_m S^m_{\rho,\delta})$$

上的线性形式;而且,它在任意空间$S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathrm{R}^N)$上均为连续的. 记此拓广后的线性形式$l(a)$为如下积分形式:

$$l(a) = \widetilde{\iint} e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta.$$

显然,上述积分形式仅是一个符号. 但它可用下面两种方法具体地用一个真实的收敛积分或其极限来表出. 即

$$l(a) = \iint e^{i\varphi(x,\theta)} ({}^tL)^k(a(x,\theta)u(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta,$$

或

$$l(a) = \lim_{\epsilon\to 0}\iint e^{i\varphi(x,\theta)} \psi(\epsilon\theta)a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta,$$

其中

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j(x,\theta)\partial_{\theta_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,\theta)\partial_{x_j} + c(x,\theta),$$

$a_j\in S^0_{1,0}$,$b_j,c\in S^{-1}_{1,0}$是使$L(e^{i\varphi})=e^{i\varphi}$的某些函数. k满足$m-kt<-N$,$t=\min(\rho,1-\delta)$,$\psi(\theta)\in C_0^\infty(\mathrm{R}^N)$且在$\theta=0$附近为1. 称上述拓广后的线性形式

$$\widetilde{\iint} e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$$

为一个振荡积分. 在现代微分算子理论中,人们总是将原来的积分(不管发散与否)$I_\varphi(au)$理解为在上述振荡积分的意义之下.

应当指出,若一个振荡积分中含有参数,则对于这个含参变量的振荡积分有像含参变量的通常积分一样的运算法则(例如在积分号下求极限、求导及求积等). 这些性质将在应用上带来很大的方便. 最后,考虑一种特殊情形. 对于积分

$$\iint e^{i(x-y,\theta)} a(x,y,\theta)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta$$

$$(u\in C_0^\infty,\ a\in S^m_{\rho,\delta}),$$

可以理解为一个含参变量 x 的振荡积分. 但是,也可以理解为如下的累次积分.

$$\int e^{i\langle x,\theta\rangle}\left(\int e^{-i\langle y,\theta\rangle} a(x,y,\theta)u(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\theta.$$

易知此累次积分是收敛的. 并且可以证明,上述两种理解是一致的. 通常,在书写上常将振荡积分中积分符号上的波纹"～"略掉,直接写为

$$\iint e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta.$$

傅里叶分布(Fourier distribution) 用振荡积分表示的一个 k 阶分布. 在振荡积分中固定$\varphi(x,\theta)$和$a(x,\theta)$,而将此积分视为映射Δ:

$$u\in C_0^\infty(X)\to I_\varphi(au)\in\mathrm{C}.$$

可以证明,它是一个 k 阶分布 $A\in(\mathscr{D}^k(X))'$,其中 k 是使不等式 $m-kt<-N$ 成立的最小非负整数,$t=\min(\rho,1-\delta)$,$a\in S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathrm{R}^N)$,$\rho>0,\delta<1$,$\varphi$是位相. 称此分布为傅里叶分布.

傅里叶分布 A 有许多值得注意且有用的性

质. 例如, $\operatorname{sing\,supp} A \subset \{x \mid \varphi_\theta(x,\theta)=0$ 对某个 $\theta \neq 0$ 成立$\}$, 其中 $\operatorname{sing\,supp} A$ 是 A 的 C^∞ 奇支集(亦即使得 A 为 C^∞ 的最大开集的余集). 微局部地, 有

$$WF(A) \subset \Lambda_\varphi \equiv \{(x,\varphi_x(x,\theta)) \mid \varphi_\theta(x,\theta)=0\},$$

其中 $WF(A)$ 为 A 的 C^∞-波前集. 更精确地, 有

$$WF(A)=\{(x,\varphi_x(x,\theta)) \mid (x,\theta) \in \operatorname{ess\,supp} a, \varphi_\theta(x,\theta)=0\},$$

这里 $\operatorname{ess\,supp} a$ 是 $a(x,\theta)$ 的本性支集. 它是

$$X \times (\mathsf{R}^N \backslash \{0\})$$

中这样的闭锥子集, 在此锥子集外 $a \in S^{-\infty}_{\rho,\delta}$, 且它是具有这一性质的锥子集中的最小者. 集合 Λ_φ 在傅里叶积分算子及拟微分算子理论中极为重要, 且具有十分明确的几何结构: 它是余切丛 $T^*(X)$ 的锥拉格朗日浸入子流形.

傅里叶分布的表示有多样性. 著名的赫尔曼德尔定理告诉人们, 同一傅里叶分布 A 虽可用不同振幅及位相 $\varphi,\tilde{\varphi}$ 表出, 但必须 $\Lambda_\varphi=\Lambda_{\tilde{\varphi}}$.

拟微分算子(pseudo-differential operators) 一类由积分形式确定的算子, 与微分算子有类似的性质. 设 $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathsf{R}^n)$, X 是 R^n 中开子集, $0 \leqslant \rho,\delta \leqslant 1$. 为简单计, 更设 $\rho>0,\delta<1$, 则由积分

$$A(x,D)u(x)=\int e^{i\langle x,\xi\rangle} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\bar{d}\xi, \quad (1)$$

确定算子 $A(x,D)$, 使得

$$u(x) \in C_0^\infty(X) \to Au \in C^\infty(X),$$

且 $\mathscr{E}'(X) \to \mathscr{D}'(X)$, 其中 $\bar{d}\xi=(2\pi)^{-n}d\xi$. 称此算子是一个 m 阶 (ρ,δ) 型拟微分算子, 记为 $A \in \mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathsf{R}^n))$. 可以证明, 相应于 $S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ 的拟微分算子类

$$\mathrm{OP}(S^{-\infty}_{\rho,\delta})=\bigcap_m \mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta}),$$

且它由具 C^∞ 核的算子组成. 因此它里面的算子都是正则化算子, 即 $\mathscr{E}'(X) \to C^\infty(X)$. 若 $a(x,\xi) \in BS^m_{\rho,\delta}(X \times \mathsf{R}^n)$(关于 $x \in X$ 为一致有界的象征), 即若微分不等式中 C 与 X 中的紧集 K 无关时, 则相应拟微分算子有 $\mathscr{K}(X) \to \mathscr{K}(X)$ 及 $\mathscr{K}'(X) \to \mathscr{K}'(X)$.

在拟微分算子中, 适当可支的拟微分算子起重要作用. 所谓一个拟微分算子 A 是适当可支的, 是指它的核在 $X \times X$ 中的支集到 X 上的两个投影是适当映射. 或者等价地, 对任意紧集 $K \subset X$, 存在紧集 $K' \subset X$, 使得当 $\operatorname{supp} u \subset K$ 时 $\operatorname{supp} Au \subset K'$; 并且在 K' 上 $u=0$ 蕴涵在 K 上 $Au=0$. 适当可支的拟微分算子有 $C_0^\infty(X) \to C_0^\infty(X)$, $C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ 且 $\mathscr{E}'(X) \to \mathscr{E}'(X)$ 及 $\mathscr{D}'(X) \to \mathscr{D}'(X)$. 由此可知, 对适当可支的拟微分算子可以进行诸如算子复合及共轭等运算. 这类算子的重要性还体现在如下性质: 任意一个拟微分算子 $\in \mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})$ 必可分解为一个适当可支的 $\mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})$ 中的拟微分算子及一个正则化算子之和. 在拟微分算子理论中, 常常会附带出现一个正则化算子. 例如, 振幅函数常以渐近展开形式出现, 此时相应的振幅函数仅在 $\bmod S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ 下惟一. 这样, 相应的拟微分算子仅在 mod 正则化算子意义下惟一. 又如, 在基本解方法研究问题时, 人们一般只能考虑拟微分算子 A 的拟基本解 E_L 或 E_R. 按定义有

$$E_L A=I+R_L, \quad AE_R=I+R_R,$$

其中 R_L 和 R_R 也是正则化算子. 由于正则化算子的特别良好的特性, 人们处理问题时的注意力可以较少地放在它们身上, 甚至在处理诸如光滑性等问题时可以忽略它们. 因此, 通常人们几乎可不失一般性地认为所考虑的拟微分算子是适当可支的. 或者, 可定义 $\mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})$ 中元素为适当可支的拟微分算子与光滑(正则化)算子之和.

将 $\hat{u}(\xi)$ 的傅里叶变换式形式地代入(1)式, 得

$$A(x,D)u(x)=\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a(x,\xi)u(y)dy\bar{d}\xi.$$

或者, 更一般地可用下式定义拟微分算子

$$Au(x)=\iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a(x,y,\xi)u(y)dy\bar{d}\xi,$$

其中 $a(x,y,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times Y \times \mathsf{R}^n)$, X,Y 均为 R^n 中的开集. 上述两积分均应在振荡积分或累次积分意义下成立.

显然, 线性微分算子是一类特殊的拟微分算子, 其振幅是 ξ 的多项式. 线性椭圆微分算子的拟基本解也是拟微分算子, 其振幅是一个渐近展开式. 希尔伯特变换是一个零阶的 $(1,0)$ 型拟微分算子. 这些例子表明拟微分算子理论不仅是处理问题的一种方法, 而且它本身也就是原问题中出现的研究对象. 对拟微分算子 A, 有如下的拟局部性

$$\operatorname{sing\,supp} Au \subset \operatorname{sing\,supp} u.$$

回忆皮特里(Peetre, J.)的著名结果: 任何连续线性算子 $A: C_0^\infty(X) \to C^\infty(X)$, 若能拓广为连续线性算子 $\mathscr{E}'(X) \to \mathscr{D}'(X)$, 且有局部性

$$\operatorname{supp} Au \subset \operatorname{supp} u,$$

则它必是一个 C^∞ 系数的线性微分算子. 对照这个结果及上述拟局部性, 拟微分算子这名称也就容易理解了.

拟微分算子在坐标变换下仍是拟微分算子. 由此可定义流形上的拟微分算子, 进而还可定义向量丛上的拟微分算子并建立相应的理论. 拟微分算子有许多有意义的性质及广泛的应用.

象征(symbol) 确定拟微分算子的函数. 设 A 是 $\mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})$ 中适当可支的拟微分算子, 则必存在 $\sigma_A(x,\xi)=e^{-i\langle x,\xi\rangle}A(e^{-i\langle x,\xi\rangle}) \in S^m_{\rho,\delta}$, 使

$$Au(x)=\iint e^{i\langle x,\xi\rangle}\sigma_A(x,\xi)\hat{u}(\xi)\bar{d}\xi,$$

且若 A 的振幅是 $a(x,y,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$，则 $\sigma_A(x,\xi)$ 有渐近展开

$$\sigma_A(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\,|_{y=x},$$

称此 $\sigma_A(x,\xi)$ 为 A 的全象征. 特别地，若振幅为 $a(x,\xi)$，则 $\sigma_A(x,\xi)=a(x,\xi)$. 仍用 $S^m_{\rho,\delta}$ 表示象征所在的空间. 由于上述渐近展开在 $\bmod S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ 下惟一确定，而 $\mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})$ 中一般元在 $\bmod \mathrm{OP}(S^{-\infty}_{\rho,\delta})$ 下惟一地对应于一个适当可支元. 于是可得线性同构映射 $\sigma:\mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})/\mathrm{OP}(S^{-\infty}_{\rho,\delta})\to S^m_{\rho,\delta}/S^{-\infty}_{\rho,\delta}$. 显然人们可称此线性同构为全象征.

上述渐近展开中首项特别重要，它相当于微分算子的主部. 为此称 $\sigma_A(x,\xi)$ 在 $S^m_{\rho,\delta}/S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}$ 中任一元为 A 的主象征. 或者称线性同构

$$\sigma_m:\mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})/\mathrm{OP}(S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta})\to S^m_{\rho,\delta}/S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}$$

为主象征. 关于 ξ 为齐次的主象征是惟一确定的（参见本卷《流形上的分析》同名条）.

象征运算（symbolic calculus） 对应于拟微分算子之间的运算，可以建立一套象征之间的运算规则，称之为象征运算. 设 $A(x,D)\in\mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})$ 适当可支，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant1$，则其转置 ${}^tA\in\mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})$ 也适当可支，且有

$$\sigma_{{}^tA}(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\sigma_A(x-\xi).$$

A 的共轭 $A^*\in\mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})$ 也适当可支，且

$$\sigma_{A^*}(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\,\overline{\sigma_A(x,\xi)}.$$

设 $A\in\mathrm{OP}(S^{m_1}_{\rho,\delta})$，$B\in\mathrm{OP}(S^{m_2}_{\rho,\delta})$，且 A,B 中有一个是适当可支的（$0\leqslant\delta<\rho\leqslant1$），则

$$B\circ A\in\mathrm{OP}(S^{m_1+m_2}_{\rho,\delta})$$

且有

$$\sigma_{BA}(x,\xi)\equiv\sigma_B\#\sigma_A\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\sigma_B(x,\xi)D_x^\alpha\sigma_A(x,\xi).$$

若 A,B 都是适当可支的，则 $B\circ A$ 也是适当可支的. 由此可见，拟微分算子的象征关于普通加法及“#”乘法是一个可结合的非交换代数；并在它上面有两个对合运算：转置及共轭.

拟微分算子的有界性（boundedness of pseudodifferential operators） 拟微分算子在某些函数空间上所满足的范数关系. 在诸如索伯列夫空间、赫尔德空间及别索夫空间等重要的函数空间上，研究拟微分算子的有界性有很大的理论意义及应用价值，其中尤其在 H^s 上讨论更为重要. 设 $A\in\mathrm{OP}(S^m_{\rho,\delta})$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant1$ 或 $0\leqslant\delta\leqslant\rho<1$，则 A 可拓广为有界算子：$H^s_{\mathrm{comp}}(X)\to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(X)$. 当 $\rho=\delta=1$ 时，上述结果仅当 $s>m$ 时成立. 或者，若象征 $a(x,\xi)$ 关于 x 的傅里叶变换 $\hat a(\eta,\xi)$ 的支集含在集合 $\{(\eta,\xi)\mid|\eta|\leqslant\varepsilon|\xi|\}$（$0<\varepsilon<1$）之中，则上面结论成立.

关于具非正则象征的拟微分算子有界性的研究也引起广泛的重视. 在赫尔德空间、H^s_p 空间、别索夫空间甚至特里贝尔（Triebel）空间上有界性的讨论也很多.

哥尔丁不等式（Garding inequality） 一个用来证明微分方程某些定解问题存在性、光滑性的不等式. 哥尔丁（Garding，L.）在研究强椭圆微分方程的狄利克雷问题时，为了证明存在性及讨论光滑性，导出了一个单边估计，即哥尔丁不等式. 由它出发可得到许多重要的先验估计. 后来知道，这个不等式也出现在其他各类方程中并发挥重要作用（例如双曲问题中的能量估计）. 从而，使得不等式具有特殊的重要性. 考尔德伦（Calderón，A. P.）和赞格蒙（Zygmund，A.）将此不等式推广到了奇异积分算子情形. 现在则已推广到拟微分算子情形. 此不等式有如下两个基本形式.

哥尔丁不等式：设 $a(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}$，$0\leqslant\delta<\rho\leqslant1$，且对大 $|\xi|$ 成立 $\mathrm{Re}\,a(x,\xi)\geqslant c|\xi|^m$，则对任意 $s\in\mathbb{R}$，任意紧集 $K\subset X$，存在 $c_0,c_1>0$，使有

$$\mathrm{Re}(a(x,D)u,u)\geqslant c_0\|u\|^2_{m/2}-c_1\|u\|^2_s\quad(\forall u\in C_0^\infty(K)).$$

精细的哥尔丁不等式：若 $a(x,\xi)\in S^m_{1,0}$，$\mathrm{Re}\,a(x,\xi)\geqslant0$，则对任意紧集 $K\subset X$，存在 $c>0$ 使

$$\mathrm{Re}(a(x,D)u,u)\geqslant-c\|u\|^2_{(m-1)/2}.$$

哥尔丁不等式还有多种推广及改进. 在使其更为精细方面，费弗曼（Fefferman，C.）曾作出系统的研究.

傅里叶积分算子（Fourier integral operator） 由经典双曲型微分方程柯西问题解推广而得到的一种积分算子. 在求解波动方程等双曲型方程柯西问题时，它的解呈如下形式

$$\iint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)u(y)\,dy\,d\theta,$$

其中 φ 和 a 是相应的位相及振幅函数. 这样就引出傅里叶积分算子概念. 设 X,Y 分别为 $\mathbb{R}^{n_1},\mathbb{R}^{n_2}$ 中的开子集，$\varphi(x,y,\theta)$ 是 $X\times Y\times\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ 中实值位相函数，振幅 $a(x,y,\theta)\in S^m_{\rho,\delta}(X\times Y\times\mathbb{R}^N)$，$\rho>0$，$\delta<1$. 对任意 $u(y)\in C_0^\infty(Y)$ 及 $v(x)\in C_0^\infty(X)$，有振荡积分

$$I_\varphi(auv)=\iiint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)u(y)v(x)\,dx\,dy\,d\theta.$$

于是由 $\langle Au,v\rangle=I_\varphi(auv)$ 确定的 $Au\in\mathscr{D}'(X)$，从而也就定义了一个线性算子 $A:C_0^\infty(Y)\to\mathscr{D}'(X)$. 人们称 A 为傅里叶积分算子.

傅里叶积分算子 A 所对应的核 $K_A\in\mathscr{D}'(X\times Y)$ 是一个傅里叶分布，它由 $\langle K_A,f(x,y)\rangle=I_\varphi(af)$

确定.若$\varphi(x,y,\theta)$是算子位相函数,则$A:C_0^\infty(Y)\to C^\infty(X)$,$\mathscr{E}'(Y)\to\mathscr{D}'(X)$.特别地,又若$\varphi(x,y,\theta)$关于$\theta\neq0$无临界点,则$A:\mathscr{E}'(Y)\to C^\infty(X)$(此时$K_A$为$C^\infty$函数).反之,任一$\mathscr{E}'(Y)\to C^\infty(X)$的光滑算子总可表示为具任意位相函数的傅里叶积分算子.应用上较为重要的傅里叶积分算子取如下形式

$$Au(x)=\int e^{is(x,\theta)}a(x,\theta)\hat{u}(\theta)d\theta,$$

其中$s(x,\theta)$是$X\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$上的位相函数,且$(s_{x\theta})$满秩.

另一类重要的傅里叶积分算子是适当可支的(亦即振幅是适当可支的),它有$C_0^\infty(Y)\to C_0^\infty(X)$,$C^\infty(Y)\to C^\infty(X)$及$\mathscr{E}'(Y)\to\mathscr{E}'(X)$,$\mathscr{D}'(Y)\to\mathscr{D}'(X)$.因而就有可能进行算子复合、共轭及与拟微分算子复合等运算.当然,在进行复合时,相应的两个位相函数φ_1,φ_2还需满足一定条件才行($(\Lambda'_{\varphi_1}\times\Lambda'_{\varphi_2})$与$(T^*(X)\times\mathrm{diag}(T^*(Y))\times T^*(Z))$在每点横截).

由于上述提及的光滑算子与傅里叶积分算子之间的关系,一般地,任一个傅里叶积分算子不一定能分解为一个适当可支的傅里叶积分算子与一个光滑算子之和.一个充分条件是此种傅里叶积分算子的位相也必须是适当的.另外不同于拟微分算子的是一个傅里叶积分算子

$$A\text{ 的阶数}=m(\text{振幅之阶数})+\frac{N}{2}-\frac{n_1+n_2}{4},$$

这样的定义可保持当A用不同振幅及位相表示时阶数不变,并且两个傅里叶积分算子的复合的阶数为原来两阶数之和.

傅里叶积分算子有许多优良的性质.例如关于奇性支集有$\mathrm{sing\ supp}(Au)\subset\widetilde{C}_\varphi\circ\mathrm{sing\ supp}\,u$,其中$\widetilde{C}_\varphi$是$\varphi$关于$\theta$的临界点集在$X\times Y$上的投影.微局部地,$WF(Au)\subset WF'(K_A)\circ WF(u)$.

关于傅里叶积分算子的H^s有界性有如下结果:如果A是m阶傅里叶积分算子,且映射$\Lambda_\varphi\to T^*(X)$是局部微分同胚,那么$A$拓广为有界算子:$H^s_{\mathrm{comp}}(Y)\to H^{s-m}_{\mathrm{loc}}(X)$.上述条件:$\Lambda_\varphi\to T^*(X)$是一个充分条件.已有结果表明它可减弱.另外,关于傅里叶积分算子在L^p及别索夫空间上的有界性也有讨论.

傅里叶积分算子的下述性质特别引人注目:设A是具非退化位相$\varphi(x,y,\theta)$的傅里叶积分算子.若由φ得出的拉格朗日流形

$$\Lambda'_\varphi=\{(x,y;\varphi_x-\varphi_y)\,|\,\varphi_\theta=0\}$$

是一个$T^*(X)\to T^*(Y)$的局部微分同胚τ,使得τ在$T^*(X)\times T^*(Y)$上的图象恰为Λ'_Φ,则τ必为典则变换(保持哈密顿场不变).对于上面提到过的特例:位相为$s(x,\theta)$且$(s_{x\theta})$满秩时的傅里叶积分算子,此典则变换τ为$(x,s_x)\to(s_\eta,\eta)$.反之,由于一个齐次典则变换$\tau:(x,\xi)\to(y,\eta)$必可由一个正齐一次生成函数$s(x,\eta)$所确定的变换和一个由底空间上变换所诱导的变换复合而成.用此$s(x,\eta)$就可构作"惟一"的傅里叶积分算子.这样,通过拉格朗日流形,将傅里叶积分算子与典则变换建立了对应的联系.由此出发可以导出许多有意义的性质,并且可以建立整体傅里叶积分算子概念.

在应用上,傅里叶积分算子在处理双曲问题中有突出的作用;它在大范围分析中也有广泛的应用;尤其是,通过叶戈罗夫定理可对拟微分算子研究微局部化简问题.关于具复位相的傅里叶积分算子理论已经形成并有许多应用.

叶戈罗夫定理(Egoroff theorem)　傅里叶积分算子理论中的一个重要定理.设F,G是X,Y上两个傅里叶积分算子.用$WF(F-G)$表示$F-G$所对应的核的波前集.对于点$(x_0,y_0,\xi_0,\eta_0)\in T^*(X)\times T^*(Y)$,若它不属于$WF(F-G)$,则称$F$与$G$在该点微局部相等,记为$F\overset{m}{\sim}G$.设$F$由

$$Fu(x)=\int e^{is(x,\eta)}a(x,\eta)\hat{u}(\eta)\bar{d}\eta$$

确定.若在(x_0,η_0)处$a(x_0,\eta_0)\neq0$,则称$(x_0,s_\eta(x_0,\eta_0);s_x(x_0,\eta_0),\eta_0)$为$F$的椭圆点.记$\tau:(x,\xi)\to(y,\eta)$是与$F$相联系的典则变换.若在典则变换图象上的点$(x_0,y_0,\xi_0,\eta_0)$处(从而$\tau(x_0,\xi_0)=(y_0,\eta_0)$)$F^*F\overset{m}{\sim}I$(故$F^*\overset{m}{\sim}F^{-1}$),且此点为$F$的椭圆点,则称$F$在该点是酉的.

叶戈罗夫定理断言:设F是如上的傅里叶积分算子,τ是与它相联系的典则变换$(x,\xi)\to(y,\eta)$.若F在τ的图象上点(x_0,y_0,ξ_0,η_0)处是酉的,而P是X上适当可支的拟微分算子,则在该点附近的拟微分算子$F^{-1}PF$的主象征$q(y,\eta)$在此点邻域内是P的主象征$p(x,\xi)$通过τ的后拉,即$p(x,\xi)=q(y(x,\xi),\eta(x,\xi))$.上述定理仅是叶戈罗夫定理的微局部形式,它还有多种变形.

微局部分析(microlocal analysis)　是偏微分方程算子理论中的一个重要的研究领域.在拟微分算子及傅里叶积分算子理论中,常将所论问题化为对相应的象征(及位相)的处理,而这样也就将问题放到余切丛上($(x,\xi)\in T^*(X)$).实际上,现代微分算子理论是傅里叶分析的发展,而傅里叶分析就是一种谱分析(频谱分析),这种频谱所在区域就是余切丛.

还有许多问题必须放到余切丛上分析.例如,按维纳-佩利-施瓦兹定理,一个函数或分布的正则性可用它的傅里叶变换在无穷远处的增长性来确定;而一个多元函数(分布)在各个方向的光滑性又

对应着余切丛上纤维的各个锥向的增长情况. 根据这个思想,可定义 $C^{\alpha}_{(x_0,\xi_0)}$ 及 $H^{s}_{(x_0,\xi_0)}$ 等微局部空间. 这里,空间 $C^{\alpha}_{(x_0,\xi_0)}$ 是指:$u\in C^{\alpha}_{(x_0,\xi_0)}$ 表示存在 $\varphi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,它在 x_0 处附近为1,使得在 ξ_0 的锥邻域 $\varphi u\in C^{\alpha}$; 或存在零次 $\psi(\xi)$,它在 ξ_0 锥邻域内为1,使得 $\psi(D)(\varphi u)\in C^{\alpha}$. 类似地,$u\in H^{s}_{(x_0,\xi_0)}$是指对如上 ψ 及 φ,有 $(1+|\xi|)^s\psi(\xi)(\varphi u)\in L^2$. 还可定义 $WF(u)$及$WF_s(u)$等奇性集. 这里,所谓$(x_0,\xi_0)\in WF(u)$是指$(x_0,\xi_0)\notin C^{\infty}_{(x_0,\xi_0)}$;或对如上的 $\varphi(x)$及任意 N,在 ξ_0 锥邻域内有 $|\varphi u(\xi)|\leqslant C_N(1+|\xi|)^{-1}$. 这样可定义 $WF_s(u)$ 为 $(x_0,\xi_0)\notin WF_s(u)$是指

$$(x_0,\xi_0)\in H^{s}_{(x_0,\xi_0)}.$$

根据具体问题的需要,须建立这些空间及奇性集的运算规则(在"拟微分算子"、"傅里叶积分算子"等条目中已见到其中一些规则).

下面介绍波前集与特征集之间的关系. 设 A 是以 $a(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(X\times\mathbb{R}^n)$为象征的拟微分算子. 它的特征集

$$\operatorname{char}A=\{(x,\xi)\in T^*(X)\mid \varliminf_{t\to\infty}(1+t)^{-m}\cdot|a(x,t\xi)|=0\}.$$

众所周知,特征集在微分算子理论中起着十分重要的作用. 它和波前集之间关系由下式给出:

$$WF(u)=\bigcap_{Au\in C^{\infty}}\operatorname{char}A,$$

其中 A 为零阶拟微分算子. 对一般拟微分算子 A 有 $WF(u)\subset WF(Au)\cup\operatorname{char}A$. 这表示,方程 $Au=f$的解为 C^{∞}奇性分布在非齐次项 f 的奇性所在处及特征集处. 赫尔曼德尔(Hörmander,L. V.)又深化了此结果. 他证明了若 A 是具实齐次主象征 $a_0(x,\xi)$的主型算子(由特征点出发的哈密顿场 H_{a_0}不与锥轴平行). 注意,此时特征集即$\{(x,\xi)\mid a_0(x,\xi)=0\}$,则 $WF(u)\backslash WF(Au)\subset a_0^{-1}(0)$且在哈密顿场 H_{a_0}作用下不变,也就是奇性沿着 $a_0^{-1}(0)$上的次特征带传播. 这个结果投影到底空间 X 上就是经典的结果. 在 H^s 空间内,上述结果可精确地表示为:在上述假设下,若在次特征带上一段 γ 上 $Pu\in H^s(P\in\mathrm{OP}(S^m_{1,0}))$,只要在 γ 上一点处 $u\in H^{s+m-1}$,则在整个 γ 上 $u\in H^{s+m-1}$.

邦尼(Bony,J. M.)利用仿微分算子理论更将上述结果推广到主型的非线性微分方程上:设 u 是 m 阶主型非线性微分方程的实解,$u\in H^s_{\mathrm{loc}}(X)$,$s>n/2+m+2$,$(x_0,\xi_0)$是特征点,$\gamma$ 为过(x_0,ξ_0)的次特征,$u\in H^t_{(x_0,\xi_0)}$,$t\leqslant(2s-n)/(2-m-1)$,则 $u\in H^t_{\gamma}$. 此结果称为低频情况下非线性弱奇性的传播定理. 利用微局部分析,还可得许多种类的奇性传播结果. 它们有一个共性,那就是弱奇性按次特征带传播(非线性情况下则较复杂).

同样,微局部分析解的光滑性(例如椭圆方程解的光滑性)可以得到比经典更为精确的结果(例如亚椭圆性的研究、次椭圆算子的讨论等). 近年来,已开始应用微局部分析讨论强奇性传播(激波)问题.

有许多问题用微局部分析处理将带来相当的优越性. 例如讨论现代微分算子的有界性时,傅里叶谱分析方法有时并不有效. 这是因为它对代数显得过分敏感,而对几何则反应不足. 此时,人们常用李特尔伍德-佩利分解辅助. 这种分解在余切丛上有十分好的几何特征. 近年来,在处理某些非线性问题时还在李特尔伍德-佩利分解基础上加进了测不准原理,构成更加精细的微局部分解.

微局部化简是微局部分析中又一个十分优越的长处. 它以叶戈罗夫定理为基础. 例如主型拟微分算子用微局部化简方法可微局部等价于算子 D_n. 为讨论重特征算子,微局部化简更为需要. 在非线性问题中,还出现了多次微局部化简.

总之,微局部分析在处理线性及非线性问题中发挥了重要作用. 它不但深化了经典的结果,而且提出了许多新的课题,并且这些课题用经典方法无法处理. 因此,这个方法在其初具规模时就被费弗曼(Fefferman,C.)誉为"(20 世纪)70 年代算法".

仿积(paraproduct) 将乘积 uv 化为线性部分与光滑性更高的函数之和的一种算子. 仿积概念由科伊夫曼(Coifman,R. R.)与迈耶(Meyer,W.)引进. 邦尼(Bony,J. M.)则用来处理非线性微分方程问题. 设 $u,v\in H^s$ 或 C^{ρ}. 它们有李特尔伍德-佩利二进分解:

$$u=\sum_{j=-1}^{\infty}u_j,\quad v=\sum_{k=-1}^{\infty}v_k.$$

于是

$$uv=\sum_{j,k=-1}^{\infty}u_jv_k.$$

按 j,k 的相对位置改写此和式如下:

$$uv=T_uv+T_vu+R(u,v),$$

其中

$$T_uv=\sum_{j\leqslant k-N_0}u_jv_k,\quad T_vu=\sum_{k\leqslant j-N_0}u_jv_k,$$

$$R(u,v)=\sum_{|j-k|<N_0}u_jv_k.$$

选 N_0 适当大,使得

$$T_uv=\sum_{k=-1}^{\infty}w_k\,(w_k=\sum_{j\leqslant k-N_0}u_jv_k)$$

也是一个李特尔伍德-佩利二进分解,并且可以证明,只要 $u\in L^{\infty}$,则线性算子 $T_u:v\to T_uv$ 有 $C^{\rho}\to C^{\rho}$,$H^s\to H^s$,且

$$H^s_{x_0}\cap H^{s'}_{(x_0,\xi_0)}\to H^s_{x_0}\cap H^{s'}_{(x_0,\xi_0)}$$

$$C^\rho_{x_0}\cap C^{\rho'}_{(x_0,\xi_0)}\to C^\rho_{x_0}\cap C^{\rho'}_{(x_0,\xi_0)}.$$

由对称性，线性算子 T_v 有同样性质. 而当 $\alpha+\beta>0$ $(s+t>n/2)$ 时 $R:(u,v)\to R(u,v)$ 有

$$C^\alpha\times C^\beta\to C^{\alpha+\beta}(H^s\times H^t\to H^{s+t}).$$

这样一来，乘积 uv 可用 T_uv+T_vu 代替，而误差项 $R(u,v)$ 是光滑性更高的函数. 如此得到的 T_uv 及 T_vu 称为仿积，而 T_u 及 T_v 称为仿积算子.

仿积算子(paraproduct operator)　见"仿积".

仿微分算子(para-differential operator)　现代偏微分方程理论中一类很重要的算子，是拟微分算子的一种推广. 设 $l(x,\xi)$ 是 ξ 的 m 次齐函数，当 $\xi\neq0$ 时关于 ξ 为 C^∞，且对任意 $\alpha,\partial_\xi^\alpha l(x,\xi)$ 关于 x 属于 $C^\rho(\rho>0)$，则它有球调和分解

$$l(x,\xi)=\sum_\gamma a_\gamma(x)h_\gamma(\xi),$$

其中 $a_\gamma(x)\in C^\rho,h_\gamma(\xi)$ 为 m 次齐次且当 $\xi\neq0$ 时为 C^∞. 做 T_l：

$$T_lu=\sum_\gamma T_{a_\gamma}h_\gamma(D)S(D)u,$$

其中 $S(\xi)\in C^\infty$，在 $|\xi|\leqslant R/2$ 上为 0，而当 $|\xi|\geqslant 3R/2$ 为 1. 由上式确定的算子 T_l 在 mod($\rho-m$ 正则算子)下不依赖于仿积 T_{a_γ} 的具体取法及 $S(\xi)$ 的具体选取. 称它为以 l 为象征的仿微分算子. 考察由下式确定的算子 T_l'：

$$\hat{T}_l'u(\xi)=\int\chi(\xi-\eta,\eta)\hat{l}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)\mathrm{d}\eta,$$

其中 $\hat{l}(\theta,\eta)$ 是 $l(x,\eta)$ 的关于 x 的傅里叶变换. $\chi(\xi,\eta)\in C^\infty$ 满足

$$\chi(\xi,\eta)=\begin{cases}1 & (|\xi|\leqslant\varepsilon_1|\eta|,|\eta|\geqslant2R),\\0 & (|\xi|\geqslant\varepsilon_2|\eta|).\end{cases}$$

其中 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<1,R>0$，则同样在 mod($\rho-m$ 正则算子)下，T_l' 不依赖于 χ 的具体选取，T_l-T_l' 也是一个 $\rho-m$ 正则算子. 于是，忽略 $\rho-m$ 正则算子后，T_l' 也可视为仿微分算子的定义，且统记为 T_l. $\chi(\xi,\eta)$ 称为仿截函数. 如像拟微分算子理论中可忽略一个 C^∞ 光滑算子那样，在仿微分算子理论中可忽略一个 $\rho-m$ 正则算子.

若在仿微分算子的上述积分式定义中，χ 换成 1，则它恰为拟微分算子的定义. 因此，仿微分算子是拟微分算子的一种"修正"，这样"修正"的原因可从级数定义中看出. 事实上，若在级数定义中仿积 T_{a_γ} 换成乘积 a_γ，由此再次得到拟微分算子. 注意到拟微分算子理论中系数必须是 C^∞，故这种"修正"来源于此处 $a_\nu(x)$ 或 $l(x,\xi)$ 关于 x 不属于 C^∞. 其直接结果不能保证在 H^s 等空间上的有界性. 而由上定义的仿微分算子 T_l 却有 $H^s\to H^{s-m}$ 及 $C^\sigma\to C^{\sigma-m}$，其实，将仿微分算子的积分定义做适当改写，可知它是属于 $\mathrm{OP}(S^m_{1,1})$ 的拟微分算子，且其象征 $a(x,\xi)$ 关于 x 的傅里叶变换 $\hat{a}(\eta,\xi)$ 的支集含在 $\{(\eta,\xi)\,|\,|\eta|\leqslant\varepsilon|\xi|\}$ 之中，从而有上述有界性结果. 但是由于这是(1,1)型的，其象征无渐近展开及象征运算等，因此在处理具体问题时不能将仿微分算子理论完全化为拟微分算子理论，而必须建立一套独立的仿微分算子的象征理论. 尽管如此，仿微分算子理论毕竟是拟微分算子理论的某种延伸，它们之间有许多相似及借鉴之处.

代替渐近展开，总可以认为仿微分算子的象征 $l(x,\xi)$ 为如下形式的有限项之和

$$l(x,\xi)=l_m(x,\xi)+l_{m-1}(x,\xi)+\cdots+l_{m-[\rho]}(x,\xi),$$

其中 $l_{m-k}(x,\xi)$ 关于 ξ 为 $m-k$ 次齐次，$\xi\neq0$ 时为 C^∞，关于 x 属于 $C^{\rho-k}_{\mathrm{loc}}$，记此象征类为 $\Sigma^m_\rho(X)$.

对应此象征类的仿微分算子空间 $\mathrm{OP}(\Sigma^m_\rho)$(或 $\widetilde{\mathrm{OP}}(\Sigma^m_\rho)$)定义为：设线性算子 $L:C_0^\infty(X)\to\mathscr{D}'(X)$ 是一个适当可支的，且满足如下条件：对任一紧集 $K\subset X,\psi(x)\in C_0^\infty$，且在 K 上为 1，则 $Lu-\psi T_{\psi l}u$ 为连续线性映射：

$$H^s(K)\to H^{s-m+\rho}\quad(\text{或 }C^\sigma(K)\to C^{\sigma-m+\rho}),$$

则称 L 为以 l 为象征的仿微分算子，记为 $L\in\mathrm{OP}(\Sigma^m_\rho)$(或 $\widetilde{\mathrm{OP}}(\Sigma^m_\rho)$). 在这个定义中已经摒弃那个可忽略的 $\rho-m$ 正则算子.

由于仿微分算子是一种新型的算子，必须重新建立一整套理论. 在建立这个理论时可随时借鉴于拟微分算子理论，并可建立许多可对应于拟微分算子理论中的有意义的性质.

由于仿微分算子的特性，它在处理系数不光滑的变系数线性微分方程时将发挥作用，尤其是邦尼(Bony, J. M.)通过仿线性化方法将它应用到非线性问题之中. 近年来，大量研究成果表明，用仿微分算子理论讨论非线性问题特别是光滑性或奇性方面的问题将有很大的潜力.

仿微分算子的象征(symbols of paradifferential operators)　确定仿微分算子的一个映射，它是一个线性连续满映射. 由定义，对 $L\in\mathrm{OP}(\Sigma^m_\rho(X))$，存在惟一的象征 $l\in\Sigma^m_\rho(X)$. 进而可知映射 $L\to\sigma(L)=l$ 是 $\mathrm{OP}(\Sigma^m_\rho(X))\to\Sigma^m_\rho(X)$ 的满射，且其核是由 $H^s_{\mathrm{loc}}(X)\to H^{s-m+\rho}_{\mathrm{loc}}(X)$ 的连续线性映射. 对于 $\widetilde{\mathrm{OP}}(\Sigma^m_\rho(X))$ 有相应的结论. 由此可定义仿微分算子的象征为上述 $\sigma(L)$. 它的首项称为主象征. 与拟微分算子不同的是，对于同一个 L 在将它看成具不同指标 ρ 的 $\mathrm{OP}(\Sigma^m_\rho)$ 中的元素时，它所对应的象征 $\sigma(L)$ 不同. 因为 ρ 取得小时，需要从 $l(x,\xi)$ 的展开式中舍去一些低次项. 由于 $\mathrm{OP}(\Sigma^m_\rho)$

定义中的元 L 是适当可支的，从而可进行复合及共轭等运算. 即，若

$$L_j \in \mathrm{OP}(\Sigma_\rho^{m_j}(X)) \ (j=1,2),$$

则

$$L_1 \circ L_2 \in \mathrm{OP}(\Sigma_\rho^{m_1+m_2}(X)),$$

且 $\sigma(L^1 \circ L^2)=\sigma(L^1) \# \sigma(L^2)$. 又若 $L \in \mathrm{OP}(\Sigma_\rho^m(X))$，则 $L^* \in \mathrm{OP}(\Sigma_\rho^m(X))$，且 $\sigma(L^*)=(\sigma(L))^*$. 其中"#"和"*"的象征运算分别为：

$$l_1 \# l_2 = \sum_{|\alpha|+k_1+k_2 \leqslant [\rho]} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha (l_1)_{m_1-k_1} D_x^\alpha (l_2)_{m_2-k_2},$$

$$l^* = \sum_{|\alpha|+k \leqslant [\rho]} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{l}_{m-k}.$$

诚如拟微分算子中那样，存在各种形式的仿微分算子的象征，它们适合各种具体问题的需要. 例如也可用微分不等式代替关于 ξ 的齐次性等. 鲍克麦尔(Boulkhemair, A.)更考察了多种象征类，它们各有特色，有的在微分同胚下不变，有的在典则变换下保持稳定(从而可与傅里叶积分算子复合).

仿线性化(paralinearization) 对于非线性函数 $F(x,y)$ 进行线性化，使其成为仿积与具更高正则性余项之和的方法. 设 $F(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ 上的 C^∞ 函数，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)\in\mathbb{R}^N$，且它的各阶导数在 K 上有界，K 为 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ 中的任意紧集，则对实 $u^j(x)\in C^\rho(\mathbb{R}^n)(\rho>0, j=1,2,\cdots,N)$，有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u^1(x),u^2(x),\cdots,u^N(x)) = \sum_{j=1}^N T_{\frac{\partial F}{\partial y_j}(x,u^1(x),u^2(x),\cdots,u^N(x))} u^j(x) + R(x),$$

其中 $R(x)\in C^{2\rho}(\mathbb{R}^n)$. 又若 $u^j(x)\in H^s(\mathbb{R}^n)(s>n/2)$，则 $R(x)\in H^{2s-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

上述结果表明，对非线性函数 $F(x,y)$ 可用上述一种特殊的线性化方法化成仿积及正则性更高的余项之和. 这种线性化方法称为仿线性化. 在处理具体问题时还可出现各种不同的仿线性化形式. 利用上述仿线性化，可以将非线性微分方程经过线性化而用仿微分算子来表示. 考察 m 阶完全非线性微分方程

$$F(x,u,\cdots,\partial^\beta u,\cdots)_{|\beta|\leqslant m}=0.$$

设 F 关于它的自变量为 C^∞. 记 N 为上述 β 取遍 $|\beta|\leqslant m$ 的全体的个数. 设 F 及各阶导数在紧集 $K\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ 上有界. 又设 $u(x)$ 是方程的 $C^{\rho+m}$ 实解，$\rho>0$(或 $H^{s+m}, s>n/2$)，则用上述仿线性化可将方程化为 $Pu=R(x)$. 此处 $R(x)\in C^{2\rho}$(或 $H^{2S-n/2}$)，

$$P=\sum_{|\beta|\leqslant m} T_{\frac{\partial F}{\partial y_\beta}(x,\cdots\partial^\beta u(x),\cdots)} \partial^\beta \in \mathrm{OP}(\Sigma_\rho^m).$$

它的主象征是

$$p_m(x,\xi)=\sum_{|\beta|=m}\frac{\partial F}{\partial y_\beta}(x,\cdots,\partial^\beta u(x),\cdots)(\mathrm{i}\xi)^\beta.$$

当方程为拟线性或半线性时，$u(x)$ 的光滑性可减弱，$R(x)$ 的光滑性可提高. 这样，非线性微分方程问题就归结为仿微分方程的问题了.

仿傅里叶积分算子(para-Fourier integral operators) 现代微分算子理论中的一种重要的算子. 设 $h(x,\eta)\in C^{\rho+1}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ 是关于 η 为正齐一次的实函数，且它具非异的黑塞矩阵，$\rho>0$，所以 $h(x,\eta)=\langle\eta,h_\eta(x,\eta)\rangle$. 取 $h_\eta(x,\eta)$ 的李特尔伍德-佩利分解，且限制于 S^{n-1} 上，然后对 η 进行零次延拓，可得

$$h_\eta(x,\eta)=\sum_{k=-1}^\infty H_k'(x,\eta).$$

令 $H_k(x,\eta)=\langle\eta,H_k'(x,\eta)\rangle$，它关于 η 为正齐一次，且是 C^∞ 函数. 故

$$h(x,\eta)=\sum_{k=-1}^\infty H_k(x,\eta).$$

记

$$S_k h(x,\eta)=\sum_{j=-1}^{k-1} H_j(x,\eta).$$

又设 $u(x)$ 的李特尔伍德-佩利二进分解为

$$\sum_{k=-1}^\infty u_k(x).$$

做傅里叶积分算子 F_k：

$$F_k v(x)=\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_k h(x,\eta)} a(x,\eta)\hat{v}(\eta)\bar{\mathrm{d}}\eta,$$

其中 $a(x,\eta)\in S_{1,0}^m$，且为简单计，设它关于 x 有紧支集. 于是可定义仿傅里叶积分算子 $F_{(p)}$ 为

$$F_{(p)}u=\sum_{k\geqslant 0}[F_k u_k]_k,$$

其中

$$[F_k u_k]_k=\sum_{|k-j|\leqslant N}(F_k u_k)_j,$$

而

$$\sum_{j=-1}^\infty (F_k u_k)_j$$

是 $F_k u_k$ 的李特尔伍德-佩利二进分解；对应的二进环体是 $\{\widetilde{C}_j\}$. $2N$ 是 $\{\widetilde{C}_j\}$ 中与 $\widetilde{C}_k$ 相交的环体的个数.

$F_{(p)}$ 在仿微分算子理论中有许多与傅里叶积分算子在拟微分算子理论中相似的性质. 特别地，也有叶戈罗夫相似性定理. 于是就有可能对仿微分算子进行微局部化简. 用此方法可以再次证明邦尼(Bony, J. M.)的奇性传播定理，且可给出具有常重特征的非线性的低频情况下弱奇性的传播定理，从而显示出它在重特征非线性奇性传播中的潜力.

弗雷德霍姆线性积分算子(Fredholm linear integral operators) 一类重要的线性积分算子，是 n 维空间上的线性算子当 n 变成无穷时的极限

式. 设 G 是 R^N 中的可测集,

$$m(G) \neq 0, k(x,y): G \times G \to \mathrm{R}^1$$

是可积函数,则下列形式的算子

$$K\varphi = \int_G k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

称为弗雷德霍姆线性积分算子,$k(x,y)$称为 K 的核. 如果 $k(x,y)$可以表达为

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(y)$$

的形式,其中 $a_i(x)$和 $b_i(y)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$都是可积函数,则相应的线性积分算子称为是具有退化核的线性积分算子.

容易看出,具有退化核的线性积分算子本质上可以归结为有限维空间上的线性算子,从而它的性质实质上已在线性代数中被搞清楚了. 弗雷德霍姆线性积分算子的一个重要性质是它可以用具 有退化核的线性积分算子平均逼近. 根据这一性质,可以把有限维空间上线性算子的性质,通过极限的方法,转移到弗雷德霍姆线性积分算子上. 这一方法是研究线性积分方程的重要方法之一.

沃尔泰拉(Volterra,V.)于 1896—1897 年首先开始了对弗雷德霍姆线性积分算子的研究,他指出弗雷德霍姆线性积分算子,是 n 维空间线性算子当 n 变成无穷时的极限形式. 在这一观点的基础上,弗雷德霍姆(Fredholm,(E.)I.)于 1900 年提出了著名的弗雷德霍姆理论,随后,经过希尔伯特(Hilbert,D.)、施密特(Schmidt,E.)和里斯(Riesz,F.)等人的工作,线性积分算子的理论逐渐系统和成熟起来. 正是在这一过程中,泛函分析的思想和方法被孕育和产生出来,并最终成为现代数学的一个重要领域.

弗雷德霍姆行列式(Fredholm determinant) 由弗雷德霍姆线性积分算子的核确定的行列式. 设 G 是 R^N 中可测集,$m(G) \neq 0$,$k(x,y): G \times G \to \mathrm{R}^1$ 连续,令

$$A_n = \int_G \int_G \cdots \int_G \Delta \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_n,$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) & \cdots & k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) & \cdots & k(t_2,t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2) & \cdots & k(t_n,t_n) \end{vmatrix},$$

λ 是复数,则

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n$$

称为是 $k(x,y)$的弗雷德霍姆行列式. 弗雷德霍姆行列式 $D(\lambda)$是 λ 的整函数. $D(\lambda)$零点的性质对弗雷德霍姆线性积分算子理论有重要意义. 与弗雷德霍姆行列式密切相关的是弗雷德霍姆第一子式. 令

$$B_n(x,y) = \int_G \int_G \cdots \int_G \Delta \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_n,$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} k(x,y) & k(x,t_1) & \cdots & k(x,t_n) \\ k(t_1,y) & k(t_1,t_1) & \cdots & k(t_1,t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k(t_n,y) & k(t_n,t_1) & \cdots & k(t_n,t_n) \end{vmatrix},$$

则称

$$D(x,y;\lambda) = \lambda k(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} B_n(x,y)$$

为 $k(x,y)$的弗雷德霍姆第一子式. 它在线性积分算子的研究中起重要作用. 弗雷德霍姆行列式和弗雷德霍姆第一子式的概念,都是弗雷德霍姆(Fredholm,(E.)I.)于 1900 年提出的.

弗雷德霍姆理论(Fredholm theory) 关于线性积分算子的基本理论之一. 设 G 是 R^N 中具有非零测度的可测集,$k(x,y): G \times G \to \mathrm{R}^1$ 连续,$D(\lambda)$是 $k(x,y)$的弗雷德霍姆行列式,$D(x,y;\lambda)$是 $k(x,y)$的弗雷德霍姆第一子式,K 是由 $k(x,y)$确定的弗雷德霍姆线性积分算子,即

$$K\varphi = \int_G k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

弗雷德霍姆理论由下列三个基本定理组成:

弗雷德霍姆第一定理. 若 $D(\lambda) \neq 0$,则方程

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_G k(x,y) u(y) \mathrm{d}y$$

对任给的连续函数 $f(x)$,都有惟一连续解,且该解可以表为

$$u(x) = f(x) + \int_G \frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)} f(y) \mathrm{d}y.$$

弗雷德霍姆第二定理. 若 $D(\lambda) = 0$,则必存在某正整数 r(称为是 λ 的指数),使得

$$u(x) = \lambda \int_G k(x,y) u(y) \mathrm{d}y$$

有 r 个线性无关的连续解,并且它的任何连续解都可以表为这 r 个线性无关解的线性组合.

弗雷德霍姆第三定理. 若 $D(\lambda) = 0$,λ 的指数为 r,则

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_G k(x,y) u(y) \mathrm{d}y$$

有连续解的充分必要条件是

$$\int_G f(x) \psi_i(x) \mathrm{d}x = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,r),$$

其中 $\psi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,r)$是转置方程

$$v(x) = \lambda_0 \int_G k(y,x) v(y) \mathrm{d}y$$

的 r 个线性无关连续解.

上述三个定理,是弗雷德霍姆(Fredholm,(E.)I.)通过积分方程与线性代数方程组类比的方法(即把线性积分方程看成是"无穷维"线性方程组)于 1900 年获得的,但他没有给出严格的证明.

弗雷德霍姆理论的严格证明是由希尔伯特(Hilbert,D.)在1904－1910年期间给出的.当$k(x,y)$是平方可积函数时,与上述定理类似的结论也是成立的.

弗雷德霍姆理论,可以推广到作用在巴拿赫空间上的全连续算子方程$x=Ax+y$上,其中$A:E\to E$是全连续算子.这一推广就是泛函分析中里斯-绍德尔理论,它分别由里斯(Riesz,F.)和绍德尔(Schauder,J. P.)所提出(参见本卷"积分方程"有关条目).

迭核(iterated kernel)　由已知核经过逐次积分而得到的各种核.设$k(x,y)$是线性积分算子的核,令$k_1(x,y)=k(x,y)$,用归纳法定义

$$k_n(x,y)=\int_G k(x,z)k_{n-1}(z,y)\mathrm{d}z \quad (n=2,3,\cdots),$$

则称$k_n(x,y)$是$k(x,y)$的n次迭核.迭核具有下列性质:

$$k_n(x,y)=\int_G k_r(x,z)k_{n-r}(z,y)\mathrm{d}z,$$

其中r是满足$r<n$的任一正整数.对沃尔泰拉型积分算子的核$k(x,y)$,其n次迭核由

$$k_n(x,y)=\int_a^x k(x,z)k_{n-1}(z,y)\mathrm{d}z$$

定义.这种迭核又称为沃尔泰拉型n次迭核.

解核(solving kernel)　由n次迭核经过求和而得到的一种核.设$k_n(x,y)$是$k(x,y)$的n次迭核,λ为实数或复数,则

$$\Gamma(x,y;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}k_n(x,y)$$

称为解核.设$k(x,y)$连续,$|k(x,y)|\leqslant M$,则当

$$|\lambda|<\frac{1}{Mm(G)}$$

时,具线性积分算子的方程

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_G k(x,y)u(y)\mathrm{d}y$$

存在惟一解,并且该解可以用解核表示为

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_G \Gamma(x,y;\lambda)f(y)\mathrm{d}y.$$

对称核线性积分算子(linear integral operator with symmetric kernel)　具有对称核的线性积分算子.如果$k(x,y)$满足关系:$k(x,y)=\overline{k(y,x)}$,则$k(x,y)$称为对称核,由$k(x,y)$确定的线性积分算子

$$K\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

称为对称核的线性积分算子,又称为具有埃尔米特核的线性积分算子.对称核线性积分算子理论,是有限维空间对称矩阵理论在无穷维空间的推广.1904年,希尔伯特(Hilbert,D.)从有限维空间对称矩阵理论出发,通过取极限的方法,最早进行了对对称核线性积分算子的研究.施密特(Schmidt,E.)等也做出了重要贡献.对称核线性积分算子的理论在近代已经被抽象和推广为希尔伯特空间上的自共轭算子的谱分解理论.

对称核线性积分算子的特征值(characteristic value of linear integral operator with symmetric kernel)　矩阵特征值概念的推广.设X是巴拿赫空间,T是从X到X中的线性算子,I是X上的恒同算子,$\lambda\in C$.若有$x\in X,x\neq 0$,使得$(\lambda I-T)x=0$,则称λ为T的特征值,x称为T相应于λ的特征元(当X是函数空间时,x也可称为T相应于λ的特征函数).对于具有对称核$k(x,y)$的线性积分算子

$$K\varphi=\int_G k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

如果$k(x,y)$在$G\times G$上是平方可积的,并且不恒等于0,那么K的特征值与特征函数有很好的性质.这些性质是:

1. K至少有一个特征值.

2. K的一切特征值都是实数.

3. K的绝对值最小的特征值,其绝对值的倒数等于

$$\max\left\{\left|\int_G\int_G k(x,y)\varphi(x)\overline{\varphi}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|,\ \int_G|\varphi^2(x)|\mathrm{d}x=1.\right\}$$

4. K的不同特征值对应的特征函数是正交的.

5. 设K的一切特征值组成的集合为$\{\lambda_n\}$,则$\{\lambda_n\}$至多是可数的,并且存在K的特征函数序列$\{\psi_n\}$,满足$\psi_n=\lambda_n K\psi_n$,其中$\{\psi_n\}$是就范正交的,即

$$\int_G\psi_n(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & (m=n),\\ 0 & (m\neq n).\end{cases}$$

并且若λ是K的任一特征值,ψ是K的属于λ的任一特征函数,则λ必等于$\{\lambda_n\}$中的某一个,而ψ必是$\{\psi_n\}$中有限个元素的线性组合.上述性质5中的$\{\lambda_n\}$称为K的全系特征值,$\{\psi_n\}$称为K的全系就范正交特征函数.

对称核线性积分算子的特征函数(characteristic function of linear integral operator with symmetric kernel)　见"对称核线性积分算子的特征值".

希尔伯特-施密特积分算子(Hilbert-Schmidt integral operator)　一类核平方可积的积分型算子.设$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$是测度空间,$K(s,t)$是$(\Omega\times\Omega,\mathscr{B}\times\mathscr{B},\mu\times\mu)$上可测函数,并且

$$\iint|K(s,t)|^2\mathrm{d}\mu(s)\mathrm{d}\mu(t)<+\infty,$$

则

$$(Tx)(s) = \int_{\Omega} K(s,t)x(t)\mathrm{d}\mu(t)$$

是 $L^2(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 到自身的有界线性算子. 如果 $L^2(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 是可分空间,那么易知 T 是 $L^2(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 上的希尔伯特-施密特算子,因而上述积分算子通常称为希尔伯特-施密特积分算子.

希尔伯特-施密特定理(Hilbert-Schmidt theorem) 对称核线性积分算子的基本定理. 设 K 是对称核线性积分算子,其核 $k(x,y)$ 是平方可积的,并且不恒等于零. 设 $\{\lambda_n\}$ 和 $\{\varphi_n\}$ 是 K 的全系特征值与全系就范正交特征函数. 设 $h(x)$ 是平方可积的,令

$$f(x) = \int_G k(x,y)h(y)\mathrm{d}y,$$

则 $f(x)$ 可以表示为 $\{\varphi_n\}$ 的几乎绝对一致收敛的傅里叶级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x),$$

并且若

$$\int_G |k(x,y)|^2 \mathrm{d}y$$

有界,则上述收敛是绝对一致收敛. 这一定理是希尔伯特(Hilbert,D.)和施密特(Schmidt,E.)所建立的. 这一定理在对称核线性积分方程理论中起重要作用. 有时,人们还把关于对称核线性积分算子的一整套理论也统称为希尔伯特-施密特理论.

正定核(positive definite kernel) 一类特殊的对称核,其相应的线性积分算子的特征值都是正的. 设对称核 $k(x,y)$ 是 $G\times G$ 上的平方可积函数,K 是以 $k(x,y)$ 为核的线性积分算子. 如果 K 作为映 $L^2(G)$ 入 $L^2(G)$ 的算子,其所有的特征值都是正的,则称 $k(x,y)$ 是正定核. 若 K 仅有有限多个负特征值,则称 $k(x,y)$ 是拟正定核.

拟正定核(quasi-positive denifite kernel) 见"正定核".

线性积分算子的分解(splitting of linear integral operator) 算子的一种分解. 所谓线性积分算子的分解,是指把一个线性积分算子分解为另外两个或几个线性算子的复合. 这种分解,在许多问题中是有重要意义的. 例如,在利用变分方法研究非线性积分方程解的性质时,线性积分算子的分解起着重要作用.

设 $k(x,y)$ 是拟正定核,由 $k(x,y)$ 确定的线性积分算子 K 映 $L^2(G)$ 入 $L^2(G)$ 全连续,并且映 $L^q(G)$ 入 $L^p(G)$ 全连续,这里 $1<q\leqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$,则必定存在映 $L^2(G)$ 入 $L^p(G)$ 的全连续线性算子 H,使得 K 可以分解为

$$K=H(-P_1+P_2)H^*,$$

其中 $H^*:L^q(G)\to L^2(G)$ 是 H 的共轭算子,P_1 是映 $L^2(G)$ 到 E_1 的线性投影算子,E_1 是 K 的属于 $L^2(G)$ 的所有对应于负特征值的特征函数组成的 $L^2(G)$ 的闭子空间(由于 $k(x,y)$ 是拟正定的,E_1 必定是有限维的),$P_2=I-P_1$. 若 $k(x,y)$ 是正定核,则 $P_1=0$,在这种情况下,K 具有分解 $K=HH^*$.

沃尔泰拉线性积分算子(Volterra linear integral operator) 一类重要的线性积分算子,线性常微分方程初值问题就可以归结为这类线性积分算子的研究. 如下形式的线性积分算子

$$K\varphi = \int_0^x k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

称为沃尔泰拉线性积分算子.

设 $k_n(x,y)$ 是 $k(x,y)$ 的沃尔泰拉型 n 次迭核,则对任给 λ,如下沃尔泰拉线性积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

都存在惟一解,并且该解可以表示为

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\int_a^x k_n(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

沃尔泰拉(Volterra,V.)于 1896－1897 年首先系统地研究了这一类算子.

线性积分算子的全连续性(complete continuity of linear integral operator) 全连续性是线性积分算子特有的基本性质. 设 $k(x,y)$ 是 $G\times G$ 上的平方可积函数,则以 $k(x,y)$ 为核的线性积分算子是映 $L^2(G)$ 入 $L^2(G)$ 的全连续线性算子. 类似地,若 $k(x,y)$ 在 $G\times G$ 上连续,则以 $k(x,y)$ 为核的线性积分算子是映 $C(G)$ 入 $C(G)$ 的全连续算子. 线性积分算子所具有的全连续性,使得线性积分算子可以作为全连续线性算子的一种特例而加以研究. 人们可以首先用泛函分析的方法研究全连续线性算子,然后作为应用的特例,导出线性积分算子的基本性质.

克列因-鲁特曼定理(Klein-Rutman theorem) 关于具有非负核的线性积分算子特征值与特征函数性质的一组结论. 设 G 是 R^N 中的可测集,$m(G)\neq 0$, $k(x,y): G\times G\to[0,+\infty)$,并且由 $k(x,y)$ 所确定的线性积分算子

$$K\varphi = \int_G k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

映 $C(G)$ 入 $C(G)$ 是全连续算子. 1948 年,克列因(Крейн,М. Г.)和鲁特曼(Рутман,М. А.)利用锥理论和半序方法研究了线性积分算子正特征值和特征函数的性质,其主要内容有:

1. 如果存在 $\psi\in C(G)\setminus\{\varphi\in C(G)\,|\,\varphi(x)\leqslant 0\}$,实数 $c>0$ 以及正整数 p,使得 $cK^p\psi\geqslant\psi$,则 K 具有

对应于正特征函数的正特征值.

2. 如果线性积分算子的谱半径 $r(K)\neq 0$,则 K 必具有对应于 $r^{-1}(K)$ 的正特征函数.

3. 如果 K 是 u_0 有界算子,即存在

$$u_0 \in \{\varphi \in C(G) \mid \varphi(x) \geqslant 0\},\ u_0(x) \neq 0,$$

使得对任给的

$$\varphi \in \{\varphi \in C(G) \mid \varphi(x) \geqslant 0\},$$

都有正整数 n 及实数 $\alpha>0,\beta>0$,满足 $\alpha u_0 \leqslant K^n\varphi \leqslant \beta u_0$,则 K 有并且仅有一个就范特征函数. 更进一步,K 有并且仅有一个对应于正特征函数的特征值,其代数重数为 1.

克列因-鲁特曼定理对研究线性积分算子的性质有重要意义,它对于非线性积分方程和非线性微分方程的研究,也有很多应用. 目前,这一定理中的某些结论已经推广到非线性积分算子.

卡拉西奥多里条件(Carathéodory condition) 在非线性积分算子理论中起重要作用的一个条件. 设 G 是 R^N 中的可测集,$f(x,u):G\times\mathrm{R}^1\to\mathrm{R}^1$. 如果 $f(x,u)$ 满足:对几乎所有的 $x\in G$,$f(x,u)$ 是 u 的连续函数,并且对每一个 $u\in\mathrm{R}^1$,$f(x,u)$ 是 x 的勒贝格可测函数,则称 $f(x,u)$ 满足卡拉西奥多里条件. 这一条件是卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)于 1918 年首先提出的,它在非线性积分算子理论和各种非线性问题中,起着重要的作用.

涅梅茨基算子(Remesky operator) 在非线性微分方程和非线性积分方程的研究中起重要作用的一类非线性算子. 设 G 是 R^N 中的可测集,$m(G)\neq 0$,若 $f(x,u)$ 满足卡拉西奥多里条件,则算子 $f\varphi=f(x,\varphi(x))$ 称为涅梅茨基算子. 涅梅茨基算子将可测函数映为可测函数. 涅梅茨基算子的一个重要性质是:如果 $f\varphi=f(x,\varphi(x))$ 映 $L^{p_1}(G)$ 入 $L^{p_2}(G)$ $(p_1\geqslant 1,p_2\geqslant 1)$,则 f 是连续算子,并且是有界算子. 而 f 映 $L^{p_1}(G)$ 入 $L^{p_2}(G)$ 的充分必要条件是存在常数 $b>0$ 及 $a(x)\in L^{p_2}(G)$,$a(x)\geqslant 0$,使得

$$|f(x,u)| \leqslant a(x) + b|u|^{\frac{p_1}{p_2}}$$

对任给 $x\in G$,$u\in\mathrm{R}^1$ 成立. 这一类算子,是涅梅茨基(Немыцкий,В. В.)在 1934 年首先提出并加以研究的.

涅梅茨基算子的位势性(potentiality of Remesky operator) 涅梅茨基算子的一个重要性质是它的位势性. 设涅梅茨基算子 f 映 $L^p(G)$ 入 $L^q(G)$,$p>1$,$p^{-1}+q^{-1}=1$,则 $L^p(G)$ 上的泛函

$$F(\varphi) = \int_G \mathrm{d}x \int_0^{\varphi(x)} f(x,u)\mathrm{d}u$$

在 $L^p(G)$ 上是弗雷歇可微的,并且有 $\mathrm{grad}F=f$. 涅梅茨基算子的位势性在非线性方程和非线性微分方程的变分方法中起重要作用.

沃尔泰拉非线性积分算子(Volterra nonlinear integral operator) 沃尔泰拉线性积分算子的推广. 形如

$$K\varphi = \int_a^x k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y$$

的积分算子称为沃尔泰拉非线性积分算子. 数学、自然科学和工程技术领域中的许多问题,都可以归结为对这一类算子的研究. 例如,常微分方程初值问题

$$u' = f(t,u),\quad u(0) = u_0$$

就可以归结为

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(t,u(t))\mathrm{d}t,$$

上述方程右端就包含了一个沃尔泰拉非线性积分算子. 而且一般地,关于常微分方程初值问题的一系列重要定理,例如存在惟一性定理、连续延拓定理、连续相依性定理和比较定理等,也都可以平行移植到含沃尔泰拉非线性积分算子的方程上. 如果沃尔泰拉非线性积分算子具有下列形式:

$$K\varphi = \int_0^t k(t-s)f(s,\varphi(x))\mathrm{d}s,$$

则称之为卷积型沃尔泰拉非线性积分算子,它在数学物理和其他许多重要问题中都有重要应用. 在研究卷积型沃尔泰拉非线性积分算子时,常常要用到卷积的概念和傅里叶变换的理论.

哈默斯坦非线性积分算子(Hammerstein non-linear integral operator) 一类重要的非线性积分算子,是积分算子理论的重要研究对象之一. 设 G 是 R^N 中可测集,$m(G)\neq 0$,$f(x,u):G\times\mathrm{R}^1\to\mathrm{R}^1$ 满足卡拉西奥多里条件,$k(x,y):G\times G\to\mathrm{R}^1$ 是可测函数,则

$$A\varphi = \int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y$$

称为哈默斯坦非线性积分算子,$k(x,y)$ 称为该积分算子的核. 如果令 f 是由 $f(x,u)$ 确定的涅梅茨基算子,K 是以 $k(x,y)$ 为核的线性积分算子,则哈默斯坦非线性积分算子 A 可以写成 $A=Kf$ 的形式. 许多重要的非线性问题都可以导致哈默斯坦非线性积分算子的研究. 例如,对非线性椭圆型偏微分方程的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

就可以归结为哈默斯坦非线性积分算子的研究,其中 $k(x,y)$ 是相应的格林函数.

哈默斯坦非线性积分算子是由哈默斯坦(Hammerstein,H.)于 1930 年首先提出并给以系统研究的. 为了能够使用关于全连续算子的拓扑度

理论，许多学者研究了这类算子的全连续性判别，并由此引入了涅梅茨基算子的概念及其连续性和有界性的研究. 与哈默斯坦非线性积分算子密切相关的是关于哈默斯坦非线性积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y \qquad (1)$$

的研究. 在早期，关于方程(1)的研究，主要集中在其解的存在性问题上，使用的主要工具有拓扑方法和变分方法. 近二三十年来，由于非线性泛函分析取得了一系列重大进展，为研究方程(1)的多解问题提供了强有力的工具，人们开始把主要兴趣放在方程(1)解的个数的研究上，并取得了许多重要结果. 尽管如此，哈默斯坦非线性积分方程的理论还远不够成熟和完善，为了使它进一步发展和完善，还必须克服许多困难，还有待于新的、更强有力的工具的出现.

乌雷松非线性积分算子(Urysohn nonlinear integral operator)　一类相当广泛的非线性积分算子. 设 $k(x,y,u):G\times G\times\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ 是可测函数，则形如

$$A\varphi=\int_G k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y$$

的算子称为乌雷松非线性积分算子. 它是一类很广泛的算子类，包含了哈默斯坦非线性积分算子和沃尔泰拉非线性积分算子作为特殊情况. 这类算子由于过于广泛，研究起来困难很大，所以到目前为止，除了在该类算子的全连续判别上有了较系统的结果之外，关于乌雷松非线性积分方程解的性质的研究，结果是很少的，还有待于人们去探索. 这类算子是由乌雷松(Урысон, П. С.)于 1924 年首先提出并加以研究的.

非线性积分算子的全连续性(complete continuity of nonlinear integral operator)　全连续性是非线性积分算子的重要性质. 如果 $k(x,y,u)$ 在 $G\times G\times\mathbf{R}^1$ 上连续，则乌雷松非线性积分算子

$$A\varphi=\int_G k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y$$

是作用在 $C(G)$ 上的全连续算子. 进一步，下列结果成立：若 G 是具有非零测度的有界闭集，对一切 $x\in G$ 和几乎一切 $y\in G$，$k(x,y,u)$ 关于 u 连续，并且对一切 $x\in G$，$u\in\mathbf{R}^1$，$k(x,y,u)$ 关于 y 可测，则相应的乌雷松非线性积分算子映 $C(G)$ 入自身全连续的充分必要条件是，对任给 $a>0$，

$$\int_G \sup_{|u|\leqslant a}|k(x,y,u)|\mathrm{d}y<+\infty,$$

$$\lim_{\substack{|h|\to 0\\ x+h\in G}}\int_G \sup_{|u|\leqslant a}|k(x+h,y,u)-k(x,y,u)|\mathrm{d}y=0$$

对一切 $x\in G$ 成立. 关于乌雷松算子在 $L^p(G)$ 空间上的全连续性，有如下结果：若 $k(x,y,u)$ 满足

$$|k(x,y,u)|\leqslant R(x,y)(a+b|u|^\alpha),$$

其中 $a>0$，$b>0$，$\alpha>0$，

$$\int_G\int_G[R(x,y)]^{\alpha+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty,$$

则相应的乌雷松非线性积分算子映 $L^p(G)$ 入自身全连续，其中 $p=\alpha+1$. 一系列更细致和深入的结果也已经被获得.

哈默斯坦非线性积分算子的全连续，可以作为乌雷松非线性积分算子的特例由上面所述的结果得到. 此外，哈默斯坦非线性积分算子还有特有的判别法，即，如果涅梅茨基算子 f 映某巴拿赫空间 E_1 到另一巴拿赫空间 E_2 是连续有界算子，而线性积分算子 K 映 E_2 到 E_1 是全连续线性算子，则相应的哈默斯坦非线性积分算子 Kf 映 E_1 到自身是全连续的. 非线性积分算子的全连续性，在非线性积分方程的研究中具有本质的意义，正是由于这一性质，才使得非线性泛函分析的基本方法——拓扑方法和变分方法在非线性积分方程理论中得以广泛应用.

非线性积分方程中的变分方法(variational method in the theory of nonlinear integral equations)　研究非线性积分方程的基本方法之一，它主要适用于对称核哈默斯坦非线性积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y. \qquad (1)$$

设 $f(x,u)$ 满足卡拉西奥多里条件，并且存在 $p\geqslant 2$，$a(x)\geqslant 0$，$a(x)\in L^q(G)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$，使得

$$|f(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1}.$$

又设 $k(x,y)$ 是实的对称核，又是拟正定的，并且以 $k(x,y)$ 为核的线性积分算子 K 映 $L^2(G)$ 入 $L^2(G)$ 全连续，映 $L^q(G)$ 入 $L^p(G)$ 全连续. 由于 $k(x,y)$ 是拟正定的，所以 K 作为映 $L^q(G)$ 入 $L^p(G)$ 的算子存在一个分解

$$K=H(-P_1+P_2)H^*.$$

容易证明哈默斯坦非线性积分方程(1)等价于

$$(-P_1+P_2)\psi=H^*fH\psi, \qquad (2)$$

而方程(2)的解又等价于 $L^2(G)$ 上的泛函

$$\Psi(\psi)=-\frac{1}{2}\int_G P_1\psi(x)\psi(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_G P_2\psi(x)\psi(x)\mathrm{d}x-\int_G\mathrm{d}x\int_0^{H\psi}f(x,u)\mathrm{d}u \qquad (3)$$

的临界点，因此哈默斯坦非线性积分方程(1)的性质，可以归结为希尔伯特空间上的泛函(3)的变分问题. 这就形成了研究非线性积分方程的基本方法之一——变分方法. 对于正定核，由于 $P_1=0$，$P_2=I$，故泛函(3)可以写成

$$\Psi(\psi) = \frac{1}{2}\int_G \psi(x)\psi(x)\mathrm{d}x - \int_G \mathrm{d}x\int_0^{H\psi} f(x,u)\mathrm{d}u. \qquad (3^*)$$

在适当的条件下，由(3)(或(3*))式定义的泛函是强制的，弱下半连续的，故由著名的外尔斯特拉斯定理，可以断定泛函(3)(或(3*))在$L^2(G)$中达到最小值，从而可以获得哈默斯坦非线性积分方程(1)的可解性定理. 利用近年来在大范围变分学中获得的新成就，例如山路引理等，可以研究哈默斯坦非线性积分方程的多解问题，得到一系列深刻的结果.

非线性积分方程中的拓扑方法(topological method in the theory of nonlinear integral equations)　亦称拓扑度理论，是研究非线性积分方程的基本方法. 1934 年，勒雷(Leray, J.)和绍德尔(Schauder, J. P.)利用代数拓扑学的发展成就，建立了非线性泛函分析的基本理论之一，即无穷维巴拿赫空间上全连续算子的拓扑度理论. 由于非线性积分算子

$$A\varphi = \int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y,$$

$$A\varphi = \int_G k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y$$

在非常广泛的条件下是全连续算子，从而拓扑方法自然地成为研究非线性积分方程的主要方法. 早期，人们主要是利用拓扑度理论中的绍德尔不动点定理和勒雷-绍德尔原理，研究非线性积分方程解的存在性问题. 近二三十年来，克拉斯诺塞尔斯基(Красносельский, М. А.)提出了著名的锥拉伸与压缩不动点定理，阿曼(Amann, H.)等人将拓扑度与锥理论相结合，建立了锥上的不动点指数理论，为研究非线性积分方程的多解问题提供了强有力的工具. 到目前为止，拓扑方法在非线性积分方程中的运用还是初步的. 如何把拓扑方法更深入的应用到非线性积分方程理论中去，还是一个有待研究的重要问题.

维纳-霍普夫积分方程(Wiener-Hopf integral equations)　由于研究辐射迁移理论的需要而提出的一类积分方程. 下面的线性积分方程

$$\varphi(t) - \int_0^{+\infty} k(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s = f(t) \qquad (1)$$

$$(0 \leqslant t < +\infty)$$

称为维纳-霍普夫积分方程. 这一类型的方程是实际应用中经常遇到的，但不完全满足古典的弗雷德霍姆理论的方程. 由于研究辐射迁移理论的需要，从 20 世纪 20 年代起就开始了对这一类型方程的研究. 关于方程(1)的第一个结果是 1931 年由维纳(Wiener, N.)与霍普夫(Hopf, H.)共同得到的. 他们在假定核$k(t)$和未知函数$\varphi(t)$满足一定的条件下，得到了方程(1)的齐次方程

$$\varphi(t) - \int_0^{+\infty} k(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s = 0 \qquad (2)$$

解的解析表达式. 在维纳与霍普夫的上述工作中，第一次利用了因子分解的思想来处理方程(1). 由研究维纳-霍普夫方程而逐渐发展起来的维纳-霍普夫技巧(即因子分解的技巧)，现在已经成为研究维纳-霍普夫方程(1)的重要的理论基础，而且也是研究许多数学物理问题的强有力的工具.

关于方程(1)的第二个重要结果是由拉普泼特(Раппорт, И. М.)于 1948 年得出的. 他在假定核$k(t)$满足适当的条件，把方程(1)化成一个黎曼边值问题，从而借助黎曼边值问题的一些熟知结果对方程(1)进行研究. 在上述工作中，拉普泼特建立了方程(1)在函数类$L^2(0,+\infty)$中的正则可解性定理，并且第一次指出了指数

$$\kappa = \mathrm{index}(1 - k(t)) \qquad (3)$$

与齐次方程(2)的线性无关解个数之间的紧密联系. 1958 年，克列因(Крейн, М. Г.)和哥赫别格(Гохберг, И. Ц.)等人进一步发展了维纳-霍普夫的因子分解的思想，对方程(1)建立了更为一般和更加完整的理论.

***H* 方程**(H-equations)　一类积分方程. 下面的方程

$$H(x) = 1 + H(x)\int_0^1 \frac{x}{x+t}\psi(t)H(t)\mathrm{d}t \qquad (1)$$

称为H方程，其中$\psi(t)$是一已知函数，假定它在$[0,1]$上是非负有界可测的，而$H(t)$是待求的函数. 这一类型方程在辐射迁移和中子迁移理论中起到重要作用.

H方程的研究开始于 20 世纪 40 年代. 1947 年，桑德拉塞卡尔(Chandrasekher, S.)、克鲁木(Crum, M. M.)利用复变函数论的方法，在复平面内考察了方程(1)，并给出该方程在半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 内解析且在$[0,1]$上有界的解的存在性条件. 克鲁木还证明当

$$\int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}$$

时，方程(1)最多只有两个解；而当

$$\int_0^1 \psi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

时，则方程(1)仅有一个这样的解. 1957 年，布斯布里基(Buisbridge, I. W.)在假设$\psi(t)$为全纯函数的条件下，简化了克鲁木结果中的某些讨论. 关于H方程的研究现已有了许多重要进展，并把它推广到某些更一般的形式.

柯西奇异积分方程(Cauchy singular integral equations)　一类最基本且具有广泛实际应用的

奇异积分方程. 下面的一类积分方程

$$a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=f(t) \quad (1)$$

称为柯西奇异积分方程，其中 L 为复平面上一光滑的闭合曲线，$a(t)$，$K(t,\tau)$和 $f(t)$是给定在 L 上满足赫尔德条件的函数，而积分是柯西主值意义下的.

这种方程的研究已有很长的历史. 差不多在建立弗雷德霍姆理论的同时，即已出现在希尔伯特(Hilbert,D.)和庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)等人的工作中. 以后经过许多数学家的努力，这一类方程的理论已发展得相当完善，它在弹性理论、空气动力学、水力学、量子场论以及数学物理等方面有着广泛的应用. 若记

$$k(t,t)=b(t),\ k(t,\tau)=\frac{K(t,\tau)-K(t,t)}{\pi i(\tau-t)},$$

则柯西奇异积分方程(1)可写成

$$K\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t). \quad (2)$$

若 $b(t)=0$，则方程(2)中不出现奇异积分，因而方程(2)就是具弱奇性核的弗雷德霍姆型积分方程；当 $b(t)\neq0,t\in L$ 时，则称方程(2)为完整的奇异积分方程. 又函数 $a(t)$和 $b(t)$称为积分方程(2)的系数. 如果 $f(t)\equiv0$，则称(2)为齐次的奇异积分方程；否则称之为非齐次的奇异积分方程. 又积分方程

$$K^0\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t) \quad (3)$$

称为奇异积分方程(2)的特征方程. 把奇异积分方程(1)中的核 $k(t,\tau)/(\tau-t)$的变量 t 和 τ 的位置互换，所得到的新的奇异积分方程

$$K'\psi\equiv a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L k(\tau,t)\psi(\tau)d\tau=h(t) \quad (4)$$

称为积分方程(2)的转置(或相联)方程，而特征方程(3)的相联方程为

$$K^{0'}\psi\equiv a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{b(\tau)}{\tau-t}\psi(\tau)d\tau=h(t). \quad (5)$$

当积分方程(3)中的系数 $a(t)$和 $b(t)$满足条件

$$a(t)+b(t)\neq0,\ a(t)-b(t)\neq0\ (t\in L) \quad (6)$$

时，则称数

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right]_L$$

为特征方程(3)(或特征算子 K^0)的指标.

柯西奇异积分方程与弗雷德霍姆积分方程之间有着本质的不同. 对弗雷德霍姆积分方程而言，如果齐次方程有异于零的解，则非齐次方程一般来说无解；而当齐次方程无异于零的解时，则非齐次方程对任意自由项总有解. 但对柯西奇异积分方程而言情况就不一样，如果齐次方程有异于零的解，则非齐次方程对任意的自由项也是可解的；而当齐次方程只有零解时，非齐次方程一般来说是无解的. 此外，柯西奇异积分方程的系数 $a(t)$可以为零，只要满足条件(6)就可以求其解. 但对弗雷德霍姆方程来说，如果积分号外不出现未知函数(即为第一种积分方程)，一般地，它是不适定的.

关于柯西奇异积分方程，诺特(Noether,F.)建立了下面的三个基本定理，这些定理起着与弗雷德霍姆积分方程的弗雷德霍姆理论相同的作用：

1. 齐次奇异方程

$$K\varphi=0\ \text{和}\ K'\psi=0$$

的线性独立(非零)解的个数是有限的.

2. 奇异积分方程(2)可解的充分必要条件是满足

$$\int_L f(t)\psi_j(t)dt=0\ (j=1,2,\cdots,k'),$$

其中 $\psi_j(t)(j=1,2,\cdots,k')$是相联齐次方程 $K'\psi=0$ 的线性无关解的完全组.

3. 齐次奇异方程 $K\varphi=0$ 的线性无关解的个数 k 与其相联齐次奇异方程 $K'\psi=0$ 的线性无关解的个数 k'之差，仅依赖于算子 K 的特征部分，且等于 K^0 的指标 κ，即 $\kappa=k-k'$.

弗雷德霍姆积分方程的弗雷德霍姆理论与柯西奇异积分方程的诺特理论的主要差别在于：在弗雷德霍姆积分方程中，齐次方程与其相联齐次方程线性独立解的个数相同，而对柯西奇异积分方程，两者的个数一般不相等，其差等于奇异积分方程的指标 κ. 特别地，如果 $\kappa=0$，则诺特诸定理就是弗雷德霍姆理论的诸定理.

撰　稿　仇庆九　孙经先　孙善利　严绍宗　杜鸿科　杨亚利　汪　林　陈晓漫　范先令　林源渠　侯晋川

审　阅　严绍宗　李炳仁　吴从炘　张石生　张恭庆　陈文嵘　陈庆益　郭大钧

变　分　法

变分法(calculus of variations)　亦称变分学，研究泛函极值的一门学科.变分法主要研究泛函的变元函数使泛函达到极值的必要条件和充分条件，并研究求得该变元函数的方法及其性质.变分法的研究方法有直接法与间接法.直接法是直接由泛函去求得极值或判断相应极值问题是否有解；而间接法是先给出泛函达到极值的必要条件：欧拉-拉格朗日方程(亦称为欧拉方程)，然后在满足欧拉-拉格朗日方程的解中，利用各种充分条件来判断变分问题是否有解.

变分法的历史可追溯到古希腊，那时就有了所谓等周问题：在长度一定的封闭曲线中，找出围出最大面积的一条封闭曲线.另一著名的问题即最速落径问题是由伽利略(Galilei,G.)首先提出的.但对变分法实质性研究还是从1696年，约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)公开向欧洲数学家给出该问题的解开始，洛必达(L'Hospital,G.-F.-A. de)、雅可比(Jacobi,C. G. J.)、约翰第一·伯努利、莱布尼茨(Leibniz,G. W.)、牛顿(Newton,I.)用了不同的方法解决了这个问题.后来欧拉(Euler,L.)和拉格朗日(Lagrange,J.-L.)对这一类问题的研究奠定了变分法的理论基础.变分法这一名词由拉格朗日首次提出来，一直沿用下来.

人们研究变分法，是因为社会和自然诸多领域都存在变分原理的实际背景.社会追求效益，投入一定时，希望产出最大；或产出一定时，希望投入最小.某些现象中，自然也依最简单最有效的方式运行.牛顿在《自然哲学的数学原理》中写到："自然不做任何徒劳无益的事情，浪费愈多，服务愈少.自然喜欢简单性而不为浮华所动".现代科学早期就依最优原理表达某些自然规律.这一原理看来在一定程度上反映了宇宙的先验的和谐性，特别吸引那些为知识的统一性和简单性而奋斗的科学家.事实上，确实有许多自然规律可用极值原理来表达.第一个发现这种类型的原理是公元前100年，亚历山大的海伦(Heron,(A))提出的，他用光总走最短路径解释光的反射定律.1662年，费马(Fermat,P. de)从光总是依最快的路径从一点传播到另一点这一假设推导出光折射定律.这一假设现在称为费马原理.大约80年后，莫佩蒂(Maupertuis,P.-L. M. de，普鲁士科学院院长)断言，如果自然发生了什么变化，那么对这一变化所付出的作用量必然是最小的.莱布尼茨对作用引进量纲是"能量×时间"，按照普朗克(Planck,M.)的量子原理(1900年)，这个量是基本量子h的整数倍.在莫佩蒂的著述中，作用原理含糊不清，不十分令人信服，受到伏尔泰(Voltaire)的无情嘲讽.这或许使得拉格朗日将1788年的"分析力学"建立在达朗贝尔原理的基础上而非最小作用原理的基础上，尽管他早在1760年对这一原理已有了相当明确的一般数学提法.很晚以后，哈密顿(Hamilton,W. R.)和雅可比才给这一原理以令人满意的形式，大概是亥姆霍兹(Helmholtz,H. von)把它提高到最普遍的物理规律的行列.20世纪前半期，物理学家主要热衷于用空间时间微分方程描述自然规律，现在最小作用原理又明显回潮.

古典变分法已有近300年的历史.微积分创立不久，变分法便开始发展.赢得国际声望的研究首先是约翰第一·伯努利1696年解决了最速落径问题.他和他的哥哥雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)是这一新领域的奠基者，虽说莱布尼茨、牛顿、惠更斯(Huygens,C.)、洛必达也都有不俗的贡献.在欧拉和拉格朗日的手里，变分法成了解答许多物理和几何问题的灵活有效的理论.变分法的第一阶段，人们推导变分问题的最大或最小函数满足的必要条件，比如欧拉方程.欧拉用折线逼近曲线的一种粗放方法导出它，而拉格朗日则用高雅的变分导出它，欧拉随即把这一学科命名为变分法.在变分法发展的初期阶段，保证欧拉方程的解具有极小性的充分性条件尚未涉及，只有约翰第一·伯努利1718年的一篇文章例外，但该文在近200年中被忽视.

充分性问题首次在勒让德(Legendre,A.-M.)1788年的文章"Sur la maniere de distingues les maxima des minima dans le calcul des variations"(关于区分变分法中的极大和极小)中被系统研究.勒让德在该文中用二阶变分处理这一问题.尽管拉格朗日在1797年指出了该文的一些错误，但雅可比1837年重新探讨这一问题时发现该文的思想是富有成效的.雅可比在其短文"Zur Theorie Variations-Rechnung und der Defferential-Gleichungen"中概述了二阶变分的理论，其中包括他的著名共轭点理论，但所有的结果只有叙述而本质上没有证明.这需要整整一代的数学家添补细节.高斯(Gauss,C. F.)首先在1830年的文章"Principia generalia theoriae figure fluidorum in statu aequilibrii"中考虑了自由边界问题，继而有泊松(Poisson,S.-D.)、奥斯特罗格拉茨基(Остроградский,М. В.)、德洛内(Delaunay,C. E.)、萨鲁斯(Sarrus,P. F.)和柯西(Cauchy,A.-L.).施依佛(Scheeffer,L.)和外尔斯

特拉斯(Weierstrass,K.(T. W.))发现使二阶变分具有正定性的平稳函数一般只取弱极值,即只是在切线很接近的曲线之间比较而言的极值.为研究强极值充分条件,外尔斯特拉斯在1879年建立了场论,把平稳曲线嵌入到适当的平稳曲线场,这大大简化了平稳曲线与邻近曲线的比较.

变分法理论的发展与力学、光学、弹性理论、电磁学等学科密切相关.同时变分法的理论成果又能应用到这些学科.现代变分法在各学科的应用愈来愈广,并发展成为优化和最优控制理论.

变分学(calculus of variations) 即"变分法".

黛多问题(Dido problem) 最古老的变分问题.对xy平面上连结原点和x轴上一点$(x_1,0)(x_1>0)$,位于第一象限内的一条长为l的曲线C,问C是什么形状时,C与x轴围成的面积最大?这就是黛多问题.黛多问题的答案是C的形状为半圆.

等周问题(isoperimetric problem) 历史上出现较早的一个变分问题.用一条长度一定的平面曲线在平面上围成一个凸区域,求使区域面积最大的闭曲线.这是最简单的等周问题,它的解是一个圆周,这是由雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)于1701年解决的.

牛顿问题(Newton problem) 现代变分法的一个著名问题.设物体垂直于速度向量的最大截面的形状$\Omega\subset\mathrm{R}^2$,物体表面形状是函数$u:\Omega\to\mathrm{R}$的图形,那么牛顿(Newton,I.)提出的摩擦定律引导他得到物体受的阻力为

$$J(u)=c\int_\Omega\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}{1+|Du|^2}$$

$$\left(Du=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right);c\text{ 为常数}\right).$$

若Ω是以原点为圆心,R为半径的圆盘,并且物体是旋转对称的,即

$$u(x)=z(r),\ r=|x|=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2},$$

那么泛函$J(u)$可改写为

$$K(z)=2\pi c\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{1+z'^2(r)}.$$

于是牛顿问题就是求使泛函$J(u)$或$K(z)$达到极小值的极值函数.该问题是牛顿(Newton,I.)于1685年提出的.其目的是确定以常速在均匀液体中运动的物体具有什么形状可使所受的阻力最小.

费马原理(Fermat's principle) 光的传播原理.光总是沿最快的路径从一点传播到另一点,这就是费马原理.费马(Fermat,P. de)在1662年从上述假设推导出光的折射定律.如果光速$v=v(x,z,p)$,则光线传播所需时间为

$$J(u)=\int_{x_1}^{x_2}\omega(x,u(x),u'(x))\ \sqrt{1+|u'(x)|^2}\mathrm{d}x,$$

其中$\omega(x,u(x),u'(x))$为速度的倒数.费马原理断言,光的实际路径使泛函$J(u)$取平稳值.

捷线(brachistochrone) 亦称最速落径.一个著名的极值问题.在铅直平面上两点A,B之间要连一条曲线,使得不受摩擦的质点在重力的作用下沿这条曲线由A运动到B所需要的时间最少,这条曲线就是最速落径.当$A=(x_0,0)$,$B=(x_1,y_1)$时,求最速落径的问题等价于求泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x$$

的极小值,边界条件是$y(x_0)=0,y(x_1)=y_1$.求解相应变分问题的欧拉-拉格朗日方程,不难得出最速落径问题的平稳曲线是摆线(旋轮线).捷线是约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)于1696年首先解决的一个问题,由此推动了变分法的建立.

最速落径(brachistochrone) 即"捷线".

最速降线(curve of steepest descent) 即"最速落径".

测地线(geodesic curve) 亦称短程线,指曲面上两点之间沿曲面路程最短的曲线.设曲面为

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),$$

其上两点,A由u_0,v_0确定,B由u_1,v_1所确定,在这曲面上求过A,B两点的测地线等价于在曲面上求函数$v=v(u)$使泛函

$$L(v)=\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}\mathrm{d}u$$

取极小值.$L(v)$表示曲面上A,B沿曲线的弧长,E,F,G是微分几何中曲面的第一基本形式中的系数.若记$X=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$,则

$$E=X_u\cdot X_u,\ F=X_u\cdot X_v,\ G=X_v\cdot X_v.$$

短程线(geodesic curve) 即"测地线".

极小曲面(minimal surface) 一种特殊曲面.张在给定的空间闭曲线Γ上有最小面积的曲面称为极小曲面.在非参数情形下,求极小曲面的问题可以化为求曲面面积泛函

$$\mathscr{A}(u)=\int_\Omega\sqrt{1+|Du|^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

的极小值,其中Ω是曲面在x_1x_2平面上的投影,u是曲面上的点到x_1x_2平面的距离,

$$Du=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\right).$$

由相应的欧拉-拉格朗日方程可以推出极小曲面的平均曲率处处为零.

1873年,普拉托(Plateau,J. A. F.)曾用实验的方法显示极小曲面.在空间内以给定的闭曲线为边缘张以肥皂膜时,表面张力使膜稳定在表面积为最小的状态.这刺激了数学家对极小曲面的研究.因此,极小曲面问题又称普拉托问题.

普拉托问题(Plateau problem)　见"极小曲面".

道格拉斯泛函(Douglas functional)　道格拉斯(Douglas, J.)为解决极小曲面问题引进的一个泛函. 其表达式为

$$A(h)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(h(\theta)-h(\varphi))^2}{4\sin^2[(\theta-\varphi)/2]}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

狄利克雷泛函(Dirichlet functional)　亦称狄里克雷积分. 表示弹性薄膜形变能的一个泛函. 设薄膜形状为

$$u=u(x,y)\quad((x,y)\in\Omega),$$

其形变能为

$$J(u)=\frac{1}{2}\iint_\Omega(u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

此即狄利克雷泛函. 狄利克雷积分的欧拉-拉格朗日方程为拉普拉斯方程

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$$

狄利克雷积分(Dirichlet's integral)　即"狄利克雷泛函"(参见本卷《位势论》有关条目).

距离(distance)　两个函数接近程度的一种度量. 对定义在$[x_0,x_1]$上的两个连续函数$y_1(x)$, $y_2(x)$,定义零级距离

$$d_0(y_1,y_2)=\max_{x\in[x_0,x_1]}|y_1(x)-y_2(x)|$$

和一级距离

$$d_1(y_1,y_2)=d_0(y_1,y_2)+\sup_{x\in[x_0,x_1]\setminus D}|y'_1(x)-y'_2(x)|,$$

其中D表示y'_1和y'_2的间断点的集合. 类似地对任意整数m和n维欧氏空间中的区域Ω,可定义函数之间的m级距离.

零级距离(distance of 0-order)　见"距离".

一级距离(distance of 1-order)　见"距离".

零级δ邻域(neighborhood of order 0)　一种函数集合. 设已知函数$u_0(x)$,δ为一正实数,则与给定函数$u_0(x)$的零级距离小于δ的函数$u(x)$的集合称为$u_0(x)$的零级δ邻域(参见"距离").

一级δ邻域(neighborhood of order 1)　一种函数集合. 设已知函数$u_0(x)$,δ为一正实数,则与给定函数$u_0(x)$的一级距离小于δ的函数$u(x)$的集合称为$u_0(x)$的一级δ邻域(参见"距离").

变分问题(variational problem)　见"变分法".

变分积分(variational integral)　变分法中研究的主要泛函. 形如

$$J(u)=\int_\Omega F(x,u(x),Du(x))\mathrm{d}x$$

的泛函$J(u)$称为变分积分,函数$F(x,z,p)$称为变分被积函数或拉格朗日函数. Ω是R^n中的区域, $z=(z^1,z^2,\cdots,z^N)\in\mathrm{R}^N$, $p=(p_\alpha^i)=(p_1^1,p_2^1,\cdots,p_n^1,\cdots,p_1^N,p_2^N,\cdots,p_n^N)\in\mathrm{R}^{nN}$表示函数$u$对各自变量的偏导数,以下各词条中的记号$J(u)$均表示这一积分. 这里$u$也可以是向量值函数,当$u$是一元数量函数时,则用$y$表示,$J(u)$记为$J(y)$,并称为最简变分积分.

变分被积函数(variational integrand function)　见"变分积分".

拉格朗日函数(Lagrangian function)　见"变分积分".

容许函数(admissible function)　一种特殊函数,指变分积分$J(u)$中满足一定条件的函数u. 容许函数的集合称为容许函数类. 例如最速落径问题中的容许函数是满足

$$y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1$$

的一次可微函数,测地线问题中的容许函数$v=v(u)$要使相应曲线在给定曲面上等.

本质边界条件(essential boundary condition)　一种边界条件. 指预先对容许函数所加的边界条件. 例如狄利克雷条件和"横截性条件"中的(1)等(参见"横截性条件").

固定边界变分问题(fixed boundary variational problem)　一类变分问题. 指容许函数在其定义域的边界和边界上的值已给定的变分问题. 比如最速降线问题就是此类问题.

极值(extremum)　变分法的一个基本概念. 泛函在容许函数的一定范围内取得的最大值或最小值,分别称为极大值或极小值,统称为极值. 使泛函达到极值的变元函数称为极值函数,若它为一元函数,通常称为极值曲线. 极值也称为相对极值或局部极值.

极值函数(extremum function)　见"极值".

极值曲线(extremum curve)　见"极值".

强极值(strong extremum)　在连续函数集中取得的极值. 如果泛函$J(y)$在某个函数y_0的某个零级邻域上取得极值,那么这个极值称为强极值.

弱极值(weak extremum)　在可微函数集内求得的极值. 如果泛函$J(y)$在容许函数类中某个函数y_0的某个一级邻域上取得极值,那么这个极值称为弱极值.

相对极值(relative extreme value)　见"极值".

局部极值(local extremum)　见"极值".

绝对极值(absolute extremum)　亦称全局极值,泛函在整个容许函数类中取的最大值或最小值. 如果泛函$J(y)$在曲线(或函数)$y(x)$上的值不小于(或不大于)$J(y)$在某个D类曲线(或函数)中其他一切曲线(或函数)中的值,就称$J(y)$在D类曲线(或函数)$y(x)$处取绝对极大(或极小)值,统称绝对

极值.

全局极值(global extremum) 即"绝对极值".

函数的变分(variation of function) 某一容许函数的整体改变.若 $y_0=y_0(x)$ 是容许函数类 Y 中固定的一个函数,y 为 Y 中另一函数,则函数 $\delta y=y-y_0$ 称为 y_0 的变分.变分经常写成含参数 α 的形式:$\delta y=\alpha\eta$.这样,泛函 $J(y)$ 在 y 的值即可写成 $J(y_0+\alpha\eta)$,固定 η 时,这是 α 的数值函数,便可运用一元函数的极值理论探讨泛函的极值问题.

一阶变分(first variation) 泛函沿任一函数方向的一阶微分.n 元数值函数

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

在点 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 取极值的必要条件是对于 $\forall(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)\in\mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{d}f(x^0)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0)\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\mathrm{d}x_n=0,$$

即

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)=0.$$

点 x^0 称为 f 的稳定点.函数 $f(x)$ 在 x^0 沿方向

$$\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n)$$

的微分也可表示为一元函数的导数形式,即

$$\mathrm{d}f(x^0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}f(x^0+\alpha\mathrm{d}x)\big|_{\alpha=0}.$$

为了研究泛函极值的必要条件,就要引进与函数一阶微分相应的一阶变分概念.给定泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

用 $y+\alpha\eta(x)$ 替换 y,得

$$j(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x)+\alpha\eta(x),y'(x)+\alpha\eta'(x))\mathrm{d}x,$$

其中 α 为数值很小的参数,$\eta(x)$ 是在区间端点处为零的任意可微函数.

$j(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 处的导数 $j'(0)$ 称为泛函 J 的一阶变分,记为 δJ.$\eta(x)$ 为函数 $y(x)$ 的一阶变分,记为 δy.显然

$$\delta J=[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x.$$

$y(x)$ 使泛函取极值的必要条件是 $\delta J=0$.

变分法基本引理(fundamental lemma of the calculus of variations) 用一函数与一类函数中任一函数的乘积的积分为零来判断这一函数是否恒等于零的定理.该定理断言:若 f 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域 Ω 上的连续函数,对任意在 $\partial\Omega$ 附近为零,在 Ω 内无穷次可微的函数 $\eta(x)$,有

$$\int_\Omega f(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0,$$

则在 Ω 内 $f(x)\equiv0$.

杜·布瓦-雷蒙引理(Du Bois-Reymond lemma) 由一个函数的导数满足某个积分等式导出该函数为常数的一个定理.该定理断言:若 $m(x):[x_0,x_1]\to\mathbf{R}^1$ 是给定的分段连续函数,且对所有满足 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$ 的分段光滑函数 η,有

$$\int_{x_0}^{x_1}m(x)\eta'(x)\mathrm{d}x=0,$$

则 $m(x)=$常数$(x\in[x_0,x_1])$.

欧拉必要条件(Euler necessary condition) 弱局部极值的一个最基本的必要条件.若 $y=y(x)$ 使泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

在容许函数类 $Y=\{y\mid y$ 分段光滑,$y(x_0)=y_0$,$y(x_1)=y_1\}$ 中取弱局部极小,则存在常数 C,使得

$$F_{y'}(x,y,y')=\int_{x_0}^{x}F_x(s,y(s),y'(s))\mathrm{d}s+C\quad(x\in[x_0,x_1]).$$

这一条件可由一阶变分 $\delta J=0$ 和杜·布瓦-雷蒙引理导出.

欧拉-拉格朗日方程(Euler-Lagrange equation) 给出积分形式的泛函极值必要条件的微分方程,简称欧拉方程.设泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

其中 $y(x)$ 满足边界条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1,$$

且有直到二阶的连续导数.若某个 $y(x)\in C^2$ 使 $J(y)$ 取得极值,则 $y(x)$ 必定满足微分方程

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0.\tag{1}$$

方程(1)称为欧拉-拉格朗日方程.

泛函 J 的形式不同,其欧拉-拉格朗日方程的形式也不同.若泛函

$$J(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y'_1,y_2,y'_2,\cdots,y_n,y'_n)\mathrm{d}x$$

满足边界条件

$$y_k(x_0)=y_k^{(0)},\ y_k(x_1)=y_k^{(1)}\ (k=1,2,\cdots,n),$$

则相应的欧拉-拉格朗日方程为微分方程组

$$F_{y_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'_k}=0\ (k=1,2,\cdots,n).$$

若泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x$$

满足边界条件

$$y^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)},\quad y^{(k)}(x_1)=y_1^{(k)}$$
$$(k=0,1,\cdots,n-1),$$

则相应的欧拉-拉格朗日方程为 $2n$ 阶微分方程

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

若泛函 J 为重积分

$$J(u)=\iint_{\Omega}F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

函数 $u(x,y)$ 有直到二阶连续偏导数，u 在边界 $\partial\Omega$ 上的值是已知的，则相应的欧拉-拉格朗日方程为偏微分方程

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0.$$

对一般变分积分

$$\int_{\Omega}F(x,u(x),Du(x))\mathrm{d}x$$

的极值点 u，若 $F\in C^2(\mathscr{U})$，$\mathscr{U}$ 为 $\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^N\times\mathrm{R}^{nN}$ 中的开集，$u\in C^2(\Omega,\mathrm{R}^N)$，则 u 满足微分方程

$$D_\alpha F_{p_\alpha^i}(x,u(x),Du(x))-F_{u^i}(x,u(x),Du(x))=0$$
$$(1\leqslant i\leqslant N).$$

这里及后面均采用爱因斯坦(Einstein，A.)对重复指标求和的约定. 例如，求何种旋转曲面的面积最小时，可设母线为 $y=u(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，$u(x)>0$，它绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积

$$\mathscr{A}(u)=2\pi\int_a^b u\sqrt{1+u'^2}\mathrm{d}x,$$

则问题相当于求 $\mathscr{A}$ 的极小值. 解相应欧拉-拉格朗日方程可得

$$y=c_1\cosh\left(\frac{x-c_2}{c_1}\right),$$

即平稳曲线(旋转曲面的母线)是悬链线.

欧拉-拉格朗日方程是欧拉(Euler，L.)在 1736 年得到的，不过这里采用的是拉格朗日(Lagrange，J.-L.)于 1755 年给出的至今仍普遍采用的形式.

欧拉方程(Euler equation) 即“欧拉-拉格朗日方程”.

欧拉-拉格朗日方程的不变性(invariance of the Euler equation.) 刻画变换前后欧拉-拉格朗日方程的关系的一个概念. 已给的变分问题中，对容许函数的自变量做一变换，变换后的泛函推出的欧拉-拉格朗日方程与原来的欧拉-拉格朗日方程等价，这就是欧拉-拉格朗日方程的不变性.

平稳函数(stationary function) 变分法中的一个概念. 满足欧拉-拉格朗日方程的函数称为平稳函数或平稳点，而它相应的图象称为平稳曲线(一个变量)或平稳曲面(二个变量). 泛函(变分积分)在平稳函数取的值称为平稳值.

平稳点(stationary point) 即“平稳函数”.

平稳值(stationary value) 见“平稳函数”.

平稳曲线(stationary curve) 见“平稳函数”.

平稳曲面(stationary surface) 见“平稳函数”.

内变分(inner variation) 变分积分相对于未知函数的自变量的变化的变化率. 对一维情形，设 $\lambda\in C_0^\infty(I)$，$I=(x_0,x_1)$，$\tau_\varepsilon(x)=x+\varepsilon\lambda(x)$，$x\in I$，$|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$($\varepsilon_0$ 是适当小的正数)，使 $\tau'_\varepsilon(x)>0$. 令 $z_\varepsilon=u\circ\tau_\varepsilon^{-1}$. 若 y 是泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的极值函数，则应有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}J(z_\varepsilon)|_{\varepsilon=0}=0.$$

称上式为泛函 J 在 y 的沿 λ 方向的(一阶)内变分，记为 $\partial J(y,\lambda)$.

若一个函数 y 使对任意 $\lambda\in C_0^\infty(I)$ 有 $\partial J(y,\lambda)=0$，则称 y 是 J 的内平稳函数. 每个内平稳函数 $y\in C^2(I,\mathrm{R})$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'F_{y'}-F)+F_x(x,y,y')=0.$$

这个方程称为诺特方程. 对一般的变分积分

$$J(u)=\int_{\Omega}F(x,u(x),Du(x))\mathrm{d}x,$$

设被积函数 $F(x,z,p)$ 在 $\overline{\Omega}\times\mathrm{R}^N\times\mathrm{R}^{nN}$ 上有一阶连续微商. 令

$$\xi(y,\varepsilon)=\xi(\varepsilon)=y+\varepsilon\lambda(y)\quad(\lambda\in C_0^\infty(\Omega,\mathrm{R}^n)).$$

这时称

$$\partial J(u,\lambda)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}F(u\circ\xi(\varepsilon))|_{\varepsilon=0}$$

为泛函 J 在 u 的沿方向 $\lambda\in C_0^\infty(\Omega,\mathrm{R}^n)$ 的(一阶)内变分. 由

$$T_\alpha^\beta=p_\alpha^iF_{p_\beta^i}-\delta_\alpha^\beta F$$

定义哈密顿张量(能量—动量张量)

$$T(x,z,p)=(T_\alpha^\beta(x,z,p)),$$

则

$$\partial J(u,\lambda)=\int_{\Omega}[T_\alpha^\beta(x,u,Du)\lambda_{x_\beta}^\alpha-F_{x_\alpha}(x,u,Du)\lambda^\alpha]\mathrm{d}x.$$

哈密顿张量(Hamilton tensor) 见“内变分”.

诺特方程(Noether equation) 见“内变分”.

典范方程组(canonical form ofthe variational problem) 与欧拉-拉格朗日方程组等价的一阶微分方程组. 以最简变分积分 $J(y)$(参见“变分积分”)为例，做变换

$$\pi=F_{y'},\ H(x,y,\pi)=\pi y'-F(x,y,y'),\quad(1)$$

则与 $J(y)$ 相应的二阶欧拉-拉格朗日方程可化为以

y,π 为未知函数的一阶微分方程组

$$\frac{d\pi}{dx}+H_y=0,\quad \frac{dy}{dx}-H_\pi=0. \qquad (2)$$

方程组(2)正是两个未知函数的变分积分

$$J(y,\pi)=\int_{x_0}^{x_1}\left[\pi\frac{dy}{dx}-H(x,y,\pi)\right]dx \qquad (3)$$

的欧拉-拉格朗日方程.

一般地,设一元向量函数的变分积分的拉格朗日函数 $F(x,z,p)$ 满足 $\det F_{pp}(x,z,p)\neq 0$, $(x,z,p)\in\Omega=\{(x,z,p)\mid(x,z)\in G,p\in B(x,z)\}$, $B(x,z)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开集, $F_{pp}(x,z,p)$ 是以

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i\partial p_j}$$

为元素的 $N\times N$ 矩阵. 做勒让德变换

$$\mathscr{L}:\Omega\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N:$$
$$x=x,\ z=z,\ y=F_p(x,z,p),$$
$$(x,z,y)=\mathscr{L}(x,z,p),$$
$$H=\{p\cdot F_p-F\}\circ\mathscr{L}^{-1}.$$

令 $\eta(x)=F_p(x,u(x),u'(x))$, η 称为矩,二阶欧拉-拉格朗日方程转换化为一阶方程组

$$\frac{du}{dx}=H_y(x,u(x),\eta(x)),$$
$$\frac{d\eta}{dx}=-H_z(x,u(x),\eta(x)).$$

这个方程组称为典范方程组或哈密顿方程组, H 称为哈密顿函数. 光程函数 S(参见"平稳曲线场")满足哈密顿-雅可比方程

$$S_x+H(x,z,S_z)=0.$$

哈密顿方程组是变分积分

$$I(u,\eta)=\int_{x_0}^{x_1}(u'\eta-H(x,u,\eta))dx$$

或

$$I(u,\eta)=-\int_{x_0}^{x_1}(u\eta'+H(x,u,\eta))dx$$

的欧拉-拉格朗日方程. 若哈密顿函数不显含 x,则 H 是运动常量,即沿任何解 $u(x)$, H 是常数.

勒让德变换(Legendre transform) 见"典范方程组".

哈密顿方程组(Hamilton system) 见"典范方程组".

哈密顿函数(Hamiltonian function) 见"典范方程组".

雅可比定理(Jacobi theorem) 用哈密顿-雅可比方程解哈密顿方程组的一个方法. 设 G 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 中的区域, $\mathscr{P}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域. 若 $n+1$ 个变量 $t,x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 含 n 个参数 $a=(a^1,a^2,\cdots,a^n)$ 的函数 $S(t,x,a)$ 满足下列条件:

1. $S\in C^2(G\times\mathscr{P})$,

$$\det(S_{x^i a^k})\neq 0\quad((t,x,z)\in G\times\mathscr{P}).$$

2. $S_t(t,x,a)+H(t,x,S_x(t,x,a))=0$
$((t,x,a)\in G\times\mathscr{P})$,

则称函数 $S(t,x,a)$ 是哈密顿-雅可比方程

$$S_t+H(t,x,S_x)=0 \qquad (1)$$

的完全解.

若条件 2 中的方程换成方程

$$S_t(t,x,a)+H(t,x,S_x(t,x,a))$$
$$=\varphi(a)((t,x,a)\in G\times\mathscr{P}),$$

其中 $\varphi\in C^2(\mathscr{P})$,则称函数 $S(t,x,a)$ 是方程

$$S_t+H(t,x,S_x)=\varphi(a)$$

的完全解.

雅可比定理断言:若 $S(t,x,a)$ 是哈密顿-雅可比方程(1)的完全解,又设 $x=X(t,a,b)$, $y=Y(t,a,b)$ 是满足方程

$$S_a(t,X(t,a,b),a)=-b,$$
$$Y(t,a,b)=S_x(t,X(t,a,b),a)$$

的 C^1 类函数,则 $X(\cdot,a,b)$, $Y(\cdot,a,b)$ 是依赖 $2n$ 个参数 a 和 b 的哈密顿方程组

$$\dot{x}=H_y(t,x,y),\ \dot{y}=-H_x(t,x,y) \qquad (2)$$

的解. 例如,最速降线是泛函

$$\int_{t_1}^{t_2}w(x)\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt,$$
$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2g(h-x)}}$$

的平稳函数. 拉格朗日函数是

$$L(x,v)=w(x)\sqrt{1+v^2},$$

而哈密顿函数是

$$H(x,y)=-\sqrt{w(x)^2-y^2},$$

哈密顿-雅可比方程

$$S_t=\sqrt{w^2(x)-S_x^2},$$
$$w^2(x)=\frac{1}{2g(h-x)}$$

有解

$$S(t,x,a)$$
$$=\frac{t}{2\sqrt{ag}}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\int\sqrt{\frac{2}{h-x}-\frac{1}{a}}\,dx,$$

进而解得 $t=b+a\varphi-a\sin\varphi$, $x=h-a+a\cos\varphi$.

哈密顿-雅可比方程(Hamilton-Jacobi equation) 见"典范方程组"和"雅可比定理".

典范变换(canonical transformation) 保持典范方程组不变的变换. 对典范方程

$$\dot{x}=H_p,\quad \dot{p}=-H_x \qquad (1)$$

做可微同胚变换

$$\psi:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n},\quad (x,p)\to(\xi,\pi),$$

如果方程(1)变换为

$$\dot{\xi} = H_{\pi}^{*}, \quad \dot{\pi} = -H_{\xi}^{*}, \tag{2}$$

其中 $H^{*}(t,\xi(x,p),\pi(x,p)) = H(t,x,p)$，则称 ψ 为典范变换. 若 ψ 满足

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial p} \\ \frac{\partial\pi}{\partial x} & \frac{\partial\pi}{\partial p} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial\pi}{\partial p})^T & -(\frac{\partial\xi}{\partial p})^T \\ -(\frac{\partial\pi}{\partial x})^T & (\frac{\partial\xi}{\partial x})^T \end{pmatrix}, \tag{3}$$

则 ψ 是典范变换. 典范变换用来简化典范方程. 令

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix},$$

其中 E_n 是 n 阶单位矩阵，则当且仅当等式

$$(D\psi)^T J D\psi = J$$

成立时 ψ 是典范变换. 对每一典范变换，有

$$\det\ D\psi = 1.$$

若 $u \in C^2$ 是典范变换，写成 $x = X(x,y)$，$y = Y(x,y)$，则存在$\psi(x,y)$，使

$$Y_i \mathrm{d}X^i = y_i \mathrm{d}x^i + \mathrm{d}\psi(x,y)$$

(这里前两项用了爱因斯坦和式约定，即表示相应于 i 从 1 到 n 求和).

自然边界条件(natural boundary condition) 一种边界条件. 指对容许函数在固定边界上的值不加限制的情形下，极值函数由于使得一阶变分为零而在边界上必须满足的条件. 设拉格朗日函数

$$F(x,z,Du) \in C^2(U),$$
$$u \in C^1(\overline{\Omega},\mathsf{R}^n) \cap C^2(\Omega,\mathsf{R}^n),$$
$$\delta J(u,\varphi) = 0 \quad (\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega},\mathsf{R}^N)),$$

则 u 在 $\partial\Omega$ 上满足的自然边界条件为

$$\nu_\alpha F_{p_\alpha^i}(x,u,Du) = 0 \ (i = 1,2,\cdots,N),$$

其中，$\nu = \nu(x) = (\nu_1(x),\nu_2(x),\cdots,\nu_n(x))$是 $\partial\Omega$ 在 x 点的单位外法向. 例如，狄利克雷积分

$$D(u) = \int_\Omega |Du|^2 \mathrm{d}x$$

的极值函数满足的自然边界条件是，在 $\partial\Omega$ 上

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0.$$

此即诺伊曼条件(参见本卷《偏微分方程》同名条).

横截性条件(transversality condition) 当容许函数在固定边界满足一定的约束的情形时，由变分为零导出的极值函数在边界上满足的条件. 变分积分

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u,Du)\mathrm{d}x$$

的积分区域 Ω 是 R^n 中的有界区域，$\partial\Omega \in C^1$，u 满足边界条件

$$G(x,u(x)) = 0 \quad (x \in \partial\Omega), \tag{1}$$

其中 $G(x,z) = (G^1(x,z),\cdots,G^r(x,z))$ $(z \in \mathsf{R}^N; 1 \leqslant r \leqslant N-1)$. 设 G^i 在 $\mathsf{R}^n \times \mathsf{R}^N$ 上属 C^2，$G_z = (G_{z^k}^i)$在集

$$\{(x,z) \mid x \in \partial\Omega, G(x,z) = 0\}$$

的每点秩为 r. 对每一$x \in \partial\Omega$，集合

$$M(x) = \{z \in \mathsf{R}^N \mid G(x,z) = 0\}$$

是 R^N 中的$(N-r)$维流形，法向量场是 $G_z^i(x,z)$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

若 $u \in C^1(\overline{\Omega},\mathsf{R}^N) \cap C^2(\partial\Omega,\mathsf{R}^N)$是泛函 J 在边界约束(1)(即 $u(x) \in M(x)$)下的平稳函数，则 u 满足边界条件

$$(\nu \cdot F_p)(x) \perp T_{u(x)}M(x) \quad (x \in \partial\Omega), \tag{2}$$

其中 $\nu = (\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$是 $\partial\Omega$ 的单位外法向，F_p 的分量是

$$\frac{\partial F}{\partial p_\alpha^i} = F_{p_\alpha^i},$$

$T_{u(x)}M(x)$表示 $M(x)$在 $u(x)$的切空间. 条件(2)表明在 $\partial\Omega$ 上分量为

$$Z_i(x) = \nu_\alpha(x) F_{p_\alpha^i}(x,u(x),(x))$$

的向量$Z(x) = (Z_1(x),Z_2(x),\cdots,Z_N(x))$正交于流形$M(x)$. 条件(2)称为横截性条件(参见本卷《偏微分方程》同名条).

例如，设 $J(u)$是某路径$z = u(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$的加权距离，则

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(u)|\dot{u}|\mathrm{d}t,$$

权 $\omega(z) > 0$ 并且是 $C^1(\mathsf{R}^N)$类的. 此时横截性条件(2)等价于正交条件. 即连结 R^N 中一固定点 P 和 R^N 中某流形 M 上的某点的最短路径必和 M 交成直角.

自由横截性条件(free transversality condition) 由变分为零导出的极值函数在变动边界上满足的条件. 设泛函

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

(x_0,y_0)为固定端，(x_1,y_1)为变动端，在曲线 λ 上移动，λ 的斜率为 $\overline{y}'$，极值曲线的自由横截性条件为

$$F(x,y,y') + (\overline{y}' - y')F_{y'}(x,y,y') = 0.$$

这一等式建立了平稳曲线的切线斜率与曲线 λ 的切线斜率的关系. 这里的自由端在曲线 λ 上移动，称为变动端点，相应变分问题称为变动边界变分问题.

对于一元向量值函数 $u \in C^2([a,b],\mathsf{R}^N)$，若 $F \in C^2$，u 是

$$J(u) = \int_a^b F(x,u(x),u'(x))\mathrm{d}x$$

的极小函数(或平稳点)，$(b,u(b))$固定，而$(a,u(a))$在 R^{N+1}中的正则曲面 $\mathscr{M}$ 上移动，$\mathscr{M}: G(x,z) = 0$，则曲线 $z = u(x)$和曲面 $\mathscr{M}$ 在曲线的左端点$P_1 = (a,u(a))$自由横截，即满足下列横截性条件：

1. $G(a,u(a)) = 0$，即 $P_1 \in \mathscr{M}$.

2. 向量 $\mathscr{N}(a) = (F - u' \cdot F_p, F_p)|_{x=a}$正交于

$\mathscr{M}$ 在 P_1 的切空间 $T_P\mathscr{M}$.

变动边界的横截性条件称为自由横截性条件. 例如,设 $F(x,z,p)=\omega(x,z)\sqrt{1+|p|^2}(\omega>0)$,则 $z=u(x)$和 $\mathscr{M}$ 在 $x=a$ 的自由横截性条件就是曲线 $z=u(x)$与曲面 $\mathscr{M}$ 在 $P_1=(a,u(a))$的正交性. 这是因为

$$(F-p\cdot F_p,F_p)=\frac{\omega(x,z)}{\sqrt{1+|p|^2}}(1,p).$$

变动边界变分问题(variable boundary variational problem)　见"自由横截性条件".

自然约束(natural constraint)　函数在边界由于使泛函变分为零而满足的条件.

艾德曼-外尔斯特拉斯角条件(Erdmann-Weierstrass corner condition)　泛函的极值曲线在其角点处应满足的条件. 例如,若 $y=y(x)$是泛函

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的极值曲线,$(x_c,y(x_c))$是 $y=y(x)$的一个角点,则有

$$\begin{aligned}&F_{y'}(x_c,y(x_c),y'(x_c-0))\\&=F_{y'}(x_c,y(x_c),y'(x_c+0)).\\&F(x_c,y(x_c),y'(x_c-0))\\&\quad-y'(x_c-0)F_y(x_c,y(x_c),y'(x_c-0))\\&=F(x_c,y(x_c),y'(x_c+0))\\&\quad-y'(x_c+0)F_y(x,y(x_c),y'(x_c+0)).\end{aligned}$$

条件极值(conditional extremum)　泛函 J 在某附加条件下的极值. 例如,泛函

$$J(y,z)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',z,z')\mathrm{d}x,$$

函数 y,z 除满足固定边界条件

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,\ z(x_0)=z_0,\ \ z(x_1)=z_1$$

之外还满足一个附加条件

$$G(x,y,z,y',z')=0\quad(x_0\leqslant x\leqslant x_1),$$

或

$$\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x=l.$$

这种问题的极值称为条件极值. 附加条件称为约束. 不含导数的约束,如 $G(x,y,z)=0$,称为有限约束或完整约束;含导数的约束,如 $G(x,y,z,y',z')=0$,称为微分约束或非完整约束.

约束(constraint)　见"条件极值".

有限约束(finite constraint)　见"条件极值".

微分约束(differential constraint)　见"条件极值".

完整约束(holonomic constraint)　见"条件极值".

非完整约束(nonholonomic constraint)　见"条件极值".

广义等周问题(generated isoperimetric problem)　古典等周问题的一种推广. 例如,求一个函数(或相应的曲线)$y(x)$,它满足边界条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1 \tag{1}$$

和附加条件

$$J_1=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x=C\ \ (\text{常数}), \tag{2}$$

并使泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{3}$$

取极值,就是一个广义等周问题.

广义等周问题是一个条件极值问题,条件(2)为该问题的约束,称为等周约束.

等周约束(isoperimetric constraint)　见"广义等周问题".

对偶性质(duality property)　广义等周问题解的一种性质. 在条件

$$K(y)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x=\text{常数}$$

之下求解

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x=\text{稳定值}$$

的问题,与在"$J(y)=$常数"条件下求"$K(y)=$稳定值"的问题,具有相同的平稳曲线族,这类似于周长一定时面积最大的矩形和面积一定时周长最小的矩形的解都是正方形.

欧拉-拉格朗日定理(Euler-Lagrange theorem)　把条件极值化归为没有约束条件的极值的一个定理. 欧拉-拉格朗日定理中诸符号与条件均取自词条"广义等周问题".

欧拉-拉格朗日定理断言:若函数(或曲线)$y(x)$在条件(2)及边界条件(1)之下,给泛函(3)以极值,且若 $y(x)$是满足条件(2)的泛函 J 的平稳函数(参见"广义等周问题"),则存在这样一个常数 λ,使 $y(x)$是泛函

$$\hat{J}=\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的平稳函数,其中 $H=F+\lambda G$. 常数 λ 称为欧拉-拉格朗日乘数.

欧拉-拉格朗日乘数(Euler-Lagrange multiplier)　见"欧拉-拉格朗日定理".

拉格朗日乘数(Lagrange multiplier)　即"欧拉-拉格朗日乘数".

博尔查问题(Bolza problem)　混合型泛函的一种特定形式的条件极值问题. 由博尔查(Bolza, O.)于 1913 年的一篇研究迈尔问题的文章中提出. 混合型泛函形如

$$J(y_1,y_2,\cdots,y_n)=G(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\big|_{x_0}^{x_1}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)\mathrm{d}x,$$

约束条件是

$$\Phi_j(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)=0$$
$$(j=1,2,\cdots,m;m<n),$$

边界条件是

$$B_i(x_0,y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0})=0\quad(i=1,2,\cdots,q),$$
$$B_j(x_1,y_{11},y_{21},\cdots,y_{n1})=0$$
$$(j=q+1,q+2,\cdots,p,p\leqslant 2n+2).$$

当 $G=0$ 时,称为拉格朗日问题;当 $F\equiv 0$ 时,称为迈尔问题.

博尔查问题、拉格朗日问题与迈尔问题可以互相转化.

迈尔问题(Mayer problem) 见“博尔查问题”.

拉格朗日问题(Lagrange problem) 对容许函数加以逐点约束的泛函条件极值问题. 如果目标泛函是

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x, \tag{1}$$

除了边界上受到某种约束以外,对所求函数 y 及其导数加上在诸点 $x\in(x_0,x_1)$ 满足关系

$$\Phi(x,y,y')=0,$$

在这种类型的约束之下,这种泛函的条件极值问题称为拉格朗日问题.

关于拉格朗日问题的极值曲线有以下两个结论:

1. 若曲线 $C:y=y(x)$ 在整约束

$$\Phi(x,y)=0\quad(x\in(x_0,x_1))$$

及边界条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1 \tag{2}$$

之下实现泛函(1)的极值,且沿曲线 C 满足 $\Phi_y\neq 0$,则存在函数 $\lambda(x)$,使 C 成为泛函

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_1} H(x,y,y',\lambda)\mathrm{d}x \tag{3}$$

的极值曲线,其中

$$H(x,y,y',\lambda)=F(x,y,y')+\lambda(x)\Phi(x,y).$$

2. 若曲线 $C:y=y(x)$ 在非整约束

$$\Phi(x,y,y')=0\quad(x\in(x_0,x_1))$$

和边界条件(2)之下实现泛函(1)的极值,且沿曲线 $C,\Phi_{y'}\neq 0$,则存在函数 $\lambda(x)$,使 C 成为泛函(3)的平稳曲线,其中

$$H(x,y,y',\lambda)=F(x,y,y')+\lambda(x)\Phi(x,y,y').$$

二阶变分(second variation) 泛函沿任一函数方向的二阶微分. n 元二次可微数值函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$ 在稳定点 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 取极小值的必要条件是黑塞矩阵

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i\partial x_j}$$

半正定,而此黑塞矩阵正定是 f 在稳定点 x^0 取极小值的充分条件. 与此类似,为讨论泛函的平稳函数取极值的必要条件和充分条件,也需引进泛函的二阶变分,以及相应泛函在平稳函数取极值的判别法. 对于给定的泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

如果用 $y(x)+\alpha\eta(x)$ 代替泛函 J 的被积表达式中的 y 得 $J(\alpha)$,泛函 J 的二阶变分相应于 $J(\alpha)$ 按 α 幂的展开式中含 α^2 的那个项的系数. 记 J 的二阶变分为 $\delta^2 J$,即

$$\delta^2 J=\delta^2 J(y,\eta)=\left[\frac{\mathrm{d}^2 J(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2}\right]_{\alpha=0}.$$

对于泛函 $J(y)$ 有

$$\delta^2 J=\int_{x_0}^{x_1}(P\eta^2+2Q\eta\eta'+R\eta'^2)\mathrm{d}x,$$

其中 $P=F_{yy},Q=F_{yy'},R=F_{y'y'}$. 或

$$\delta^2 J=\int_{x_0}^{x_1}(S\eta^2+R\eta'^2)\mathrm{d}x,$$
$$S=F_{yy}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{yy'}.$$

对于泛函

$$J(u)=\int_\Omega F(x,u,Du)\mathrm{d}x,$$
$$\delta^2 J(u,v)=2\int_\Omega Q(x,v(x),Du(x))\mathrm{d}x,$$

其中

$$Q(x,z,p)$$
$$=\frac{1}{2}\left(F_{z^iz^k}z^iz^k+2F_{z^ip_\beta^k}z^ip_\beta^k+F_{p_\alpha^ip_\beta^k}p_\alpha^ip_\beta^k\right),$$
$$F_{z^iz^k}=F_{z^iz^k}(x,u,Du).$$

它们与泛函

$$\mathscr{Q}(v)=\int_\Omega Q(x,v(x),Du(x))\mathrm{d}x$$

对应的变分问题称为附属变分问题.

附属变分问题(accessory variational problem) 见“二阶变分”.

勒让德条件(Legendre condition) 弱极值的一个必要条件. 平稳函数 $y(x)$ 使泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

取极小值(或极大值)的必要条件是

$$F_{y'y'}\geqslant 0\ (\text{或 } F_{y'y'}\leqslant 0\ ),$$

称其为勒让德条件. 此外,若沿着场的平稳曲线满足条件 $F_{y'y'}>0$,则称为严格勒让德条件. 若

$$F_{y'y'}(x,y,\bar{p})>0\quad(x\in[a,b],\bar{p}\in\mathrm{R}),$$

则称为强勒让德条件.

对一般的 $F(x,z,p)$，勒让德条件是

$$F_{p_\alpha^i p_\beta^k}(x,u(x),Du(x))\xi^i\xi^k\eta_\alpha\eta_\beta \geqslant 0$$

$$(x\in\Omega,\xi\in\mathbf{R}^N,\eta\in\mathbf{R}^n);$$

对强勒让德条件，"$\geqslant$"改为"$>$".

勒让德条件是勒让德(Legendre, A.-M.)于1786年得到的.

严格勒让德条件(strict Legendre condition)　见"勒让德条件".

强勒让德条件(strong Legendre condition)　见"勒让德条件".

雅可比条件(Jacobi condition)　由附属变分问题的欧拉-拉格朗日方程导出的一个取弱极值的光滑函数满足的必要条件. 对于泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的极值函数 $\bar{y}(x)$，附属变分问题的极值函数满足雅可比方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ru')-Su=0, \tag{1}$$

其中

$$R=F_{y'y'}(x,\bar{y},\bar{y}'),$$

$$S=F_{yy}(x,\bar{y},\bar{y}')-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{yy'}(x,\bar{y},\bar{y}')).$$

而下式

$$\mathscr{J}_{\bar{y}}u=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ru')-Su$$

称为雅可比算子. 对一般拉格朗日函数 $F(x,z,p)$，雅可比算子是

$$\mathscr{J}_u:C^2(\bar{\Omega},\mathbf{R}^N)\to C^0(\bar{\Omega},\mathbf{R}^N),$$

$$\mathscr{J}_u\varphi=F_{zz}\cdot\varphi+F_{zp}\cdot \mathrm{D}\varphi$$

$$-\operatorname{div}\{F_{pz}\cdot\varphi+F_{pp}\cdot\mathrm{D}\varphi\},$$

或用分量写出

$$(\mathscr{J}_u\varphi)_i=F_{z^iz^k}\varphi^k+F_{z^ip_\beta^k}\mathrm{D}_\beta\varphi^k$$

$$-\mathrm{D}_\alpha\{F_{p_\alpha^iz^k}\varphi^k+F_{p_\alpha^ip_\beta^k}\mathrm{D}_\beta\varphi^k\},$$

F_{zz},F_{zp},F_{pp} 中的变量是：

$$(x,u(x),\mathrm{D}u(x)),$$

$$u(x)=(u^1(x),u^2(x),\cdots,u^N(x)),$$

$$\mathrm{D}u(x)=\left(\frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}\right)_{1\leqslant i\leqslant N,1\leqslant\alpha\leqslant n.}$$

若 $\bar{u}$ 是雅可比方程(1)在 $[x_0,x_2]$ 上的一个解，$\bar{u}(x_0)=\bar{u}(x_2)=0$，在 (x_0,x_2) 上 $\bar{u}(x)\neq0$，则称 x_2 是 x_0 的一个共轭值，而点 $(x_2,\bar{y}(x_2))$ 称为点 $(x_0,\bar{y}(x_0))$ 的一个共轭点；如果在 $[x_0,x_1)$ 上不存在 x_0 的共轭值，则称 $\bar{y}$ 满足雅可比条件；如果在 $[x_0,x_1]$ 上不存在 x_0 的共轭值，则称 $\bar{y}$ 满足强雅可比条件. 这个条件是勒让德条件发现50余年后，雅可比(Jacobi, C. G. J.)在1838年的一篇文章中提出的.

共轭点的几何意义：设平稳曲线 $y=\bar{y}(x)$ 过点 A 和点 B. 从 A 出发的中心平稳曲线场 $y=y(x,c)$ 的包络与曲线 $y=\bar{y}(x)$ 的切点 A^* 即是 A 的共轭点.

为验证 x_2 是否为共轭值，需要求雅可比方程的通解. 雅可比方程既然为线性齐次方程，为求其通解，只需求两个线性无关解即可. 关于雅可比方程的解，有下列结果：

1. x_0 的共轭值不依赖于雅可比方程的解.

2. 若 $y(x)$ 是泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的欧拉-拉格朗日方程的通解，$y(x)=g(x,\alpha,\beta)$，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，又参数 α^* 和 β^* 使下列边界条件满足：

$$y_0=g(x_0,\alpha^*,\beta^*),$$

$$y_1=g(x_1,\alpha^*,\beta^*),$$

则

$$\eta_1(x)=g_\alpha(x,\alpha^*,\beta^*),$$

$$\eta_2(x)=g_\beta(x,\alpha^*,\beta^*)$$

是雅可比方程的两个线性无关解.

如果光滑函数 $\bar{y}$ 使泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

在 $\bar{y}$ 上取极小(或极大)，又设沿 $\bar{y}$ 满足严格勒让德条件

$$F_{y'y'}(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x))>0\ \ (x\in[x_0,x_1]) \tag{2}$$

(对于极大，不等式(2)反向)，则不存在 x_0 的共轭值 $x_2<x_1$(即 $\bar{y}$ 满足雅可比条件).

雅可比方程(Jacobi equation)　见"雅可比条件".

雅可比算子(Jacobi operator)　见"雅可比条件".

强雅可比条件(strong Jacobi condition)　见"雅可比条件".

共轭点(conjugate point)　见"雅可比条件".

共轭值(conjugate value)　见"雅可比条件".

弱极值的必要条件(necessary conditions of weak extremum)　取弱极值的函数必须满足的条件. 若泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

在曲线 $y_0(x)$ 上取得弱极小，则有以下必要条件：

1. $y_0(x)$ 是 $J(y)$ 的平稳曲线，即满足 $J(y)$ 的欧拉-拉格朗日方程.

2. 沿 $y_0(x)$ 满足勒让德条件 $F_{y'y'}\geqslant0$.

3. 如果沿 $y_0(x)$ 有 $F_{y'y'}>0$，则 $y_0(x)$ 满足雅可比条件.

弱极值的充分条件(sufficient condition of weak extremum)　保证平稳点取弱极值的条件.若某平稳曲线满足强勒让德条件 $F_{y'y'}>0$(或 $F_{y'y'}<0$)与强雅可比条件,则该平稳曲线使泛函 J 取得弱极小值(或弱极大值).上述条件称为弱极值的充分条件.

弱极小的特征值判别法(eigenvalue criteria for weak minimum)　判别变分积分的平稳函数的弱极小的一种方法.设与拉格朗日函数 $F(x,z,p)$ 相应的雅可比算子 $\mathscr{J}_u$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是强椭圆的.若雅可比算子 $\mathscr{J}_u$ 的最小特征值 $\lambda_1<0$,则平稳函数 u 取不到

$$J(v)=\int_{\Omega}F(x,v(x),Dv(x))\mathrm{d}x$$

的弱极小.若 $\mathscr{J}_u$ 的最小特征值 $\lambda_1>0$,则 u 是 J 的弱极小函数.上述方法称为弱极小的特征值判别法.

平稳曲线簇(variety of stationary curve)　一组平稳曲线.对于一维变分积分

$$J(u)=\int_{\Omega}F(x,y,z,Du)\mathrm{d}x,$$

当 (c_1,c_2) 在 R^2 中某集合 C 变化时,依赖两个参数 (c_1,c_2) 的平稳曲线组

$$y=y(x,c_1,c_2),\quad z=z(x,c_1,c_2)$$

互不相交地填满三维空间的某个区域 G,这个平稳曲线组就是一个平稳曲线簇.

$$P(x,c_1,c_2)=(y'(x,c_1,c_2),z'(x,c_1,c_2))$$

称为这个平稳曲线簇的斜率函数.

斜率函数(slope function)　见"平稳曲线簇".

***J* 长度**(J-length)　由变分积分确定的长度.设

$$l=\{(x,y(x),\ z(x))\mid x_0\leqslant x\leqslant x_1\}$$

是空间的某条曲线.称积分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',z,z')\mathrm{d}x$$

沿着曲线 l 的值为 l 的 J 长度.由连结两点的曲线 l 的 J 长度的下确界定义的两点间的距离称为 J 距离.

***J* 距离**(J-distance)　见"J 长度".

平稳曲线场(field of stationary curve)　为研究强极值充分条件而引进的平稳曲线簇.设 S_0 是三维欧氏空间中的某个曲面,利用横截条件,从 S_0 中的每一点 M_0 都可作出泛函

$$J(u)=\int_a^b F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$$

的平稳曲线与 S_0 横截相交,这样就有依赖于两个参数的平稳曲线簇.每一平稳曲线上从 M_0 到 M 的弧 $\overset{\frown}{M_0M}$,使得沿平稳曲线从 M_0 到 M 的 J 长度为给定值 ρ,点 M 的轨迹给出了某个曲面 S.在 S_0 的邻域内平稳曲线簇与 S 横截相交,这个平稳曲线簇就是平稳曲线场.曲面 S 称为场的横截曲面.沿平稳曲线从 M_0 到 M 的 J 长度是 M 的函数,记为 $\theta(x,y,z)$,称为场的基本函数或光程.

横截曲面 S 的方程为

$$\theta(x,y,z)=\rho.$$

由横截曲面 S 的方程与横截性条件可推出

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-H(x,y,z,v,w),\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=v,\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=w.$$

从上面三个方程中消去 v,w 得到场的基本函数的方程,即哈密顿-雅可比方程

$$\theta_x+H(x,y,z,\theta_y,\theta_z)=0.$$

光程(函数)(eikonal)　见"平稳曲线场".

场的基本函数(fundamental function of field)　见"平稳曲线场".

场的横截曲面(transversal surface of field)　见"平稳曲线场".

希尔伯特不变积分(Hilbert invariant integral)　只依赖曲线端点的一个积分.由泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

中的函数 F 和平稳曲线的斜率函数表示的一个与路径无关的曲线积分

$$J(\widehat{AB})=\int_{\widehat{AB}}\Big\{F(x,y,t)+\Big[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-t(x,y)\Big]F_{y'}(x,y,t)\Big\}\mathrm{d}x,$$

这个积分称为希尔伯特不变积分.其中 $t(x,y)$ 是平稳曲线场的斜率函数,$\widehat{AB}$ 是平稳曲线场中的某条曲线.这个积分只取决于起点 A 与终点 B 的位置,而与 A 至 B 的积分路径 $y=y(x)$ 无关,这是因为被积函数是场的基本函数 $\theta(x,y)$ 的全微分.

外尔斯特拉斯 *E* 函数(Weierstrass E-function)　表述强极值必要条件的一个函数.泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的外尔斯特拉斯 E 函数(4 个变量的函数)是

$$E(x,y,\xi,\eta)=F(x,y,\eta)-F(x,y,\xi)-(\eta-\xi)F_{y'}(x,y,\xi),$$

又称 E 函数.若 y_0 是平稳函数,c_0,c_1 为 y_0 端点的横坐标,t 为平稳曲线场的斜率函数,则 E 函数与变分积分的增量有关系

$$J(y)-J(y_0)=\int_{c_0}^{c_1}E(x,y,t,y')\mathrm{d}x.$$

对于一元向量函数的拉格朗日函数 $F(x,z,p)$,外尔斯特拉斯 E 函数

$$E_F(x,z,q,p)=F(x,z,p)-F(x,z,q)-(p-q)\cdot F_p(x,z,q).$$

外尔斯特拉斯条件(Weierstrass condition)

变分积分取强极值的一个必要条件. 若 y^* 使泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

取强极小值,则对所有 $x\in(x_0,x_1)$, $q\in\mathrm{R}^1$, 外尔斯特拉斯 E 函数满足

$$E(x,y(x),y^*(x),q)\geqslant 0;$$

相应地,对强极大值有

$$E(x,y(x),y^*(x),q)\leqslant 0.$$

这个条件是外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))于 1879 年提出的.

对一元向量函数 $u(x)$ 对应的拉格朗日函数,外尔斯特拉斯条件是对任意 $x\in\Omega$ 和秩为 1 的矩阵 π,

$$E_F(x,u(x),Du(x)+\pi)\geqslant 0.$$

关于 E_F 的意义,详见"外尔斯特拉斯 E 函数".

迈尔场(Mayer field)　为讨论一元向量函数的变分积分取强极值充分条件而引入的一种概念. 对一元数值函数,迈尔场就是通常的平稳曲线场. 基本思想是把一个平稳函数放在一簇平稳函数中考虑. 如果一维变分积分

$$J(v)=\int_a^b F(x,v(x),v'(x))\mathrm{d}x$$

中的函数 $v(x)$ 是 N 维向量值函数,则做如下讨论. 设在 $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^N$ 的一个单连通域 G 上给定一个场 $f:\Gamma\to G$, $\Gamma\subset\mathrm{R}\times\mathrm{R}^N$, 满足:

1. 映射 f 有形式 $f(x,c)=(x,\varphi(x,c))$, Γ 有形式 $\Gamma=\{(x,c)\mid c\in I_0,\ x\in I(c)\}$, I_0 是 R^N 中的非空参数集, $I(c)$ 是数直线上的区间,端点为 $x_1(c)$ 和 $x_2(c)$.

2. 偏导数 $f'(x,c)=f_x(x,c)$ 是 C^1 类的. $\varphi=\mathscr{P}(f)$ 称为场 f 的斜率(函数).

若每个函数都是拉格朗日函数对应的平稳函数,则称场 f 为极值场.

场 $f:\Gamma\to G$ 称为迈尔场,如果其斜率函数 $\mathscr{P}:G\to\mathrm{R}^N$ 满足一阶偏微分方程组

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\overline{F}_{p^i}=\frac{\partial}{\partial z^i}(\overline{F}-\mathscr{P}\cdot\overline{F}_p),\\&\frac{\partial}{\partial z^k}\overline{F}_{p^i}=\frac{\partial}{\partial z^i}\overline{F}_{p^k},\end{aligned}\qquad(1)$$

其中 $\overline{F}=F(x,z,\mathscr{P}(x,z))$. 方程组(1)中的第一个方程相当欧拉-拉格朗日方程. 当 $N=1$ 时第二个方程自动满足,因此每个极值场自动地是迈尔场. 当 $N>1$ 时,极值场类远大于迈尔场类.

由方程组(1)可推出存在数值函数 $S:G\to\mathrm{R}$ 满足

$$S_x=\overline{F}-\mathscr{P}\cdot\overline{F}_p,\quad S_z=\overline{F}_p.\qquad(2)$$

方程组(1)和(2)称为卡拉西奥多里方程. 设

$$u\in C^2([\alpha,\beta],\mathrm{R}^N),$$

拟合场 f,即它满足 $\mathrm{graph}\,u\subset G$ 和

$$u'(x)=\mathscr{P}(x,u(x))\quad(\alpha\leqslant x\leqslant\beta),$$

则有 $F(x,u(x),u'(x))=\mathrm{d}S(x,u(x))$,

$$\int_\alpha^\beta F(x,u(x),u'(x))\mathrm{d}x=S(\beta,u(\beta))-S(\alpha,u(\alpha)).$$

把 $\mathrm{d}S=F(x,u(x),u'(x))\mathrm{d}x$ 看做芬斯勒度量,则积分

$$\int_C F\mathrm{d}x$$

可看做两点 $P_1=(\alpha,u(\alpha))$, $P_2(\beta,u(\beta))$ 之间沿"光线"的距离,而公式

$$\int_C F\mathrm{d}x=S(P_2)-S(P_1)$$

表明这个距离可用数值函数 S 来计算. 称 S 为光程(函数)或场的基本函数. 令

$$M(x,z,p)=S_x(x,z)+p\cdot S_z(x,z),$$

积分

$$\mu(v)=\int_a^b M(x,v(x),v'(x))\mathrm{d}x$$

称为希尔伯特不变积分,其值只取决于 v 的端点值,

$$\mu(v)=S(b,v(b))-S(a,v(a)).$$

并对任何 $u\in C^1([a,b],\mathrm{R}^N)$ ($\mathrm{graph}\,u\subset G$) 有外尔斯特拉斯表示公式

$$J(u)=S(b,u(b))-S(a,u(a))+\int_a^b E(x,u(x),\mathscr{P}(x,u'(x)),u'(x))\mathrm{d}x.$$

从这个公式容易导出强极值的充分条件.

G 上的迈尔场 f 称为最优场,如果变分积分

$$J(v)=\int_a^b F(x,v(x),v'(x))\mathrm{d}x$$

对每个区间 $[a,b]$ 和每个 $v\in D^1([a,b],\mathrm{R}^n)$ ($[a,b]\to\mathrm{R}^n$ 的分段光滑函数类) ($\mathrm{graph}\,v\subset G$) 满足

$$J(v)\geqslant S(b,v(b))-S(a,v(a)).$$

若迈尔场 f 满足强外尔斯特拉斯条件

$$E_F(x,z,\mathscr{P}(x,z),p)>0$$
$$((x,z)\in G,p\in\mathrm{R}^N,p\neq\mathscr{P}(x,z)),$$

则称场 f 是外尔斯特拉斯场.

外尔斯特拉斯场必是最优场. 作为外尔斯特拉斯表示公式的直接推论有克纳塞横截性定理: 设 $f:\Gamma\to G$ 是一个迈尔场,其斜率函数 $\mathscr{P}$ 在 G 上满足

$$F(x,z,\mathscr{P}(x,z))>0.$$
$$I_{1,2}=\{x\in I_0\mid f(\cdot,c):I(c)\to G\ \text{与}\ \mathscr{S}_{\theta_1}\text{和}\ \mathscr{S}_{\theta_2}\text{都相交}\}.$$

1. 对 $c\in I_{1,2}$, 横截面 $\mathscr{S}_{\theta_1}$ 和 $\mathscr{S}_{\theta_2}$ 从场曲线 $f(\cdot,c)$ 上截下弧 $\mathscr{S}^*(c)$,

$$\int_{\mathscr{S}^*(c)}F\mathrm{d}x=\theta_2-\theta_1.$$

2. 设 m 是所有端点在 $\mathscr{S}_{\theta_1}$ 和 $\mathscr{S}_{\theta_2}$ 上的 C^1 曲线取的值

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x,u(x),u'(x))\mathrm{d}x$$

的下确界. 若 $I_{1,2}$非空且 f 是最优场,这个下确界是 $\theta_2-\theta_1$,并在所有被 $\mathscr{S}_{\theta_1}$和 $\mathscr{S}_{\theta_2}$截下的弧 $\mathscr{S}^*(c)(c\in I_{1,2})$上达到,若 f 是外尔斯特拉斯场,则下确界仅在这些弧上达到.

设 $\det F_{pp}(x,z,p)\neq 0$,令 $\pi=F_p(x,z,p)$, $H(x,z,\pi)$为哈密顿函数,则光程函数 S 与哈密顿函数 H 满足哈密顿-雅可比方程

$$S_x+H(x,z,S_z)=0.$$

极值场(extremal field) 见"迈尔场".

卡拉西奥多里方程(Carathéodory equations) 见"迈尔场".

外尔斯特拉斯表示公式(Weierstrass representation formula) 见"迈尔场".

强外尔斯特拉斯条件(strong Weierstrass condition) 见"迈尔场".

外尔斯特拉斯场(Weierstrass field) 见"迈尔场".

最优场(optimal field) 见"迈尔场".

克纳塞横截性定理(Kneser transversality theorem) 见"迈尔场".

中心平稳曲线场(central field of stationary curve) 从一固定点出发的平稳曲线构成的场. 设 M_0 是空间的一个定点,由这一点引出泛函

$$\int_a^b F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$$

的平稳曲线束,它们在 M_0 的某个邻域内成为平稳曲线簇. 在每一条平稳曲线上取一点 M,使在所有平稳曲线上弧$\widehat{M_0M}$的 J-长度等于同一个数 ρ,这样的平稳曲线簇称为中心平稳曲线场. 而点 M 的几何轨迹是一个曲面,这个曲面为场的横截曲面,即平稳曲线簇与横截曲面横截相交. 沿平稳曲线上弧$\widehat{M_0M}$的 J 长度是点 M 的函数,记为 $\theta(x,y,z)$,故横截曲面的方程为 $\theta(x,y,z)=\rho$. 称 $\theta(x,y,z)$为中心平稳曲线场的基本函数. 由横截曲面方程与横截条件

$$-H\delta x+v\delta y+w\delta z=0$$

可以推出

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-H(x,y,z,v,w),\ \frac{\partial\theta}{\partial y}=v,\ \frac{\partial\theta}{\partial z}=-w.$$

由上述三个方程中消去 v,w,就得到场的基本函数的一阶偏微分方程,称为哈密顿-雅可比方程:

$$\theta_x+H(x,y,z,\theta_y,\theta_z)=0.$$

对一般情形,设 Ω 是 $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^N$ 中一区域,$F(x,z,p)$在 $\Omega\times\mathrm{R}^N$ 上属 C^3,而 $u:[a,b]\to\mathrm{R}^N$ 是泛函

$$J(u)=\int_a^b F(x,u,u')\mathrm{d}x$$

的平稳函数,$F_{pp}(x,u(x),u'(x))$对所有 $x\in[a,b]$是可逆的. 又设$[a,b]$不包含 u 的成对共轭值. 则可把 u 嵌入到中心平稳曲线场 $f:\hat{\Gamma}\to\hat{G}=G\cup P_0$,$P_0$是结点 (a_0,z_0),$\hat{\Gamma}=\hat{I}\times I_0(\varepsilon)$,$\hat{I}=[a_0,b_0]$,$a_0<a<b<b_0$,$I_0(\varepsilon)=\{c\mid |c-c_0|\leqslant\varepsilon\}$,$\varepsilon>0$,$f(x,c_0)=(x,u(x))$,$x\in[a,b]$. f 在 $\Gamma=I\times I_0(\varepsilon)$的限制$(I=(a_0,b_0))$是 $G=f(\Gamma)$上的迈尔场.

强极值的必要条件(necessary conditions of strong extremum) 使泛函取强极值的函数所必须满足的条件. 例如,对于典型泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

使 $J(y)$取强极小的函数 $y_0(x)$必须满足下列必要条件:

1. $y_0(x)$是 $J(y)$的平稳曲线,即满足$J(y)$的欧拉-拉格朗日方程.
2. 沿 $y_0(x)$满足勒让德条件$F_{y'y'}\geqslant 0$.
3. 如果沿 $y_0(x)$有$F_{y'y'}>0$,则$y_0(x)$满足雅可比条件.
4. 沿极值曲线 $y=y_0(x)$,对任何 η 值恒有

$$E(x,y,t,\eta)\geqslant 0,$$

其中 t 为平稳曲线场的斜率函数.

强极值的充分条件(sufficient conditions of strong extremum) 保证平稳函数取强极值的条件. 若有固定端点的平稳曲线$y(x)$可被场围绕,且存在 $y(x)$的这样的邻域,在这邻域中的每一点对任何实数 η 满足不等式

$$E(x,y,t(x,y),\eta)>0,$$

则泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

在 $y(x)$取得强极小. 上述不等式称为强极值的充分条件.

要使外尔斯特拉斯函数 E 为正,只要对任何值 η 有不等式 $F_{y'y'}(x,y,\eta)>0$,这个不等式也是强极小的充分条件. 这个充分条件是外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))于 1879 年获得的.

对一元向量值函数固定端点变分问题相应结果如下:设 $F(x,z,p)$在$[a,b]\times\mathrm{R}^N\times\mathrm{R}^N$ 上是 C^3 类的,F 对应的平稳函数 $u:[a,b]\to\mathrm{R}^N$ 满足下列条件:

1. F 对 $(p_1,p_2,\cdots,p_N)$的黑塞矩阵 $F_{pp}(x,u(x),u'(x))$对所有$x\in[a,b]$是可逆的;
2. $E(x,u(x),u'(x),p)>0$
$(\forall x\in[a,b],\forall p\in\mathrm{R}^N)$;
3. 区间$[a,b]$不包含 u 的成对的共轭值;

则 u 取得(严格)强极小.

对多元向量值函数的固定端点的变分积分有下列结果:设 G 是 $\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^N$ 的一个区域,$\hat{G}=G\times\mathrm{R}^{nN}$,其

点是(x,z,p)，$p=(p_\alpha^i)$，$1\leqslant i\leqslant N$，$1\leqslant\alpha\leqslant n$. 若 F 满足超椭圆条件

$$F_{p_\alpha^i p_\beta^k}(x,z,p)\zeta_\alpha^i\zeta_\beta^k\geqslant|\zeta|^2$$
$$(\forall(x,z,p)\in\hat{G};\zeta\in\mathrm{R}^{nN}),$$

则相应平稳函数是强极小函数.

对于右端点 P 不在 C^2 类曲面 $\mathscr{S}$ 上并且固定而左端点 P_0 在曲面 $\mathscr{S}$ 上变动的泛函

$$J(v)=\int_{x_1}^b F(x,v,Dv(x))\mathrm{d}x$$

的自由边界变分问题，这里 $\mathscr{S}$ 有 C^1 类的法向量场

$$\mathscr{N}(x,z)=(-1,\nu(x,z)),$$

则有下列定理：设

$$\mathscr{C}_0=\mathrm{graph}\,u=\{(x,z)\,|\,z=u(x),a\leqslant x\leqslant b\}$$

是相应平稳函数 u 的图象$(P_0=(a,u(a)))$，它满足下列条件：

1. 在含 $\mathscr{S}\times\mathrm{R}^N$ 中的一个区域上，F 对所有变量三次连续可微，对所有$(x,z,p)\in\mathscr{S}\times\mathrm{R}^N$，

$$F(x,z,p)\neq0,$$
$$F(x,z,p)-p\cdot F_p(x,z,p)\neq0,\qquad(1)$$
$$\det F_{pp}(x,z,p)\neq0,$$

这里

$$F_{pp}(x,z,p)=\left(\frac{\partial^2F}{\partial p_i\partial p_j}\right)_{N\times N}.$$

2. 对所有 $x\in[a,b]$，$F_{pp}(x,u(x),p)$正定.

3. 选择 $\mathscr{S}\cap B_\varepsilon(P_0)$的一个 C^2 类参数表示：

$$x=\xi(c),\ z=\zeta(c),\ c\in I_0\subset\mathrm{R}^N$$

$(B_\varepsilon(P_0)$是以 P_0 为中心 ε 为半径的 R^N 中的开球)，它满足 $\zeta_c\neq0$ 和 $P_0=(\xi(c_0),\zeta(c_0))$.

定义 N 参数平稳曲线族

$$z=\varphi(x,c)\quad(x\in I(c),c\in I_0),$$

它满足初值条件

$$\varphi(\xi(c),c)=\zeta(c),\ \varphi'(\xi(c),c)=\pi(\xi(c),\zeta(c)),$$

这里 $\pi(x,z)$满足

$$\nu(x,z)=-\frac{F_p(x,z,\pi(x,z))}{F(x,z,\pi(x,z))-\pi(x,z)\cdot F_p(x,z,\pi(x,z))}.$$

由条件 1，这样的函数 $\pi(x,z)$在对充分小的 ε，在 $\mathscr{S}\cap B_\varepsilon(P_0)$ 内必然存在，并且 $\pi(P_0)=u'(a)$. 在 $\mathscr{J}_\varepsilon=\mathscr{S}\times B_\varepsilon(P_0)$上没有点使

$$\Delta(x,c)=\det\varphi_c(x,c)=0,\qquad(2)$$

则存在 $\mathscr{C}_0$ 的在 $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^N$ 中的一个零级开邻域 G_0，使对连结 $\mathscr{S}$ 和 P 的含于 G_0 的所有分段光滑曲线 $\mathscr{C}=\mathrm{graph}\,v$ 有 $J(\mathscr{C}_0)\leqslant J(\mathscr{C})$. 满足(2)的值 x_0 称为平稳函数 $u=\varphi(x,c)$的焦值，相应的点$(x,\varphi(x,c))$称为平稳函数 $u=\varphi(x,c)$的焦点.

焦值(focal value) 见“强极值的充分条件”.

焦点(focal point) 见“强极值的充分条件”.

利赫滕斯坦定理(Lichtenstein's theorem) 多元数值函数变分积分的平稳函数取严格强极值的充分条件. 设 $u\in C^{2,\mu}(\bar{\Omega})$(在 Ω 上二阶导数满足 μ 阶霍尔德条件的函数类)是变分积分

$$J(v)=\int_\Omega F(x,v\ Dv)\mathrm{d}x\qquad(1)$$

的平稳函数，F 满足下列条件：R^n 的有界区域 Ω 的边界 $\partial\Omega\in C^{2,\mu}$(即 $\partial\Omega$ 局部地有形如

$$x_i=f(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$$

的表达式，$f\in C^{2,\mu}(\bar{O})$，O 为 R^{n-1} 中某方体$(0<\mu<1)$)，对某一常数 $c>0$，

$$F_{p_\alpha p_\beta}(x,u(x),Du(x))\eta_\alpha\eta_\beta\geqslant c|\eta|^2$$
$$(\forall\eta\in\mathrm{R}^n;x\in\bar{\Omega}),$$

$F(x,z,p)$在 $\bar{\Omega}\times\mathrm{R}\times\mathrm{R}^n$ 属类 C^3. 又设雅可比算子

$$\mathscr{J}\varphi=F_{zz}\cdot\varphi+F_{zp}\cdot D\varphi-\mathrm{div}\{F_{pz}\cdot\varphi+F_{pp}\cdot D\varphi\}$$

在 Ω 上是正定的. 最后假设使得外尔斯特拉斯 E 函数对所有满足 $x\in\bar{\Omega}$，$|z-u(x)|<\varepsilon_0$，$p,q\in\mathrm{R}^n$，$p\neq q$ 的 x,z,p,q，有

$$E_F(x,z,p,q)=F(x,z,q)-F(x,z,p)-(q-p)\cdot F_p(x,z,p)>0,$$

其中 ε_0 是不依赖 $x\in\bar{\Omega}$ 的一个正数. 则 u 是变分积分(1)的严格强极小函数.

参数变分积分(parametric variational integral) 自变量变换时保持不变的一维积分. 其形式是

$$J(c)=\int_{t_1}^{t_2}F(c(t),\dot{c}(t))\mathrm{d}t,$$

其中 $c:[t_1,t_2]\to M$ 是 N 维流形 M 上的一条参数曲线，$\dot{c}$ 是 c 的速度场. F 满足齐次性条件：

$$F(x,\lambda v)=\lambda F(x,v)\ (\lambda>0).$$

设 G 是 R^N 中的区域，F 定义在 $G\times\mathrm{R}^N$ 上，F 是 $C^0(G\times\mathrm{R}^N)\cap C^2(G\times(\mathrm{R}^N-\{0\}))$类的. 这样的 F 称为参数拉格朗日函数.

设 $x:I\to G$ 是一个相应 F 的平稳函数，$\dot{x}\neq0$，$t\in I$，x 不含共轭点，则 x 是强极小函数.

单侧极值(one sided extremum) 容许函数满足不等式条件的极值问题. 若变分问题中待求函数或它们的导数服从某个不等式，这个变分问题的极值就称为单侧极值. 例如，如果狄利克雷积分

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\mathrm{D}u|^2\mathrm{d}x$$

的容许函数满足 $u(x)=0(x\in\partial\Omega)$和不等式 $u(x)\geqslant\varphi(x)(x\in\Omega)$，则相应欧拉-拉格朗日方程应满足变分不等方程

$$\int_\Omega\mathrm{D}u\cdot\mathrm{D}(v-u)\mathrm{d}x\geqslant0$$
$$(\forall v\geqslant\varphi,v(x)=0,x\in\partial\Omega).$$

线性变分问题(linear variational problem) 一

类变分问题. 指欧拉-拉格朗日方程是线性方程的一类变分问题. 二次泛函

$$K(y)=\int_a^b[P(x)y^2+R(x)y'^2]\mathrm{d}x$$

的欧拉-拉格朗日方程是线性方程

$$Py-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ry')=0.$$

考虑等周问题:在条件

$$\int_a^b y^2\mathrm{d}x=1$$

下求泛函 K 满足端点条件 $y(a)=y(b)=0$ 的平稳曲线. 用拉格朗日乘数法,平稳曲线是斯图姆-刘维尔问题

$$\begin{cases}L(y)=Py-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ry')=\lambda y,\\ y(a)=y(b)=0\end{cases}$$

的属于特征值 λ 的特征函数. $K(y)$在条件

$$\int_a^b y^2\mathrm{d}x=1$$

和 $y(a)=y(b)=0$ 之下的最小值是最小特征值 λ_1. 泛函 K 所有特征值可以排成一个上升的无穷序列 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-1}\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$,相应满足

$$\int_a^b y^2\mathrm{d}x=1$$

的特征函数是 $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$,那么对于每个 n,特征值 λ_n 是泛函 $K(y)$在条件

$$\int_a^b y^2\mathrm{d}x=1,\ \int_a^b yy_i\mathrm{d}x=0$$
$$(i=1,2,\cdots,n-1),$$
$$y(a)=y(b)=0$$

下的极小,而实现这个极小的函数 $y(x)$是 y_n,

极小化极大(minimax) 极大中的极小值. 设 f 为给定多元函数,固定这些变数中的某几个(组成变数组 A),把 f 看成其余变数(组成变数组 B)的函数. f 关于变数组 B 求上确界 $C=C(A)$,再对 C 求关于变数组 A 的下确界,即得 f 的极大中的极小值. 类似地定义极大化极小. 例如,函数 f 的 n 次多项式最佳逼近

$$E_nf=\min_{c_0,c_1,\cdots,c_n}\max_{x\in[a,b]}|f(x)-(c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n)|.$$

又如斯图姆-刘维尔算子 L 的第 n 个特征值 λ_n 可用极小化极大来定义. 对于泛函

$$K(y)=\int_a^b(Ry'^2+Py^2)\mathrm{d}x$$

在条件

$$\int_a^b y^2\mathrm{d}x=1,\int_a^b y_i(x)y(x)\mathrm{d}x=0$$
$$(i=1,2,\cdots,n-1;y(a)=y(b)=0)$$

之下的极小以 $\lambda(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$表示,则相应斯图姆-刘维尔算子

$$Ly=Py-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ry')$$

的齐次边界条件下的第 n 个特征值为

$$\lambda_n=\max_{y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}}\lambda(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}).$$

还可如下定义 λ_n. 设 $z_1(x),z_2(x),\cdots,z_n(x)$为$[a,b]$上 n 个线性独立的 C^2 类函数,满足条件

$$z(a)=z(b)=0,$$

以$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$表示满足条件

$$\int_a^b y^2\mathrm{d}x=1,$$

并有形式

$$\sum_{i=1}^n c_iz_i(x)$$

的全体函数 $y(x)$,而以 $\lambda_n(z_1,z_2,\cdots,z_n)$表示 $K(y)$的极大,其中 $y(x)$取自$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$,那么

$$\lambda_n=\min_{\{\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}\}}\max_{y\in\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}}K(y).$$

变分原理(variational principle) 变分法的基本概念. 所谓变分原理,是指把力学、物理、工程等方面的问题的解归结为某一泛函的极值或稳定值问题. 变分原理为不同领域的规律提供了一种统一的表述和统一的解决方案(参见本卷《偏微分方程》同名条).

虚功原理(virtual work principle) 加廖尔金法的力学背景. 连续体 V 受力的密度为 f,可能发生的位移为 r,则虚功为

$$w=\iiint_V f\cdot r\mathrm{d}V.$$

虚功原理断言:力学系统在作用力及已给的几何约束条件下处于平衡,则由外力和系统内力所做虚功之和的变分为零. 当力有势函数$-U$ 时,虚功原理即为最小位能原理 $\delta U=0$,如果平衡状态是稳定的,则 U 取相对极小值.

哈密顿原理(Hamilton principle) 亦称最小作用原理. 力学中的一个变分原理. 拉格朗日函数 L 是质点组的动能与势能之差,即 $L=T-V$,T 为动能,V 为势能.

哈密顿原理断言:在一切容许的运动中,质点组的真实运动满足积分

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(T-V)\mathrm{d}t$$

有极值的必要条件 $\delta J=0$.

如同一般变分原理一样,从哈密顿原理可以等价地推出相应的质点组的运动方程,通常是微分方程. 如果力学系统处于静力平衡稳定状态,则因动能为零,位能与时间无关,哈密顿原理转化为最小位能原理.

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} V\mathrm{d}t = 0.$$

在力是保守力的情况下，对任何有限粒子组，对于更一般的动力系统以及连续介质，这一原理的推广同样适用. 哈密顿原理还可推广到电磁学、量子学说以及相对论中的基本定律. 量子学说的创立者普朗克(Planck，M.)这样评价哈密顿原理，“物理学中最崇高且最为人们殷切追求的目标，是把业已观察到并行将观察到的一切自然现象缩并成单独一个原理……在那些标志着过去几百年物理科学成就的，多少带有一般性的定律中，最小作用原理，就其内容和形式而论，可能最接近于理论研究上这一理想的最终目标.”

最小作用原理(least action principle)　见“哈密顿原理”.

最小位能原理(least potential energy principle)　见“哈密顿原理”.

弹性理论中的最小位能原理(least potential energy principle in elastic theory)　用应变变分表示的弹性力学变分原理. 对于给定的弹性体，真实发生的位移使体系总位能的一次变分为零. 记位移为 $u=(u_1,u_2,u_3)$，应变为

$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i},\ e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\quad (i \neq j),$$

应力为 σ_{ij}，体积力密度为 $F=(F_1,F_2,F_3)$，表面力密度为 $P=(P_1,P_2,P_3)$，体系总位能为

$$J = \iiint_V \frac{1}{2}(\sigma_{11}e_{11} + \sigma_{22}e_{22} + \sigma_{33}e_{33} + \sigma_{12}e_{12} + \sigma_{13}e_{13} + \sigma_{23}e_{23})\mathrm{d}V - \iiint_V (F_1u_1 + F_2u_2 + F_3u_3)\mathrm{d}V - \iint_S (P_1u_1 + P_2u_2 + P_3u_3)\mathrm{d}S.$$

以位移变分表示位能的变分，则有

$$\delta J = \iiint_V \frac{1}{2}(\sigma_{11}\delta e_{11} + \sigma_{22}\delta e_{22} + \sigma_{33}\delta e_{33} + \sigma_{12}\delta e_{12} + \sigma_{13}\delta e_{13} + \sigma_{23}\delta e_{23})\mathrm{d}V - \iiint_V (F_1\delta u_1 + F_2\delta u_2 + F_3\delta u_3)\mathrm{d}V - \iint_S (P_1\delta u_1 + P_2\delta u_2 + P_3\delta u_3)\mathrm{d}S = 0.$$

弹性力学中的最小余能原理(minimal remaindes energy principle in elastic theory)　用应力变分表示的弹性力学变分原理. 总应变能为

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V (e_{11}\sigma_{11} + e_{22}\sigma_{22} + e_{33}\sigma_{33} + e_{12}\sigma_{12} + e_{13}\sigma_{13} + e_{23}\sigma_{23})\mathrm{d}V,$$

界面 S 上的位能为

$$W^* = \iint_S (u_1P_1 + u_2P_2 + u_3P_3)\mathrm{d}S.$$

余能为 $J^*=U-W^*$. 在满足静力平衡条件

$$\frac{\partial\sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_3} + F_i = 0$$

$$(i = 1,2,3;\text{在 } V \text{ 内}),$$

及界面 S 上已知外力作用条件

$$\sigma_{ij}n_j = P_i\ \ (i = 1,2,3;\text{在 } S \text{ 上})$$

((n_1,n_2,n_3)为 S 的单位外法向量)的所有容许应力状态中，真实应力状态使余能 J^* 的一次变分为零，即 $\delta J^*=0$.

弹性理论中的广义变分原理(generalized variational principle in elastic theory)　最小位能原理和最小余能原理的无条件极值的形式. 引入拉格朗日因子，把弹性力学中的最小位能原理和最小余能原理中的条件极值转化为无条件极值，这样得出的相应变分原理称为广义变分原理.

变分问题的直接法(direct method of variational problem)　求变分问题的一种方法. 指不通过求解欧拉方程，而直接求得使泛函达到极值的函数的方法. 经常用到的直接法有里茨法与加廖尔金法. 从变分问题的解的存在性、惟一性的理论方面来看，直接法起着重要的作用. 同时直接法又能给出一些行之有效的近似解法(或数值解法). 对于一个即使与变分法无关的微分方程，只要能够作出一个泛函，以此方程作为相应的欧拉方程，直接法也可以用以解这个微分方程.

变分问题的反问题(inverse problem of variational problem)　变分法的一种概念. 求以给定的微分方程为其欧拉方程的泛函的问题称为变分问题的反问题. 由于与数理方程有关的某些泛函常常代表能量，所以习惯上把解微分方程的问题转化为泛函极值问题的求解方法称为能量法，相应泛函称为该微分方程的能量积分.

能量法(energy method)　见“变分问题的反问题”.

能量积分(energy integral)　见“变分问题的反问题”.

里茨方法(Ritz method)　变分问题的一种直接解法. 设 $J(y)$是待求函数 $y(x)$的泛函，在 C 类函数中求使泛函 J 取得最小值的函数. 给一个函数，J 就有一值，对应于 C 类中所有函数，J 有无穷多值. 设 d 是这无穷个值所成集合的下确界，由下确界的定义，总能在 C 类中找到这样的函数列$\{y_n(x)\}$，当 $n\to\infty$时 $J(y_n)$有有限极限 d. 这样的函数列$\{y_n(x)\}$就称为极小化序列.

里茨方法的基本思想就是构造出极小化序列.

可以按下述几条要求构造函数列$\{u_n(x)\}$：

1. 对于任何n，$\{u_i(x)\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$是线性无关的.

2. $\{u_n\}$是完全的.

令
$$y_n(x)=\sum_{i=1}^{n}a_iu_i(x),$$
代入泛函J得到$J(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，适当选取$a_1,a_2,\cdots,a_n$使J取极小值，这样就能构造出极小化序列$\{y_n(x)\}$，即变分问题的近似解列. 当然还应证明里茨方法的收敛性(参见本卷《偏微分方程》同名条).

瑞利-里茨方法(Rayleigh-Ritz method)　用变分问题的直接法求特征值的方法. 例如对于狄利克雷泛函
$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_x^2+u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,u|_{\partial\Omega}=0,$$
相应瑞利泛函
$$R(u)=2J(u)/\int_{\Omega}u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
在$u\in H_0^1(\Omega)$，$u\neq 0$上的最小值是特征值问题
$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u & (\text{在 }\Omega\text{ 内}),\\ u=0 & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上})\end{cases}$$
的最小特征值，用里茨方法求这个特征值，即是瑞利-里茨方法.

极小化序列(minimizing sequences)　见“里茨方法”.

加廖尔金方法(Galerkin method)　变分问题的一种直接解法. 虚功原理提供的平稳函数u往往满足变分方程
$$u\in V,a(u,v)=(f,u)\ (\forall v\in V),$$
V为某一函数空间，$a(\cdot,\cdot)$为$V\times V$上的双线性泛函，f为V上一有界线性泛函. 加廖尔金方法的步骤是：

1. 取完备坐标函数系$\{w_1,w_2,\cdots,w_n\cdots\}$.

2. 取近似解为
$$u_n=\sum_{i=1}^{n}a_iw_i,$$
满足
$$a(u_n,w_i)=(f,w_i)\ (i=1,2,\cdots,n).$$
这是$\{a_i\}$的线性方程组，解之得u_n.

此法由苏联数学家加廖尔金(Галёркин，Б. Г.)首创(参见本卷《偏微分方程》同名条).

坎托罗维奇法(Kantorovitch method)　里茨方法的一种变形. 多用于多自变量情形，本质上与里茨方法相同，但近似解中的待定系数改为某一自变量的待定函数. 由于系数已不限于常数，因而增加了灵活性，一般可望获得更精确的结果. 对于两个自变量来说，这种方法又称为化为常微分方程法，因为求解的后一阶段归结为求解若干个常微分方程. 此法由苏联数学家坎托罗维奇(Канторович，Л. В.)首创(参见本卷《偏微分方程》同名条).

特雷夫茨法(Trefftz method)　变分问题的一种直接解法. 近似极值函数取为
$$\varphi_n=\overline{w}+\sum_{i=1}^{n}a_iw_i,$$
其中$\overline{w}$是满足欧拉方程的任一函数，如果泛函的欧拉方程是齐次的，则取$\overline{w}=0$. 要求每一坐标函数$w_1,w_2,\cdots$都满足齐次欧拉方程. 总之，要求φ_n满足欧拉方程，然后再适当选取a_i，使φ_n近似满足边界条件. 该法是由特雷夫茨(Trefftz，E. I.)提出的.

欧拉法(Euler method)　求变分问题近似解的一种方法. 指用折线斜率代替切线斜率求变分问题近似解的一种方法. 这是欧拉(Euler，L.)最初推导欧拉-拉格朗日方程采用的方法，但因论证不够严密，而普遍采用拉格朗日的变分方法来论证. 后来由于直接法的发展，人们又重新对欧拉的有限差分法给予重视. 以泛函
$$F(y)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}y$$
为例. 等分$[x_0,x_1]$为n等分，每个小区间长度
$$\Delta x=\frac{x_1-x_0}{n}.$$
取顶点为$(x_0+i\Delta x,y_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$的折线代替y，这时$J(y)=\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$是$y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$的$n-1$元函数，取$y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$，使得$\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$达到极值，即由方程
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}=0,\ \cdots,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}=0$$
确定$y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$. 一般地，令$n\to+\infty$就得原来泛函的极值. 更方便的是用积分和
$$\sum_{i=1}^{n}F(x_i,y_i,\frac{\Delta y_i}{\Delta x})\Delta x$$
代替$\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$.

撰　稿　王耀东　杨家新
审　阅　吴沧浦

函 数 逼 近 论

函数逼近论(approximation theory of functions) 研究用简单的或可计算的函数近似表示一般函数,以及这种表示的偏差与被表示函数本身的构造性质之间的关系问题的一门学科.根据函数逼近论在20世纪的发展情况,它大致可以分为实变函数逼近论和复变函数逼近论两大方面.随着泛函分析的发展,抽象空间的逼近理论也成为一个重要的研究方向.

实变函数逼近论的研究开始于19世纪中叶,19世纪50年代,俄国数学家切比雪夫(Чебышев,П.Л.)结合机械设计问题的研究提出并讨论了这样的极值问题:对于闭区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$和给定的整数$n\geqslant 0$,要寻求极小值问题

$$\min_{p\in P_n}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-p(x)|$$

的解,这里P_n是次数$\leqslant n$的代数多项式全体所成的集合.常称能使此极小值实现的多项式为函数$f(x)$的n次最佳逼近多项式,记此极小值为$E_n(f)$,并称它为函数$f(x)$的n阶最佳一致逼近值.切比雪夫不仅研究了最佳逼近多项式的性质,而且还建立了最佳逼近多项式的特征定理.1885年,德国数学家外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))证明,闭区间$[a,b]$上的任何连续函数$f(x)$都可以用多项式以任何预先指定的精确度在$[a,b]$上一致地近似表示,也即当$n\to\infty$时,$E_n(f)\to 0$.切比雪夫和外尔斯特拉斯的研究构成了函数逼近论的基础.至于最佳逼近多项式的存在性,以前人们认为是明显的,直到1905年,法国数学家波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)才给出了严格的证明.20世纪初叶,由于伯恩斯坦(Бернштейн,С.Н.)、杰克森(Jackson,D.)、瓦莱·普桑(Vallée-Poussin,C.-J.-G.-N.de la)等杰出数学家的积极参加,开创了函数逼近论的蓬勃发展阶段.

在实变函数逼近论的研究中,除了借助代数多项式逼近连续函数之外,还有借助有理函数逼近连续函数,借助三角多项式逼近周期连续函数,以及用形如$a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)$的广义多项式来逼近连续函数等.这里$\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$是一个线性无关的函数组.这种广义多项式逼近是1918年哈尔(Haar,A.)首先开始研究,后来得到了很大的发展.在这些逼近中,人们都需要研究最佳逼近多项式或者更确切地说是最佳逼近元的存在性、惟一性以及其特征等问题,它们构成函数逼近论在20世纪的一个重要内容——定性理论.函数逼近论的另一个重要内容是定量理论,这就是研究当$n\to\infty$时,函数的最佳逼近$E_n(f)$的性态与被逼近函数$f(x)$构造性诸如连续性、可微性、光滑性、解析性等之间的关系.这方面,代数多项式逼近的问题要比三角多项式逼近周期函数的问题复杂得多,常常要涉及逐点的逼近情况,一些重要的问题直到20世纪50年代后才解决.定性和定量问题并非仅对连续函数空间,同样也对p幂可积函数空间以及一般的赋范线性空间提出.

最佳逼近多项式虽然存在且惟一,但与被逼近函数的关系大都是非线性的,要找出它很困难.因此,针对不同的情况构造一些逼近方法就成了函数逼近论的重要课题.线性算子特别是正线性算子的逼近、插值逼近、傅里叶级数部分和及其某些线性平均的逼近,以及最佳逼近多项式的数值近似计算等,都成为近几十年的重要研究方面,其中主要是研究每种方法的适用范围与功能.此外,用逐段多项式逼近闭区间上的连续函数,用指数型整函数逼近全实轴上的有界连续函数,以及抽象空间中的逼近等也在不断发展.

多元函数的逼近要比一元函数的逼近复杂得多,20世纪50年代,尼科利斯基(Никольский,С.М.)等在这方面做出过很大贡献,完成了借助三角多项式或指数型整函数对函数的最佳逼近与函数的构造性之间的关系的工作.而多元函数的算子逼近、插值逼近以及用一元函数的叠加与复合来逼近多元函数的问题,近几十年来一直是为人们所重视的.

复变函数逼近论,最早也要追溯到1885年龙格(Runge,C.D.T.)所获得的定理,该定理断言:若F是复平面上的有界闭集,其余集是个区域,则对于F上的解析函数,总可以用多项式在F上一致逼近该解析函数到任何给定的程度.此后人们不断发展这个定理,并且建立了种种定性和定量的结果以及逼近方法,形成了20世纪函数逼近论的一个重要方面.复变函数逼近的一个特点是函数定义域的性态,除了紧集、闭集之外,一些边界具有一定光滑性的特殊区域一直是受人们关注的问题.至于逼近的方法,除了用多项式、有理函数、插值函数逼近之外,还有用亚纯函数、全纯函数逼近等方法.

科学技术的蓬勃发展与计算机的广泛应用,给函数逼近论的发展带来强大的动力.现代数学的众多分支都与函数逼近论有密切的联系,而函数逼近论又为某些数学分支提供了理论与方法的基础.现

在，函数逼近论已经成为分析数学中非常活跃的、并具有一定综合特色的一门学科.

函数构造论(constructive theory of functions) 以函数逼近论中的正定理和逆定理为主要内容的理论. 人们常将函数的连续性、光滑性、可微性等称为函数的构造性质. 所谓正定理是指由函数的构造性质导出用 n 次多项式(或其他函数系)逼近函数时，其最佳逼近值趋向于零的速度. 所谓逆定理是指由函数用 n 次代数多项式(或其他函数系)逼近时的最佳逼近值趋向于零的速度，导出函数本身的构造性质. 这样，研究函数的构造性质与研究函数的最佳逼近值趋向于零的速度常常有可能互相转化. 下面，用代数(三角)多项式逼近连续函数的典型情况加以说明.

设 $g(x)$ 是以 2π 为周期的实轴上的连续函数，T_n 是阶不超过 n 的三角多项式全体所成的集，则用 n 阶三角多项式逼近 $g(x)$ 时的最佳逼近值定义为

$$E_n^*(g) = \min_{t\in T_n} \max_{-\infty<x<+\infty} |g(x) - t(x)|.$$

又定义 $g(x)$ 的连续性模为

$$\omega(g,\delta) = \max_{|h|\leqslant\delta,-\infty<x<+\infty} |g(x+h) - g(h)|.$$

关于三角多项式逼近函数的正定理最早是由杰克森(Jackson, D.)给出的，这就是：若周期为 2π 的函数 $g(x)$ 在实轴上有 p 阶连续导数 $g^{(p)}(x)$，则存在仅与 p 有关的正数 C_p，使得

$$E_n^*(g) \leqslant \frac{C_p}{n^p}\omega\left(g^{(p)},\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1,2,\cdots),$$

这里 $p\geqslant 0$ 是整数，并认定 $g^{(0)}(x)=g(x)$. 逆定理是由伯恩斯坦(Бернштейн, С. Н.)建立的，这就是：对于周期为 2π 的函数 $g(x)$，如果存在 $\alpha\in(0,1]$ 及整数 $r\geqslant 0$，使得

$$E_n^\alpha(g) \leqslant C_{r,\alpha}n^{-r-\alpha}$$

对 $n=1,2,\cdots$ 都成立，则 $g(x)$ 有 r 阶连续导数 $g^{(r)}(x)$，而且存在仅与 r,α 有关的正数 $C_{r,\alpha}$，使得

$$\omega(g^r,\delta) \leqslant \begin{cases} C_{r,\alpha}\delta^\alpha & (0<\alpha<1), \\ C_{r,1}\delta|\ln\delta| & (\alpha = 1). \end{cases}$$

这里 $\alpha=1$ 的情况有点特殊. 后来，人们证明此时 $g^{(r)}(x)$ 是亚光滑的，也即对于 $h>0$，

$$|g^{(r)}(x+h) - 2g^{(r)}(x) + g^{(r)}(x-h)| \leqslant C_r h$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 中都成立.

关于用代数多项式逼近闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，正定理是类似的，逆定理却有所不同，人们仅能对开区间 (a,b) 中的任意的闭区间上建立上述结论，而且此时常数 $C_{r,\alpha}$ 还与此闭区间有关. 后来，20 世纪 50 年代，季曼(Тиман, А. Ф.)等人才彻底解决了这个问题. 从季曼等人的工作可以得到如下的结论：设 $r\geqslant 0$ 是整数，$0<\alpha<1$，$f\in C[-1,1]$，则 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有 r 阶连续导数 $f^{(r)}(x)$ 且 $f^{(r)}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ 的充分必要条件是对于 $n=1,2,\cdots$，都存在 n 次代数多项式 $p_n(x)$，使得在 $[-1,1]$ 上

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant C_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{r+\alpha},$$

这里 C_r 是一个仅与 r 有关的正数. 因此，期望单用最佳逼近值 $E_n(f)$ 来刻画函数 f 在整个定义域上的光滑性是不合适的.

实变函数逼近论

实变函数逼近论(approximation theory of functions of real variable) 用代数(或三角)多项式、有理函数等比较窄的函数类中的函数逼近闭区间上实的(或且为周期 2π 的)连续函数、可微函数等比较广泛的函数类中的函数的理论. 这时函数是实变数的实函数. 具体发展情况详见“函数逼近论”. 实变函数逼近论研究的主要内容为：

1. 定性问题. 它是对用广义多项式逼近连续函数展开的，讨论的是最佳逼近广义多项式的存在性、惟一性及其特征等.

2. 定量问题. 讨论的是用代数多项式逼近闭区间上的连续函数，或用三角多项式逼近定义在全实轴上的有周期 2π 的连续函数时的最小偏差的性态，以及这种偏差的性态与函数本身构造性质的关系.

3. 线性算子的逼近亦是一个重要方向. 因此，正线性算子逼近显得很有研究价值，其他还有插值逼近、有理逼近、平均逼近、平方逼近，以及具有一些约束条件的逼近等.

外尔斯特拉斯定理(Weierstrass theorems) 指可以用代数或三角多项式无限逼近连续函数的基本定理. 1885 年，外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))建立了如下两个定理：

1. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对于任意给定的正数 ε，都有代数多项式 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.

2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续的周期函数，则对于任意给定的正数 ε，都有三角多项式 $t(x)$ 在全实轴上满足 $|f(x)-t(x)|<\varepsilon$.

这两个定理在分析数学中具有重要的地位，后人常依次称之为外尔斯特拉斯第一定理和第二定理. 它们表明用多项式逼近连续函数是可能的. 后人有着种种不同的证明.

斯通逼近定理(Stone's approximation theorem) 外尔斯特拉斯定理的一个重要推广. 记 $C(X)$ 为紧的豪斯多夫拓扑空间 X 上的连续函数的全体. 若以自然的方式对 $C(X)$ 中的元素 f 和 g 定义乘法 $(fg)(x)=f(x)g(x)$，则 $C(X)$ 成为一个代数. 所谓代数就是一个线性空间，其中定义了元素之

间的乘法，此乘法满足如下的公设：

$$f(g+h)=fg+fh,$$
$$(f+g)h=fh+gh,$$
$$f(gh)=(fg)h,$$
$$\alpha(fg)=(\alpha f)g=f(\alpha g),$$

这里 f,g,h 是此线性空间中的元素，而 α 是数. 在 $C[a,b]$中，代数多项式的全体构成 $C[a,b]$的一个子代数. 作为外尔斯特拉斯定理的推广，1937 年，斯通(Stone, M. H.)建立了这样的逼近定理：$C(X)$的任何子代数 A 在 $C(X)$中稠密，只要它具有两个性质：1. $1\in A$；2. A 分离 X 中的点，即对 X 中任意两个相异的点 x 与 y，都有 $f\in A$ 使得 $f(x)\neq f(y)$.

函数空间$C[a,b]$(function space $C[a,b]$)　实变函数逼近论中的基本空间之一. 记$C[a,b]$为$[a,b]$上连续的实函数的全体，对于 $f\in C[a,b]$，记

$$\|f\|=\|f\|_{C[a,b]}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|,$$

称 $\|f\|$ 为 f 的范数，于是 $C[a,b]$是一个赋范线性空间. 在不引起混淆的情况下，常把 $\|f\|_{C[a,b]}$简记为 $\|f\|$.

函数空间$C_{2\pi}$(function space $C_{2\pi}$)　实变函数逼近论中的基本空间之一. 记 $C_{2\pi}$ 为定义在$(-\infty,+\infty)$上有周期 2π 的连续实函数的全体. 对于$f\in C_{2\pi}$，其范数定义为

$$\|f\|_{C_{2\pi}}=\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)|,$$

于是 $C_{2\pi}$是一个赋范线性空间.

函数类$L^p[a,b]$(function classes $L^p[a,b]$)　区间$[a,b]$上绝对值为 p 幂可积的可测函数的全体. 设 $p>0$，$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的可测函数，若 $|f(x)|^p$在$[a,b]$上可积，则称$f(x)$是$[a,b]$上的 p 幂可积函数，并记

$$\|f\|_{L^p}=\left\{\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

记 $L^p[a,b]$为$[a,b]$上 p 幂可积函数的全体. 若 $p\geqslant1$，并记 $\|f\|_{L^p}$作为 f 的范数，则 $L^p[a,b]$是赋范线性空间. 当 $0<p<1$ 时，$L^p[a,b]$虽然不是赋范线性空间，但是，此时函数逼近问题依然存在，并且有某些类似于 $C[a,b]$中的函数逼近理论.

函数类 $L_{2\pi}^p$ (function classes $L_{2\pi}^p$)　定义在$(-\infty,+\infty)$中有周期 2π 且在$[0,2\pi]$上绝对值 p 幂可积的可测函数的全体. 设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上且具有周期 2π 的函数，$p>0$. 若 $f(x)$可测且

$$\|f\|_{L_{2\pi}^p}=\left\{\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty,$$

则称函数 $f(x)\in L_{2\pi}^p$.

连续性模(modulus of continuity)　简称连续模，刻画函数连续性的尺度. 设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续实函数，称

$$\omega(f,\delta)=\max_{x,x+h\in[a,b],|h|\leqslant\delta}|f(x+h)-f(x)|$$

为 $f(x)$的连续性模，其中 $\delta\in[0,b-a]$. 当 $f(x)$是周期 2π 的连续的周期函数时，$\delta\in[0,\pi]$. 连续性模 $\omega(f,\delta)$有下列性质：

1. 当 $\delta\to0$ 时，$\omega(f,\delta)\to0$.

2. $\omega(f,\delta)\geqslant0$，而且是 δ 的增函数.

3. $\omega(f,\delta)$是半可加的，即对$\forall\delta_1,\delta_2\geqslant0$ 且 $\delta_1+\delta_2\leqslant b-a$，有 $\omega(f,\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega(f,\delta_1)+\omega(f,\delta_2)$.

这三条性质是本质的. 事实上，一个定义在$[0,l]$上的函数$\omega(\delta)$，如果它满足上述三个条件，那么它必然是$[0,l]$上的某个连续函数 $f(x)$的连续性模. 连续性模还有一些重要的性质，例如，若 n 是正整数，则$\omega(f,n\delta)\leqslant n\omega(f,\delta)$；若$\lambda>0$不是整数，则$\omega(f,\lambda\delta)\leqslant(\lambda+1)\omega(f,\delta)$；若$f_1(x)$和$f_2(x)$是同一闭区间$[a,b]$上的连续函数，则 $\omega(f_1+f_2,\delta)\leqslant\omega(f_1,\delta)+\omega(f_2,\delta)$；$\omega(f_1f_2,x)\leqslant\|f_2\|\omega(f_1,\delta)+\|f_1\|\omega(f_2,\delta)$，这里 $\|f\|$ 表示函数$|f(x)|$在$[a,b]$上的最大值. 若$\omega(x)$是$[0,l]$上的连续增函数，$\omega(0)=0$，而且是凹（上凸）的，则$\omega(x)$必是$[0,l]$上某个连续函数的连续性模. 但是，连续性模$\omega(\delta)$未必是凹的. 然而对于每个连续性模$\omega(\delta)$ $(0\leqslant\delta\leqslant l)$，都有$[0,l]$上的凹函数 $\omega^*(\delta)$，使得

$$\omega(\delta)\leqslant\omega^*(\delta)\leqslant2\omega(\delta)\quad(0\leqslant\delta\leqslant l).$$

对于 s 维长方体（即 s 个闭区间 $a_k\leqslant x\leqslant b_k$ $(k=1,2,\cdots,s)$的乘积）A 上的 s 个变量的连续函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_s)$，人们定义此函数的连续性模为

$$|f(y_1,y_2,\cdots,y_s)-f(x_1,x_2,\cdots,x_s)|$$

在 $|y_k-x_k|\leqslant\delta$ $(k=1,2,\cdots,s)$限制下的最大值，当然，这里 $a_k\leqslant x_k,y_k\leqslant b_k$ $(k=1,2,\cdots,s)$.

连续模(modulus of continuity)　即"连续性模".

光滑模(modulus of smoothness)　连续性模的一种直接推广. 设 r 是正整数，对于$[a,b]$上的连续函数 $f(x)$，称

$$\omega_r(f,\delta)=\max_{\substack{a\leqslant x,x+rh\leqslant b\\|h|\leqslant\delta}}\left|\sum_{k=0}^{r}(-1)^{(r-k)}\binom{r}{k}f(x+kh)\right|$$

为 f 的 r 阶光滑模. 主要性质：

1. 若 n 是正整数，则$\omega_r(f,n\delta)\leqslant n^r\omega_r(f,\delta)$. 若 $\lambda>0$不是正整数，则$\omega_r(f,\lambda\delta)\leqslant(1+\lambda)^r\omega_r(f,\delta)$.

2. 若 r 和 s 都是正整数，则

$$\omega_{r+s}(f,\delta)\leqslant2^r\omega_s(f,\delta),$$

$$\omega_r(f,\delta)\leqslant C_r\delta^r\left(\int_\delta^C\frac{\omega_{r+s}(f,u)}{u^{r+1}}\mathrm{d}u+\|f\|\right),$$

其中 C_r 与 C 是与 f 及 δ 都无关的常数. 特别有

$$\omega_1(f,\delta)\leqslant M\omega_2(f,\sqrt{\delta})\quad\left(0\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{4}(b-a)^2\right),$$

但其中 M 是与 f 有关的常数. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 r 阶连续导数,则 $\omega_{r+s}(f,\delta)\leqslant\delta^r\omega_s(f,\delta)$.

最佳逼近(best approximation) 最小的逼近偏差. 设 $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^n,\varphi_k\in C[a,b]$,称具有实系数 a_k 的线性组合

$$\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k$$

为关于 Φ 的广义多项式. 对于 $f\in C[a,b]$,用

$$\left\| f-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k \right\| = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\left| f(x)-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(x)\right|$$

表示 $\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k$ 对 f 的逼近偏差. 称

$$\inf_{a_1,a_2,\cdots,a_n}\left\| f-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k\right\|$$

为关于 Φ 的广义多项式对 f 的最佳逼近值,或简称最佳逼近,也称最佳一致逼近.

最佳一致逼近(best uniform approximation) 即"最佳逼近".

最佳逼近广义多项式(generalized polynomials of best approximation) 达到最佳逼近的广义多项式. 设 $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^n,\varphi_k\in C[a,b]$,若存在关于 Φ 的广义多项式

$$P^*(f)=\sum_{k=1}^n a_k{}^*\varphi_k,$$

使得

$$\| f-P^*(f)\| = \inf_P\| f-P\|,$$

则称 $P^*(f)$ 为 f 关于 Φ 的最佳逼近广义多项式,这里

$$P=\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k$$

是关于 Φ 的广义多项式,a_k 及 $a_k{}^*(k=1,2,\cdots,n)$ 都是实数.

存在性定理(existence theorem) 阐明连续函数都存在最佳逼近广义多项式的定理. 设 $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^n,\varphi_k\in C[a,b]$. 若 $f\in C[a,b]$,则 f 关于 Φ 的最佳逼近广义多项式是存在的. 换言之,有关于 Φ 的广义多项式

$$P^*(f)=\sum_{k=1}^n a_k{}^*\varphi_k,$$

使得

$$\left\| f-\sum_{k=1}^n a_k{}^*\varphi_k\right\| = \inf_{a_1,a_2,\cdots,a_n}\left\| f-\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k\right\|,$$

其中系数 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都是实数. 这个定理对于代数多项式或三角多项式在 18 世纪曾被认为是无需证明的,直到 1905 年,波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)才建立了存在性定理,所以常称为波莱尔定理. 对于更一般的情况,也有类似的结论.

哈尔条件(Haar condition) 代数多项式零点性质的一个扩充. 设 $\varphi_k\in C[a,b](k=1,2,\cdots,n)$,称函数组 $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ 在 $[a,b]$ 上满足哈尔条件,是指其不恒为零的关于 Φ 的广义多项式

$$\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(x)$$

在 $[a,b]$ 上至多有 $n-1$ 个零点,其中 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是任意给定的实数. 哈尔条件的等价形式是每个 $\varphi_k(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续并且每 n 个形如

$$(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x))$$

的向量的集合都线性无关. 换句话说,称函数组 $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ 在 $[a,b]$ 满足哈尔条件,是指每个函数 $\varphi_k(x)$ 在 $[a,b]$ 都连续并且由 $[a,b]$ 上 n 个相异的点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 做成的行列式

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

都不等于零.

切比雪夫组(Chebyshev system) 满足哈尔条件的函数组. 设有一组函数 $\{\varphi_k\}_{k=1}^n,\varphi_k\in C[a,b]$. 若在 $[a,b]$ 上不恒为零的广义多项式

$$\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(x)$$

在 $[a,b]$ 上至多有 $n-1$ 个零点,则称 $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ 是 $[a,b]$ 上的一个切比雪夫组.

马尔可夫系统(Markov system) 切比雪夫组的扩充. 设 $\varphi_k\in C[a,b](k=1,2,\cdots)$,若序列 $M=\{1,\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$ 的任何前 n 个元素 $\{1,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}\}$ $(n=2,3,\cdots)$ 都是一个切比雪夫组,则称 M 是 $[a,b]$ 上的一个马尔可夫系统. 对于给定的正整数 n,借助于马尔可夫系统前 n 个元素的线性组合对函数的逼近称为马尔可夫系统的逼近.

马尔可夫系统的逼近(approximation by Markov system) 见"马尔可夫系统".

交错定理(alternation theorem) 最佳逼近广义多项式的特征刻画. 设 $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ 是 $[a,b]$ 上的一个切比雪夫组,$f\in C[a,b]$ 不是一个关于 Φ 的广义多项式,则广义多项式

$$\sum_{k=1}^n a_k^*\varphi_k(x)$$

是函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 Φ 的最佳逼近广义多项式的充分必要条件是,偏差函数

$$r(x)=f(x)-\sum_{k=1}^n a_k^*\varphi_k(x)$$

在 $[a,b]$ 上至少出现 $n+1$ 次"交错",也即在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个点 $x_j(j=0,1,\cdots,n)$,使得 $x_0<x_1<\cdots<x_n,r(x_j)=-r(x_{j-1})(j=1,2,\cdots,n),|r(x_j)$

$| = \| r \|$. 换句话说，$r(x)$在这 $n+1$ 个点处正负交替地达到最大(小)值. 人们称上述结论为交错定理. 对于代数多项式的情形，这个定理早在 19 世纪 50 年代已为切比雪夫(Чебышев, П. Л.)所建立.

柯尔莫哥洛夫定理(Kolmogorov theorem) 最佳逼近广义多项式的特征定理. 设 $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^n$, $\varphi_k \in C[a,b](k=1,2,\cdots,n)$，对于$f\in C[a,b]$，关于 Φ 的广义多项式

$$P^*(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^* \varphi_k(x)$$

是 f 的最佳逼近广义多项式的充分必要条件是，对于每一个关于 Φ 的广义多项式

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

都有

$$\max_{x\in A_0}\{(f(x) - P^*(x))Q(x)\} \geqslant 0,$$

其中

$$A_0 = \{x \mid x \in [a,b] \text{ 且 } |f(x) - P^*(x)| = \| f - P^* \| \}.$$

1948 年，柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)建立了上述定理. 这个定理给出了一般情况下最佳逼近广义多项式的特征.

惟一性定理(uniqueness theorem) 阐明每个连续函数仅有一个最佳逼近广义多项式的定理. 设 $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^n$, $\varphi_k \in C[a,b]$. 若 Φ 在$[a,b]$满足哈尔条件，则对每个 $f\in C[a,b]$，其关于 Φ 的最佳逼近广义多项式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^* \varphi_k$$

是惟一的；若对每个 $f\in C[a,b]$，其关于 Φ 的最佳逼近广义多项式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^* \varphi_k$$

是惟一的，则 Φ 在$[a,b]$上满足哈尔条件. 这一结论是哈尔(Haar, A.)于 1918 年建立的，所以常称它为哈尔惟一性定理.

哈尔惟一性定理(Haar uniqueness theorem) 即“惟一性定理”.

强惟一性定理(strong uniqueness theorem) 惟一性定理的强化. 设函数组 $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^n$在$[a,b]$上满足哈尔条件，$f\in C[a,b]$. 若 $P^*(f)$是 f 关于 Φ 的最佳逼近广义多项式，则存在仅与 f 有关的常数 $\gamma>0$，使得对任一关于 Φ 的广义多项式 P，都有

$$\| f - P \| \geqslant \| f - P^*(f) \| + \gamma \| P^*(f) - P \|.$$

弗洛伊德定理(Freud theorem) 最佳逼近算子的连续性定理. 设 $\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^n$在$[a,b]$上满足哈尔条件，$f\in C[a,b]$. 记 f 关于 Φ 的最佳逼近广义多项式为 $\mathscr{T} f$，则 $\mathscr{T}$ 是 $C[a,b]$到 $C[a,b]$中的一个连续算子. 不仅如此，弗洛伊德(Freud, G.)在 1958 年还证明了这个算子在每点都满足李普希茨条件，也即对于每个$f_0\in C[a,b]$，都存在常数 $\lambda>0$，使得对所有的$f\in C[a,b]$，都成立着

$$\| \mathscr{T} f_0 - \mathscr{T} f \| \leqslant \lambda \| f_0 - f \|.$$

平均逼近(approximation in the mean) 按 L^1 范数的逼近. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可积，称

$$\| f \|_1 = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$$

为 f 的 L^1 范数. 常称

$$\frac{1}{b-a} \| f \|_1$$

为 $f(x)$在$[a,b]$上的平均值. 虽然 L^1 范数对于较 $C[a,b]$广泛得多的一类函数都有意义，但在函数逼近论中的某些重要问题都仅与连续函数有关. 设 P 是 $C[a,b]$的一个 n 维子空间，$f\in C[a,b]$，若存在 $q^*\in P$，使得对每个 $q\in P$，都有

$$\| f - q^* \|_1 \leqslant \| f - q \|_1,$$

则称 q^*是 f 在 P 中的最佳平均逼近元素，也简称 f 在 P 中的最佳平均逼近.

设 P 是 $C[a,b]$的子空间，$f\in C[a,b]$；又设 $q^*\in P$，它与 f 至多只在有限个点上重合，则 q^*是 f 在 P 中的最佳平均逼近元素的充分必要条件为，对于任何 $q\in P$，都有

$$\int_a^b q(x)\mathrm{sgn}(f(x) - q^*(x))\mathrm{d}x = 0,$$

其中

$$\mathrm{sgn}(f(x) - q^*(x)) = \begin{cases} 1 & (f(x) - q^*(x) > 0), \\ -1 & (f(x) - q^*(x) < 0), \\ 0 & (f(x) - q^*(x) = 0). \end{cases}$$

设 P 是 $C[a,b]$的 n 维子空间，若 0 是 P 中惟一具有 n(或更多)个零点的元素，则称 P 是 $C[a,b]$的一个哈尔子空间. 对于每个 $f\in C[a,b]$，它在哈尔子空间 P 中都具有惟一的最佳平均逼近元素. 这是由杰克森(Jackson, D.)所证明的定理. 设 $\cos\theta=x$，则

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

是一个首项系数为 2^n 的代数多项式，其次数为 n. 可以证明，在$[-1,1]$上，按 L^1 范数与 0 有最小偏差，或者说按 L^1 范数最佳逼近于 0 的首项系数为 1 的 n 次代数多项式是$2^{-n}U_n(x)$. 换言之，$x^n-2^{-n}U_n(x)$是函数 x^n 在$[-1,1]$上的$n-1$次最佳平均逼近代数多项式.

最佳平均逼近(best approximation in mean) 即“平均逼近”.

哈尔子空间(Haar subspace) 见“平均逼近”.

代数多项式逼近(approximation by algebraic polynomials) 用代数多项式近似地表示连续函数.记 π_n 为次数不高于 n 的代数多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 的全体,这里 $a_k(k=0,1,\cdots,n)$ 是实数.对于函数 $f\in C[a,b]$,称

$$E_n(f)=\inf_{P\in\pi_n}\|f-P\|$$

为 n 次代数多项式对 f 在$[a,b]$上的最佳逼近值(度),也简称最佳逼近.这里的下确界是能够达到的,并且只有一个次数不高于 n 的代数多项式达到,记它为 $P_n^*(f)$,并称它为函数 f 在区间$[a,b]$上的 n 次最佳逼近多项式.

最佳逼近多项式(polynomials of best approximation) 见"代数多项式逼近".

切比雪夫定理(Chebyshev theorem) 最佳逼近代数多项式的特征定理.设 $f\in C[a,b]$,π_n 为$\leqslant n$次代数多项式全体,$Q\in\pi_n$,则 Q 为 f 在$[a,b]$上的 n 次最佳逼近多项式的充分必要条件是,在$[a,b]$上存在 $n+2$ 个点 $x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}$,使得

$$|f(x_k)-Q(x_k)|=\|f-Q\|\quad(k=1,2,\cdots,n+2),$$

而且对于 $k=1,2,\cdots,n$,

$$f(x_k)-Q(x_k)=-(f(x_{k+1})-Q(x_{k+1})).$$

这个定理是 18 世纪 50 年代由切比雪夫(Чебышев,П. Л.)建立的.后人称它为切比雪夫定理.作为其应用是:设 $f\in C[a,b]$,$P\in\pi_n$.若在$[a,b]$上有 $n+2$ 个点 $x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}$,使得

$$(f(x_k)-P(x_k))=-(f(x_{k+1})-P(x_{k+1}))\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

则

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n+2}|f(x_k)-P(x_k)|\leqslant E_n(f),$$

其中 $E_n(f)$是 n 次代数多项式对 f 的最佳逼近值.

杰克森定理(Jackson theorem) 用函数的构造性刻画其最佳逼近值的阶的定理.设$f\in C[a,b]$,$\omega(f,\delta)$是 f 的连续性模,$E_n(f)$是 n 次代数多项式对 f 的最佳逼近值,则有

$$E_n(f)\leqslant 12\omega\left(f,\frac{b-a}{2n}\right).$$

如果 $f\in C[a,b]$有 r 阶连续导数 $f^{(r)}\in C[a,b]$,那么

$$E_n(f)\leqslant C_r\frac{(b-a)^r}{n^r}\omega\left(f^{(r)},\frac{b-a}{2(n-r)}\right),$$

这里 C_r 是一个仅与 r 有关的正数.这是杰克森(Jackson,D.)在 1912 年建立的,人们称之为杰克森定理.

伯恩斯坦不等式(Bernstein inequality) 关于多项式的导数估计的一个不等式.设 $P_n(x)$是 n 次代数多项式,则在$(-1,1)$上,

$$|P_n'(x)|\leqslant\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P_n(x)|.$$

设 $t_n(x)$是 n 阶三角多项式,则

$$|t_n'(x)|\leqslant n\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|t_n(x)|.$$

上述两个不等式都称为伯恩斯坦不等式,它们是由伯恩斯坦(Бернштейн,С. Н.)首先发现的.后一不等式的一个重要的推广形式是 1948 年斯捷奇金(Стечкин,С. Б.)给出的:设 $r\geqslant 1$,则对于 $h\in(0,\pi/n]$,有

$$|t_n^{(r)}(x)|\leqslant\left(\frac{n}{2\sin nh}\right)^r\|\Delta_h^r t_n\|,$$

这里

$$\Delta_h^r t_n(x)=\sum_{k=0}^r(-1)^{r-k}\binom{r}{k}t_n(x+kh).$$

马尔可夫不等式(Markov inequality) 多项式导数在闭区间上的整体估计.若 $P(x)$是 n 次代数多项式,则在$[a,b]$上

$$|P'(x)|\leqslant\frac{2n^2}{b-a}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)|.$$

这是马尔可夫(Марков,А. А.)发现的.由此得到对任何正整数 $m<n$,有

$$|P^{(m)}(x)|\leqslant\frac{2^m}{(b-a)^m}n^2(n-1)^2\cdots\cdot(n-m+1)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)|.$$

然而更精细的不等式是由马尔可夫的兄弟(Марков,В. А.)建立的:

$$|P^{(m)}(x)|\leqslant\frac{2^m}{(b-a)^m}\frac{n^2(n^2-1^2)\cdots(n^2-(m-1)^2)}{(2m-1)!!}\|P\|\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

贾德克不等式(Dzjadyk inequality) 多项式导数的点态估计不等式.设 $\omega(t)$是连续性模,即$\omega(t)$是定义在$[0,2]$上有如下性质的函数:当$t\to0$时,$\omega(t)\to0$;$\omega(t)\geqslant0$ 而且是 t 的增函数;对 $t_1,t_2\in[0,2]$($t_1+t_2\leqslant2$),成立不等式 $\omega(t_1+t_2)\leqslant\omega(t_1)+\omega(t_2)$.又设 $P_n(x)$是次数不高于 n 的代数多项式,r 是整数.如果在$[-1,1]$上有

$$|P_n(x)|\leqslant\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^r\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right),$$

则在$[-1,1]$上成立着

$$|P_n'(x)|\leqslant C_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{r-1}\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right),$$

这里 C_r 是仅与 r 有关的正数.这个不等式是贾德克(Дзядык,В. К.)于 1956 年建立的,它在逼近论的逆定理研究中起着重要作用.

季曼定理(Timan theorem) 代数多项式逼近连续函数的正定理.若$f\in C[-1,1]$且 f 有 $r\geqslant0$ 阶连续导数,则存在一列次数不高于 n 的代数多项式 $P_n(x)(n=1,2,\cdots)$,使得对于$-1\leqslant x\leqslant1$ 和 $n>r$,都有

$|f(x)-P_n(x)|$

$$\leqslant C_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^r\omega\left(f^{(r)},\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right),\quad(1)$$

其中 $\omega(f^{(r)},\delta)$ 是 $f^{(r)}(x)$ 的连续性模，C_r 是仅与 r 有关的正数. 这个定理是季曼(Тиман, А. Ф.)于1951年建立的，通常称为季曼定理，它是代数多项式逼近连续函数的正定理——杰克森型定理. 进一步的讨论说明，(1)中的连续性模可以用 k 阶光滑模代替. 这是一个方面的发展. 另一方面是(1)中的

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}$$

可以用 $(1-x^2)/n$ 代替. 这是哥本高斯(Гопенгауз, И. Е.)于1967年得到的结果.

代数多项式逼近的逆定理(inverse theorems of approximation by algebraic polynomials) 由逼近阶推出函数构造性质的定理. 设 $f\in C[-1,1]$，$\omega(t)$ 是连续性模，即 $t\to 0$ 时 $\omega(t)\to 0$，$\omega(t)\geqslant 0$ 是 t 的增函数，而且 $\omega(t_1+t_2)\leqslant\omega(t_1)+\omega(t_2)$ 对 $0\leqslant t_1,t_2,t_1+t_2\leqslant 2$ 都成立. 若存在整数 $r\geqslant 0$ 以及代数多项式序列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $P_n(x)$ 的次数不高于 n，使得在 $[-1,1]$ 上成立着

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^r\omega\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right),$$

则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有 r 阶连续导数，而且对 $t\in(0,1/2)$，有

$$\omega(f^{(r)},t)\leqslant\begin{cases}C_r t\int_t^1\frac{\omega(u)}{u^2}\mathrm{d}u & (r=0),\\ C_r\left(t\int_t^1\frac{\omega(u)}{u^2}\mathrm{d}u+\int_0^t\frac{\omega(u)}{u}\mathrm{d}u\right) & (r>0),\end{cases}$$

这里 $f^{(0)}\equiv f$，而在 $r>0$ 时，还应假设

$$\int_0^1\frac{\omega(u)}{u}\mathrm{d}u<+\infty.$$

若 $\omega(u)=u^\alpha(0<\alpha<1)$，则 $\omega(f^{(r)},t)\leqslant C_{r,\alpha}t^\alpha$. 这方面的工作是季曼(Тиман, А. Ф.)于1957年开始的. 上面的 C_r 与 $C_{r,\alpha}$ 都是仅与其下角标有关的正数.

三角多项式(trigonometric polynomial) 形如

$$t_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的多项式，式中系数 $a_k(k=0,1,\cdots,n)$，$b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为实数，倘若 a_n,b_n 不全为零，则称 n 为此三角多项式的阶数. $t_n(x)\in C_{2\pi}$，而且利用欧拉公式

$$\cos kx=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}),$$

$$\sin kx=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}),$$

可以将 $t_n(x)$ 写成

$$t_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}C_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

n 阶三角多项式在长为 2π 的半开区间中最多只有 $2n$ 个零点. 若两个 n 阶三角多项式在长为 2π 的半开区间中有 $2n+1$ 个相异的点上取值相同，则它们完全相同. 关于 t_n 在 $L_{2\pi}^p$ 中的范数，尼科利斯基(Никольский, С. М.)建立了如下的不等式：若 $1\leqslant p\leqslant p'\leqslant+\infty$，则

$$\|t_n\|_{L^p}\leqslant(2\pi)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|t_n\|_{L^{p'}},$$

$$\|t_n\|_{L^{p'}}\leqslant 2n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|t_n\|_{L^p},$$

这里 $\|t_n\|_{L^\infty}=\|t_n\|_C$.

若 ν_j 是正整数，z_j 是复变数，$j=0,1,2,\cdots,m$，$C_{k_1,k_2,\cdots,k_m}$ 是仅与足码有关的复数，则称

$$\sum_{-\nu_j\leqslant k_j\leqslant\nu_j}C_{k_1,k_2,\cdots,k_m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1z_1+k_2z_2+\cdots+k_mz_m)}$$

为关于变量 $z_1,z_2,\cdots,z_m$ 的相应为 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_m$ 阶的三角多项式.

三角多项式逼近(approximation by trigonometric polynomials) 用三角多项式逼近周期为 2π 的连续函数. 记 T_n 为阶数不高于 n 的三角多项式

$$t_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

的全体，其中系数 $a_j(j=0,1,2,\cdots,n)$，$b_j(j=1,2,3,\cdots,n)$ 都是实数. 设 $f\in C_{2\pi}$，称

$$E_n^*(f)=\inf_{t_n\in T_n}\|f-t_n\|$$

为 n 阶三角多项式对 f 的最佳逼近值(度)，简称最佳逼近. 这个下确界是能够达到的，并且只有一个阶数不高于 n 的三角多项式达到，记为 $t_n^*(f)$，常称它为函数的 n 阶最佳逼近三角多项式. 对于 $f\in C_{2\pi}$ 及正整数 n，$t_n\in T_n$ 是 f 的 n 阶最佳逼近三角多项式的特征是：在 $[0,2\pi)$ 中存在 $2n+2$ 个点 $x_1<x_2<\cdots<x_{2n+2}$，使得 $|f(x_k)-t_n(x_k)|=\|f-t_n\|$，而且

$$f(x_k)-t_n(x_k)=-(f(x_{k+1})-t_n(x_{k+1}))\quad(k=1,2,\cdots,2n+1).$$

这个结论刻画了最佳逼近三角多项式的特征. 人们亦称它为切比雪夫定理. 其应用之一是：设 $f\in C_{2\pi}$，$t_n\in T_n$，若在 $[0,2\pi)$ 中有 $2n+2$ 个点 $x_1<x_2<\cdots<x_{2n+2}$，使得

$$f(x_k)-t_n(x_k)=-(f(x_{k+1})-t_n(x_{k+1})),$$

则

$$E_n^*(f)\geqslant\min_{1\leqslant k\leqslant 2n+2}|f(x_k)-t_n(x_k)|.$$

最佳逼近三角多项式(trigonometric polynomials of best approximation) 见“三角多项式逼近”.

三角多项式逼近的正定理(direct theorems of approximation bytrigonometric polynomials) 亦称杰克森型定理. 由函数的构造性质刻画其最佳逼近值收敛于零的速度的定理. 若 $f\in C_{2\pi}$，k 是正整数，则 n 阶三角多项式对 f 的最佳逼近值

$$E_n^*(f)\leqslant C_k\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)\ (n=1,2,\cdots),$$

其中 C_k 是仅与 k 有关的正数，$\omega_k(f,\delta)$ 是 f 的 k 阶光滑模. 这个结论在 $k=1$ 时，常称杰克森定理. $k>1$ 时是斯捷奇金(Стечкин，С. Б.)于 1951 年建立的. 对于可微分函数还有进一步的结论：若 $r\geqslant 1$，$f\in C_{2\pi}$ 有 r 阶连续导数 $f^{(r)}(x)$，则存在仅与 r 有关的正数 C_r，使得

$$E_n^*(f)\leqslant \frac{C_r}{(n+1)^r}E_n^*(f^{(r)}).$$

杰克森型定理(Jackson-type theorem)　即"三角多项式逼近的正定理".

三角多项式逼近的逆定理(inverse theorems of approximation by trigonometric polynomials)　由最佳逼近值收敛于零的速度刻画函数的性质的定理. 设 $f\in C_{2\pi}$，k 为正整数，则函数 f 的 k 阶光滑模适合如下不等式

$$\omega_k\left(f,\frac{1}{n}\right)\leqslant C_k n^{-k}\sum_{j=0}^{n}(j+1)^{k-1}E_j^*(f),$$

其中 $C_k>0$ 仅与 k 有关. 若存在正整数 r，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}E_n^*(f)<+\infty,$$

则函数 f 有 r 阶连续导数，并且存在仅与 r 有关的 $C_r>0$，使得对 $n\geqslant 1$，有

$$E_n^*(f^{(r)})\leqslant C_r\Big((n+1)^rE_n^*(f)+\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{r-1}E_k^*(f)\Big).$$

上述结论是斯捷奇金(Стечкин，С. Б.)于 1951 年建立的，其特殊情况，$r\geqslant 0$ 是整数，$0<\alpha<1$，由

$$E_n^*(f)\leqslant\frac{1}{n^{r+\alpha}}$$

可推出 $f^{(r)}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$. 这是由伯恩斯坦(Бернштейн，С. Н.)首先建立的，所以亦常称逆定理为伯恩斯坦型定理. 上述定理在 $\alpha=1$ 时是不成立的，亦即从

$$E_n^*(f)\leqslant\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

推不出 $f\in \mathrm{Lip}\ 1$. 1945 年，赞格蒙(Zygmund，A.)证明此时有 $f\in Z$，即存在 $M>0$，使对任一 h，

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant M|h|.$$

反之也成立. 于是 $E_n^*(f)=O(1/n)$ 的充分必要条件是 $\omega_2(f,\delta)=O(\delta)$，即 f 是亚光滑的. 不仅如此，还有 $E_n^*(f)=o(1/n)$ 的充分必要条件是 $\omega_2(f,\delta)=o(\delta)$，即 f 是光滑的.

伯恩斯坦型定理(Bernstein-type theorem)　即"三角多项式逼近的逆定理".

等价关系(equivalent relations)　周期函数空间中函数的构造性与其最佳逼近度之间的关系. 设 $\psi(u)>0$ 是 $[0,1]$ 上的增加函数，$\psi(0)=0$. 函数逼近论中的一个重要问题是：如果 $f\in C_{2\pi}$，那么对于怎样的 ψ，$E_n^*(f)=O(\psi(n^{-1}))$ 等价于

$$\omega(f_1,h)=O(\psi(h))?$$

洛津斯基(Лозинский，С. М.)、巴里(Бари，Н. К.)、斯捷奇金(Стечкин，С. Б.)于 20 世纪 50 年代给出了这个问题的回答. 他们指出：若存在正整数 k 和常数 $C>1$，使得

$$1<\liminf_{t\to 0}\frac{\psi(ct)}{\psi(t)}\leqslant\limsup_{t\to 0}\frac{\psi(ct)}{\psi(t)}<C^k,$$

则当 $f\in C_{2\pi}$ 有 r 阶连续导数时，下列关系是等价的：

$$E_n^*(f^{(j)})=O\left(\frac{1}{n^{r-j}}\psi(n^{-1})\right)\quad(j=0,1,2,\cdots,r),$$

$$\omega_{k+r-s}(f^{(s)},t)=O(t^{r-s}\psi(t))\quad(s=0,1,2,\cdots,r).$$

共轭函数逼近(approximation of conjugate function)　用函数的逼近性态来估计其共轭函数的逼近性态. 设 $f\in C_{2\pi}$，

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

为其傅里叶级数. 如果

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(b_k\cos kx-a_k\sin kx)$$

是某一函数 $\tilde{f}(x)$ 的傅里叶级数，则称 $\tilde{f}$ 为 f 的共轭函数. 熟知 $f\in \mathrm{Lip}\,\alpha(0<\alpha<1)$ 等价于 $\tilde{f}\in \mathrm{Lip}\,\alpha$. 人们关心的是用不高于 n 阶的三角多项式对 f 的最佳逼近值来刻画共轭函数最佳逼近值 $E_n^*(\tilde{f})$ 的问题. 斯捷奇金(Стечкин，С. Б.)的深刻结论是：设 $f\in C_{2\pi}$，$r\geqslant 0$ 是整数，若

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}E_n^*(f)<+\infty,$$

则 $\tilde{f}\in C_{2\pi}$ 有 r 阶连续导数，且

$$E_n^*(\tilde{f}^{(r)})\leqslant C_r\left\{(n+1)^rE_n^*(f)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu^*(f)\right\},$$

其中 $C_r>0$ 仅与 r 有关. 赞格蒙(Zygmund，A.)还发现了一个特别的结果，若 $f\in C_{2\pi}$，则 $f\in \mathrm{Lip}\ 1$ 的充分必要条件是

$$\|\tilde{\sigma}_n(f)-\tilde{f}\|=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

其中 $\tilde{\sigma}_n(f,x)$ 是 $\tilde{f}(x)$ 的 n 阶费耶尔和.

值得提及的是 $L_{2\pi}^p(p>1)$ 中讨论共轭函数的逼近是失去必要的. 因为熟知的里斯定理说明了这一点. 里斯定理断言：若 $f\in L_{2\pi}^p(p>1)$，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\tilde{f}(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant M_p\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\mathrm{d}x,$$

其中 $M_p>0$ 仅与 p 有关.

L_w^p 度量下的逼近(approximation in L_w^p metric)　函数类 L^p 中的一种逼近. 设 $w(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的可测函数，$w(x)\geqslant 0$. 若

$$\int_a^b w(x)\mathrm{d}x>0,$$

则称 $w(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个权函数. 对于 $[a,b]$ 上的

一个权函数 $w(x)$，记$L_w^p[a,b]$为定义在$[a,b]$上满足条件

$$\int_a^b |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x < +\infty$$

的可测函数 f 的全体，这里 $p>0$ 是给定的正数. 设 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是$L_w^p[a,b]$中的线性无关函数组，$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意给定的实数，人们常讨论用其线性组合

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k\varphi_k(x)$$

来逼近函数 $f\in L_w^p[a,b]$，并用

$$\int_a^b |f(x) - S_n(x)|^p w(x)\mathrm{d}x$$

表示其逼近偏差. 称这种逼近为在 L_w^p 度量下的逼近. 特别在 $w(x)=1$ 时，就简称 L^p 度量下的逼近.

L^p 度量下的逼近(approximation in L^p metric) 权函数 $w(x)$为 1 的 L_w^p 度量下的逼近. 通常人们讨论用代数多项式在 L^p 度量下逼近 L^p 中的函数. 在周期函数的情形，讨论用三角多项式在 L^p 度量下逼近 $L_{2\pi}^p$中的函数. 意即对于 $f\in L_{2\pi}^p$，考虑用三角多项式 $t(x)$来逼近 $f(x)$，并用

$$\left\{\int_0^{2\pi} |f(x) - t(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$

表示用 $t(x)$逼近函数 $f(x)$中 L^p 度量下的偏差，从而建立类似于 $C_{2\pi}$中的逼近理论.

平方逼近(L^2-approximation) L_w^2 度量下的逼近. 设 $w(x)$是$[a,b]$上的一个权函数，记 $L_w^2[a,b]$为定义在$[a,b]$上的且满足条件

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\mathrm{d}x < +\infty$$

的可测函数 $f(x)$的全体. 设 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是 $L_w^2[a,b]$中的线性无关组，对于任意给定的实数组$\{a_k\}_{k=0}^n$，记

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k\varphi_k(x).$$

对于 $f\in L_w^2[a,b]$，用

$$\int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 w(x)\mathrm{d}x$$

表示 $S_n(x)$在 $L_w^2[a,b]$度量下对 f 的逼近偏差，这种逼近常称为平方逼近. 对于每一个$f\in L_w^2[a,b]$，都有惟一的 $S_n^*(x)$实现对 f 的最佳平方逼近，即

$$\int_a^b |f(x) - S_n^*(x)|^2 w(x)\mathrm{d}x = \min_{a_k,k=0,1,2,\cdots,n}\int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 w(x)\mathrm{d}x,$$

其特征是 $f(x)-S_n^*(x)$与每个 $\varphi_k(k=0,1,\cdots,n)$都关于权 $w(x)$正交，也即

$$\int_a^b (f(x) - S_n^*(x))\varphi_k(x)w(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (k = 0,1,\cdots,n).$$

倘若 φ_k 是关于权 $w(x)$在$[a,b]$上两两正交的，则 $f(x)$的最佳平方逼近元 $S_n^*(x)$就是 $f(x)$关于$\{\varphi_k\}_{k=0}^n$的傅里叶展开式，即

$$S_n^*(x) = \sum_{k=0}^n C_k(f)\varphi_k(x),$$

其中

$$C_k(f) = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)w(x)\mathrm{d}x \Big/ \int_a^b \varphi_k^2(x)w(x)\mathrm{d}x,$$

常称 $C_k(f)$为 f 关于$\{\varphi_k\}_{k=0}^n$的傅里叶系数.

假设$\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$是$[a,b]$上关于权函数 $w(x)$的规范的正交多项式系(参见“正交多项式”). 对于 $f\in L_w^2[a,b]$，称

$$C_k(f) = \int_a^b f(x)P_k(x)w(x)\mathrm{d}x \quad (k = 0,1,\cdots)$$

为 f 关于$\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$的傅里叶系数，又称

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^n C_k(f)P_k(x)$$

为 f 的 n 阶傅里叶和，它是 $f(x)$的 n 次最佳平方逼近多项式，而且最佳平方逼近值为 $\sum\limits_{k=n+1}^\infty C_k^2(f)$，也即

$$\min_{a_k,k=0,1,\cdots,n}\int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 w(x)\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - S_n(f,x)|^2 w(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=n+1}^\infty C_k^2(f),$$

其中 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^n a_kP_k(x)$. 此时 $n\to\infty$时，

$$\sum_{k=n+1}^\infty C_k^2(f) \to 0.$$

虽然在 $C[a,b]$中的情况下，$S_n(f,x)$未必实现对 f 的一致逼近，即 $f\in C[a,b]$不能保证

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x) - S_n(f,x)| \to 0 \ (n\to\infty),$$

但是，此时对 $C[a,b]$中的一些函数类，$S_n(f,x)$仍然是个很好的逼近工具.

正交多项式(orthogonal polynomials) 由代数多项式构成的正交函数系的通称. 设 $w(x)$是$[a,b]$上的一个权函数，即 $w(x)\geqslant 0$ 且

$$\int_a^b w(x)\mathrm{d}x > 0.$$

如果定义在$[a,b]$上的可测函数 $f(x)$与 $g(x)$满足

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则称它们在$[a,b]$上关于权函数 $w(x)$是正交的. 记

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x)\mathrm{d}x,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+2} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix},$$

$$p_n(x)=\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n\end{vmatrix},$$

则 $p_n(x)$ 是 n 次多项式，而且 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ 中任意两个多项式在 $[a,b]$ 上关于权函数 $w(x)$ 是正交的. 人们称 $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上关于权函数 $w(x)$ 的正交多项式系. 又记

$$\hat{p}_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}}p_n(x),$$

则有

$$\int_a^b \hat{p}_n(x)\hat{p}_n(x)w(x)\mathrm{d}x=1\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

称 $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a,b]$ 上关于权函数 $w(x)$ 规范正交的多项式系. 如果认定 $\hat{p}_n(x)$ 的首项系数为正的，则 $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是由权函数 $w(x)$ 惟一确定的. 倘若再记

$$\tilde{p}_n(x)=\frac{1}{\Delta_{n-1}}p_n(x),$$

则 $\tilde{p}_n(x)$ 的首项系数为 1，并有如下的递推公式

$$\tilde{p}_{n+2}(x)=(x-\alpha_{n+2})\tilde{p}_{n+1}(x)-\lambda_{n+1}\tilde{p}_n(x),$$

这里 $\lambda_{n+1}=\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}/\Delta_n^2$,

$$\alpha_{n+2}=\int_a^b x\tilde{p}_n^2(x)\omega(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b\tilde{p}_{n+1}(x)\omega(x)\mathrm{d}x.$$

应当指出，任给一个 n 次代数多项式都可以表成 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)$ 的线性组合，而 $p_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中有 n 个零点，并且 $p_n(x)$ 的两个相邻零点之间必有 $p_{n-1}(x)$ 的一个零点.

正交多项式系(orthogonal system of polynomials) 见“正交多项式”.

规范正交多项式系(orthonormal systems of polynomials) 见“正交多项式”.

雅可比多项式(Jacobi polynomials) 在 $[-1,1]$ 上关于权 $w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ 的正交多项式. 设 $\alpha>-1,\beta>-1$，记 $[-1,1]$ 上关于权函数

$$w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$$

的正交多项式系为 $\{J_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$. 称 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 为 n 阶雅可比多项式. 此时有表达式

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{n!2^n}\frac{1}{w(x)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n w(x)]\quad(n=0,1,\cdots).$$

相应的规范正交系是 $\{\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$，它有表达式

$$\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\left(\frac{\alpha+\beta+2n+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}J_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

如记

$$\tilde{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}2^n n!J_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

则有递推公式

$$\tilde{J}_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)=(x-\alpha_{n+2})\tilde{J}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)-\lambda_{n+1}\tilde{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

其中

$$\alpha_{n+2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+4)},$$

$$\lambda_{n+1}=\frac{4(\alpha+n+1)(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)}\cdot\frac{(\alpha+\beta+n+1)(n+1)}{(\alpha+\beta+2n+2)^2(\alpha+\beta+2n+3)}.$$

$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 是个 n 次代数多项式，它在 $(-1,1)$ 中有 n 个零点. 人们常取这 n 个零点作为插值结点.

勒让德多项式(Legendre polynomials) $\alpha=\beta=0$ 时的雅可比多项式. 在 $[-1,1]$ 上关于权 $w(x)\equiv 1$ 的正交多项式系 $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 称为勒让德多项式系. $X_n(x)$ 有表达式

$$X_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n\mathrm{d}\theta\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

(参见“雅可比多项式”). 常称 $X_n(x)$ 为 n 阶勒让德多项式.

切比雪夫多项式(Chebyshev polynomials) $\alpha=\beta=-1/2$ 的雅可比多项式. 在 $[-1,1]$ 上关于权

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$$

的正交多项式系 $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 称为切比雪夫多项式系. 此时有表达式

$$T_n(x)=\cos n(\arccos x)\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

常称 $T_n(x)$ 为 n 阶切比雪夫多项式，有时，也称 $T_n(x)$ 为 n 阶第一类切比雪夫多项式. $T_n(x)$ 是 n 次多项式，它的零点是

$$x_{k,n}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

$\{x_{k,n}\}_{k=1}^{n}$ 是插值逼近中常用的结点. $T_n(x)$ 还有一些重要的特性：例如 $\|T_n\|=1$，而 $\|T_n'\|=n^2$. 又如 $2^{-n}T_n(x)$ 是在 $[-1,1]$ 上首项系数为 1 的与 0 有最小偏差的 n 次代数多项式，也即对于任何 n 次代数多项式

$$p(x)=x^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k x^k,$$

都有

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|2^{-n}T_n(x)|<\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p(x)|.$$

换言之，在 $[-1,1]$ 上，$x^n-2^{-n}T_n(x)$ 是函数 $f(x)=x^n$ 的 $n-1$ 次最佳逼近代数多项式，其最佳逼近值是 $E_n(f)=2^{-n}$. 与(第一类)切比雪夫多项式相对应，人们称

$$U_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1)$$

为第二类切比雪夫多项式，它是 $\alpha=\beta=1/2$ 时的雅

可比多项式，而 $U_n(x)$ 是 n 次代数多项式，$\{U_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是在 $[-1,1]$ 上关于权 $\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式系. $U_n(x)$ 的零点亦常作为插值结点. 当然，人们也用 $U_n(x)$ 的零点全体

$$x_k = \cos \frac{k}{n+1}\pi \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

再添加 $x_0=1, x_{n+1}=-1$ 作为插值的结点组.

第一类切比雪夫多项式(Chebyshev polynomial of first kind) 见“切比雪夫多项式”.

第二类切比雪夫多项式(Chebyshev polynomial of second kind) 见“切比雪夫多项式”.

拉盖尔多项式(Laguerre polynomials) 指 $[0,+\infty)$ 上关于权函数 $w(x)=e^{-x}$ 的正交多项式. 设 $w(x)=e^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$，称 $[0,+\infty)$ 上关于权函数 $w(x)$ 的正交多项式系 $\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 为拉盖尔多项式系，而称 $L_n(x)$ 为 n 阶拉盖尔多项式，它有表达式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

$L_n(x)$ 是 n 次代数多项式，其首项系数为 $(-1)^n$. 因此，相应的规范正交系 $\{\hat{L}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 与首项系数为 1 的正交系 $\{\tilde{L}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 有表达式

$$\hat{L}_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}L_n(x),$$

$$\tilde{L}_n(x) = (-1)^n L_n(x),$$

而且

$$\tilde{L}_{n+2}(x) = (x-2n-3)\tilde{L}_{n+1}(x) - (n+1)^2\tilde{L}_n(x).$$

其 n 个零点也在 $[0,+\infty)$ 中，常用于插值逼近中的结点.

埃尔米特多项式(Hermite polynomials) 在 $[0,+\infty)$ 上关于权函数 $w(x)=e^{-x^2}$ 的正交多项式. 记

$$H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},$$

$$\hat{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x),$$

$$\tilde{H}_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n H_n(x),$$

则 $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $[0,+\infty)$ 上关于权函数 $w(x)=e^{-x^2}$ 的正交多项式系，$\{\hat{H}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $[0,+\infty)$ 上关于权 $w(x)=e^{-x^2}$ 的规范正交多项式系. $\tilde{H}_n(x)$ 是首项系数为 1 的 n 次代数多项式，而且

$$\tilde{H}_{n+2}(x) = x\tilde{H}_{n+1}(x) - \frac{n+1}{2}\tilde{H}_n(x).$$

常称 $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 为埃尔米特多项式系，而称 $H_n(x)$ 为 n 阶埃尔米特多项式，它在 $[0,+\infty)$ 内有 n 个零点，常用作插值逼近中的结点.

埃尔米特多项式系(system of Hermite polynomials) 见“埃尔米特多项式”.

哈尔正交系(Haar orthogonal system) 哈尔(Haar, A.)于 1910 年所建立的一个正交函数系. 定义

$$x_0^{(0)}(x) \equiv 1 \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

$$x_0^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \left(0\leqslant x<\frac{1}{2}\right), \\ 0 & \left(x=\frac{1}{2}\right), \\ -1 & \left(\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right). \end{cases}$$

对于正整数 m 及 $1\leqslant k\leqslant 2^m$，令

$$x_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & \left(\frac{k-1}{2^m}<x<\frac{k-\frac{1}{2}}{2^m}\right), \\ -\sqrt{2^m} & \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{2^m}<x<\frac{k}{2}\right), \\ 0 & \left(\frac{l-1}{2^m}<x<\frac{l}{2^m}\right), \\ & (l\neq k, 1\leqslant l\leqslant 2^m), \end{cases}$$

在 $(0,1)$ 的其他点上，定义 $x_m^{(k)}(x)$ 为其左、右极限的算术平均值. 又定义 $x_m^{(k)}(0)$ 为 $x_m^{(k)}(x)$ 在 $(0,1/2^{n+1})$ 中的值，$x_m^{(k)}(1)$ 为 $x_m^{(k)}(x)$ 在 $(1-1/2^{m+1},1)$ 中的值. 称 $x_m^{(k)}(x)$ 为哈尔函数，其全体成为 $[0,1]$ 上的一个完备的规范正交系，称为哈尔正交系. 对于 $f\in L[0,1]$，称

$$C_0 x_0^{(0)}(x) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_m^{(k)} x_m^{(k)}(x)$$

为 $f(x)$ 的哈尔展开式，也称为 $f(x)$ 关于哈尔系的傅里叶级数，这里

$$C_m^{(k)} = \int_0^1 f(x)x_m^{(k)}(x)dx.$$

$f(x)$ 的哈尔展开式不仅在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$，而且在 $f(x)$ 的连续点上一定收敛于 $f(x)$. 此外，在 $f(x)$ 的一致连续的区间上，此展开式还一致收敛于 $f(x)$.

任给正整数 n，记 $n=2^m+k(1\leqslant k\leqslant 2^m)$，称

$$S_n(f,x) = C_0 x_{(0)}^{(0)}(x) + \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{2^r} C_r^{(j)} x_j^{(r)}(x) + \sum_{j=1}^{k} C_m^{(j)} x_m^{(j)}(x)$$

为 $f(x)$ 的哈尔展开式的第 n 部分和. $S_n(f,x)$ 是一种逼近工具. 若 $f\in C[0,1]$，记 $\omega(f,\delta)$ 为 $f(x)$ 的连续性模，则存在常数 $C>0$，使得

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-S_n(f,x)| \leqslant C\omega\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

哈尔函数(Haar function) 见“哈尔正交系”.

哈尔展开式(Haar expansion) 见“哈尔正

交系”.

沃尔什正交系(Walsh orthogonal system) 拉德马赫尔函数系的完备化. 记$\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$为拉德马赫尔正交系(参见本卷《调和分析》中的“拉德马赫尔函数系”),即

$$r_n(x) = \operatorname{sign}\sin 2^{n+1}x$$
$$(0 \leqslant x \leqslant 1, n = 0,1,\cdots),$$

定义 $W_0(x)=1(0\leqslant x\leqslant 1)$. 对于正整数 n,若其二进位表示是 $n=2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_p}, 0\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_p$,这里 $k_j\geqslant 0$ 是整数,则定义

$$W_n(x) = r_{k_1}(x)r_{k_2}(x)\cdots r_{k_p}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

称 $W_n(x)$为沃尔什函数,而称$\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$为沃尔什正交系. 沃尔什正交系是由美国数学家沃尔什(Walsh,J. L.)于 1923 年建立的,它不仅在$[0,1]$上是规范的正交集,而且在 $L^2[0,1]$中是完备的. 此外,对于任何 $f\in L^2[0,1]$,如果对 $k=0,1,\cdots$,都有

$$\int_0^1 f(x)W_k(x)dx = 0,$$

则 $f(x)$在$[0,1]$上几乎处处等于零.

沃尔什正交系与哈尔正交系 $x_0^{(0)}(x), x_0^{(1)}(x), x_m^{(k)}(x)(m=1,2,\cdots,k=1,2,\cdots,2^m)$有如下的关系:

$$x_0^{(0)}(x) = W_0(x), \quad x_0^{(1)}(x) = W_1(x),$$
$$x_1^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_2(x) + W_3(x)),$$
$$x_1^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_2(x) - W_3(x)).$$

一般的关系是由归纳法给出的. 如果记

$$x_{n-1}^{(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\sum_{v=2^{n-1}}^{2^n-1} a_{k_v}^{(n-1)}W_v(x)$$
$$(k = 1,2,\cdots,2^{n-1}),$$

其中 $a_{k_v}^{(n-1)}=\pm 1$,则

$$x_n^{(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{v=2^n}^{2^{n+1}-1} a_{k_v}^{(n)}W_v(x) \quad (k = 1,2,\cdots,2^n),$$

其中矩阵$(a_{k_v}^{(n)})$是用如下方法得到的:依次将$(a_{k_v}^{(n-1)})$的每一行重复写成两行,得到一个 2^{n-1}列 2^n行的矩阵,它恰好是$(a_{k_v}^{(n)})$的左半个. 然后将它向右延伸 2^{n-1}列,延伸的奇数行就是左半矩阵的奇数行,延伸的偶数行就是左半矩阵的偶数行的相反符号. 例如

$$(a_{k_v}^{(1)}) = \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$$

则

$$(a_{k_v}^{(2)}) = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}.$$

人们又称上述定义的沃尔什正交系为按自然序排列的:

$$W_0(x), W_1(x), W_2(x), \cdots, W_n(x).$$

在工程上为了应用方便,还有一种列率序排列的. 对集$\{0,1\}$引入伪加运算(如图所示):

$$0\oplus 0=0,$$
$$0\oplus 1=1,$$
$$1\oplus 0=1,$$
$$1\oplus 1=0.$$

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

一个正整数 n 的二进位表示是

$$n = \sum_{j=-N+1}^{0} n_j 2^{-j},$$

则称$(n_{-N+1}, n_{-N+2}, \cdots, n_{-1}, n_0)$为 n 的二进代码. 约定 $n_{-N}=0$ 时,称

$$(n_{-N+1}\oplus n_{-N}, n_{-N+2}\oplus n_{-N+1}, \cdots, n_0\oplus n_{-1})$$

为 n 的格雷代码,相应的二进位表示的数是

$$G(n) = \sum_{j=-N+1}^{0}\langle n_j \oplus n_{j-1}\rangle 2^{-j}.$$

定义 $Wal_n(x) = W_{G(n)}(x)\ (n=0,1,\cdots)$,并称 $Wal_1(x), Wal_2(x), \cdots, Wal_n(x), \cdots$为列率序的沃尔什正交系. $\{Wal_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$自然也是 $L^2[0,1]$中的规范且完备的正交系,而且它与三角函数系有着更相似的性质. 例如有 $Wal_k(x)Wal_j(x)=Wal_{k\oplus j}(x)$,这里 $k\oplus j$ 的含义是设 k 和 j 有二进位表示

$$k = \sum_{v=-N+1}^{0} \alpha_v 2^{-v}, \quad j = \sum_{v=-N+1}^{0} \beta_v 2^{-v},$$

则

$$k \oplus j = \sum_{v=-N+1}^{0} (\alpha_v \oplus \beta_v)2^{-v}.$$

沃尔什函数(Walsh function) 见“沃尔什正交系”.

格雷代码(Gray code) 见“沃尔什正交系”.

沃尔什逼近(Walsh approximation) 沃尔什正交系中函数线性组合的逼近. 设$\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$是沃尔什正交系(参见“沃尔什正交系”). 对于 $f\in C[0,1]$或$f\in L^q[0,1]$,人们首先考虑展开$f(x)$为沃尔什-傅里叶级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(f)W_k(x) \quad \left(C_k(f) = \int_0^1 f(x)W_k(x)\mathrm{d}x\right)$$

的收敛性,以及此级数的部分和

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k(f)W_k(x)$$

对 $f(x)$在 $C[0,1]$度量或 $L^q[0,1](1\leqslant q<+\infty)$度量下的逼近性态. 其次是对于任意给定的数(实的或复的)$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$,称

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k W_k(x)$$

为 n 阶沃尔什多项式，记其全体为 T_n；设

$$f \in L^q[0,1] \quad (1 \leqslant q < +\infty),$$

考虑用 T_n 中的在$L^q[0,1]$的度量下逼近 f. 常记

$$E_n(f) = \inf_{t_n \in T_n} \| f - t_n \|,$$

这里

$$\| f \| = \{\int_0^1 |f(x)|^q dx\}^{\frac{1}{q}}.$$

易知当 $n \to \infty$时，$E_n(f)$单调减少收敛于零. 与三角多项式逼近相似，在沃尔什逼近中，人们关心的亦是 n 阶沃尔什多项式对函数 f 的最佳逼近 $E_n(f)$收敛于零的速度与函数 $f(x)$的构造性之间的关系，诸如三角多项式逼近的正定理与逆定理等，也已为人们所建立. 20 世纪 80 年代以来，这方面的研究颇受人们重视.

上面介绍的沃尔什正交系是从二进位表示出发的. 对于任何正整数 $p>2$，亦可从 p 进位出发，建立新的沃尔什正交系. 只是此时对于函数的诸如连续、可微以及李普希茨条件等的定义都应适当改变. 此外，也已有人研究多元的沃尔什函数系. 这些理论在信息论、线性系统、通讯等方面已有或将有广泛的应用. 特别对于逐段光滑的函数，沃尔什正交系有时会出现较三角函数系更有效的性能.

沃尔什多项式(Walsh polynomial)　见“沃尔什逼近”.

线性算子逼近(approximation by linear operators)　函数逼近论的一个重要组成部分. 设$[c,d] \subset [a,b]$，L 是 $C[a,b]$ 到 $C[c,d]$ 的线性算子，$f \in C[a,b]$，记 $L(f)$ 在点 $x \in [c,d]$ 处的值为 $L(f,x)$，在$[c,d]$上用$L(f,x)$对$f(x)$的逼近称为线性算子逼近. 线性算子逼近一直是函数逼近论的一个重要分支. 其原因大致是线性关系简明，线性算子比较容易构造，而最佳逼近多项式与被逼近函数之间一般又不具有线性关系. 熟知函数的泰勒级数的部分和、傅里叶级数的部分和及其种种平均、种种插值多项式等都是线性算子的例子. 一般地，假设 X 是一个函数空间(例如 C，L^p 等)，$\{L_n\}$是 X 到其自身的一个线性算子序列，在考虑用 $L_n(f)$逼近 $f \in X$ 时，首先研究的是 $n \to \infty$时，$L_n(f)$是否按某种意义收敛于 f，其次是研究函数的构造性与逼近度

$$\| f - L_n(f) \|_X$$

之间的关系，这通常是通过收敛性定理、逼近的正定理与逆定理来实现的. 但是，对于某些线性算子来说，其逼近度是有限制的，即不会因函数性质好而增加其逼近程度. 因此，研究具体算子的逼近功能也是一个重要的问题.

$C_{2\pi}$中的饱和性(saturation in $C_{2\pi}$)　周期函数空间中线性算子逼近的一个属性. 设有 $C_{2\pi}$到 $C_{2\pi}$的一个线性算子序列$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果有一个收敛于零的正数列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$使得：

1. 若 $f \in C_{2\pi}$，则当且仅当 f 是常数时

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\| f - L_n(f) \|_{C_{2\pi}}}{\varphi_n} = 0;$$

2. 存在不恒等于常数的函数 $f_0 \in C_{2\pi}$，使得

$$\| f_0 - L_n(f_0) \|_{C_{2\pi}} = O(\varphi_n);$$

则称$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$是饱和的，其饱和阶为$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，又称满足条件 2 的函数 f_0 的全体 $S(L_n)$为$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$的饱和类. 这里 $\| f_0 - L_n(f_0) \|_{C_{2\pi}} = O(\varphi_n)$的含义是存在与 n 无关的正数 M，使得

$$\| f_0 - L_n(f_0) \|_{C_{2\pi}} \leqslant M\varphi_n.$$

饱和阶亦称为最优逼近阶.

最优逼近阶(optimal degree of approximation)　见“$C_{2\pi}$中的饱和性”.

$C[a,b]$中的饱和性(saturation in $C[a,b]$)　闭区间上连续函数空间中线性算子逼近的一个属性. 设$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$是 $C[a,b]$到 $C[c,d]$的线性算子序列，$[a,b] \subset [c,d]$. 如果存在在$[c,d]$上一致收敛于零且在(c,d)中是正的函数序列$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$以及函数类 $T(L_n)$使得：

1. 当且仅当 $f \in T(L_n)$时

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{f(x) - L_n(f,x)}{\varphi_n(x)} \right\| = 0.$$

2. 存在函数 $f_0 \in C[a,b]$，使得 $f_0 \notin T(L_n)$并且

$$\left\| \frac{f_0(x) - L_n(f_0,x)}{\varphi_n(x)} \right\| = O(1),$$

则称$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$在$[c,d]$上是饱和的. 常称$\{\varphi_n(x)\}$为$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$的饱和阶，$T(L_n)$与 $S(L_n)$分别为$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$的平凡类与饱和类，这里 $S(L_n)$是符合上述条件 2 的函数的全体. 而条件 1 和 2 中范数 $\| \cdot \|$ 一般是指$[c,d]$中的上确界，而当 $\varphi(x)$在区间$[c,d]$的端点处的值为零时，则理解为开区间(c,d)中的上确界.

正线性算子逼近(approximation by positive linear operators)　一类常用的逼近. 设$f \in C[a,b]$，如果对一切$x \in [a,b]$都有$f(x) \geqslant 0$，则记$f \geqslant 0$. 设 L 是$C[a,b]$到$C[c,d]$的线性算子，$[c,d] \subset [a,b]$，如果对 $f \geqslant 0$ 有 $L(f) \geqslant 0$，则称 L 为正线性算子. 此时，用$L(f,x)$在$[c,d]$上逼近 $f(x)$称为正线性算子逼近. 设 L_n 是$C[a,b]$到$C[c,d]$的正线性算子，$[c,d] \subset [a,b]$，如果对于$f \in C[a,b]$，$L_n(f)$都是$\leqslant n$次代数多项式，那么 L_n 称为 n 阶正多项式算子. 用这种算子在$[c,d]$上逼近函数，其临界阶是$O(n^{-2})$. 事实上，记 $f_i(x) = x^i (i=0,1,2)$，那么至少有一个 i 使得 $n \to \infty$时，

$$\max_{c \leqslant x \leqslant d} |f_i(x) - l_n(f_i,x)| \neq o(n^{-2}).$$

这是科罗夫金(Коровкин，П. П.)证明的. 对于 $C_{2\pi}$的

情形，有类似的概念与结论，只是代替 n 次代数多项式是 n 阶三角多项式，而三个试验函数是 $1,\cos x$ 及 $\sin x$. 正是由于正多项式算子的逼近阶不高于 n^{-2}，所以正多项式算子虽然是一种良好的逼近方法，但其应用还是有局限性的. 不能像代数多项式逼近连续函数那样，其最佳逼近的阶会随被逼近函数光滑性增加而提高.

科罗夫金定理(Korovkin theorem)　正线性算子序列逼近的基本定理. 20 世纪 50 年代，科罗夫金(Коровкин, П. П.)建立了如下的定理：设 $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的正线性算子序列，$\{f_i(x)\}_{i=0}^{2}$ 是 $[a,b]$ 上的一个切比雪夫组. 如果 $n\to\infty$ 时，$L_n(f_i,x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f_i(x)(i=0,1,2)$，则对于任何 $f\in C[a,b]$，当 $n\to\infty$ 时，$L_n(f,x)$ 都在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 常称这个定理为科罗夫金定理. 又称这三个函数 $f_0(x)$，$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为试验函数. 对于函数空间 $C[a,b]$，常取 $f_i(x)=x^i(i=0,1,2)$，而对于函数空间 $C_{2\pi}$，常取 $f_0(x)=1$，$f_1(x)=\cos x$，$f_2(x)=\sin x$. 在科罗夫金定理中，$\{f_i(x)\}_{i=0}^{2}$ 构成一个切比雪夫组这个条件是必要的. 因为科罗夫金还证明了如下的结论：设 $f_i\in C[a,b](i=0,1,2)$. 如果对于每个 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的正线性算子序列 $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$，从 $n\to\infty$ 时 $L_n(f_i,x)(i=0,1,2)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛就能推出，对任何 $f\in C[a,b]$ 都有 $n\to\infty$ 时 $L_n(f,x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收于 $f(x)$，则 $\{f_i\}_{i=0}^{2}$ 一定是切比雪夫组.

试验函数(test function)　见“科罗夫金定理”.

伯恩斯坦算子逼近(approximation by Bernstein operators)　用伯恩斯坦多项式的逼近. 设 $f\in C[a,b]$，称

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{x}(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

为 f 的 n 阶伯恩斯坦多项式. 它是 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的一个正线性算子，也称为伯恩斯坦算子. 当 $n\to\infty$ 时 $\|B_n(f)-f\|\to 0$. 算子序列 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是饱和的，饱和阶是

$$\left\{\frac{2(1-x)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty},$$

而饱和类是 $\{f\mid f\in C[0,1]$ 且 $f'\in \mathrm{Lip}1\}$. 更确切地说，存在正数 C，对于任何 $f\in C[0,1]$ 及 $x\in[0,1]$，都有

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant C\omega_2\left(f,\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right),$$

而且 $f'\in \mathrm{Lip}1$ 等价于

$$|B_n(f,x)-f(x)|\leqslant M\frac{x(1-x)}{2n}$$

$$(n=1,2,\cdots;0\leqslant x\leqslant 1),$$

这里 $\omega_2(f,\delta)$ 是 f 的二阶光滑模.

伯恩斯坦多项式(Bernstein polynomial)　见“伯恩斯坦算子逼近”.

伯恩斯坦算子(Bernstein operator)　见“伯恩斯坦算子逼近”.

费耶尔算子逼近(approximation by Fejer operators)　傅里叶和的算术平均的逼近. 设 $f\in C_{2\pi}$，$S_k(f,x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的前 $k+1$ 项的和. 称傅里叶和的算术平均

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{n}(S_0(f,x)+S_1(f,x)+\cdots+S_{n-1}(f,x))$$

为费耶尔和. $\sigma_n(f)$ 是 $C_{2\pi}$ 到 $C_{2\pi}$ 的一个正线性算子，其范数

$$\|\sigma_n\|=\sup_{\|f\|\leqslant 1}\|\sigma_n(f)\|=1,$$

并有表达式

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right)^2\mathrm{d}t.$$

当 $n\to\infty$ 时 $\sigma_n(f,x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不仅一致收敛于 $f(x)$，而且有

$$|f(x)-\sigma_n(f,x)|\leqslant C\omega\left(f,\frac{\lg(n+1)}{n+1}\right),$$

其中 C 是一个与 x 及 n 都无关的正数. 线性算子序列 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是饱和的，饱和阶是 $\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$，饱和类是

$$\{f\mid f\in C_{2\pi}\text{ 且 }\tilde{f}\in \mathrm{Lip}\ 1\},$$

这里 $\tilde{f}$ 表示 $f\in C_{2\pi}$ 的共轭函数.

费耶尔和(Fejer sum)　见“费耶尔算子逼近”.

杰克森算子逼近(approximation by Jackson operators)　证明逼近论正定理的一个重要工具. 设 n 是正整数，称

$$K_n(t)=\lambda_n^{-1}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4$$

为杰克森核，式中

$$\lambda_n=\frac{3}{\pi n(2n^2+1)}$$

是由条件

$$\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\mathrm{d}t=1$$

确定的数. 对 $f\in C_{2\pi}$，常称

$$J_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x,t)K_n(t)\mathrm{d}t$$

为杰克森算子(或积分). 称用 $J_n(f,x)$ 逼近 $f(x)$ 为杰克森算子的逼近. 此时有

$$\|f-J_n(f)\|\leqslant 12\omega\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

作为一个 $C_{2\pi}$ 到 $C_{2\pi}$ 的线性算子序列来看，$\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是饱和的，饱和阶是 $\{\varphi(n)=n^{-2}\}_{n=1}^{\infty}$，饱和类是

$\{f | f \in C_{2\pi}, 且 f' \in \text{Lip } 1\}$.

杰克森核(Jackson kernel) 见"杰克森算子逼近".

傅里叶和逼近(approximation by Fourier sums) 用傅里叶级数部分和的逼近. 设 $f \in L_{2\pi}$,称

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (k = 0,1,\cdots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k = 1,2,\cdots)$$

为 f 的傅里叶系数,而称

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

为 f 的傅里叶级数. 此级数的前 $n+1$ 项之和为 f 的 n 阶傅里叶和,记为 $S_n(f,x)$,它有表达式

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt,$$

其中

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

称为狄利克雷核. 而称

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$$

为勒贝格常数. 费耶尔(Fejer, L.)曾证明

$$L_n = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(n),$$

实际应用时还有

$$L_n \leqslant 2 + \log(n+1).$$

$S_n(f)$是 $L_{2\pi}$到 $L_{2\pi}$的 n 阶三角多项式的线性算子,其范数为 L_n. 对于任一 n 阶三角多项 $t_n(x)$ 都有 $S_n(t_n,x) = t_n(x)$. 对于 $f \in C_{2\pi}$, $S_n(f,x)$ 未必收敛于 $f(x)$,但是,对于$f \in C_{2\pi}$,则有

$$\max_x |S_n(f,x) - f(x)| \leqslant (2 + \log(n+1))E_n^*(f),$$

这里 $E_n^*(f)$是 n 阶三角多项式对 f 的最佳逼近.

傅里叶和逼近的一个主要问题是求它对一类函数逼近的上界,1945 年,尼科利斯基(Никольский, С. М.)证明:设 $\omega(t)$ 是上凸的连续模,记 $H_\omega^* = \{f | f \in C_{2\pi} 且 \omega(f,\delta) \leqslant \omega(\delta)\}$,则

$$\sup_{f \in H_\omega^*}\max_x |f(x) - S_n(f,x)| = \frac{\log n}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t dt + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

这个结果已被推广到可微函数的情况. 1985 年,谢庭藩证明,若 $f \in C_{2\pi}$有 r 阶连续导数,则

$$\max_x |f(x) - S_n(f,x)| = \frac{1}{n^r}\max_x |S_n^{(r)}(f,x) - f^{(r)}(x)| + O\left(\frac{1}{n^r}E_n^*(f^{(r)})\right).$$

狄利克雷核(Dirichlet kernel) 见"傅里叶和逼近".

勒贝格常数(Lebesgue constant) 见"傅里叶和逼近".

瓦莱·普桑和逼近(approximation by Vallée-Poussin sums) 同时具有傅里叶和及费耶尔和的性质之"和"的逼近. 设$f \in C_{2\pi}$, $S_n(f,x)$是它的 n 阶傅里叶和,称

$$V_n(f,x) = \frac{1}{n}\{S_n(f,x) + S_{n+1}(f,x) + \cdots + S_{2n-1}(f,x)\}$$

为 f 的 n 阶瓦莱·普桑和或瓦莱·普桑平均. 显然, $V_n(f,x)$是$2n-1$阶三角多项式,它是$C_{2\pi}$到$C_{2\pi}$的线性算子,而且具有性质:

1. 对任一 n 阶三角多项式 $t_n(x)$,有
$$V_n(t_n,x) \equiv t_n(x).$$
2. 当 $n \to \infty$时, $\| V_n(f) - f \| \to 0$.

进一步的结论是瓦莱·普桑(Vallée-Poussin, C. de la)在 20 世纪初建立的不等式:

$$\| f - V_n(f) \| \leqslant 4E_n^*(f)$$

对任何 $f \in C_{2\pi}$及 $n=1,2,\cdots$都成立.

瓦莱·普桑平均(Vallée-Poussin means) 见"瓦莱·普桑和逼近".

切比雪夫级数部分和逼近(approximation by partial sum of Chebyshev series) 一种代数多项式算子的逼近. 设 $f \in C[-1,1]$. $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$是切比雪夫多项式系,即 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. 函数 $f(x)$ 按$\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$展开的傅里叶级数前 $n+1$ 项之和

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2}C_0 + \sum_{k=1}^{n}C_k(f)T_k(x)$$

称为 f 的切比雪夫级数的第 n 部分和,其中

$$C_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos k\theta d\theta.$$

利用 $S_n(f,x)$逼近$f(x)$常被称为切比雪夫级数部分和的逼近. 可以证明, $S_n(f,x)$是 n 次代数多项式. 如果记$E_n(f)$为 n 次代数多项式对 f 在$C[-1,1]$度量下的最佳逼近值,那么在$[-1,1]$上,就有

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant (3 + \log n)E_n(f).$$

三角插值多项式逼近(approximation by trigonometric interpolating polynomials) 具有插值性质的三角多项式的逼近. 设

$$x_k = x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k = 0,1,\cdots,2n),$$

对整数 $p \geqslant 0$,记

$$T_{n,p}(f,x) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} f(x_k)\frac{\sin\frac{2p+1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}},$$

则 $T_{n,n}(f,x)$ 具有插值性质：

$$T_{n,n}(f,x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, \pm 1, \cdots).$$

人们常研究 $T_{n,n}(f,x)$ 对 $f(x)$ 的逼近，有着与傅里叶和逼近函数的类似结论. 而

$$U_q^{(n)}(f,x) = \frac{1}{q+1}\{T_{n,0}(f,x) + T_{n,1}(f,x) + \cdots + T_{n,q}(x)\}$$

则有着类似于费耶尔和逼近函数的性质. 特别地，若 $f(x) \in C_{2\pi}$，则还有

$$\left\| \frac{1}{2}\left(T_{n,n}\left(f, x + \frac{\pi}{2n+1} \right) + T_{n,n}\left(x - \frac{\pi}{2n+1} \right) \right) - f(x) \right\| \leqslant (1 + 2\pi + 4\pi^2) E_n^*(f) + \omega\left(f, \frac{\pi}{2n+1} \right).$$

拉格朗日插值多项式逼近(approximation by Lagrange interpolation polynomials)　常用的逼近工具. 设 $x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1$ 是 $[a,b]$ 上 n 个互异的点. 1795 年，拉格朗日(Lagrange, J. -L.)就证明：如果定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 在 x_k 处的值 $f(x_k)(k=1,2,\cdots,n)$ 是已知的，那么存在惟一的次数不高于 n 的代数多项式 $L_n(f,x)$，使得 $L_n(f,x_k) = f(x_k)(k=1,2,\cdots,n)$. 倘若记

$$W_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

$$l_{k,n}(x) = \frac{W_n(x)}{(x - x_k)W_n'(x_k)},$$

则有

$$L_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_{k,n}(x). \tag{1}$$

等式(1)中的 $L_n(f,x)$ 称为 $f(x)$ 的拉格朗日插值多项式，并称 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 为其结点组，而称 $l_{k,n}(x)$ 为拉格朗日插值基本多项式. 若 $f(x)$ 是次数不高于 $n-1$ 的代数多项式，则 $L_n(f,x) \equiv f(x)$. $L_n(f,x)$ 的几何意义是有且仅有一条 $n-1$ 次代数曲线通过平面上预先给定的 n 个横坐标互异的点. 对于 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，$L_n(f,x)$ 是一个可计算的逼近工具. 若 $f(x)$ 有 r 阶连续导数，则

$$f(x) - L_n(f,x) = \frac{f^{(r)}(\xi)}{n!} W_n(x),$$

其中 ξ 是 $[a,b]$ 中一个与 x 有关的点.

对于给定的结点组 $\{x_k\}_{k=1}^n$，称

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_{k,n}(x)|$$

为此结点组的勒贝格函数，而称 $\lambda_n = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \lambda_n(x)$ 为其勒贝格常数. 如果记 $E_{n-1}(f)$ 为次数不高于 $n-1$ 的代数多项式对函数 $f \in C[a,b]$ 的最佳逼近值，则有

$$|f(x) - L_n(f,x)| \leqslant (1 + \lambda_n(x)) E_{n-1}(f) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

而且有 $\| f - L_n(f) \| \geqslant (1 + \lambda_n) E_{n-1}(f)$. 因此，选择使 λ_n 取值小的结点组是一个重要的工作. 但是，对于 $[a,b]$ 上的任一结点组 $\{x_k\}_{k=1}^n$，费伯(Faber, G.)与伯恩斯坦(Бернштейн, С. Н.)分别于 1914 年与 1916 年证明了

$$\lambda_n \geqslant \frac{\log n}{8\sqrt{\pi}}.$$

于是人们只能选择阶接近 $\log n$ 的结点组. 最常用的是在 $[-1,1]$ 上取切比雪夫多项式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

的零点全体

$$x_{k,n} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k = 1,2,\cdots,n)$$

作为结点组，此时相应的勒贝格常数不超过

$$8 + \frac{4}{\pi}\log n.$$

因此，只要 $f \in C[-1,1]$ 的连续性模 $\omega(f,\delta)$ 适合条件

$$\omega(f,\delta)\log\frac{1}{\delta} \to 0,$$

就可以保证 $n \to \infty$ 时，$L_n(f,x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 如果 $f \in C[-1,1]$ 有 r 阶连续导数，那么不等式

$$\| f(x) - L_n(f,x) \| \leqslant C_r \frac{\log n}{n^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n} \right)$$

成立，其中 $C_r > 0$ 仅与 r 有关.

关于插值多项式的逼近不仅考虑一致逼近，还可考虑平均逼近，L^p 度量下的逼近等. 关于插值结点组，不仅限于切比雪夫多项式的零点，而且还可取一般正交多项式的零点. 这里零点的分布情况是十分要紧的. 然而，倘若取均匀分布的结点，那么其结果往往是不好的. 例如，即使对于像

$$f(x) = |2x - a - b|$$

这样很好的函数，其等距结点组上的拉格朗日插值多项式也不能在 $[a,b]$ 上实现对它的逼近.

拉格朗日插值多项式(Lagrange interpolation polynomial)　见“拉格朗日插值多项式逼近”.

勒贝格函数(Lebesgue function)　见“拉格朗日插值多项式逼近”.

修正的拉格朗日插值多项式逼近(approximation by modified Lagrange interpolation polynomials)　用变形的插值多项式的逼近. 由于拉格朗日插值多项式的逼近度与最佳逼近阶之间至少要相差一个对数因子，因而人们就在想如何修改拉格朗日插值多项式，使之用于逼近函数时能使得此对数因子消失. 修改的方法很多，线性平均的办法是常用的一种方法. 例如，对 $f \in C[-1,1]$，

$$x_{k,n} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

$$x = \cos\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi),$$

记 $L_n(f,x)$ 为以 $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ 为结点组的拉格朗日插值多项式，定义

$$G_n(f,x) = \frac{1}{2}\left\{L_n\left(f,\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2n}\right)\right) + L_n\left(f,\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2n}\right)\right)\right\},$$

$$R_n(f,x) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1,n}) + 2f(x_{k,n}) + f(x_{k+1,n}))l_{k,n}(x),$$

这里 $x_{0,n} = x_{1,n}, x_{n+1,n} = x_{n,n}$，而

$$l_{k,n}(x) = \frac{W_n(x)}{W_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})},$$

$$W_n(x) = (x - x_{1,n})\cdots(x - x_{n,n}).$$

则存在常数 $C>0$，使得在 $[-1,1]$ 上

$$|G_n(f,x) - f(x)| \leqslant C\omega\left(f, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right),$$

$$|R_n(f,x) - f(x)| \leqslant C\omega\left(f, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

它们表明，这种修改对于低度光滑函数是有效的.

埃尔米特插值多项式逼近（approximation by Hermite interpolation polynomials） 拉格朗日插值多项式逼近的一种拓广. 设 $x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1$ 是 $[a,b]$ 上的互异的点，给定一张数表

$$\begin{matrix} y_1^{(0)} & y_1^{(1)} & \cdots & y_1^{(\alpha_1-1)} \\ y_2^{(0)} & y_2^{(1)} & \cdots & y_2^{(\alpha_2-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{(0)} & y_n^{(1)} & \cdots & y_n^{(\alpha_n-1)} \end{matrix} \tag{1}$$

记 $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. 1878 年，埃尔米特（Hermite, C.）证明了存在次数 $\leqslant m-1$ 的代数多项式 $H_n(x)$ 使得

$$H_n^{(s)}(x_k) = y_k^{(s)} \quad (k=1,2,\cdots,n; s=0,1,\cdots,\alpha_{k-1}).$$

常称 $H_n(x)$ 为表(1)的以 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 为结点组的埃尔米特插值多项式.

设 $f \in C[a,b]$，且 f 在 x_k 处有 $\alpha_k - 1$ 阶导数，若取 $y_k^{(s)} = f^{(s)}(x_k)$，则称相应的埃尔米特插值多项式 $H_n(f,x)$ 为 $f(x)$ 的以 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 为结点组的 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 阶埃尔米特插值多项式. 借助于 $H_n(f,x)$ 对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的逼近（包括一致逼近与平均逼近），都称为埃尔米特插值多项式的逼近. 若 $f \in C[a,b]$ 在 $[a,b]$ 上有 m 阶导数，则

$$f(x) - H_n(f,x) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x - x_1)^{\alpha_1}\cdots(x - x_n)^{\alpha_n}.$$

埃尔米特插值多项式（Hermite interpolation polynomial） 见"埃尔米特插值多项式逼近".

伯克霍夫插值多项式逼近（approximation by Birkhoff interpolation polynomials） 埃尔米特插值多项式逼近的一种推广. 如果在埃尔米特插值过程中放弃在某些点处的某些阶导数取值的要求，那么就称这种插值多项式为伯克霍夫插值多项式. 研究这种多项式对函数的逼近，称为伯克霍夫插值多项式逼近. 其中最简单的是(0,2)插值，它是常见的缺项插值的一种. 具体地说：设 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 是 $[a,b]$ 上一组相异的点，要求一个次数 $\leqslant 2n-1$ 的代数多项式 $S_n(f,x)$，使得

$$S_n(f,x_k) = f(x_k), \quad S_n''(f,x_k) = f''(x_k),$$

并考虑 $S_n(f,x)$ 对 $f(x)$ 的逼近性态.

伯克霍夫插值多项式（Birkhoff interpolation polynomial） 见"伯克霍夫插值多项式逼近".

帕尔型插值逼近（Pall-type interpolation approximation） 埃尔米特插值逼近的一个应用性拓广. 设 $W_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ 是在 $[a,b]$ 上具有 n 个互异实根的代数多项式，记 $W_n'(x)$ 的零点为 $x_k'(k=1,2,\cdots,n-1)$，称符合下述条件的次数最低的代数多项式 $P_n(f,x)$ 为函数 $f \in C[a,b]$ 的帕尔型插值多项式：

$$P_n(f,x_k) = f(x_k) \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

$$P_n'(f,x_k') = f'(x_k') \quad (k = 1,2,\cdots,n-1),$$

这里当然要求 $f(x)$ 是可导的函数. 考虑 $P_n(f,x)$ 对 $f(x)$ 的逼近性态称为帕尔型插值逼近.

埃尔米特-费耶尔插值多项式逼近（approximation by Hermite-Fejer interpolation polynomials） 埃尔米特插值逼近的一种特殊情况. 设 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 是 $[-1,1]$ 上的一组互异的点，记

$$W(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

$$l_k(x) = \frac{W(x)}{W'(x_k)(x - x_k)} \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

对于 $f \in C[-1,1]$，称

$$F_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(1 - \frac{W''(x_k)}{W'(x_k)}(x - x_k)\right)l_k^2(x)$$

为函数 $f(x)$ 的以 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 为结点组的埃尔米特-费耶尔插值多项式. $F_n(f,x)$ 是一个 $2n-1$ 次代数多项式，它满足如下条件：

$$F_n(f,x_k) = f(x_k) \quad (k = 1,2,\cdots,n)$$

及

$$F_n'(f,x_k) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

20 世纪 70 年代以来，人们对 $F_n(f)$ 逼近 f 的研究甚多，常称用 $F_n(f)$ 对 f 的逼近为埃尔米特-费耶尔插值多项式逼近. 对于这种逼近，通常取 n 阶切比雪夫多项式 $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$ 的零点

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k = 1,2,\cdots,n)$$

作为插值结点组，并讨论其相应的埃尔米特-费耶尔插值多项式逼近.

埃尔米特-费耶尔插值多项式(Hermite-Fejer interpolation polynomial)　见“埃尔米特-费耶尔插值多项式逼近”.

拟埃尔米特-费耶尔插值多项式逼近(approximation by quasi-Hermite-Fejer interpolation polynomials)　埃尔米特-费耶尔插值多项式逼近的扩充. 设$\{x_k\}_{k=1}^n$是$(-1,1)$中的一个结点组:

$$-1 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < 1.$$

对于$f\in C[-1,1]$,称满足下列条件的$2n+1$次代数多项式$Q_n(f,x)$为函数$f(x)$的以$\{x_k\}_{k=1}^n$为结点组的拟埃尔米特-费耶尔插值多项式:

$$Q_n(f,x_k) = f(x_k),$$
$$Q_n'(f,x_k) = 0\quad(k=1,2,\cdots,n),$$
$$Q_n(f,\pm 1) = f(\pm 1).$$

借助$Q_n(f,x)$逼近函数$f(x)$称为拟埃尔米特-费耶尔插值多项式逼近. 若记

$$W(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$
$$l_k(x) = \frac{W(x)}{W'(x_k)(x-x_k)}\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

则$Q_n(f,x)$有如下的表达式:

$$Q_n(f,x) = F_n(f,x) + (f(1)-F_n(f,1))\left(\frac{1+x}{2}\frac{W(x)}{W(1)}\right)^2 + (f(-1)-F_n(f,-1))\left(\frac{1-x}{x}\frac{W(x)}{W(-1)}\right)^2,$$

式中$F_n(f,x)$是函数$f(x)$的以$\{x_k\}_{k=1}^n$为结点组的埃尔米特-费耶尔插值多项式

$$F_n(f,x) = \sum_{k=1}^n f(x_k)\left(1-\frac{W''(x_k)}{W'(x_k)}(x-x_k)\right)l_k^2(x).$$

$F_n(f,x)$的结点组$\{x_k\}_{k=1}^n$常取

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

或

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

拟埃尔米特-费耶尔插值多项式(quasi-Hermite Fejer interpolation polynomial)　见“拟埃尔米特-费耶尔插值多项式逼近”.

线性逼近(linear approximation)　对逼近工具的一种划分概念. 设$f\in C[a,b]$,$\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^n$,$\varphi_k(x)\in C[a,b]$. 讨论用$\Phi$的元素的线性组合

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n$$

对f的逼近,常常被称为线性逼近. 例如,代数多项式逼近、三角多项式逼近、插值逼近等. 这是线性逼近的一种,而另一种是借助线性算子的逼近,也即用来逼近函数的工具与函数的关系是线性的,人们亦称它为线性逼近. 例如,傅里叶和及由其产生的种种线性平均的逼近、插值多项式的逼近等. 除去上述两个方面的逼近,人们常称之为非线性逼近. 例如,有理逼近、代数(或三角)多项式的最佳逼近算子等都是非线性的.

非线性逼近(nonlinear approximation)　见“线性逼近”.

联合(同时)逼近(simultaneous approximation)　同时逼近函数及其导数或用一个函数同时逼近多个函数的逼近. 同时逼近函数及其导数的问题是可解的. 设$f\in C_{2\pi}$有r阶连续导数,则有不高于n阶的三角多项式$t_n(x)$,使得

$$\| f^{(j)}(x) - t_n^{(j)}(x) \| \leqslant C_r E_n^*(f^{(j)})$$
$$(j=0,1,\cdots,r).$$

同样,对$f\in C[-1,1]$,如果f有r阶连续导数,则有不高于n次的代数多项式$P_n(x)$,使得

$$|f^{(j)}(x) - P_n^{(j)}(x)| \leqslant C_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-j}\frac{1}{n^j}E_n(f^{(j)})$$
$$(j=0,1,\cdots,r;\ -1\leqslant x\leqslant 1),$$

其中C_r是仅与r有关的正数. $E_n(f)$($E_n^*(f)$)是n次(阶)代数(三角)多项式对f的最佳逼近值.

用一个函数同时逼近几个函数或一列函数的概念有多种提法. 对$[-1,1]$上的可测函数f,记

$$\| f \|_p = \left\{\int_{-1}^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}},$$

而使$\| f \|_p < +\infty$的函数全体记为L^p,这里$0<p\leqslant+\infty$. 当$p=+\infty$时,常理解为$f\in C[-1,1]$,$\| f \|_\infty = \| f \|$. 设有L^p的一个子集S,对于L^p中的一列函数$f_1,f_2,\cdots$和一列数$\lambda_j\geqslant 0$,满足条件:

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_j = 1,\quad \sum_{j=1}^\infty \lambda_j f_j \in L^p.$$

如果存在$s^*\in S$使得

$$\sup_j \| f_j - s^* \|_p = \inf_{s\in S}\sup_j \| f_j - s \|_p$$

或

$$\| \sup_j |f_j(x) - s^*(x)| \|_p = \inf_{s\in S} \| \sup_j |f_j(x) - s(x)| \|_p$$

或

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_j \| f_j - s^* \|_p^p = \inf_{s\in S}\sum_{j=1}^\infty \lambda_j \| f_j - s \|_p^p$$

或

$$\| \sum_{j=1}^\infty \lambda_j |f_j(x) - s^*(x)| \|_p = \inf_{s\in S} \| \sum_{j=1}^\infty \lambda_j |f_j(x) - s(x)| \|_p,$$

则称s^*为相应定义下的S对f的最佳联合逼近元,并称等式左边的值为相应意义下的最佳逼近值. 自然

有一个 S 的取法,以及在 S 取定下的 s^* 的存在性、惟一性及其特征等定性问题.亦有由函数 $f_j(x)$ 的性质来估计最佳逼近的定量问题.

最佳联合逼近元(element of best simultaneous approximation)　见"联合(同时)逼近".

有理逼近(rational approximation)　有理函数对连续函数的逼近.设 $P(x)$ 是 n 次代数多项式,$Q(x)$ 是 m 次代数多项式,称 $P(x)/Q(x)$ 为一个 (n,m) 阶有理函数,并记

$$R_m^n[a,b]=\left\{\frac{P}{Q}\,\middle|\,\frac{P}{Q}\text{ 是}(n,m)\text{ 阶有理函数且不可约,当 }x\in[a,b]\text{ 时 }Q(x)>0\right\}.$$

若 $f\in C[a,b]$,则存在惟一的 $r_{nm}^*(f,x)\in R_m^n[a,b]$,使得

$$\| f-r_{nm}^*(f)\| = \inf_{r\in R_m^n[a,b]} \| f-r\|,$$

称 $r_{nm}^*(f)$ 为函数 f 的 (n,m) 阶最佳逼近有理函数,称 $\| f-r_{nm}^*(f)\|$ 为 f 的 (n,m) 阶最佳有理逼近值.

最佳逼近有理函数(best approximation rational function)　见"有理逼近".

最佳有理逼近的特征(character of best rational approximation)　函数的最佳有理逼近函数的特征定理.设 π_n 为 $\leqslant n$ 次代数多项式的全体,对于 $R_m^n[a,b]$ 中的一个给定的元素 r(参见"有理逼近"),记

$$\pi_n+r\pi_m=\{P+rQ\mid P\in\pi_n,Q\in\pi_m\}.$$

设 $f\in C[a,b]$,则 $r_{nm}^*\in R_m^n[a,b]$ 是 f 的 (n,m) 阶最佳逼近有理函数的充分必要条件是,没有 $\varphi\in\pi_n+r_{nm}^*\pi_m$ 能与 $f(x)-r_{nm}^*(x)$ 在集

$$\{y\mid |f(y)-r_{nm}^*(y)|=\| f-r_{nm}^*\|\}$$

上具有相同的符号.类似于代数多项式的逼近,还有如下的交错定理:

$$r=\frac{P}{Q}\in R_m^n[a,b]$$

是 $f\in C[a,b]$ 的 (n,m) 阶最佳逼近有理函数的特征是:在 $[a,b]$ 上至少存在

$$\mu=2+\max\{n+\mathscr{D}Q,m+\mathscr{D}P\}$$

个点 $x_k(k=1,2,\cdots,\mu)$,

$$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_\mu\leqslant b,$$

使得

$$|f(x_j)-r(x_j)|=\| f-r\|,$$

$$f(x_{j+1})-f(x_j)=-(f(x_j)-f(x_{j-1}))\quad(j=1,2,\cdots,\mu),$$

这里 $\mathscr{D}P$ 表示代数多项式 P 的次数,并按常规规定 $\mathscr{D}0=-\infty$.

有理逼近的阶(order of rational approximation)　函数与其最佳逼近有理函数之间的偏差估计.定义 $R_n^n=R_n^n[-1,1]$(参见"有理逼近"),对 $f\in C[-1,1]$,记

$$R_n(f)=\min_{r\in R_n^n}\| f-r\|,$$

称 $R_n(f)$ 为 f 的 n 阶最佳有理逼近值(度).显然,$R_n(f)\leqslant E_n(f)$,这里 $E_n(f)$ 是 n 次代数多项式对 f 的最佳逼近.已经发现对 $C[-1,1]$ 中的某些函数 f 有 $R_n(f)<E_n(f)$,甚而

$$\frac{E_n(f)}{R_n(f)}\to\infty\quad(n\to\infty).$$

但是在整个函数空间 $C[-1,1]$ 中,这种使得 $R_n(f)<E_n(f)$ 的函数 f 却是很少的.记

$$E=\left\{f\mid f\in C[-1,1],\limsup_{n\to\infty}\frac{R_n(f)}{E_n(f)}=1\right\},$$

则 E 是 $C[a,b]$ 的一个剩余集——即某贝尔第一范畴集的余集.与代数多项式逼近一样,人们也研究逼近的正定理和逆定理.

纽曼定理(Neuman theorem)　揭示有理逼近远远优于多项式逼近的定理.1964 年,纽曼(Neuman,D. J.)证明了如下的定理:对 $n\geqslant5$,存在 (n,n) 阶有理函数(参见"有理逼近")$r_n(x)$,使得

$$||x|-r_n(x)|\leqslant 3\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\quad(-1\leqslant x\leqslant1).$$

因此,$R_n(|x|)\leqslant3\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$.但在 $[-1,1]$ 上 $E_n(|x|)$ 的阶是 n^{-1},即存在与 n 无关的正数 C,使得

$$C^{-1}n^{-1}<E_n(|x|)<Cn^{-1}.$$

因此,$R_n(|x|)$ 在 $n\to\infty$ 时收敛于零的速度要比 $E_n(|x|)$ 收敛于零的速度快得多.循着纽曼的途径,人们发现了许多 $E_n(f)$ 与 $R_n(f)$ 不同阶的函数 f.弗洛伊德(Freud,G.)指出,若在 $[-1,1]$ 上 $f\in\mathrm{Lip}\alpha$ 并且有有界变差,则

$$R_n(f)=O\left(\frac{\log^2 n}{n}\right).$$

波波夫(Popov,V. A.)指出,对导数的全变差小于 1 的绝对连续函数 f,有 $R_n(f)=O(n^{-2})$.由此可以推出,若在 $[-1,1]$ 上 $f\in\mathrm{Lip}1$,则

$$nR_n(f)\to0\quad(n\to\infty),$$

这原是纽曼于 20 世纪 60 年代提出的一个猜想.

单调有理逼近(monotone rational approximation)　对于分段单调的函数用具有相同单调性质的有理函数的逼近.例如,存在 (n,n) 阶有理偶函数 $r(x)$,它在 $[0,1]$ 上单调增加,并且在 $[-1,1]$ 上有

$$\|\,|x|-r(x)\|=O\left(\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{n}}{3}}\right).$$

如果 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调增加且属于 $\mathrm{Lip}\alpha(0<\alpha<1)$,则存在 (n,n) 阶有理函数 $r(x)$,使得

$$\| f(x)-r(x)\|\leqslant C_\alpha\| f\|\frac{\log^2 n}{n},$$

其中 C_α 是仅与 α 有关的正数.

多项式的倒数逼近(approximation by recipocals of polynomials)　有理逼近的特殊情况.设 $f(x)\geqslant0$ 且 f 在 $[-1,1]$ 上连续,则当 $n\geqslant1$ 时,存在

n 次代数多项 $P_n(x)$，使得

$$\left\| f - \frac{1}{P_n} \right\| \leqslant C\omega\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

这种逼近称为多项式的倒数逼近，简称倒数逼近.

帕德逼近(Padé approximation)　一种特殊的有理逼近. 设具有复系数的级数

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

在原点的某个邻域内收敛，对正整数 m 和 n，要求两个多项式

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} p_k z^k,\ Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} q_k z^k,$$

使得 $Q_n(z) \neq 0$ 且

$$\sum_{k=0}^{j} c_{j-k} q_k = \begin{cases} p_j & (j = 0, 1, \cdots, m), \\ 0 & (j = m+1, \cdots, m+n). \end{cases}$$

式中约定 $k > n$ 时 $q_k = 0$，这样求出的 P_m 和 Q_n 虽然并不惟一，但有理函数

$$R_{mn}(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$$

却是惟一的. 人们称 $R_{mn}(z)$ 为 $F(z)$ 的 (m,n) 级帕德逼近(近似)，记为 $\left[\frac{m}{n}\right]$. 由 $\left[\frac{m}{n}\right]$ 所形成的阵列

$$\left\{\left[\frac{m}{n}\right]\right\}_{m}^{\infty},\quad n = 0$$

称为帕德表. 帕德逼近已有多种算法，但帕德逼近序列的收敛性问题的困难又引人关注. 一般地，帕德表中的主对角线序列逼近性较好. 例如，设 $\alpha > 0$，$\{n_k\}$ 是一列正整数. 如果

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

在 $\Delta_k = \{z \mid |z| < k, k > 0\}$ 内全纯，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\max\{|a_j| \mid n_k < j \leqslant 2n_k\}^{\alpha/n_k}) < +\infty,$$

则 $F(z)$ 的帕德逼近序列 $\left\{\left[\frac{n_k}{n_k}\right]\right\}$ 在 Δ_k 的每个紧子集 $D \backslash E$ 上一致收敛于 $F(z)(k \to \infty)$，此处 E 是一个 α 维豪斯多夫零测度集. 帕德逼近是法国数学家帕德(Padé, H.)发现的.

帕德表(Padé table)　见"帕德逼近".

单调逼近(monotone approximation)　用具有同样单调性质的多项式对有一定单调性的连续函数的逼近. 设有 $s+1$ 个点

$$y_{s+1} = -1 < y_s < \cdots < y_2 < y_1 = 1,$$

Y 为这 $s+1$ 个点所成之集. 记 $\Delta(Y) = \{f \mid f \in C[-1,1]$ 并且在 $[y_{2j}, y_{2j-1}]$ 上增加，在 $[y_{2j+1}, y_{2j}]$ 上减小，$j = 1, 2, \cdots\}$. 又记 $\pi_n(Y) = \pi_n \cap \Delta(Y)$. 这里 π_n 为 $[-1,1]$ 上 $\leqslant n$ 次代数多项式的全体，常称用 $\pi_n(Y)$ 中的元素对 $f \in \Delta(Y)$ 的逼近为单调逼近，也称共单调逼近或分段单调逼近. 记

$$\varepsilon_n^*(f) = \inf_{p \in \pi_n(Y)} \| f - p \|,$$

则有 $\varepsilon_n^*(f) \leqslant C_Y \omega_2(f, n^{-1})$，这里 $C_Y > 0$ 仅与 Y 有关. 但是，这里二阶光滑模不能换作三阶光滑模，事实上，存在这样的函数 $f_* \in \Delta(Y)$，使得

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_n(f_*)}{E_n(f_*)} = +\infty,$$

其中 $E_n(f_*)$ 是 n 次代数多项式对 f_* 的最佳逼近值. 然而单调逼近特别在 $s=1$ 的情况下较受人们关注. 有时人们说及单调逼近就是指这种情况.

对于单调逼近，也成立点态估计：设 r 是正整数，$f \in \Delta(Y)$ 有 r 阶连续导数，则当 $n \geqslant r+1$ 时，有 $p \in \pi_n(Y)$，使得

$$|f(x) - p(x)| \leqslant B_{Y,r}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n}\right)^r \omega\left(f^{(r)}, \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right),$$

其中 $B_{Y,r} > 0$ 仅与 Y 及 r 有关.

共单调逼近(comonotone approximation)　见"单调逼近".

逐段多项式逼近(approximation by piecewise polynomials)　用分段多项式函数逼近连续函数. 记 $S(n,k)$ 为 $[-1,1]$ 上这样的连续函数，它在

$$\left(-1 + \frac{2j}{n}, -1 + \frac{2j+2}{n}\right)$$

中是 k 次多项式，$j = 0, 1, \cdots, n-1$. 若 $f \in C[-1,1]$，则

$$\inf_{s \in S(n,k)} \| f(x) - s(x) \| \leqslant C\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right),$$

其中 $C > 0$ 仅与 k 有关，$\omega_k(f, \delta)$ 是 f 的 k 阶光滑模，且有类似于三角多项式对周期函数逼近的理论.

强性逼近(strong approximation)　源于级数强性求和的一种逼近. 设 $f \in C_{2\pi}$，$S_n(f,x)$ 为 f 的傅里叶级数的前 $n+1$ 项之和. 20 世纪 60 年代，亚历克西茨(Alexits, G.)首先考虑当 $n \to \infty$ 时，量

$$\left\| \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |S_k(f,x) - f(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \right\|$$

的阶与 $f(x)$ 的构造性之间的关系问题，此即所谓强性逼近问题. 一些结果表明，某些逼近定理是可以强化的，例如对于 $f \in \operatorname{Lip}\alpha(0 < \alpha < 1)$，则费耶尔和的逼近定理

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (S_k(f,x) - f(x)) \right\| = O(n^{-\alpha})$$

可以强化为

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |S_k(f,x) - f(x)| \right\| = O(n^{-\alpha}).$$

瓦莱·普桑和的逼近定理可以强化为

$$\left\| \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} |S_k(f,x) - f(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \right\| \leqslant C_p E_n^*(f),$$

这里 $p>0$,C_p 是仅与 p 有关的正数. $E_n^*(f)$ 是 n 阶三角多项式对 f 的最佳逼近值. 至于逆命题,则有:对 $p\geqslant 1$,

$$E_{2n}^*(f)\leqslant\left\|\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}|S_k(f,x)-f(x)|\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|.$$

而对 $0<p<1$,则有仅与 p 有关的正数 C_p,使得

$$(E_n^*(f))^{1-1/p^2}(E_{2n}^*(f))^{1/p^2}\leqslant C_p\left\|\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}|S_k(f,x)-f(x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right\|.$$

强性逼近的另一种问题是对于正数列 $\{\lambda_k\}$,考虑

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k|S_k(f,x)-f(x)|^p$$

的收敛性与函数 f 的构造性之间的关系. 例如,当 $p>1$ 时,由不等式

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}|S_k(f,x)-f(x)|^p\right\|<+\infty \qquad (1)$$

可推出 $f\in \mathrm{Lip}(1/p)$. 而当 $0<p\leqslant 1$ 时,如记 $(1/p)=r+\alpha$,其中 $r\geqslant 0$ 为整数,$0\leqslant\alpha<1$,则当 $0<\alpha<1$ 时,由不等式(1)可推出 $f^{(r)}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$;当 $\alpha=0$ 时,由不等式(1)可推出 $f^{(r-1)}(x)$ 是亚光滑函数,即有常数 $C>0$,使得对一切 x 和 h 都有

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant C|h|.$$

闵茨逼近(Müntz approximation) 代数多项式逼近的一种发展. 设 $\lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个实数列,$0\leqslant x\leqslant 1$,称 $\{x^{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个闵茨系统. 又称其前 n 个元所作出的线性组合

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx^{\lambda_k}$$

为 n 阶闵茨多项式. 对于 $f\in C[0,1]$,用闵茨多项式对 f 的逼近称为闵茨逼近. 如果 $0=\lambda_1<\lambda_2<\cdots$,则闵茨系 $\{x^{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 的多项式全体在 $C[0,1]$ 中稠密的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=+\infty.$$

若记 n 阶闵茨多项式的全体为 $\pi_n(\lambda)$,又记

$$\varepsilon(\lambda_n)=\max_{\mathrm{Re}z=1}\left|\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z+\lambda_k}\right|,$$

式中 $\mathrm{Re}\,z$ 为复数 z 的实部,则对任何 $f\in C[0,1]$,有

$$\inf_{r\in\pi_n(\lambda)}\|f(x)-r(x)\|\leqslant C\omega(f,\varepsilon(\lambda_n)),$$

其中 $C>0$ 为常数,$\omega(f,\delta)$ 为 f 的连续性模.

闵茨系统(Müntz system) 见“闵茨逼近”.

闵茨多项式(Müntz polynomial) 见“闵茨逼近”.

缺项多项式逼近(approximation by lacunary polynomials) 闵茨逼近的特殊情况. 设 $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是正整数列的真子列,用函数系 $\{1,x^{m_1},\cdots,x^{m_k},\cdots\}$ 的前 n 个元素的线性组合逼近连续函数,称为缺项多项式逼近.

有限阶整函数逼近(approximation by entire functions of finite degree) 三角多项式逼近连续函数的拓广. 设 $f(z)$ 是复平面上的解析函数,记

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|.$$

如果

$$\limsup_{r\to+\infty}\frac{\log M(r)}{r}=\sigma<+\infty,$$

那么称 $f(z)$ 为 σ 阶数的整函数,即 $f(z)$ 是指数型整函数,σ 为其指数. 如果此时将 $f(z)$ 展开为幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}z^k,$$

则

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\sigma,$$

而且

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|f'(x)|\leqslant\sigma\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)|.$$

记 $B_\sigma=\{f\,|\,f$ 是指数 $\leqslant\sigma$ 的指数型整函数$\}$. 若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$ 并且有界,则称

$$A_\sigma(f)=\inf_{g\in B_\sigma}\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)-g(x)|$$

为 σ 阶整函数对 f 的最佳逼近值. 可以证明,存在常数 $C_r>0$,对于任何在 $(-\infty,+\infty)$ 有 r 阶连续导数的函数 $f(x)$,都有

$$A_\sigma(f)=\frac{C_r}{\sigma^r}A_\sigma(f^{(r)}),$$

而且

$$A_\sigma(f)\leqslant C\omega_2\left(f,\frac{1}{\sigma}\right),$$

这里 $\omega_2(f,\sigma)$ 是 $f(x)$ 在全实轴上的二阶光滑模.

阿希士尔-列维坦积分逼近(approximation by Achieser-Levitan integrations) 逼近全实轴上连续函数的一种工具. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界且连续的函数,$r\geqslant 0$,$\sigma>0$,则称

$$u_\sigma(f,r,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left\{f\left(x+\frac{ru}{\sigma}\right)+f\left(x-\frac{ru}{\sigma}\right)\right\}\frac{\cos ru-\cos(r+1)u}{u^2}\mathrm{d}u$$

为 f 的阿希士尔-列维坦积分. 它是指数 $\leqslant(r+1)\sigma/r$ 的指数型整函数,而且若 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界的且指数 $\leqslant\sigma$ 的整函数,则 $u_\sigma(f,r,x)\equiv f(x)$. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界连续,则用 $u_\sigma(f,r,x)$ 对 $f(x)$ 的逼近称为阿希士尔-列维坦积分的逼近;此时还有

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)-u_\sigma(f,r,x)|\leqslant C_rA_\sigma(f),$$

其中 $C_r>0$ 仅与 r 有关,$A_\sigma(f)$ 是 σ 阶整函数对 f 的最佳逼近值.

阿希士尔-列维坦积分(Achieser -Levitan integration) 见“阿希士尔-列维坦积分逼近”.

函数类的逼近阶(order of approximation of function class)　一类函数对另一函数类中的函数最佳逼近的上界. 设 $\mathscr{R}$ 是$C_{2\pi}$的一个子集,称量

$$E_n^*(\mathscr{R}) = \sup_{f\in\mathscr{R}} E_n^*(f)$$

为集 $\mathscr{R}$ 借助 n 阶三角多项式逼近的阶,这里 $E_n^*(f)$ 是 n 阶三角多项式对函数 f 的最佳逼近值. 一般地,设 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{R}'$ 是某个度量空间的两个子集,对于此度量空间中的任一元素 f,称

$$E_{\mathscr{R}'}(f) = \inf_{g\in\mathscr{R}'} \rho(f,g)$$

为 f 借助集 $\mathscr{R}'$ 的元素逼近的最佳逼近值,$\rho(f,g)$表示元素 f 与 g 之间的距离. 人们称

$$E_{\mathscr{R}'}(\mathscr{R}) = \sup_{f\in\mathscr{R}} E_{\mathscr{R}'}(f)$$

为集 $\mathscr{R}$ 借助集 $\mathscr{R}'$ 逼近的阶.

法瓦尔定理(Favard theorem)　刻画可微函数类逼近阶的著名定理. 对于 $p=1,2,\cdots$,记W_p^*为$C_{2\pi}$中有 $p-1$ 阶绝对连续导数$f^{(p-1)}(x)$且

$$|f^{(p)}(x)| \leqslant 1$$

几乎处处成立的函数 $f(x)$的全体. 1937 年,法瓦尔(Favard,J. A.)建立了如下的定理:

$$E_{n-1}^*(W_p^*) = K_p \frac{1}{n^p} \quad (n=1,2,\cdots),$$

这里

$$E_{n-1}^*(W_p^*) = \sup_{f\in W_p^*} E_{n-1}^*(f),$$

$E_{n-1}^*(f)$是 $n-1$ 阶三角多项式对 f 的最佳逼近值,而

$$K_p = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{p+1}} & (p\ \text{是奇数}), \\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^{p+1}} & (p\ \text{是偶数}). \end{cases}$$

此外,对每个 n 和 $p=1,2,\cdots$,都存在极函数$f_{np}(x)\in W_p^*$,即$E_{n-1}^*(f_{np})=E_{n-1}^*(W_p^*)$.

类Λ_ω的逼近(approximation of class Λ_ω)　连续性模不超过给定的连续性模的函数类的逼近. 设$\omega(\delta)$是一个给定的凹的连续性模. 记 Λ_ω 为$C_{2\pi}$中连续性模 $\omega(f,\delta)\leqslant\omega(\delta)$ 的函数 f 的全体,这里 $0\leqslant\delta\leqslant\pi$,则有

$$E_{n-1}^*(\Lambda_\omega) = \max_{f\in\Lambda_\omega} E_{n-1}^*(f) = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (n=1,2,\cdots),$$

其中 $E_{n-1}^*(f)$是 $n-1$ 阶三角多项式对 f 的最佳逼近值. 对于非凹的连续性模,上述结论未必成立. 但是存在常数 $C>0$,使得

$$E_{n-1}^*(\Lambda_\omega) \leqslant C\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

1962 年,高念祖克(Корнейчук,Н. П.)证明:对于所有的 $f\in C_{2\pi}$,

$$E_{n-1}^*(f) \leqslant \omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right) \quad (n=1,2,\cdots),$$

其中 $\omega(f,\delta)$是 f 的连续性模,而且若 $M<1$,则

$$E_{n-1}^*(f) \leqslant M\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)$$

不能对于所有 $f\in C_{2\pi}$及所有的 $n=1,2,\cdots$都成立.

宽度(width)　描述一个函数类"宽狭"的数量特征. 设 X 是巴拿赫空间,A 是 X 内关于原点对称的子集(即当 $x\in A$ 时,$-x\in A$),X_n 是 X 的 n 维线性子空间. 对 $x\in A$,称

$$E_{X_n}(x) = \inf_{u\in X_n} \|x-u\|$$

为 x 到 X_n 的距离或 X_n 对 x 的最佳逼近值. 又称

$$\rho(A,X_n) = \sup_{x\in A} E_{X_n}(x)$$

为 A 与 X_n 间的整体偏差. 人们称量

$$d_n(A) = \inf_{X_n} \rho(A,X_n)$$

为 A 的 n 维宽度. 确切地说,是集 A 在空间 X 内的宽度. 因为当 $X=L^2$ 时,它是 1935 年由柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А. Н.)首先提出的,所以也称$d_n(A)$为柯尔莫哥洛夫意义下的 n 维宽度. 上面定义$d_n(A)$时的下确界是对 X 的所有 n 维子空间取的. 倘若有一个 X 的 n 维子空间 X_n^* 使得$\rho(A,X_n^*)=d_n(A)$,则称X_n^*为集 A 在空间 X 内的 n 维极子空间或 n 维最优子空间.

在函数逼近论中主要是计算$d_n(A)$或者估计$d_n(A)$,以及找出所有能使宽度$d_n(A)$实现的 n 维子空间 X_n. 这些问题的研究不但有其本身的理论价值,而且也有其实际意义,它将会引导人们找出更好的逼近方法. 另一方面,不论用代数多项式逼近函数,或者用三角多项式逼近周期函数,抽象起来看,都只不过是一种特殊的逼近方法. 人们自然可以去考虑寻找其他函数系来作为逼近工具,于是寻找最优逼近工具即最优的逼近函数系的问题就应运而生. 这大致是宽度概念产生的背景. 宽度的系统研究始于 20 世纪 50 年代,70 年代以来发展很快.

最优子空间(optimal subspace)　实现整体偏差最小的子空间. 设 X 是巴拿赫空间,A 是 X 内关于原点对称的子集(即 $x\in A$ 时,$-x\in A$),X_n^* 是 X 的 n 维子空间. 如果

$$\sup_{x\in A}\inf_{u\in X_n^*}\|x-u\| = \inf_{X_n}\sup_{x\in A}\inf_{u\in X_n}\|x-u\|,$$

则称 X_n^* 为集 A 在空间 X 内的 n 维最优子空间,上式右边的下确界是对 X 的全部 n 维子空间取的(参见"宽度").

线性宽度(linear width)　用线性算子逼近代替最佳逼近的宽度. 设 A 是巴拿赫空间 X 的子集,X_n 是 X 的 n 维线性子空间,L 是 A 的线性包到 X_n 的有界线性算子. 称量

$$E'_{X_n}(A)=\inf_L\sup_{x\in A}\|x-L(x)\|$$

为 A 在 X 内借助于 X_n 的最佳线性逼近值，又称

$$d'_n(A)=\inf_{X_n}E'_{X_n}(A)$$

为 A 在 X 内的 n 维线性宽度. 若有 X_n^* 使得

$$E'_{X_n^*}(A)=d'_n(A),$$

则称 X_n 为 $d'_n(A)$的极子空间.

极子空间(extremal subspace)　见“线性宽度”.

熵(entropy)　刻画巴拿赫空间中紧集“大小”或“粗细”的不变量之一. 设 X 是巴拿赫空间，$x\in X$，$\|x\|$ 表示 x 的范数，A 是 X 的紧子集，$\varepsilon>0$ 是给定的正数. 如果 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 是 X 的一族子集，每个 U_k 的直径都不超过 2ε，亦即

$$\sup_{x,y\in U_k}\|x-y\|\leqslant 2\varepsilon\ (k=1,2,\cdots,n),$$

而且

$$A\subset\bigcup_{k=1}^n U_k,$$

那么称集族$\{U_k\}_{k=1}^n$是 A 的一个 ε 覆盖. 对于给定的 $\varepsilon>0$，A 的 ε 覆盖$\{U_k\}_{k=1}^n$中集 U_k 的个数 n 是与这个集族的选取有关的. 但 n 的最小值 $N_\varepsilon(A)=\min n$ 却是一个仅与 ε 有关的关于集 A 的不变量. 即当 A 给定后，$N_\varepsilon(A)$是一个仅与 ε 有关的非负整数. 人们称数 $H_\varepsilon(A)=\log N_\varepsilon(A)$为集 A 的熵. 或者区别于概率论中的同名概念，称 $H_\varepsilon(A)$为集 A 的度量熵. 在函数逼近论中，人们关心的乃是当 $\varepsilon\to0$ 时$H_\varepsilon(A)$的渐近性态. 这里之所以不直接考察数 $N_\varepsilon(A)$而考察其对数 $H_\varepsilon(A)$，是因为一般地 $\varepsilon\to0$ 时，$N_\varepsilon(A)$急剧递增，而且往往很大，不便处理.

熵的概念还有另一种提法. 因为上面定义的度量熵 $H_\varepsilon(A)$在 $\varepsilon>0$ 给定时，仅取决于紧集 A 本身(倘若把 A 看做一个度量空间)，而不依赖于包含 A 的大空间 X. 还有一种熵不仅取决于紧集 A，亦与包含着 A 的大空间 X 有关，人们称它为 A 关于 X 的熵. 其定义如下：仍设 X 是巴拿赫空间，A 是 X 的紧子集，$\varepsilon>0$ 是给定的正数，如果 X 中存在有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_p$，使得对于每个点 $x\in A$，都至少有 x_k 使得 $\|x-x_k\|\leqslant\varepsilon$，也即 x 与 x_k 的距离 $\rho(x,x_k)$不超过 ε：$\rho(x,x_k)\leqslant\varepsilon$，则称集$\{x_k\}_{k=1}^p$为 A 的一个 ε 网. 集 A 的 ε 网中点的个数 p 在 $\varepsilon>0$ 给定后，自然与这些点的取法有关. 但是 p 的最小值$P_\varepsilon(A)=\min p$却是集 A 的一个不变量. 它当然与空间 X 有关，称数$H_\varepsilon^X(A)=\log P_\varepsilon(A)$为 A 关于 X 的熵. $H_\varepsilon(A)$与$H_\varepsilon^X(A)$有一个简明的关系：对于每于 $\varepsilon>0$ 及 X 的每个紧子集 A，$H_\varepsilon(A)\leqslant H_\varepsilon^X(A)$.

熵在函数逼近论中的应用研究开始于 20 世纪 50 年代，以后逐渐得到发展.

度量熵(metric entropy)　见“熵”.

ε 覆盖(ε-covering)　见“熵”.

ε 网(ε-net)　见“熵”.

容量(capacity)　刻画巴拿赫空间中紧集的“大小”或“粗细”的一个不变量. 设 X 是巴拿赫空间，A 是 X 的一个紧子集. $\|x\|$ 是 $x\in X$ 的范数，是给定的正数，$y_1,y_2,\cdots,y_m$ 是 A 中的 m 个点，如果它们中每两点之间的距离都超过 ε，也即 $i\neq k$ ($i,k=1,2,\cdots,m$)时$\rho(y_i,y_k)=\|y_i-y_k\|>\varepsilon$，则称点组$\{y_k\}_{k=1}^m$是 ε-分离的. 自然，对给定的 $\varepsilon>0$，ε-分离的点组$\{y_k\}_{k=1}^m$的点的个数与这些点的取法有关. 但其最大值 $M_\varepsilon(A)=\max m$ 却是集 A 的一个不变量，$C_\varepsilon(A)=\log M_\varepsilon(A)$称为 A 的容量. $C_\varepsilon(A)$关于 A 是单调递增的而关于 ε 则是单调递减的. 在函数逼近论中，主要是对一些函数类考虑其容量在 $\varepsilon\to0$ 时的渐近性态及其应用. 它开始于 20 世纪 50 年代.

容量与熵(参见“熵”)之间有如下关系：若 X 是巴拿赫空间，A 是 X 的紧子集，则对 $\varepsilon>0$ 有不等式

$$C_{2\varepsilon}(A)\leqslant H_\varepsilon(A)\leqslant H_\varepsilon^X(A)\leqslant C_\varepsilon(A),$$

其中 $C_\varepsilon(A)$是 A 的容量，$H_\varepsilon(A)$是 A 的熵，$H_\varepsilon^X(A)$是 A 关于 X 的熵.

复变函数逼近论

复变函数逼近论(approximation theory of funtions of complex variable)　复平面集合上某个比较广泛的函数类中的函数被此集合上比较窄的函数类中的函数逼近的理论. 这里比较广泛的函数类是指连续函数类、解析函数类等，比较窄的函数类是指多项式类、有理函数类等. 从 20 世纪的发展情况来看，大致有如下四个方向：

1. 能否被逼近到任意预先给定的程度. 这里“逼近”一词有一致逼近、按区域面积平均逼近、按区域边界平均逼近，以及加权逼近等不同的意义.

2. 定性问题，即一个函数被比较窄的函数类中的一些子类(例如 n 次多项式、n 阶有理函数类等)逼近时，最小偏差函数的存在性、惟一性以及其特征性质等.

3. 定量问题，若最小偏差函数存在，则需讨论所能达到的逼近速度以及由此速度来研究被逼近函数的构造性质.

4. 制定一些算法，以求逐步达到最小偏差函数；此外，还需研究这些算法本身的误差及收敛的速度.

复变函数逼近论既有广泛的实际背景例如数字滤波器的设计、保角映射的近似计算、某些软件的实现等，也有其本身的理论问题. 由于复平面上点集的复杂性，使得复变函数逼近会比实变函数逼近产生更多的难处，但得到的结果也在某种意义下显得更深刻.

龙格定理(Runge's theorem)　关于解析函数能否由有理函数逼近的定理. 如果 K 是复平面上的紧集,而 $f(z)$ 在 K 上解析,那么对于任意正数 ε,存在有理函数 $R(z)$,其极点位于 K 的余集之中,且满足不等式 $|f(z)-R(z)|<\varepsilon\ (z\in K)$.

1885 年,龙格(Runge,C. D. T.)建立了这一定理,它是复变函数逼近论方面最早的一般性定理.

PA 性质(PA property)　区域的一种性质. 设 G 是复平面上的一个区域,如果多项式全体在 $L^2(G)$ 中稠密,则称 G 具有 PA 性质. 目前还没有一个刻画区域具有 PA 性质的很好的几何特征,但以若尔当闭曲线为边界的有界单连通区域必具有 PA 性质.

伯恩斯坦引理(Bernstein's lemma)　关于多项式模的增长的定理. 设 P 是 n 次多项式,C 是某个若尔当区域的边界曲线,若 $z\in C$ 时 $|P(z)|\leqslant 1$,则 $z\in C_R$ 时成立 $|P(z)|\leqslant R^n$,其中 C_R 是 C 的外等势线,$R>1$.

梅尔捷良定理(Mergelyan's theorem)　关于多项式序列一致收敛的定理. 设 K 是复平面上的紧集且 K 的余集是连通集,若 $f(z)$ 在 K 上连续,而在 K 的内点处解析,则对任意正数 ε,存在多项式 $P(z)$,使得 $|f(z)-P(z)|<\varepsilon\ (z\in K)$ 成立. 1951 年,梅尔捷良(Мергелян,С. Н.)建立了这一定理,它是复变函数逼近论方面关于多项式逼近的最一般性的结果之一.

伯格曼核函数(Bergman kernel function)　$L^2(G)$ 中的一个再生核. 设 G 是复平面上的一个区域,$\xi\in G$ 是一个定点,因为对于任何 $f(z)\in L^2(G)$,$f(\xi)$ 是一个有界线性泛函,所以存在惟一确定的 $K(z,\xi)\in L^2(G)$,满足

$$f(\xi)=\iint_G f(z)\,\overline{K(z,\xi)}\,\mathrm{d}\sigma_z. \qquad (1)$$

称(1)中的 $K(z,\xi)$ 是从属于 G 的伯格曼核函数,它与极值问题

$$\inf\left\{\iint_G |f(z)|^2\mathrm{d}\sigma_z \,\middle|\, f(z)\in L^2(G),f(\xi)=1\right\}$$

的解 $f_0(z)$ 有如下关系:

$$f_0(z)=\frac{K(z,\xi)}{K(\xi,\xi)},\ K(z,\xi)=\frac{f_0(z)}{\iint_G |f_0(z)|^2\mathrm{d}\sigma_z}.$$

当 G 是异于全(复)平面 $\mathbf{C}$ 的单连通区域时,它与 G 到单位圆盘的保角变换 $F(z)$ 之间的关系为

$$F'(z)=\sqrt{\frac{\pi}{K(\xi,\xi)}}K(z,\xi).$$

比伯巴赫多项式(Bieberbach polynomials)　一种极值多项式. 设 G 是若尔当区域,$\xi\in G$ 是一个给定的点,所有满足 $P_n(\xi)=0,P'_n(\xi)=1$ 的 n 次多项式中有惟一的多项式使得

$$\iint_G |P'_n(z)|^2\mathrm{d}\sigma_z$$

达到最小,称此多项式为从属于 G 和 ξ 的比伯巴赫多项式.

赛格多项式(Szegö polynomials)　曲线上的正交多项式. 设 C 是可求长的若尔当闭曲线,若 n 次多项式

$$P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

满足 $a_n>0$,且

$$\frac{1}{|C|}\int_C P_n(z)\,\overline{P_m(z)}\,|\mathrm{d}z|=\begin{cases}0 & (n\neq m),\\ 1 & (n=m),\end{cases}$$

则称 $P_n(z)\,(n=0,1,2,\cdots)$ 为从属于 C 的赛格多项式,其中 $|C|$ 表示 C 的长度.

费伯多项式(Faber polynomials)　一种特殊多项式. 设 C 是复平面上的若尔当闭曲线,$w=\Phi(z)$ 是将 C 外部映射到 $\{w\,|\,|w|>1\}$ 且在 ∞ 处规格化的保角映射,那么 $[\Phi(z)]^n$ 在 ∞ 处有洛朗展开式

$$[\Phi(z)]^n=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0+\sum_{k=-\infty}^{-1}a_kz^k,$$

称其中的 n 次多项式

$$F_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

为从属于 C 的费伯多项式. 它的另一定义形式为

$$F_n(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{[\Phi(\xi)]^n}{\xi-z}\mathrm{d}\xi,$$

其中 C_R 为 C 的外等势线,$R>1$,z 位于 C_R 的内部.

费伯展开式(Faber expansion)　一种函数项级数. 设 C 是若尔当区域 G 的边界曲线,$z=\Psi(w)$ 是将 $\{w\,|w|>1\}$ 映射到 C 的外部且在 ∞ 处规格化的保角映射,$f(z)$ 在 G 内解析,在 $\overline{G}$ 上连续,则称

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|w|=1}f[\Psi(w)]w^{-n-1}\mathrm{d}w\ \ (n=0,1,2,\cdots)$$

为 $f(z)$ 的费伯系数,而称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nF_n(z)$ 为 $f(z)$ 的费伯级数,其中 $F_n(z)$ 为 n 次费伯多项式. 而

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nF_n(z)\ \ (z\in D)$$

称为 $f(z)$ 的费伯展开式,其中 D 是 $\overline{G}$ 的子集.

费伯系数(Faber coefficients)　见"费伯展开式".

费伯变换(Faber transform)　亦称费伯算子,一种特殊的线性映射. 设 G 是若尔当区域,其边界曲线 C 是若尔当可求长曲线,$w=\Phi(z)$ 是将 C 的外部区域映射到闭的单位圆盘 $\overline{D}=\{w\,|\,|w|\leqslant 1\}$ 的外部的保角映射,且在 ∞ 处规格化,$z=\Psi(w)$ 是它的逆映射. 设 $A(\overline{D})=\{f(w)\,|\,f(w)$ 在 D 内解析,在 $\overline{D}$ 上连续$\}$,$A(\overline{G})=\{f(z)\,|\,f(z)$ 在 G 内解析,在 $\overline{G}$ 上连续$\}$. 称如下线性映射 $T:A(\overline{D})\to A(\overline{G})$,

$$(Tf)(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f[\Phi(\xi)]}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\ \ (z\in G)$$

为费伯变换(费伯算子),其中 $f(w)\in A(\overline{D})$. 设

$$P_n(w)=\sum_{k=0}^{n}a_kw^k,$$

那么

$$(TP_n)(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kF_k(z),$$

其中 $F_k(z)$是 k 次费伯多项式. 费伯变换是单射. 当 C 是具有有界旋转的曲线时费伯变换(费伯算子)是有界的,并称使得费伯变换(费伯算子)是有界的区域为费伯区域.

费伯算子(Faber operator) 即"费伯变换".

费伯区域(Faber domain) 见"费伯变换".

广义费伯多项式(generalized Faber polynomial) 一种特殊多项式. 设 C 是复平面上的若尔当闭曲线,$w=\Phi(z)$是将 C 的外部映射到$\{w\,|\,|w|>1\}$且在∞处规格化的保角映射,$z=\Psi(w)$为其逆映射. 设函数

$$g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{w^n}\ (c_0\neq 0)$$

是$|w|>1$ 上的解析函数,函数

$$\frac{w\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}g(w)$$

的洛朗展开式为

$$\frac{w\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi_n(z)}{w^n},$$

称其中的 n 次多项式

$$\pi_n(z)=c_0F_n(z)+c_1F_{n-1}(z)+\cdots+c_nF_0(z)$$

为从属于 C 和权函数 $g(w)$的广义费伯多项式,其中的 $F_n(z)$是 n 次费伯多项式. 函数

$$\frac{w\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}g(w)$$

又被称为广义费伯多项式 $\pi_n(z)$的生成函数(或母函数). $\pi_n(z)$的另一定义形式为

$$\pi_n(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{[\Phi(\xi)]^n}{\xi-z}g[\Phi(\xi)]\mathrm{d}\xi,$$

其中 C_R 为 C 的外等势线,$R>1$,z 位于 C_R 的内部.

贾德克核(Dzjadyk kernel) 一种多项式核. 该核是一个卷积核,函数与它的卷积是一个多项式,这种多项式对函数的逼近效果非常好. 它是类似于实逼近中杰克森核通过广义费伯多项式而构造出的一种多项式核,其具体表达式相当复杂.

斯米尔诺夫区域(Smirnov domain) 一种与多项式系完备性相关的区域. 设 G 是有界单连通区域,其边界曲线 C 是若尔当可求长曲线,$z=\Psi(w)$是将$|w|<1$ 映射到 G 且在 $w=0$ 点规格化的保角映射,$w=\varphi(z)$为其逆映射,设 $p>0$,

$$E^p(G)=\left\{f(z)\,|\,f(z)\text{ 在 }G\text{ 内解析},\ \sup_{0<r<1}\int_{C_r}|f(z)|^p|\mathrm{d}z|<+\infty\right\},$$

其中 C_r 是 C 的内等势线. 若 $\psi(w)$满足

$$\ln|\psi'(w)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\psi'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\mathrm{d}\theta,$$

其中 $w=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,$0\leqslant r<1$,则称 G 为斯米尔诺夫区域.

使多项式系在 $E^p(G)$中完备的充分必要条件是,区域 G 为斯米尔诺夫区域. 当 $p=2$ 时,这个定理首先是由斯米尔诺夫(Смирнов, В. И.)证明的,后来克尔德什(Келдыш, М. В.)与拉夫连季耶夫(Лаврентьев, М. А.)把它推广到一般的 $p>0$.

埃尔米特插值公式(Hermite interpolation formula) 区域上解析函数的拉格朗日插值多项式的积分表示式. 设有界单连通区域 G 的边界曲线 C 是若尔当可求长的,$f(z)$在 G 内解析,在 $\overline{G}$ 上连续,$\{z_k\}_{k=0}^{n}\subset G$ 是插值节点,那么在$\{z_k\}_{k=0}^{n}$上插值 $f(z)$的拉格朗日插值多项式

$$L_n(f,z)=\sum_{k=0}^{n}f(z_k)l_k(z),$$

其中

$$l_k(z)=\frac{w_n(z)}{w_n'(z_k)(z-z_k)}\ (k=0,1,\cdots,n),$$

$$w_n(z)=\prod_{k=0}^{n}(z-z_k).$$

$L_n(f,z)$的积分表示式

$$L_n(f,z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{w_n(\xi)-w_n(z)}{\xi-z}\frac{f(\xi)}{w_n(\xi)}\mathrm{d}\xi\ (z\in G)$$

称为 $f(z)$在$\{z_k\}_{k=0}^{n}$上的埃尔米特插值公式. 利用该公式可得到

$$f(z)-L_n(f,z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{w_n(z)}{w_n(\xi)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\ (z\in G).$$

一致分布(uniform distribution) 插值节点的一种性质. 设 K 是复平面上的一个紧子集,其余集是单连通区域. 设

$$z=\Psi(w)=cw+c_0+\frac{c_1}{w}+\cdots\ (c>0)$$

是将$|w|>1$ 映射到 K 的余集中且在∞处规格化的保角映射. 设$\{z_k\}_{k=0}^{n}\subset K$,

$$W_n(z)=\prod_{k=0}^{n}(z-z_k),$$

$$M_n=\max\{|W_n(z)|\,|\,z\in K\},$$

若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{M_n}=C,$$

则称节点阵$\{z_k\}_{k=0}^{n}$在 K 上是一致分布的.

卡尔马-沃尔什定理(Kalmar-Walsh theorem) 关于插值多项式收敛性的定理. 设 K 是复平面上的一个紧子集,其余集是一个单连通区域,$f(z)$是 K 上

的解析函数，$\{z_k\}_{k=0}^n \subset K$，$L_n(f,z)$是在$\{z_k\}_{k=0}^n$上插值$f(z)$的拉格朗日插值多项式. 该定理断言：要使对任何在$K$上解析的函数$f(z)$，极限

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f,z) = f(z)$$

在K上一致成立的充分必要条件是节点阵$\{z_k\}_{k=0}^n$在K上是一致分布的.

过收敛(over convergence) 描述多项式序列收敛性的一种现象. 已知其在一个给定的点集C上收敛得足够快的某些多项式序列，必在一个把C包含在内的点集上收敛，这个现象就称为过收敛.

费耶尔节点(Fejer node) 一种插值节点. 设K是复平面上的紧集，其边界曲线C是若尔当曲线或若尔当弧，$z=\Psi(w)$是将$|w|>1$映射到K的余集且在∞点规格化的保角映射，则称节点

$$z_k = \Psi(e^{2\pi i\frac{k}{n+1}}) \quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

为K上的$n+1$个费耶尔节点. 它在K上是一致分布的.

费克特节点(Fekete node) 一种插值节点. 设K是复平面上具有无穷多个点的紧集，若定义在K上的具有$n+1$个变量的连续函数

$$f(z_0,z_1,\cdots,z_n) = \prod_{j\neq k} |z_j - z_k|$$

必在$\{z_k^{(0)}\}_{k=0}^n \subset K$上取到最大值，则称节点阵$\{z_k^{(0)}\}_{k=0}^n$为$K$上的费克特节点阵. 它在$K$上是一致分布的.

阿尔佩尔条件(Al'per condition) 一种描述区域边界光滑性的条件. 设G是复平面上有界单连通区域，其边界曲线C是闭光滑曲线，$\theta(s)$表示C上的点s(s为C的弧长参数)处切线与正实轴的夹角，$\omega(\theta,t)$为$\theta(s)$的连续模，若$\omega(\theta,t)$满足

$$\int_0^{|C|} \frac{\omega(\theta,t)}{t} |\ln t| \mathrm{d}t < +\infty,$$

则称C满足阿尔佩尔条件，其中$|C|$表示C的弧长. 它由阿尔佩尔(Альпер, С. Я.)给出.

抽 象 逼 近

抽象逼近(abstract approximation) 抽象空间中的逼近论问题. 在泛函分析的框架下，应用巴拿赫空间几何、非线性分析等理论来讨论度量空间中某一子集的元素对某一确定的元素的逼近，称为抽象逼近. 设X是距离空间，其元素(或者称为点)x与y之间的距离记为$\rho(x,y)$. 设G是X的一个子集，称

$$\mathscr{E}_G(x) = \inf_{g\in G} \rho(x,g)$$

为x与G之间的距离，它自然标志着G对x的逼近程度，常称它为G对x的最佳逼近值，又称G为逼近集. 倘若G中有元素g_0使得$\rho(x,g_0)=\mathscr{E}_G(x)$，则称$g_0$为$x$在$G$中的最佳逼近元. 与实变函数逼近论中讨论问题相类似，人们自然需要去估计最佳逼近值$\mathscr{E}_G(x)$. 但通常仅限于对具体的X和G来进行这个工作. 而在一般的距离空间中，人们研究的逼近理论主要还是定性问题. 这就是如下四方面的问题：

1. x在G中的最佳逼近元的存在性问题. 也就是说，记$P_Gx=\{g\,|\,\rho(x,g)=\mathscr{E}_G(x)\}$，即$P_Gx$是$x$在$G$中的最佳逼近元的全体，$P_Gx$是不是空集?

2. x在G中的最佳逼近存在的话，是否惟一? 这就是常说的惟一性问题.

3. 最佳逼近元的特征刻画.

4. 如果将P_G看做X中元素x到X的子集P_Gx的一个映射，那么一个重要的问题是集值映射P_G有些什么性质.

当X中给出一有界子集F时，经常讨论量

$$\mathscr{E}_G(F) = \sup_{x\in F} \mathscr{E}_G(x) = \sup_{x\in F} \inf_{g\in G} \rho(x,g),$$

它是集G对集F逼近状态的特征量，称为集G对集F的最佳逼近值. 倘若X中有一族集$\tau=\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$，每一个$G_\alpha$都可以对集$F$进行逼近，那么要在$\tau$中挑选一个最优的$G_\alpha$，也即要找出$G_{\alpha(F)}$，使得

$$\mathscr{E}_{G_{\alpha(F)}}(F) = \inf_{G_\alpha\in\tau} \mathscr{E}_{G_\alpha}(F).$$

作为逼近集G，有时取作X的线性子空间，这时的逼近称为线性逼近；有时为X的凸集，则称为凸逼近. 例如实变函数逼近中的共单调逼近等都是凸逼近.

在巴拿赫空间中抽象逼近已有较丰富的成果，而对非巴拿赫空间中的研究尚在发展中.

逼近集(approximation set) 见"抽象逼近".

凸逼近(convex approximation) 见"抽象逼近".

太阳集(sun set) 非线性逼近理论中的一个重要概念. 设X为巴拿赫空间，G为X的子集. 如果对于任何$x\in X$，由g_0是x在G中的最佳逼近元可推出对任何$\alpha\geqslant 0$，g_0也是$x_\alpha=g_0+\alpha(x-g_0)$在$G$中的最佳逼元，亦即对$x\in X$，由等式

$$\rho(x,g_0) = \inf_{g\in G} \rho(x,g)$$

成立可推出等式

$$\rho(x_\alpha,g_0) = \inf_{g\in G} \rho(x_\alpha,g)$$

对任何$\alpha\geqslant 0$也成立，则称g_0是G的太阳点. 若G中每个点都是G的太阳点，则称G为太阳集. 太阳集与凸集有如下关系：

1. 凸集必是太阳集.

2. 当X为光滑空间时，若G为X的一个太阳集，而且对任何$x\in X$，x在G中都有最佳逼近元，则G必为凸集. 这里$G\subset X$为凸集的含义是：对于G中任何两点f和g，只要$\theta\in[0,1]$，都有$\theta f+(1-\theta)g$

$\in G$. X 为光滑空间的含义是：X 是赋范线性空间，而且对于 X 中任一范数为 1 的点 x，在 X 上存在惟一的范数为 1 的线性泛函 f 使得 $f(x)=1$.

太阳点(sum point)　见“太阳集”.

切比雪夫集(Chebyshev set)　每一被逼近元素都有惟一的最佳逼近元的逼近集. 设 X 是距离空间，$G\subset X$. 如果每一 $x\in X$ 在 G 中的最佳逼近元都存在而且惟一，亦即对每一 $x\in X$，有且仅有一个 $g_x\in G$，使得

$$\rho(x,g_x)=\inf_{g\in G}\rho(x,g),$$

则称 G 为切比雪夫集，这里 $\rho(x,g)$ 表示 x 与 g 之间的距离. 切比雪夫集与太阳集有如下关系：

1. 巴拿赫空间中有界紧的切比雪夫集是太阳集.

2. 局部一致凸巴拿赫空间中逼近紧切比雪夫集是太阳集. 这里局部一致凸巴拿赫空间 X 是指这样的巴拿赫空间 X：对于 $x\in X$，x 的范数 $\|x\|=1$，以及 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于 $y\in X$，$\|y\|=1$ 且

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|>1-\delta$$

时，有 $\|x-y\|<\varepsilon$. 距离空间 X 中的集 G 是 X 中的逼近紧切比雪夫集的含义是：G 是一个切比雪夫集，而且对于 $x\in X$，若有 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}\subset G$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x,g_n)=\inf_{g\in G}\rho(x,g),$$

则有 $g_0\in G$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(g_n,g_0)=0.$$

桐哈姆(Dunham, C. B.)曾对[0,1]上的连续的实函数空间 $C[0,1]$，定义

$$g_a(t)=\begin{cases}\dfrac{2a}{1+t/a} & (a>0),\\ 0 & (a=0).\end{cases}$$

令 $G=\{g_a|a\geqslant 0\}$，则 G 是 $C[0,1]$ 中的切比雪夫集，而非太阳集. 因此巴拿赫空间中的切比雪夫集未必是太阳集.

几乎切比雪夫集(almost Chebyshev set)　切比雪夫集的一种拓广. 设 G 是距离空间 X 中的闭子集，记 $U_G=\{x|x\in X$ 且在 G 中有惟一的最佳逼近元$\}$. 如果 $X\backslash U_G$ 为第一范畴集，则称 G 为几乎切比雪夫集. 斯捷奇金(Стечкин, С. Б.)曾证明：若 X 为一致凸的巴拿赫空间，则 X 中的闭集是几乎切比雪夫集. 一个赋范线性空间 X，如果对于 $\varepsilon>0$，

$$\inf\{1-\frac{1}{2}\|x+y\|\,|x,y\in X,\|x\|=\|y\|=1,\|x-y\|\geqslant\varepsilon\}>0,$$

则称 X 是一致凸的. 刘(Lau, K. S.)证得：若 X 为局部一致凸且自反的巴拿赫空间，则 X 中的闭集是几乎切比雪夫集. 局部一致凸的含义见“切比雪夫集”.

克利猜测(Klee conjecture)　关于切比雪夫集是凸集的猜测. 设 X 是希尔伯特空间. 1961 年，克利(Klee, V. L.)曾猜测 X 中的切比雪夫集必为凸集. 当 X 的维数有限时，这个猜测是成立的；当 X 是无穷维空间时，约翰逊(Johnson, G. G.)已在一般的内积空间中作出非凸的切比雪夫集. 然而对于希尔伯特空间，这个猜测成立与否，尚属未知.

柯尔莫哥洛夫特征(Kolmogorov character)　最佳逼近元的一种特征刻画. 设 X 是巴拿赫空间. B^* 是定义在 X 上的范数不超过 1 的线性泛函的全体. 记 $\mathrm{ext}\,B^*=\{f|f\in B^*$，若 $f_1,f_2\in B^*$ 及 $\alpha\in(0,1)$ 使得 $f=\alpha f_1+(1-\alpha)f_2$，则 $f_1=f_2=f\}$.

设 $G\subset X$ 是 X 的线性子空间，则用 G 作为逼近集时，关于最佳逼近元有如下的柯尔莫哥洛夫特征刻画：设 $x\in X$，g_0 是 x 在 G 中的最佳逼近元，即

$$\rho(x,g_0)=\inf_{g\in G}\rho(x,g),$$

其充分必要条件是存在 $f\in\mathrm{ext}\,B^*$，使得 $f(x-g_0)=\|x-g_0\|$，且 $\mathrm{Re}\,f(g_0-g)\geqslant 0$ $(g\in G)$. 这里 $\|\cdot\|$ 表示 X 中的范数，$\mathrm{Re}z$ 是数 z 的实部，

$$\rho(x,g)=\|x-g\|.$$

倘若 G 不是 X 的线性子空间，则上述结论未必成立. 白罗索夫斯基(Brosowski, B.)曾证明：对于巴拿赫空间 X 的子集 G，上述柯尔莫哥洛夫特征刻画成立的充分必要条件是 G 为太阳集.

撰　稿　朱来义　苏维宜　周颂平　徐士英　谢庭藩
审　阅　陈文忠　徐利治　谢庭藩

调　和　分　析

调和分析(harmonic analysis)　亦称傅里叶分析.原先是研究函数及其傅里叶级数(或变换)的一门学科,它与许多学科互相渗透而发展起来.现代调和分析内容相当丰富,它与偏微分方程论、复变函数论、概率论、代数及拓扑等许多数学分支都有密切联系.它也是工程技术、经典物理及量子力学等学科中的重要工具.

经典调和分析,通常也叫傅里叶分析,其主要内容是傅里叶级数和傅里叶积分的理论与应用.函数的三角傅里叶级数展开是将复杂的函数分解为正弦与余弦函数的叠加,调和分析一词即由此而来.单变元调和分析的理论经过一百多年的发展已经日臻完善,人们已逐渐转到对多变元以及群上的调和分析理论的研究.

把函数关于一个非三角的正交函数系展开的理论和方法称为非三角傅里叶分析.例如沃尔什分析(参见《函数逼近论》).这方面的研究同三角傅里叶分析平行,不仅有重要的理论意义,也有重要的实用价值.

在经典调和分析理论的建立和发展的基础上,具有代数、拓扑结构的抽象集合上,根据经典调和分析的思想方法,也建立了相应的调和分析理论,形成一个重要的分支,称为抽象调和分析.例如典型群、李群、阿贝尔群上的调和分析以及局部域上的调和分析等.

由于偏微分方程、非线性分析等其他领域发展的需要,现代调和分析用它独特的观点和方法对函数进行了分类处理,导致各种函数空间的专门理论,如哈代空间、索伯列夫和别索夫空间的理论等.其次,由于与傅里叶展开有关算子的理论和应用的进一步发展,导致各种算子的理论.特别是建立了李特尔伍德-佩利理论和考尔德伦-赞格蒙算子理论.古典一元的李特尔伍德-佩利理论是从1930年至1939年期间由李特尔伍德(Littlewood,J. E.)、佩利(Paley,R. E. A. C.)、赞格蒙(Zygmund,A.)及马钦凯维奇(Marcinkiewicz,J.)等人完成的.多元的李特尔伍德-佩利理论则是于1958年由施坦(Stein,E. M.)建立的.还有奇异积分算子理论.考尔德伦(Calderón,A.-P.)和赞格蒙于1952年为研究常系数偏微分方程引进了卷积型的奇异积分算子,亦称第一代奇异积分算子.他们又在1956年为研究变系数偏微分方程而引进了带可变核的奇异积分算子,亦称第二代奇异积分算子.1978年,科伊夫曼(Coifman,R. R.)和梅耶(Meyer,R.)提出了非卷积型的奇异积分算子,亦称第三代奇异积分算子.到此,实质上已经建立了整个考尔德伦-赞格蒙算子理论的基本框架.应当指出,李特尔伍德-佩利理论和考尔德伦-赞格蒙算子理论不仅在现代调和分析的研究中有着基本的重要性,而且它们也是建立"小波分析"(新兴学科)的理论基础.

傅里叶分析(Fourier analysis)　即调和分析.因傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)开创了将函数用三角级数展开的方法而有此名.有时特指有关傅里叶级数和傅里叶积分的理论与应用.

经典调和分析(classical harmonic analysis)　见"调和分析".

非三角傅里叶分析(nontrigonometric Fourier analysis)　函数关于非三角的正交函数系展开的理论,包括:正交函数系和正交多项式的一般理论,函数关于特殊正交函数系的傅里叶级数展开,一般的正交函数级数的理论等,例如关于沃尔什函数系展开,关于勒让德多项式系的展开等.

一元傅里叶分析

傅里叶级数(Fourier series)　一类特殊的三角级数.设 f 是在 $T^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid -\pi\leqslant x_j<\pi, j=1,2,\cdots,n\}$ 上勒贝格可积,对每个变元都以 2π 为周期的实值函数(函数取实值的限制不是本质的).定义

$$c_m=c_m(f)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\cdot x}\mathrm{d}x$$

为 f 的傅里叶系数,这里 $m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ 是 n 元整点,其全体记为 $\mathbf{Z}^n$,$m\cdot x=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n$.三角级数

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}^n}c_m(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot x}\qquad (*)$$

称为 f 的傅里叶级数,用 $\sigma(f)$ 表示.当 $n\geqslant 2$ 时,常称 $\sigma(f)$ 为多重傅里叶级数.在单变元的情形($n=1$),常把 $\sigma(f)$ 写成下述实形式

$$\sigma(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\ \cos kt\mathrm{d}t\ \ (k=0,1,2,\cdots),$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\ \sin kt\mathrm{d}t\ \ (k=1,2,\cdots),$$

a_k 和 b_k 分别称为 f 的余弦和正弦傅里叶系数.

重排函数(rearrangement function)　与可测函数等分布的单调函数. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 对 $\alpha>0$,称 $\lambda_f(\alpha)=m(\{x\in\mathbb{R}^n \mid |f(x)|>\alpha\})$ 为 f 的分布函数. 对 $t>0$,称 $f^*(t)=\inf\{\alpha \mid \lambda_f(\alpha)\leqslant t\}$ 为 f 的重排函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是非增的右连续函数,且与 $f(x)$ 具有相同的分布函数.

洛伦兹空间(Lorentz spaces)　L^p 空间的一种推广. 洛伦兹空间 $L(p,q)$ $(1\leqslant p<+\infty,\ 1\leqslant q<+\infty)$ 定义为

$$L^{p,q}=\{f\text{ 可测} \mid \|f\|_{p,q}<+\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{p,q}=\left(\frac{q}{p}\int_0^{+\infty}[t^{1/p}f^*(t)]^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q},$$

f^* 为 f 的重排(参见"重排函数"),当 $q=+\infty$ 时,洛伦兹空间定义为 $L^{p,\infty}=\{f\text{ 可测} \mid \|f\|_{p,+\infty}<+\infty\}$,其中

$$\|f\|_{p,+\infty}=\sup_{t>0}t^{1/p}f^*(t)\quad(1\leqslant p\leqslant+\infty).$$

洛伦兹空间 $L^{p,q}$ 同 L^p 的关系是 $L^{p,p}=L^p$,以及

$$L^{p,q}\supset L^p\quad(q>p).$$

洛伦兹空间在调和分析中的重要作用在于:首先,在某种意义下,它是勒贝格空间 L^p 的有效的替代空间. 某些算子,如哈代-李特尔伍德极大算子,不是 L^1 到 L^1 有界的,但却是 L^1 到 $L^{1,\infty}$ 有界的. $L^{1,\infty}$(也称弱 L^1 空间)便是一类洛伦兹空间. 其次,它也是 L^p 空间的一种插值空间. 例如,如果线性算子 T 是 $L^p\to L^q$ 有界,且是 L^1 到 $L^{1,\infty}$ 有界,那么 T 也是 L^r 到 $L^{s,t}$ 有界的,其中

$$\frac{1}{r}=\theta+\frac{1-\theta}{p},$$
$$\frac{1}{s}=\theta+\frac{1-\theta}{q}\quad(0<\theta<1),$$
$$\frac{1}{t}=\frac{1-\theta}{q},$$

这里 $L^{s,t}$ 便是洛伦兹空间. 最后,借助于洛伦兹空间还可导出一类弱哈代空间,而这类空间在研究算子的尖锐性问题中有重要作用.

卷积(convolution)　分析数学的一种重要运算. 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$,称

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

为 f 与 g 的卷积,记为 $f*g$. 可证 $f*g\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 若 $f,g\in L^1(T^n)$,则称

$$\int_{T^n}f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

为 f 与 g 的卷积,也记为 $f*g$. 易证 $f*g\in L^1(T^n)$. 卷积与傅里叶级数(积分)有密切关系,两个函数的卷积的傅里叶系数(变换)等于各自傅里叶系数(变换)的乘积.

恒等逼近(approximations of the identity)　逼近于恒等算子的一类带伸缩参数的卷积算子序列. 设 $K\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $K_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}K(x/\varepsilon)$,及 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leqslant p<+\infty)$,所谓恒等逼近问题就是寻找核 K 所满足的条件,致使在此条件下,成立 $K_\varepsilon*f\to f$,当 $\varepsilon\to0+$,其中收敛是按 L^p 范数或几乎处处,或其他确定意义下的. 如果恒等逼近问题的结论成立,则 K 称为恒等逼近核.

傅里叶系数(Fourier coefficient)　见"傅里叶级数".

余弦傅里叶系数(cosine Fourier coefficient)　见"傅里叶级数".

正弦傅里叶系数(sine Fourier coefficient)　见"傅里叶级数".

狄利克雷核(Dirichlet kernel)　一类由三角函数表示的积分核. 三角多项式

$$D_k(x)=\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{k}\cos jx=\frac{\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

称为狄利克雷核. 多变元的情形有类似的定义. 为简明起见,本条及以下各条若不特别说明,均只对单变元情形进行叙述. 把 f 的傅里叶级数的前 $n+1$ 项的和记为 $S_n(f,x)$,称为 $\sigma(f)$ 的第 n 部分和,简称 f 的傅里叶部分和. 容易算出

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_n(t)\mathrm{d}t.$$

于是,f 能否展成傅里叶级数,就归结为 $S_n(f,x)$ 当 $n\to\infty$ 时的收敛性问题.

傅里叶部分和(Fourier partial sum)　见"狄利克雷核".

勒贝格常数(Lebesgue constant)　狄利克雷核绝对值的积分平均. 积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x-t)|\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\mathrm{d}t$$
$$(n=0,1,2,\cdots)$$

与变量 x 无关,称为三角函数系的第 n 个勒贝格常数,记为 L_n,可算出

$$L_n=\frac{4}{\pi^2}\log(n+1)+o(1).$$

勒贝格常数在研究函数的傅里叶部分和收敛问题及其逼近度中起着重要作用.

局部化原理(localized principle)　傅里叶部分和收敛的一个特征. 可积函数 f 的傅里叶部分和 $S_n(f,x)$ 在一点 x 处的收敛性态只依赖于 f 在该点附近的性状,这一原理称为黎曼局部化原理. 确切地说,若可积函数 f 在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $(\delta>0$ 可任意小$)$ 上恒为零,则

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f,x_0) = 0 = f(x_0).$$

值得注意的是,对于多变元函数的傅里叶级数,局部化的问题是相当复杂的.

共轭级数(conjugate series) 一类三角级数.设一元函数 $f(\theta)$ 的傅里叶级数的泊松平均 $P_r(f,\theta)$ 是解析函数

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \mathrm{i}b_n)z^n$$
$$(z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leqslant r < 1)$$

的实部.把 $F(z)$ 的虚部记为 $Q_r(f,\theta)$:

$$Q_r(f,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}(-b_n\cos n\theta + a_n\sin n\theta)r^n$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)\frac{r\sin t}{1 - 2r\cos t + r^2}\mathrm{d}t,$$

那么 $Q_r(f,\theta)$ 与 $P_r(f,\theta)$ 作为 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=x+\mathrm{i}y(x,y\in\mathrm{R})$ 的实、虚部的二元函数是彼此共轭的调和函数(在 $x^2+y^2<1$ 的区域内).相应于这个事实,称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n\cos n\theta + a_n\sin n\theta)$$

为 $\sigma(f)$(参见"傅里叶级数")的共轭级数,亦称 f 的共轭级数,记为 $\bar{\sigma}(f)$.一般地,$\bar{\sigma}(f)$ 不必是某个可积函数的傅里叶级数.

共轭函数(conjugate function) 一类由主值积分定义的函数.周期为 2π 的可积函数 f 的共轭函数定义为

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|t|<\pi}\frac{f(x-t)}{2\tan\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,$$

式中右端的主值积分是几乎处处收敛的.在一定意义下,可积函数 f 的共轭级数收敛于它的共轭函数,特别用"共轭级数"中的符号,有

$$\lim_{r\to 1-} F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \lim_{r\to 1-}\{P_r(f,\theta) + \mathrm{i}Q_r(f,\theta)\}$$
$$= f(\theta) + \mathrm{i}\tilde{f}(\theta)$$

对几乎一切 θ 成立,且极限方式"$r\to 1-$"可以加强到如下的"非切向"极限:

设 $z_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$,说 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0<r<1)$ 非切向趋向于 z_0,意指 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$,这里对任意 $C>0$,$z\in\{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mid|\theta-\theta_0|<C(1-r)\}$,即 z 在任意一个以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 为顶点的角形区域内趋向于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$.说 A 是 $u(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的非切向极限,意指当 z 非切向趋向于 z_0 时,$u(z)$ 的极限为 A.

多元函数的共轭函数概念,可类比于一元加以推广,也可从奇异积分的观点,以不同的方式引入.

卢津猜测(Luzin conjecture) 一元傅里叶分析中的一个重要猜测.俄国著名数学家卢津(Лузин, H. H.)于 1915 年提出一个猜测:$L^2(T)$ 中函数的傅里叶级数都是几乎处处收敛的.

在卢津猜测提出了 50 年后,卡尔松(Carleson, L.)于 1966 年发表了对卢津猜测的正面解答.他的结果是:

1. 若对于某个 $\delta>0$,$f\cdot(\log^+|f|)^{1+\delta}\in L$,则对几乎每个 x,$S_n(f,x)=o(\log\log n)$.

2. 若对某个 $p>1$,$f\in L^p$,则对于几乎每个 x,
$$S_n(f,x)=o(\log\log n).$$

3. 若 $f\in L^2$,则对几乎每个 x,
$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x) = f(x).$$

卡尔松的结果彻底解决了卢津猜测.接着亨特(Hunt, R. A.)将上述结果 3 的 $f\in L^2$ 推进为 $f\in L^p$ $(1<p<+\infty)$,这个结果一般称为卡尔松-亨特定理.

这个成就在傅里叶级数理论的发展史上具有里程碑的意义.至此,一元傅里叶级数的理论可以说已基本上完善了.

卡尔松-亨特定理(Carleson-Hunt theorem) 见"卢津猜测".

正交函数系(orthogonal function system) 相互正交的平方可积函数列.设 $\{\Phi_n|n=0,1,2,\cdots\}$ 是 $L^2(a,b)$ 中的非零函数系,当 $m\neq n$ 时,若

$$(\Phi_m,\Phi_n) = \int_a^b\Phi_m\Phi_n\mathrm{d}x = 0, \tag{1}$$

则称 $\{\Phi_n\}$ 是 (a,b) 上的一个正交函数系,简称正交系.

一般地,设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为测度空间,$\{\Phi_n|n=0,1,2,\cdots\}$ 是 $L^2(X,\mathscr{A},\mu)$ 中的非零函数系,若当 $m\neq n$ 时,

$$\int_X\Phi_m\Phi_n\mathrm{d}\mu = 0, \tag{2}$$

则称 $\{\Phi_n\}$ 是 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 上的一个正交系.

正交系(orthogonal system) 正交函数系的简称.

规范正交系(orthonormal system) 亦称就范正交系或标准正交系,一种特殊的正交函数系.设 $\{\Phi_n|n=0,1,2,\cdots\}$ 是 $L^2(X,\mathscr{A},\mu)$ 中的一个正交系,若

$$\int_X|\Phi_n|^2\mathrm{d}\mu = 1,$$

则称 $\{\Phi_n\}$ 是 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 上的一个规范正交系.

就范正交系(normal orthogonal system) 即"规范正交系".

完备系(complete system) 具有某种完备性质的函数系.设 $\{\Phi_n|n=0,1,2,\cdots\}$ 是 $L^2(a,b)$(一般地 $L^2(X,\mathscr{A},\mu)$)中的任意非零函数系.若 $f\in L^2(a,b)$,且由

$$\int_a^b f\Phi_n\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

推出 $f=0$,即 $L^2(a,b)$ 中不存在非零函数与每个 Φ_n

正交，则称$\{\Phi_n\}$是$L^2(a,b)$中的完备系(一般地，称$\{\Phi_n\}$为$L^2(X,\mathscr{A},\mu)$中的完备系). 若$\{\Phi_n\}$是正交系，则帕塞瓦尔等式对于它成立的充分必要条件为它是完备系. T^n上的三角函数系$\{e^{im\cdot x}|m\in\mathbf{Z}^n\}$关于$T^n$的规范化勒贝格测度$dx/(2\pi)^n$是一个规范正交系，它又是一个完备系.

帕塞瓦尔等式(Parseval equality) 亦称帕塞瓦尔公式或帕塞瓦尔定理，关于平方可积函数傅里叶系数平方之和的一个等式. 设$f\in L^2(T^1)$，$T^1=[-\pi,\pi)$，则其傅里叶系数

$$c_n=c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$$

适合

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2. \tag{1}$$

公式(1)称为帕塞瓦尔等式. 当f是实函数时，常用a_n，b_n表示f的傅里叶系数(参见“傅里叶级数”)，这里

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx,$$

这时称等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \tag{2}$$

为帕塞瓦尔等式. 对于一般的完备正交系也可类似地建立帕塞瓦尔等式.

帕塞瓦尔定理(Parseval theorem) 即“帕塞瓦尔等式”.

乘子(multiplier) 一种由特殊数列决定的算子. 设P，Q分别为任意两个周期为2π的函数类. $\{\lambda_k|k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是一个数列. 如对于$P$中任一函数$f$的傅里叶系数$\{c_k|k=0,\pm1,\pm2\cdots\}$:

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx,$$

数列$\{c_k\lambda_k|k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$总是$Q$中某个函数$g$的傅里叶系数，即

$$c_k\lambda_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-ikx}dx,$$

这样，数列$\{\lambda_k\}$确定了一个将$f\in P$映到$g\in Q$的算子T，使得$Tf=g$. 此时称T为(P,Q)乘子，也称$\{\lambda_k\}$为(P,Q)乘子. 如$P=L^p(T^1)$，$Q=L^q(T^1)$，则简称T为(L^p,L^q)乘子，而$p=q$时简称L^p乘子. 如果存在一个可积函数h，使得

$$\lambda_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)e^{-ikx}dx,$$

那么由傅里叶系数的性质可知Tf恰好为f和h的卷积.

马钦凯维奇乘子定理(Marcinkiewicz multiplier theorem) 给出数列为$L^p(p>1)$乘子的定理. 它断言，若数列$\{\lambda_k\}$满足条件

$$|\lambda_k|\leqslant M,\quad \sum_{j=\pm2^l}^{\pm2^{l+1}}|\lambda_j-\lambda_{j+1}|\leqslant M$$
$$(l=0,1,2,\cdots),$$

则对一切$p>1$，$\{\lambda_k\}$是L^p乘子.

豪斯多夫-杨定理(Hausdorff-Young theorem) 关于$f\in L^p[-\pi,\pi)$的傅里叶系数的定理. 设$1<p\leqslant2$，$q=p/(p-1)$.

1. 若$f\in L^p(-\pi,\pi)$，c_n是f的傅里叶系数

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx, \tag{1}$$

则不等式

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^q\right)^{1/q}\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^pdx\right)^{1/p}$$

成立.

2. 若复数列$\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$满足条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^p<+\infty,$$

则存在$f\in L^q(-\pi,\pi)$使(1)成立，且有

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^qdx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

上述结论1与2合称为豪斯多夫-杨定理.

多重傅里叶级数(multiple Fourier series) 见“傅里叶级数”.

傅里叶级数的线性求和(linear summation of Fourier series) 用线性算子对傅里叶级数的求和法. 从已给的傅里叶级数出发，构造新的三角级数或三角多项式，使之与所给的函数之间保持着线性的对应关系，这种构造新三角级数或三角多项式的方法称为傅里叶级数的线性求和法. 例如，给定实数阵$\Lambda=\{\lambda_{n,k}|n,k=0,1,2,\cdots,\lambda_{n,0}=1$；当$k>n$时，$\lambda_{n,k}=0\}$，从傅里叶级数(*)出发可构造三角多项式

$$T_n(f)(x)$$
$$=\lambda_{0,0}\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_{n,k}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

只要数阵Λ选得合适，$T_n(f)$可以比$S_n(f)$有较好的收敛性. 于是Λ确定了一个求和法，它是线性的，因为对任意α，β及可积且周期为2π的函数f，g，都有

$$T_n(\alpha f+\beta g)=\alpha T_n(f)+\beta T_n(g),$$

称$T_n(f)$为$\sigma(f)$的相应于求和法(相应于数阵)Λ的线性平均. 用f的傅里叶级数的线性平均$T_n(f)$来近似f，就称为f的傅里叶级数的线性求和. 如果当$n\to\infty$时在点x处$T_n(f)(x)$收敛到S，则称$\sigma(f)$在点x处用Λ方法可求和于S(参见《数学辞海》第一卷《数学分析》相应条目).

傅里叶级数的线性求和法(linear summation

method of Fourier series) 见"傅里叶级数的线性求和".

切萨罗求和(Cesàro summation) 傅里叶级数的一种线性求和法. 设 $\alpha>-1$,

$$A_n^\alpha=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!},$$

则称 A_n^α 为 α 阶切萨罗数. 傅里叶级数(*)的如下线性平均

$$\sigma_n^\alpha(f)(x)=\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}S_k(f,x)$$

称为 α 阶切萨罗平均. 相应的级数求和方法称为切萨罗求和, 简记为 (C,α) 求和. 当 $\alpha>0$ 时, 对于连续函数 f, $\sigma_n^\alpha(f)(x)$ 必一致收敛于 f, 由此可见切萨罗求和的好处.

切萨罗数(Cesàro number) 见"切萨罗求和".

切萨罗平均(Cesàro mean) 见"切萨罗求和".

费耶尔求和(Fejer summation) 一种切萨罗求和. 一阶切萨罗求和(即 $(C,1)$ 求和)即为费耶尔求和. 设 $f\in L(-\pi,\pi)$, 其费耶尔平均是

$$\sigma_n^1(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f,x),$$

其中 $S_k(f,x)$ 是 f 的 k 阶傅里叶级数的部分和. 因此, 费耶尔平均恰是前 $n+1$ 个傅里叶部分和的算术平均, 它的卷积形式是

$$\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)F_n(t)\mathrm{d}t,$$

其中

$$F_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(t)=\frac{1}{2(n+1)}\left(\sin\frac{n+1}{2}t\Big/\sin\frac{t}{2}\right)^2$$

称为费耶尔核. 当 f 满足一定条件时, $\sigma_n(f)(x)\to f(x)$, 则称 f 在点 x 为费耶尔可和. 由于费耶尔核是非负函数, 这就使费耶尔求和具有很多好的性质. 可积函数几乎处处可费耶尔求和, 连续函数可一致地费耶尔求和.

费耶尔平均(Fejer mean) 见"费耶尔求和".

费耶尔核(Fejer kernel) 见"费耶尔求和".

瓦莱·普桑平均(Vallée-Poussin mean) 傅里叶级数的一种线性求和法. 三角多项式

$$V_n^{n+p}(f)(x)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=n}^{n+p}S_k(f,x)$$

称为 $\sigma(f)$ 的瓦莱·普桑平均. 它依赖于两个号码: n 和 p. 当 n 取零值时, 它就是费耶尔平均; 当 $p=0$ 时, 它就是傅里叶和; 当 $p=n$ 时的情形值得特别注意.

强求和(strong summation) 亦称哈代求和, 傅里叶级数的一种非线性求和法. 如果在某点 x 处, 对于常数 q, $\sigma(f)$ 的部分和 $S_k(f,x)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|S_k(f,x)-S|^q=0,$$

其中 S 是实数, 那么就称 $\sigma(f)$ 在点 x 关于指数 q 可强求和于 S. 由于这一概念早期是由哈代(Hardy, G. H.)引入的, 所以这种求和也称为 (H,q) 求和. 实际上 $\sigma(f)$ 是对一切正整数 q 都几乎处处 (H,q) 可和的. 对于多元函数, (H,q) 求和的概念有相同的提法.

哈代求和(Hardy summation) 即"强求和".

泊松平均(Poisson mean) 傅里叶级数的一种平均. 傅里叶级数 $\sigma(f)$ 的泊松平均是依赖于参数 $r\in[0,1)$ 的函数

$$P_r(f,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n\quad(\theta\in[-\pi,\pi)),$$

它可写成卷积形式

$$P_r(f,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-t)P_r(t)\mathrm{d}t,$$

称 $P_r(f,\theta)$ 为函数 f 的泊松积分, 其中函数

$$P_r(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nt=\frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t+r^2)}\quad(0\leqslant r<1,t\in[-\pi,\pi))$$

称为泊松核. 考虑定义在单位圆盘 $\{z=re^{i\theta}\mid 0\leqslant r<1\}$ 上的解析函数

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\mathrm{i}b_n)z^n,$$

并假定 f 是实值函数(从而它的傅里叶系数 a_n,b_n 都是实数), 那么易见 $P_r(f,\theta)$ 恰是 $F(z)$ $(z=re^{i\theta})$ 的实部.

泊松核(Poisson kernel) 见"泊松平均".

吉布斯现象(Gibbs's phenomenon) 函数列收敛过程中的一种性质. 设 $x\in(x_0,x_0+h]$, 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 x 点收敛于 $f(x)$, 又 $f(x_0+0)$ 存在. 如果当 $n\to\infty$ 及 $x\to x_0+0$ 相互独立时, 均有

$$\limsup_{n\to\infty}f_n(x)>f(x_0+0),$$

或

$$\liminf_{n\to\infty}f_n(x)<f(x_0+0),$$

那么称 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 点的右邻域出现吉布斯现象. 类似地可以定义 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 点的左邻域出现吉布斯现象.

吉布斯现象与函数列的一致收敛的关系是: 若

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

且 $f(x)$ 在 x_0 连续, 那么 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 点不出现吉布斯现象等价于 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 点的某个邻域内一致收敛.

关于函数的傅里叶级数的一个结论是: 如果 f

是有界变差函数，且没有可去间断点，那么 f 的傅里叶级数 $\sigma(f)$（参见“傅里叶级数”）的部分和序列在 f 的每一个间断点，也仅在这些间断点出现吉布斯现象.

多元傅里叶分析

傅里叶变换(Fourier transform)　一种积分变换. 通常分以下四种情形定义：

1. 设 $f\in L(\mathrm{R}^n)$，f 的傅里叶变换定义为函数

$$\hat{f}(x)=\int_{\mathrm{R}^n}f(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot y}\mathrm{d}y, \qquad (1)$$

这里 $x\cdot y$ 表示 R^n 中的内积. 从 f 到 $\hat{f}$ 的映射记为 $\mathscr{F}$，即 $\hat{f}=\mathscr{F}(f)$.

2. 作为 $L^2(\mathrm{R}^n)\cap L(\mathrm{R}^n)$ 上的线性算子，$\mathscr{F}:f\to\hat{f}$ 是依 $L^2(\mathrm{R}^n)$ 范数有界的，即

$$\|\mathscr{F}(f)\|_2\leqslant\|\mathscr{F}\|\ \|f\|_2.$$

所以 $\mathscr{F}$ 可保范延拓至 $L^2(\mathrm{R}^n)$. 在 $L^2(\mathrm{R}^n)$ 上，

$$\|\mathscr{F}(f)\|_2=\|f\|_2.$$

这一等式称为普朗歇尔定理. 于是，傅里叶变换 $\mathscr{F}$ 是 $L^2(\mathrm{R}^n)$ 到自身的等距同构. $\mathscr{F}$ 的逆算子记为 $\mathscr{F}^{-1}$，实际上，$\mathscr{F}^{-1}(\hat{f})=f$，$\mathscr{F}^{-1}(f)(x)=\hat{f}(-x)$ $(\forall f\in L^2(\mathrm{R}^n))$.

3. 设 $1<p<2$，对于每个 $f\in L^p(\mathrm{R}^n)$，令

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x) & (|f(x)>1),\\ 0 & (|f(x)|\leqslant 1),\end{cases}$$

$f_2=f-f_1$，那么 $f_1\in L^1(\mathrm{R}^n)$，$f_2\in L^2(\mathrm{R}^n)$. 定义 f 的傅里叶变换为 $\hat{f}=\hat{f}_1+\hat{f}_2$，其中 $\hat{f}_1$ 依定义 1，$\hat{f}_2$ 依定义 2. 当 $p>2$ 时，因为此时 $f\in L^p(\mathrm{R}^n)$ 蕴涵 f 为缓增广义函数，其傅里叶变换可按定义 4. 一般地，此时 $\hat{f}$ 不再是函数.

4. 当 f 为缓增广义函数时，其傅里叶变换 $\mathscr{F}(f)$ 被定义成这样一个缓增广义函数 $\hat{f}$，它使得对一切 $g\in\mathscr{S}$，有

$$\int_{\mathrm{R}^n}\hat{f}(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{R}^n}f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x,$$

这里 $\mathscr{S}$ 为 R^n 上的施瓦兹空间，上式右端的积分理解成缓增广义函数 f（$\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函）对 $\mathscr{S}$ 类函数 $\hat{g}$（由于 $\mathscr{S}$ 类函数对傅里叶变换封闭）的作用. 类似理解左端积分.

普朗歇尔定理(Plancherel theorem)　见“傅里叶变换”.

阿贝尔-泊松平均(Abel-Poisson mean)　多重傅里叶级数的一种重要的线性求和. 设 $f\in L(T^n)$，f 的傅里叶级数

$$\sigma(f)=\sum_{m\in Z^n}c_m(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot x}$$

的阿贝尔-泊松平均是

$$A_\varepsilon(f,x)=\sum_{m\in Z^n}\mathrm{e}^{-\varepsilon|m|}c_m(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot x},$$

其中 Z^n 表示 R^n 中具有整数坐标的点的全体. $|m|=(m_1^2+m_2^2+\cdots+m_n^2)^{1/2}$，$m\cdot x$ 表示 R^n 中的内积. 当 $\varepsilon\to0$ 时，它既按 L^p 范数收敛于 $f\in L^p(T^n)$，也在 f 的每个勒贝格点 x 处收敛于 $f(x)$. 当 $n=1$ 时，令 $r=\mathrm{e}^{-\varepsilon}$，则阿贝尔-泊松平均就是前面的泊松平均.

高斯-外尔斯特拉斯平均(Gauss-Weierstrass mean)　多重傅里叶级数的一种重要的线性求和. 设 $f\in L(T^n)$，f 的傅里叶级数

$$\sigma(f)=\sum_{m\in Z^n}c_m(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot x}$$

的高斯-外尔斯特拉斯平均是

$$W_\varepsilon(f,x)=\sum_{m\in Z^n}\mathrm{e}^{-\varepsilon|m|^2}c_m(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot x}\quad(\varepsilon>0).$$

当 $\varepsilon\to0$ 时，它既按 L^p 范数收敛于 $f\in L^p(T^n)$，也在 f 的每个勒贝格点 x 处收敛于 $f(x)$.

博赫纳-里斯平均(Bochner-Riesz mean)　多重傅里叶级数一种重要的线性求和. 设 $f\in L(T^n)$，f 的傅里叶级数

$$\sigma(f)=\sum_{m\in Z^n}c_m(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot x}$$

的 α 阶博赫纳-里斯平均是三角多项式

$$S_R^\alpha(f)(x)=\sum_{|m|<R}\left(1-\frac{|m|^2}{R^2}\right)^\alpha c_m(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot x}\quad(R>0).$$

阶数 α 可以是任意复数，它的临界阶是

$$\alpha_0=\frac{n-1}{2}.$$

临界阶的意义在于：当 $\alpha=\alpha_0$ 时，$S_R^\alpha(f)$ 可类比于一元的傅里叶和.

博赫纳-里斯平均在多重傅里叶级数理论中是研究得较多的一种“球形”方式的线性平均. 这里和式的格子点 m 是在球内 $\{m\,|\,|m|<R\}$ 取的.

调和函数(harmonic function)　在区域上满足拉普拉斯方程的多元函数. 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是定义在区域 $D\subset\mathrm{R}^n$ 上的具有二阶连续偏导数的函数，且 F 在区域 D 上满足下述的拉普拉斯方程

$$\Delta F=\frac{\partial^2F}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2F}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2F}{\partial x_n^2}\equiv0,$$

则称 F 是区域 D 上的调和函数，或者说 F 在区域 D 上是调和的. 称

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

为拉普拉斯算子. 一个复值函数的实部与虚部都是在区域 D 上调和的，有时也称它是区域 D 上的（复值）调和函数. 如果 $F(z)=F(x+\mathrm{i}y)$ 是复变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数（在复平面的某个开集内），那么 F 的实部 u 和虚部 v 作为 (x,y) 的二元实函数都是调和函数，它们满足所谓的柯西-黎曼方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这样的一对调和函数称为是彼此共轭的. 当 $n\geqslant 2$ 时,若 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 都是区域 $D\subset \mathrm{R}^n$ 上的调和函数,且满足下述偏微分方程组

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial u_n}{\partial x_n}=0,$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\ (i,j=1,2,\cdots,n),$$

则称 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 是区域 D 上的一个共轭调和函数系. 调和函数与傅里叶级数的关系密切.

复值调和函数(complex-valued harmonic function) 见"调和函数".

共轭调和函数(conjugate harmonic function) 见"调和函数".

共轭调和函数系(system of conjugate harmonic functions) 见"调和函数".

次调和函数(subharmonic function) 调和函数的一种推广. 定义于区域 $D\subset \mathrm{R}^n$ 上的连续函数 $F(x)$ 称为是次调和的,是指当

$$\{x\in \mathrm{R}^n \mid |x-x_0|\leqslant r\}\subset D$$

时,不等式

$$F(x_0)\leqslant \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\Sigma_{n-1}} F(x_0+rt')\mathrm{d}t'$$

成立. 这里 Σ_{n-1} 表示 R^n 中的单位球面, ω_{n-1} 记 Σ_{n-1} 的面积, $\mathrm{d}t'$ 是 Σ_{n-1} 上的面积元. 由调和函数的平均值性质可知:调和函数必是次调和的. 次调和函数的性质在哈代空间理论中起到关键作用.

球调和函数(spherical harmonics function) 球体调和函数与球面调和函数的总称. R^n 上的 k 次齐次调和多项式称为 k 次球体调和函数,它在单位球面上的限制称为 k 次球面调和函数. 所谓调和多项式指的是满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 P}{\partial x_n^2}=0$$

的多项式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

球体调和函数(spheroidal harmonic function) 见"球调和函数".

球面调和函数(spherical harmonic function) 见"球调和函数".

调和多项式(harmonic polynomial) 见"球调和函数".

带调和函数(zonal harmonic function) 一类具有特殊性质的球面调和函数. 由等式

$$Y(x')=\int_{\Sigma_{n-1}} Y(t')Z_{x'}^{(k)}(t')\mathrm{d}t'\quad(\forall Y\in \mathscr{H}_k)$$

确定的 k 次球面调和函数 $Z_{x'}^{(k)}(t')$ 称为以 x' 为极点的 k 次带调和函数,其中 $\mathscr{H}_k$ 为 k 次球面调和函数类. $Z_{x'}^{(k)}(t')$ 的一个重要特性就是:对任一旋转 ρ,有

$$Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')=Z_{x'}^{(k)}(t').$$

泊松积分(Poisson integral) 一类特殊的积分变换. 函数

$$P_y(t)=\frac{y\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{[\pi(y^2+|t|^2)]^{\frac{n+1}{2}}}\quad(t\in \mathrm{R}^n,y>0)$$

称为 R_+^{n+1} 上的泊松核,它是函数 $\mathrm{e}^{-|x|y}$ ($x\in \mathrm{R}^n$ 是自变量, $y>0$ 是参数)的傅里叶变换. 对于

$$f\in L^p(\mathrm{R}^n)\quad(1\leqslant p\leqslant+\infty),$$

称

$$u(x,y)=\int_{\mathrm{R}^n} P_y(t)f(x-t)\mathrm{d}t\quad(x\in \mathrm{R}^n,y>0)$$

为 f 的泊松积分. 它是 $\mathrm{R}_+^{n+1}=\mathrm{R}^n\times(0,+\infty)$ 上的调和函数,即满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}=0\quad((x,y)\in \mathrm{R}_+^{n+1}).$$

实际上,当 $f\in L^p(\mathrm{R}^n)(1\leqslant p\leqslant 2)$ 时, $u(x,y)$ 是 f 的傅里叶积分的阿贝尔-泊松平均,即

$$u(x,y)=\int_{\mathrm{R}^n}\hat f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{e}^{-|t|y}\mathrm{d}t\quad(x\in \mathrm{R}^n,y>0).$$

豪斯多夫-杨不等式(inequality of Hausdorff-Young) 关于 $L^p(1\leqslant p\leqslant 2)$ 中函数的傅里叶变换的估计式. 若 $f\in L^p(\mathrm{R}^n)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, 及 $1/p+1/p'=1$, 则 $\hat f\in L^{p'}(\mathrm{R}^n)$, 且满足不等式

$$\|\hat f\|_{p'}\leqslant \|f\|_p.$$

称其为豪斯多夫-杨不等式.

黎曼-勒贝格引理(Riemann-Lebesgue lemma) 描述 L^1 中函数傅里叶变换在无穷远处性质的引理. 该引理断言:若 $f\in L^1(\mathrm{R}^n)$, 则

$$\lim_{|x|\to\infty}\hat f(x)=0.$$

佩利-维纳定理(Paley-Wiener theorem) 关于有紧支集函数的傅里叶变换性质的定理. 设 $f\in L^2(-\infty,+\infty)$, 且当 $|x|>\sigma>0$ 时, $f(x)=0$ (即 $f(x)$ 的支集含于 $[-\sigma,\sigma]$), 那么 f 的傅里叶变换是

$$\hat f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t.$$

将上式中的 x 换成复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 积分仍有意义. 它定义了复平面上的一个全纯函数

$$F(z)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\sigma}^{\sigma} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tz}\mathrm{d}t,$$

且 $F(z)$ 是指数 σ 型的整函数,具有估计

$$|F(z)|\leqslant A_\sigma \mathrm{e}^{\sigma|z|}.$$

佩利-维纳定理断言:设 $\sigma>0$, $F(x)\in L^2(-\infty,+\infty)$, 则 $F(x)$ 为 $L^2(-\infty,+\infty)$ 中支集在 $[-\sigma,\sigma]$ 内某个函数 $f(t)$ 的傅里叶变换的充分必要条件是,

$F(x)$是指数 σ 型整函数 $F(z)=F(x+\mathrm{i}y)$在 x 轴上的限制(参见《复变函数论》有关条目).

施瓦兹空间(Schwarz space)　一类光滑函数空间. 设函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上无穷次可微且满足下述条件:对于任何正整数 m,$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{Z}_+^n$,

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|D^\alpha f(x)||x|^m<+\infty,$$

式中

$$D^\alpha f(x)=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

这类函数引入适当的拓扑后,就成为完备的线性距离空间,称为施瓦兹空间,记为 $\mathscr{S}$. 它有广泛的用途. 显然,有紧支集的无穷次可微函数类 C_0^∞ 包含在 $\mathscr{S}$ 内,即 $C_0^\infty\subset\mathscr{S}$.

缓增广义函数(tempered distribution)　施瓦兹空间 $\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函. 这样的广义函数全体在适当的拓扑下,记为 $\mathscr{S}'$. $\mathscr{S}'$ 的重要性在于可以定义傅里叶变换. 设 $u\in\mathscr{S}'$,定义其傅里叶变换

$$\hat{u}\in\mathscr{S}':\ \hat{u}(\varphi)=u(\hat{\varphi})\quad(\forall\varphi\in\mathscr{S}).$$

常见的函数(例如所有 $1\leqslant p\leqslant+\infty$的 L^p 函数)几乎都是缓增广义函数,但也存在不是函数的缓增广义函数(例如 δ 函数). 这样一来,大大地扩大了傅里叶变换应用的范围,发挥了傅里叶变换作为研究函数工具的功效.

弱导数(weak distribution)　通常导数的一种推广. 设 $f(x)$,$g(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上局部可积的函数,$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{Z}_+^n$,记$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$. 如果

$$\int_{\mathbf{R}^n}f(x)\frac{\partial^\alpha\varphi(x)}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbf{R}^n}g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

对所有的 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$成立,则称 f 的 α 阶弱导数是 g,仍记为 $D^\alpha f=g$. 可以验证,当 f 具有连续的 α 阶导数时,弱导数就等于通常导数.

索伯列夫空间(Sobolev space)　一类重要的可微函数空间. 对于 $1\leqslant p\leqslant+\infty$及非负整数 m,索伯列夫空间 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$定义为

$$\{f\in L^p(\mathbf{R}^n)\,|\,\mathrm{D}^\alpha f\in L^p(\mathbf{R}^n),0\leqslant|\alpha|\leqslant m\},$$

这里 D^α 表示弱导数. 对于 $f\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$,定义其范数为

$$\|f\|_{m,p}=\Big\{\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|\mathrm{D}^\alpha f\|_p^p\Big\}^{1/p}\quad(1\leqslant p<+\infty),$$

$$\|f\|_{m,\infty}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\|\mathrm{D}^\alpha f\|_\infty.$$

空间 $W^{m,p}$的一个重要推广是允许 m 为任意的实数. 当 $s>0$ 时,$W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$的构成参见"别索夫空间".

贝塞尔位势空间(Bessel potential spaces)　索伯列夫空间的一种推广. 设 G_α 是由等式 $\hat{G}_\alpha(x)=(1+4\pi^2|x|^2)^{-\alpha/2}$确定的函数. 贝塞尔位势空间 $\mathscr{L}_\alpha^p$ 被定义为

$$\mathscr{L}_\alpha^p(\mathbf{R}^n)=\{G_\alpha*f\,|\,f\in L^p(\mathbf{R}^n)\},$$

其中 $1\leqslant p\leqslant+\infty$,$\alpha\geqslant0$. 贝塞尔位势空间同索伯列夫空间的关系是 $\mathscr{L}_k^p(\mathbf{R}^n)=W^{k,p}(\mathbf{R}^n)$,其中 $1<p<+\infty$,$k\in\mathbf{N}$(参见"偏微分方程").

别索夫空间(Besov space)　索伯列夫空间的另一种推广. 设 $s>0$,写成 $s=m+\sigma$,其中 m 是整数,而 $0<\sigma\leqslant1$,若 $1\leqslant p\leqslant+\infty$,$1\leqslant q\leqslant+\infty$,则(非齐次)别索夫空间的定义如下:

$$B_{p,q}^s(\mathbf{R}^n)=\{f\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)\,|\,\|f\|_{B_{p,q}^s}<+\infty\},$$

其中 $\|f\|_{B_{p,q}^s}$ 当 $q\neq+\infty$时等于

$$\|f\|_{m,p}+\sum_{|\alpha|=m}\cdot\left(\int_{\mathbf{R}^n}\frac{\|D^\alpha f(\cdot+t)+D^\alpha f(\cdot-t)-2D^\alpha f(\cdot)\|_p^q}{|t|^{n+\alpha q}}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},$$

当 $q=+\infty$时的 $\|f\|_{B_{p,q}^s}$(即 $\|f\|_{B_{p,\infty}^s}$)等于

$$\|f\|_{m,p}+\sum_{|\alpha|=m}\sup_{0\neq t\in\mathbf{R}^n}\cdot\frac{\|D^\alpha f(\cdot+t)+D^\alpha f(\cdot-t)-2D^\alpha f(\cdot)\|_p}{|t|^\sigma}.$$

别索夫空间 $B_{p,q}^s(\mathbf{R}^n)$依范数

$$\|\cdot\|_{B_{p,q}^s}$$

构成巴拿赫空间. 当 $s=m\in\mathbf{N}$,且 $p=q$ 时,$B_{p,p}^m(\mathbf{R}^n)$与索伯列夫空间 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$相重合,两者的范数等价. 其他情况下,两者是不同的. 别索夫空间还有其他等价的定义. 例如,可以用连续模来定义,也可以用光滑函数的卷积来定义.

共轭傅里叶积分(conjugate Fourier integral)　一种特殊的积分变换. 设 K 是条目"考尔德伦-赞格蒙奇异积分"中介绍的核函数,$\hat{K}$ 是 K 在广义函数意义下的傅里叶变换. 设 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$($1\leqslant p\leqslant2$). f 的共轭傅里叶积分指的是形式积分

$$\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}(y)\hat{K}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot y}\mathrm{d}y.$$

这个积分在很强的条件下才能是一个真正的收敛的积分.

傅里叶乘子(Fourier multiplier)　通过傅里叶变换定义的一类算子. 设 $m\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$. 在 $L^2(\mathbf{R}^n)$上定义算子

T_m:$T_m(f)=\mathscr{F}^{-1}(m\cdot\hat{f})$ (即 $\mathscr{F}(T_m(f))=m\,\hat{f}$).

如果存在常数 A_p($1\leqslant p\leqslant+\infty$),使得

$\|T_m(f)\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$　($\forall f\in L^2(\mathbf{R}^n)\cap L^p(\mathbf{R}^n)$),

就称 m 为傅里叶 L^p 乘子,简称 L^p 乘子. 由 m 所确定的算子 T_m 称为乘子算子. 若 m 是 L^p 乘子,则如上定义的算子 T_m 可保范延拓至整个 $L^p(\mathbf{R}^n)$,成为 $L^p(\mathbf{R}^n)$到自身的有界线性算子.

一般地,设 P,Q 是 $\mathbf{R}^n$ 上两个具有某种特性的函数类,m 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的一个函数,

$$T_m(f)=\mathscr{F}^{-1}(m\cdot\hat{f}),$$

如对任一 $f\in P$，均有 $T_m(f)\in Q$，且

$$\|T_m(f)\|_Q\leqslant A\|f\|_P,$$

则称 T_m（或 m）为 (P,Q) 乘子.

乘子算子（multiplier operator） 见“傅里叶乘子”.

米赫林乘子定理（Mihlin multiplier theorem） 给出函数成为 $L^p(p>1)$ 乘子的充分条件的定理. 米赫林乘子定理可叙述如下：设 $m(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上除原点外是 k 阶连续可微的，其中 k 为大于 $n/2$ 的整数. 又假设 $m(x)$ 的所有不超过 k 阶的偏导数满足条件

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha m(x)\right|\leqslant B|x|^{-|\alpha|},$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_j$ 是非负整数，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\leqslant k$，则 $m(x)$ 是 $L^p(p>1)$ 乘子.

赫尔曼德尔乘子定理（Hörmander multiplier theorem） 给出函数为 $L^p(p>1)$ 乘子的充分条件的定理，是米赫林乘子定理的推广. 设 k 是大于 $n/2$ 的整数，$m(x)\in C^k(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. 如果存在常数 $B>0$，使得 $|m(x)|\leqslant B$，且

$$\sup_{0<R<+\infty}R^{2|\alpha|-n}\int_{R\leqslant|x|\leqslant 2R}\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}m(x)\right|^2\mathrm{d}x\leqslant B$$
$$(|\alpha|\leqslant k),$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_j$ 是非负整数，$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，那么 $m(x)$ 是 $L^p(p>1)$ 乘子.

奇异积分算子

考尔德伦-赞格蒙奇异积分（Calderón-Zygmund singular integral） 调和分析中最重要的一类主值积分，即卷积型的奇异积分. 设函数 $K(x)=\Omega(x)|x|^{-n}(x\neq0)$，其中 $\Omega(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的零次齐次函数，满足

$$\int_{|x|=1}\Omega(x)\mathrm{d}x=0,$$

此外，还满足一定的光滑条件，例如

$$\int_0^1\frac{\omega(t)}{t}\mathrm{d}t<+\infty,$$

其中

$$\omega(t)=\sup_{\substack{|x-x'|\leqslant t\\|x|=|x'|=1}}|\Omega(x)-\Omega(x')|;$$

那么积分

$$T(f)(y)$$
$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\\delta\to+\infty}}\int_{|x-y|>\varepsilon}f(x)\Omega(y-x)|y-x|^{-n}\mathrm{d}x$$

称为函数 f 关于核 K 的考尔德伦-赞格蒙奇异积分. 如果 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)(p\geqslant1)$，那么上述积分几乎处处存在，于是 Tf 就定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的一个函数，这个函数称为函数 f 的考尔德伦-赞格蒙变换.

考尔德伦-赞格蒙变换（Calderón-Zygmund transform） 见“考尔德伦-赞格蒙奇异积分”.

考尔德伦-赞格蒙分解引理（Calderón-Zygmund decomposition lemma） 按照给定函数所做的空间 $\mathbb{R}^n$ 的一种特殊的分解. 设非负函数 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积，α 为一正数，则存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个分解：

$$\mathbb{R}^n=F\cup\Omega,\ F\cap\Omega=\varnothing,$$

使得：

1. $f(x)\leqslant\alpha\ (x\in F)$ a.e..

2. $\Omega=\bigcup_k Q_k$，Q_k 为立方体，$Q_i\cap Q_j=\varnothing(i\neq j)$，有

$$\alpha<\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant2^n\alpha.$$

考尔德伦-赞格蒙分解引理将函数分解成两部分：“好”的部分与“坏”的部分，然后运用不同的方法去处理它们，是一种很有用的技巧.

考尔德伦-赞格蒙算子（Calderón-Zygmund operator） 一类非卷积型积分算子，也是考尔德伦-赞格蒙奇异积分的拓广. 设 $K(x,y)$ 为定义在 $\{(x,y)|x\in\mathbb{R}^n,x\neq y\}$ 上的连续函数，且满足下面两个条件：

1. 存在常数 C，使得

$$|K(x,y)|\leqslant\frac{C}{|x-y|^n}\ (x\neq y).$$

2. 存在 $\delta\in(0,1]$ 和常数 C，使得

$$|K(x,y)-K(x,z)|+|K(y,x)-K(z,x)|$$
$$\leqslant C\frac{|y-z|^\delta}{|x-z|^{\delta+n}},\ 当\ 2|y-z|\leqslant|x-z|.$$

满足上述条件的 $K(x,y)$ 称为 δ 型考尔德伦-赞格蒙核.

记 $\mathscr{D}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的无穷次可微函数空间，$\mathscr{D}'$ 为 $\mathscr{D}$ 的对偶空间. 一个 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$ 的连续线性算子 T 被称为考尔德伦-赞格蒙算子，是指 T 满足以下两个条件：

1. T 能扩张为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子.

2. 存在一个考尔德伦-赞格蒙核，使得对于 $\forall\varphi\in\mathscr{D}$，

$$T\varphi(x)=\int K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$
$$(x\in\{\mathrm{supp}\,\varphi\}^c\ \text{a.e.}).$$

考尔德伦-赞格蒙核（Calderón-Zygmund kernel） 见“考尔德伦-赞格蒙算子”.

***T*1 定理**（$T1$ theorem） 判别一类非卷积型积分算子 L^2 有界的定理. 由达维德（David, G.）和儒尔内（Journé, J. L.）得到的 $T1$ 定理叙述如下：

设 T 为 $\mathscr{D}\to\mathscr{D}'$ 的连续线性算子，如果存在考尔德伦-赞格蒙核 $K(x,y)$，满足：对 $\forall\varphi\in\mathscr{D}$，

$$T\varphi(x)=\int K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$
$$(x\in\{\mathrm{supp}\,\varphi\}^c\ \text{a.e.}),$$

则 T 为 $L^2(\mathrm{R}^n)$有界的充分必要条件是：

1. $T(1)\in\mathrm{BMO}(\mathrm{R}^n)$.
2. $T^*(1)\in\mathrm{BMO}(\mathrm{R}^n)$.
3. T 为弱有界.

其中 T^* 为 T 的共轭算子，T 为弱有界是指对 $\mathscr{D}$ 中的任一有界集 F，存在常数 C，使得

$$|\langle T\varphi_1^{x,t},\varphi_2^{x,t}\rangle|\leqslant Ct^n,$$

对 $\forall\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{D}$，$x\in\mathrm{R}^n$，$t>0$ 成立；其中

$$\varphi^{x,t}(y)=\varphi\left(\frac{y-x}{t}\right).$$

哈代-李特尔伍德极大函数(Hardy-Littlewood maximal function)　函数的一种积分变换. 设 f 在 R^n 上局部可积(即在 R^n 的每个紧子集上都可积). 函数

$$M(f)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{c_nr^n}\int_{|y|<r}|f(x-y)|\mathrm{d}y$$
$$\left(c_n=\pi^{\frac{n}{2}}\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)$$

称为 f 的哈代-李特尔伍德极大函数. 映射 $M:f\to M(f)$称为哈代-李特尔伍德极大算子. M 是 $L^p(\mathrm{R}^n)$到 $L^p(\mathrm{R}^n)$ $(1<p\leqslant+\infty)$的有界算子以及 $L^1(\mathrm{R}^n)$到 $L^{1,\infty}(\mathrm{R}^n)$的有界算子，这里$L^{1,\infty}(\mathrm{R}^n)$为弱 L^1 空间，即洛伦兹空间(参见“洛伦兹空间”).

哈代-李特尔伍德极大算子 M 在调和分析中的重要作用在于它能在一定意义下控制许多算子. 因此极大算子 M 在算子有界性的研究中起着十分重要的作用.

哈代-李特尔伍德极大算子(Hardy-Littlewood maximal operator)　见“哈代-李特尔伍德极大函数”.

马肯厚普条件(Muckenhoupt's condition)　亦称 A_p 条件，对使哈代-李特尔伍德极大算子 M 为加权 L^p 有界的权函数的特征刻画. 设 $1<p<+\infty$，那么哈代-李特尔伍德极大算子 $f\to M(f)$是 $L^p(\mathrm{R}^n)=L^p(\mathrm{R}^n,\mathrm{d}x)$有界的. 1972 年，马肯厚普(Muckenhoupt, R. L.)首先发现：局部可积非负函数 ω 使算子 $f\to M(f)$在加权空间 $L^p(\mathrm{R}^n,\omega\mathrm{d}x)$上有界应满足的条件就是下面的 A_p 条件：称 $\omega\in A_p$，即 ω 是一个 A_p 权，指的是$\omega(x)>0$且满足条件

$$\sup m_Q(\omega)\{m_Q(\omega^{-\frac{1}{p-1}})\}^{p-1}<+\infty,$$

这里，上确界是对一切立方体 Q 取的，记号 $m_Q(f)$表示 f 在 Q 上的平均值，即

$$m_Q(f)=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)\mathrm{d}x.$$

马肯厚普得到：算子 $f\to M(f)$在 $L^p(\mathrm{R}^n,\omega\mathrm{d}x)$上有界当且仅当 $\omega\in A_p$. 当 $p=1$ 时，所谓 ω 满足 A_1 条件(或 $\omega\in A_1$)是指不等式

$$m_Q(\omega)\leqslant C\ \mathrm{ess}\inf_{x\in Q}\omega(x)$$

对 R^n 中所有立方体 Q 成立，式中 C 与 Q 无关，ess inf 表示本性下界.

最后，ω 满足 A_∞条件或 $\omega\in A_\infty$，是指存在常数 C 与 $\delta>0$，使对 R^n 中任意立方体 Q 及 Q 中任意勒贝格可测集 E，有

$$\frac{\int_E\omega(x)\mathrm{d}x}{\int_Q\omega(x)\mathrm{d}x}\leqslant C\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\delta,$$

其中$|E|$表示 E 的勒贝格测度.

A_p 条件(A_p condition)　即“马肯厚普条件”.

A_p 权(A_p weight)　满足马肯厚普 $A_p(1\leqslant p\leqslant+\infty)$条件(参见“马肯厚普条件”)的非负局部可积的函数类. A_1，$A_p(1<p<+\infty)$，A_∞满足：

$$A_1=\bigcap_{1<p<+\infty}A_p,\quad A_\infty=\bigcup_{1<p<+\infty}A_p.$$

1980 年，琼斯(Jones, P.)给出了著名的 A_p 权$(1<p<+\infty)$的琼斯分解：设 $1<p<+\infty$，则 $\omega(x)\in A_p$ 当且仅当

$$\omega(x)=u(x)\cdot v(x)^{1-p},$$

其中 $u(x),v(x)\in A_1$；1972 年，马肯厚普(Muckenhoupt, R. L.)证明了当 $1<p<+\infty$时，哈代-李特尔伍德极大算子 M 是$L^p(\mathrm{R}^n,\omega(x)\mathrm{d}x)$到 $L^p(\mathrm{R}^n,\omega(x)\mathrm{d}x)$的有界算子的充分必要条件是 $\omega(x)\in A_p(\mathrm{R}^n)$. 此后，人们又证明了希尔伯特变换 H 是 $L^p(\mathrm{R}^1,\omega(x)\mathrm{d}x)$到 $L^p(\mathrm{R}^1,\omega(x)\mathrm{d}x)$的有界算子的充分必要条件是 $\omega(x)\in A_p(\mathrm{R}^1)$；里斯变换 $R_j(j=1,2,\cdots,n)$是$L^p(\mathrm{R}^n,\omega(x)\mathrm{d}x)$到 $L^p(\mathrm{R}^n,\omega(x)\mathrm{d}x)$有界算子的充分必要条件也是$\omega(x)\in A_p(\mathrm{R}^n)$. 此外，$A_p$ 权也是使考尔德伦-赞格蒙奇异积分为 $L^p(\mathrm{R}^n,\omega(x)\mathrm{d}x)$到 $L^p(\mathrm{R}^n,\omega(x)\mathrm{d}x)$的有界算子的充分条件.

希尔伯特变换(Hilbert transform)　一种积分变换. 设 $f\in L^1(\mathrm{R}^1)$，它的希尔伯特变换是下述函数

$$Hf(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\pi}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{f(x-y)}{y}\mathrm{d}y.$$

这个概念与周期情形的共轭函数概念是相平行的，它还可经奇异积分的理论推广到多元情形.

里斯变换(Riesz transform)　一种积分变换. 如果核

$$K_j(x)=(2\pi)^n\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$$
$$(j=1,2,\cdots,n),$$

则 f 关于 K_j 的考尔德伦-赞格蒙变换称为 f 的里斯变换，记为 $R_j(f)$. 当 $n=1$ 时，里斯变换恰恰就是熟

知的希尔伯特变换.可见里斯变换的概念是希尔伯特变换的推广.

里斯位势(Riesz potential)　一种积分变换.设$0<\alpha<n$,$1\leqslant p<n/\alpha$.对于$f\in L^p(\mathrm{R}^n)$,f的里斯位势指的是函数

$$I_\alpha(f)(x)=\frac{1}{r(\alpha)}\int_{\mathrm{R}^n}|x-y|^{-n+\alpha}f(y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$r(\alpha)=\pi^{\frac{n}{2}}2^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{-1}.$$

里斯位势的基本性质是下面的哈代-李特尔伍德-索伯列夫定理:设$0<\alpha<n$,$1<p<q<+\infty$,以及

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n},$$

则$\|I_\alpha(f)\|_q\leqslant C_{p,q}\|f\|_p$.里斯位势也称为分数次积分(参见本卷《位势论》同名条).

李特尔伍德-佩利g函数(Littlewood-Paley g-function)　刻画函数在L^p中大小的一种函数.设$f\in L^p(\mathrm{R}^n)$,$1\leqslant p\leqslant+\infty$,$P(f)(x,t)$是$f$的泊松积分,$\nabla$表示$n+1$维梯度算子,$|\nabla P(f)(x,t)|$表示$n+1$维向量(函数)的模.称函数

$$g(f)(x)=\left\{\int_0^{+\infty}|\nabla P(f)(x,t)|^2t\mathrm{d}t\right\}^{1/2}$$

为f的李特尔伍德-佩利g函数.g函数的基本性质是:若$1<p<+\infty$,则

$$C_p^{-1}\|f\|_p\leqslant\|g(f)\|_p\leqslant C_p\|f\|_p.$$

卢津面积积分(Lusin area integration)　刻画函数在L^p中大小的一种算子.设$x\in\mathrm{R}^n$,$\eta>0$,集合

$$\Gamma_\eta(x)=\{(y,t)\in\mathrm{R}^n\times(0,+\infty)\mid|y-x|\leqslant\eta t\}$$

称为以x为顶点,η为参数的锥.设

$$f\in L^p(\mathrm{R}^n),\quad 1\leqslant p\leqslant+\infty,$$

下述积分

$$S_\eta(t)(x)=\left(\int_{\Gamma_\eta(x)}|\nabla P(f)(y,t)|^2t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

称为f的以η为参数的卢津面积积分,其中$\nabla P(f)(x,t)$的意义与"李特尔伍德-佩利g函数"中的相同.关于$g(f)$和$S_\eta(f)$,成立不等式

$$g(f)(x)\leqslant A_\eta S_\eta(f)(x),$$

其中A_η是只与η有关的常数.

马钦凯维奇积分(Marcinkiewiz integral)　一类特殊的积分变换.设F是R^n的闭子集,$\delta(x)$表示$x\in\mathrm{R}^n$与F的距离,$\lambda>0$,下面两个积分

$$I^{(\lambda)}(x)=\int_{|y|\leqslant1}\frac{\delta^\lambda(x+y)}{|y|^{n+\lambda}}\mathrm{d}y,$$

$$I_*^{(\lambda)}(x)=\int_{\mathrm{R}^n}\frac{\delta^\lambda(x+y)}{|y|^{n+\lambda}}\mathrm{d}y$$

都称为马钦凯维奇积分.对于许多深刻的理论问题,这些积分提供了有力的工具.马钦凯维奇(Marcinkiewiz,J.)最先系统地研究了这些积分.

弱(p,q)型算子(operator of weak type (p,q))　满足一类较弱有界性质的算子.设$1\leqslant p,q\leqslant+\infty$,一个把$L^p(\mathrm{R}^n)$上的可测函数(可以是复值的)映成$\mathrm{R}^n$上的可测函数的算子$T$,如果对$\forall f\in L^p(\mathrm{R}^n)$,$\forall s>0$,有

$$|\{x\in\mathrm{R}^n\mid|Tf(x)|>s\}|\leqslant\left(\frac{K\|f\|_p}{s}\right)^q$$
$$(1\leqslant q<+\infty),$$

其中$|E|$表示集合E的勒贝格测度,或者在$q=+\infty$时对任意$f\in L^p(\mathrm{R}^n)$,有

$$\|T(f)\|_\infty\leqslant K\|f\|_p,$$

则称T是弱(p,q)型的.上述条件中常数K的最小值称为T的弱(p,q)范数,记为$\|T\|_{w(p,q)}$.

弱(p,q)范数(weak (p,q) norm)　见"弱(p,q)型算子".

强(p,q)型算子(operator of strong type (p,q))　满足一类有界性质的算子.设$1\leqslant p,q\leqslant+\infty$,如果存在正数$K=K_{p,q}$,使得对于$\forall f\in L^p(\mathrm{R}^n)$,有$Tf\in L^q(\mathrm{R}^n)$,且$\|T(f)\|_q\leqslant K\|f\|_p$,则称$T$是强$(p,q)$型的.上述条件中$K$的最小值称为$T$的强$(p,q)$范数,记为$\|T\|_{(p,q)}$,强$(p,q)$型常简称$(p,q)$型.强$(p,q)$型算子一定是弱$(p,q)$型的.

强(p,q)范数(strong (p,q) norm)　见"强(p,q)型算子".

线性算子内插定理(interpolation theorem of linear operators)　亦称里斯凸性定理,线性算子有界性质的一个定理.设$1\leqslant p_j,q_j\leqslant+\infty(j=0,1)$.若线性算子$T$是强$(p_j,q_j)(j=0,1)$型的,则对于$0\leqslant t\leqslant1$,$T$必是强$(p_t,q_t)$型的算子,且

$$\|T\|_{(p_t,q_t)}\leqslant\|T\|_{(p_0,q_0)}^{1-t}\|T\|_{(p_1,q_1)}^t,$$

其中

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad\frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}.$$

此内插定理的优点是,它明确地给出了算子T的强(p_t,q_t)型范数与T在两端点空间强$(p_j,q_j)(j=0,1)$范数的关系.但此定理要求T在两端点空间是强$(p_j,q_j)(j=0,1)$型算子,这在使用中有不便之处.

里斯凸性定理(Riesz convexity theorem)　即"线性算子内插定理".

马钦凯维奇内插定理(Marcinkiewicz interpolation theorem)　算子有界性质的一个定理.设$1\leqslant p_j\leqslant q_j\leqslant+\infty$,$j=0,1$,$q_0\neq q_1$,$t\in(0,1)$,

$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad\frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}.$$

若次可加算子T是弱(p_j,q_j)型算子,则T是强(p_t,q_t)型的.算子T的强(p_t,q_t)型范数与t,p_0,q_0,p_1,q_1

及 $\|T\|_{w(p_0,q_0)}$，$\|T\|_{w(p_1,q_1)}$ 有关，但与算子 T 以及 f 无关. 这个定理是马钦凯维奇(Marcinkiewicz, J.)在第二次世界大战前得到的，当时未发表，他参加反德作战牺牲，第二次世界大战后由他的老师赞格蒙(Zygmund, A.)发表.

此内插定理的优点是减弱了对算子 T 在两端点空间的要求，即仅要求 T 是弱 (p_j,q_j) 型的 $(j=0,1)$，但其不足之处在于算子 T 的强 (p_t,q_t) 型范数 $\|T\|_{(p_t,q_t)}$ 与其在两端点空间上的弱 (p_j,q_j) $(j=0,1)$ 范数的关系没有线性算子内插定理中那样明显的表达式.

哈代空间(Hardy spaces)　一类复解析函数空间，它与单位圆周(或其他区域的边界)上的实函数的 L^p 空间有较密切联系(参见《复变函数论》同名条). 若单位圆 $|z|<1$ 内的解析函数 $f(z)$ 满足

$$\sup_{0\leqslant r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right]^{1/p}<+\infty$$

$$(\text{对某个 } 0<p<+\infty),$$

或 $\sup\limits_{0\leqslant r<1}\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|<+\infty$ $(p=+\infty)$，则记为 $f\in H^p$. H^p 是 p 次哈代空间的记号，表示上述函数 f 的全体(参见本卷《复变函数论》同名条).

经典哈代空间理论起源于 20 世纪 30 年代. 这一概念可以从单位圆推广到上半平面. 设 $F(x+iy)$ 在 $\mathbb{R}_+^2=\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ 上解析 $(x\in\mathbb{R}, y\in(0,+\infty))$. 若

$$\sup_{y>0}\left(\int_{\mathbb{R}}|F(x+iy)|^p dx\right)^{1/p}<+\infty$$

$$(0<p<+\infty),$$

$$\sup_{y>0}\|F(\cdot+iy)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}<+\infty$$

$$(p=+\infty),$$

则称 $F\in H^p(\mathbb{R}_+^2)$ (用 $H^p(\mathbb{R}_+^2)$ 表示 $\mathbb{R}_+^2$ 上的 p 次哈代空间).

这一概念由施坦(Stein, E. M.)和韦斯(Weiss, G.)推广到多元，导致 $\mathbb{R}^n$ 上实函数哈代空间(简称实哈代空间，仍记为 H^p 或 $H^p(\mathbb{R}^n)$)的建立. 当 $p>1$ 时，$H^p(\mathbb{R}^n)$ 就是 $L^p(\mathbb{R}^n)$，所以对 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 的兴趣全在于 $0<p\leqslant 1$ 的情形.

20 世纪 70 年代，调和分析的一大进展就是对于 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 特征的研究摆脱了复变函数论的方法，建立了一整套实变理论，给出了各种实变方法的刻画，从而更深地从本质上揭露了 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 函数特征.

实哈代空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 在调和分析中十分重要的作用之一是：$H^1(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的十分有效的替代空间. 调和分析中研究的许多重要算子，如希尔伯特变换，不是 $L^1(\mathbb{R}^1)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^1)$ 有界的，但却是 $H^1(\mathbb{R}^1)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^1)$ 的有界算子.

***H^p* 空间**(H^p space)　即"哈代空间".

哈代空间的实变特征(real character of Hardy spaces)　完全用实分析语言表示的函数属于哈代空间的充分必要条件. 1972 年，费弗曼(Fefferman, C.)和施坦(Stein, E. M.)建立的下述定理标志着哈代空间理论发展中的转折点. 它使哈代空间的实变理论完全脱离了复变和解析的概念，走上了独立发展的道路. 该定理断言：设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的缓增广义函数，P 为 n 维的泊松核，那么 $f\in H^p(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当 f 的泊松积分的非切向极大函数

$$P_\nabla^*(f)(x)=\sup_{|y-x|<t}|(f*P_t)(y)|\in L^p(\mathbb{R}^n),$$

其中

$$P_t(\cdot)=t^{-n}P\left(\frac{\cdot}{t}\right).$$

实际上，人们还可以用其他类型的极大函数是否属于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 这一事实来刻画 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 元素的特征.

BMO 函数空间(BMO function space)　一类函数空间. BMO 是有界平均振动(bounded meanoscillation)之意. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数，Q 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的边与坐标轴平行的立方体，记

$$f_Q=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx\quad(|Q| \text{ 为 } Q \text{ 的体积}).$$

设 $0<q<+\infty$，如果 f 满足

$$\sup_Q\left\{\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)-f_Q|^q dx\right\}^{1/q}<+\infty,\quad(1)$$

则称 f 是 q 次有界平均振动的，这样的函数的全体记为 BMO_q. 由于对所有的 $q>0$，BMO_q 都互相等价，故可简记为 BMO，并称它为 BMO 函数空间. BMO 是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间. 可以证明，$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 空间同 BMO 有着严格的包含关系：$L^\infty\subsetneqq\mathrm{BMO}$. 如记

$$f^\#(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(t)-f_Q|dt,$$

则定义中的条件(1)等价于 $f^\#\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 因此，$f\in$ BMO 当且仅当 $f^\#\in L^\infty$，函数 $f^\#$ 称为 f 的 # 函数. 对于 $f\in$ BMO，当 $q=1$ 时，(1)式左端的数称为 f 的 BMO 范数，记为 $\|f\|_*$.

$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 在调和分析中的重要性是：$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的有效的替代空间. 调和分析中的许多算子，如希尔伯特变换，不是 $L_c^\infty(R^1)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^1)$ 有界的，却是 $L_c^\infty(\mathbb{R}^1)$ 到 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^1)$ 的有界算子，这里 $L_c^\infty(\mathbb{R}^1)$ 表示具有紧支集的有界可测函数空间.

$H^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 在调和分析中的另一重要作用是在算子的插值理论中. 若拟线性算子 T 是 (H^1,L^1) 型和 $(L_c^\infty,\mathrm{BMO})$ 型的，那么 T 也是 (L^p, L^p) 型的，其中 $1<p<+\infty$. 这是既不同于里斯凸性定理(参见"线性算子内插定理")，也不同于马钦凯维奇内插定理(参见"马钦凯维奇内插定理")的一个新的算子内插定理.

BMO(R^n)在调和分析中的重要性还体现在BMO(R^n)与 A_p 权(参见"A_p 权")的关系($1<p<+\infty$). 运用约翰-尼伦伯格不等式(参见"约翰-尼伦伯格不等式")可证:如果 $\omega(x)\in A_p(\mathrm{R}^n)$,那么

$$\varphi(x)=\log\omega(x)\in \mathrm{BMO}(\mathrm{R}^n);$$

反之,如果 $\varphi(x)\in\mathrm{BMO}(\mathrm{R}^n)$,那么存在一个充分小的正数 λ,使 $e^{\lambda\varphi(x)}\in A_p(\mathrm{R}^n)$.

函数(sharp function)　见"BMO 函数空间".

BMO 范数(BMO norm)　见"BMO 函数空间".

约翰-尼伦伯格不等式(John-Nirenberg inequality)　BMO 函数类的不等式特征. 存在两个常数 $\lambda>0, C>0$,使对任意 $f\in\mathrm{BMO}(\mathrm{R}^n)$,有

$$\sup_Q\frac{1}{|Q|}\int_Q\exp\left\{\frac{\lambda}{\|f\|_*}|f(x)-f_Q|\right\}\mathrm{d}x\leqslant C,$$

其中 $\|f\|_*$ 是 f 的 BMO 范数. 与上述积分不等式等价的是:存在常数 $\lambda>0, C>0$,对 $\forall f\in\mathrm{BMO}(\mathrm{R}_n)$ 和任意方体 $Q\subset\mathrm{R}^n$, $t>0$,有

$$|\{x\in Q\,|\,|f(x)-f_Q|>t\|f\|_*\}|\leqslant Ce^{-\lambda t}|Q|.$$

上述两个不等式都称为约翰-尼伦伯格不等式,它的最重要的应用是给出了 $\mathrm{BMO}_q(0<q<+\infty)$ 的等价性(f_Q, $\|f\|_*$ 及 BMO_q 的定义参见"BMO 函数空间").

原子(atom)　哈代空间中最基本的函数. 设 $0<p\leqslant1\leqslant q\leqslant+\infty$, $p<q$, s 是整数且

$$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right].$$

又设函数 $a\in L^q(\mathrm{R}^n)$ 满足下述条件:

1. $\operatorname{supp} a\subset B(x_0,r)=B=\{x\in\mathrm{R}^n\,|\,|x-x_0|<r\}$.

2. $\|a\|_q\leqslant|B|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$.

3. $\displaystyle\int_{\mathrm{R}^n}a(x)x^\alpha\mathrm{d}x=0\quad(0\leqslant|\alpha|\leqslant s)$,

那么,就称 a 是中心在 x_0 的 (p,q,s) 原子,其中

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$
$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,$$
$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

原子哈代空间 $H_a^{p,q,s}(\mathrm{R}^n)$ 定义为

$$H_a^{p,q,s}(\mathrm{R}^n)=\Big\{f\in\mathscr{S}'\,|\,f(x)=\sum_k\lambda_ka_k(x),\ \text{每个 } a_k \text{ 是 } (p,q,s) \text{ 原子,且 } \sum_k|\lambda_k|^p<+\infty\Big\},$$

其中 $\mathscr{S}'$ 是缓增广义函数类,等式

$$f(x)=\sum_k\lambda_ka_k(x)$$

在 $\mathscr{S}'$ 中成立. 对于 $f\in H_a^{p,q,s}(\mathrm{R}^n)$,定义其拟范数为

$$\|f\|_{H_a^{p,q,s}}=\inf\Big(\sum_k|\lambda_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

而下确界是对一切使分解式

$$f=\sum_k\lambda_ka_k$$

可能成立的 $\{\lambda_k\}$ 取的. 科伊夫曼(Coifman, R. R.)和雷特(Later, R. H.)先后对 $n=1$ 和 $n>1$ 的情形证明了

$$H_a^{p,q,s}(\mathrm{R}^n)=H^p(\mathrm{R}^n).$$

实哈代空间 $H^p(\mathrm{R}^n)$ 原子分解理论的重要性,表现在它对线性算子 $T(H^p,L^r)$ 有界性研究中所起的作用. 如果对任意的 (p,q,s) 原子 a, $Ta\in L^r(\mathrm{R}^n)$ 且 $\|Ta\|_r\leqslant C$(C 与 a 无关),那么 T 是 (H^p,L^r) 型的算子,这里 $0<p\leqslant r\leqslant1$.

原子 H^p 空间(atomic H^p spaces)　见"原子".

分子(molecule)　满足一定条件的函数. 设 $0<p\leqslant1\leqslant q\leqslant+\infty$, $p<q$, s 是整数,且

$$s\geqslant\left[n\left(\frac{1}{p}-1\right)\right],\quad \varepsilon>\max\left\{\frac{s}{n},\frac{1}{p}-1\right\},$$

$$a=1-\frac{1}{p}+\varepsilon,\quad b=1-\frac{1}{q}+\varepsilon.$$

设函数 $M\in L^q(\mathrm{R}^n)$,若 M 满足下述条件:

1. $|x|^{nb}M(x)\in L^q(\mathrm{R}^n)$;

2. $\|M\|_q^{\frac{a}{b}}\,\|M(x)|x-x_0|^{nb}\|_q^{1-\frac{a}{b}}<+\infty$;

3. $\displaystyle\int_{\mathrm{R}^n}M(x)x^\alpha\mathrm{d}x=0(0\leqslant|\alpha|\leqslant s)$;

则称 M 为以 x_0 为中心的 (p,q,s,ε) 分子.

若 M 是 (p,q,s,ε) 分子,则 $M\in H_a^{p,q,s}(\mathrm{R}^n)$,于是它是至多可数个原子的迭加. 同时,每个 (p,q,s) 原子显然是 (p,q,s,ε) 分子. $H_a^{p,q,s}(\mathrm{R}^n)$ 的元素可分解为 (p,q,s,ε) 分子的无穷线性组合,分解式形式上与原子分解相同.

实哈代空间 $H^p(\mathrm{R}^n)$ 的分子分解理论的重要性,体现在研究线性算子 T 的 (H^{p_1},H^{p_2}) 有界性方面. 设 $0<p_1\leqslant p_2\leqslant1$,如对任一 (p_1,q_1,s_1) 原子 $a(x)$, Ta 为 $(p_2,q_2,s_2,\varepsilon)$ 分子,且满足

$$\|Ta\|_{q_2}^{a/b}\,\|T(x)|x-x_0|^{nb}\|_{q_2}^{1-a/b}\leqslant C,$$

这里 C 与 $a(x)$ 无关,则 T 为 (H^{p_1},H^{p_2}) 型算子.

块函数(block function)　类似于原子,满足一定条件的函数. 设 $1<q\leqslant+\infty$, $b\in L^q(\mathrm{R}^n)$. 如果存在立方体 $Q\subset\mathrm{R}^n$,使 $\operatorname{supp}b\subset Q$ 及 $\|b\|_q\leqslant|Q|^{\frac{1}{q}-1}$,则称 b 是 q 块. 显然,每个 $(1,q,s)$ 原子都是 q 块,但 q 块未必满足原子所满足的条件 3(称为消失矩条件,参见"原子").

块生成的空间(spaces generated by blocks)　由块函数生成的一类函数空间. 若 $f\in L(\mathrm{R}^n)$ 可表为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kb_k(x),$$

其中 b_k 是 q 块，系数组 $\{c_k\} \doteq C$ 满足

$$N(C) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \left(1 + \log \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| \Big/ |c_k| \right) < +\infty,$$

则称 f 是由 q 块生成的. 全体由 q 块生成的函数记为 $B_q(\mathrm{R}^n)$，称为由 q 块生成的空间. 对于 $f \in B_q(\mathrm{R}^n)$，相应的量 $N(C)$ 关于一切可能的分解式的下确界记为 $N_q(f)$，它是拟范数. 依此拟范数 $B_q(\mathrm{R}^n)$ 成为完备的距离空间.

关于原子、分子、块及它们生成的空间，对于周期函数都有类似的定义. 空间 $B_q(T)$ 是与傅里叶级数几乎处处收敛问题密切关联的函数空间.

维塔利-维纳覆盖引理(The Vitali-Wiener covering lemma)　覆盖引理的一种形式. 设区域 $\Omega \subset \mathrm{R}^n$，且 $|\Omega| < +\infty$. 若对任一 $x \in \Omega$，存在 $r(x) > 0$，使得球 $B(x, r(x)) \subset \Omega$，则存在序列 $\{B(x_i, r(x_i))\}_i$，使得诸球 $B(x_i, r(x_i))$ 互不相交，且 $\Omega \subset \bigcup_i B(x_i, 4r(x_i))$.

惠特尼覆盖引理(Whitney covering lemma)　覆盖引理的一种形式. 设 Ω 为 R^n 中的开集，且 $|\Omega| < +\infty$，则存在序列 $\{x_i \mid x_i \in \Omega\}_i$ 和 $\{r_i \mid r_i > 0\}_i$，使得下列性质成立：

1. $\Omega = \bigcup_i B(x_i, r_i)$，但 $\{B(x_i, r_i/4)\}_i$ 为一列互不相交的球.

2. $B(x_i, 18r_i) \cap \Omega^c = \varnothing$，但
$$B(x_i, 54r_i) \cap \Omega^c \neq \varnothing.$$

3. 存在常数 $M = M(n)$，满足
$$\sum_i \chi_{B(x_i, 18r_i)}(x) \leqslant M \quad (\forall\, x \in \Omega).$$

赫尔德空间(Hölder space)　连续函数类的一个子类. 设 $m \in \mathrm{Z}_+$，记 $C^0(\mathrm{R}^n)$ 为 R^n 上有界且一致连续的函数空间.

$$C^m(\mathrm{R}^n) = \{f \mid \mathrm{D}^\alpha f \in C^0(\mathrm{R}^n), \forall \alpha, |\alpha| \leqslant m\},$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 为 n 重指标，$\alpha_i \geqslant 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$，$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. 设 s 是非负非整实数，$s = [s] + \{s\}$，$[s]$表 s 的整数部分，$0 \leqslant \{s\} < 1$，则 s 阶赫尔德空间定义为

$$C^s(\mathrm{R}^n) = \{f \in C^{[s]}(\mathrm{R}^n) \mid \|f\|_{C^{[s]}} < +\infty\},$$

这里

$$\|f\|_{C^s} = \|f\|_{C^{[s]}} + \sum_{|\alpha| = [s]} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x - y|^{\{s\}}},$$

$$\|f\|_{C^m} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

赞格蒙空间(Zygmund space)　连续函数类的一个子类. 设 s 是非负实数，$s = [s]^- + \{s\}^+$，其中 $0 < \{s\}^+ \leqslant 1$，且

$$[s]^- = \begin{cases} [s] & (s\ 非整数), \\ s - 1 & (s\ 为整数). \end{cases}$$

那么赞格蒙空间定义为

$$\mathscr{E}^s(\mathrm{R}^n) = \{f \in C^{[s]^-}(\mathrm{R}^n) \mid \|f\|_{\mathscr{E}^s(\mathrm{R}^n)} < +\infty\},$$

这里

$$\|f\|_{\mathscr{E}^s} = \|f\|_{C^{[s]^-}} + \sum_{|\alpha| = [s]^-} \cdot \sup_{\substack{h \neq 0 \\ x \in \mathrm{R}^n}} \frac{|D^\alpha f(x+h) + D^\alpha f(x-h) - 2D^\alpha f(x)|}{|h|^{\{s\}^+}}.$$

记号$[s]$，$C^m(\mathrm{R}^n)$，$\|\cdot\|_{C^m}$，$|\alpha|$的意义参见“赫尔德空间”.

特里贝尔-立卓金空间(Triebel-Liaorkin space)　一类函数空间. 经典函数空间 $L^p(\mathrm{R}^n)$，$H^p(\mathrm{R}^n)$，BMO(R^n)都是其特殊情形. 取 $\varphi(x) \in \mathscr{S}$(施瓦兹函数类，即速降函数)为径向函数，即 $\varphi(x) = \varphi(|x|)$，且满足：

$$\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset \{\xi \in \mathrm{R}^n \mid 1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2\},$$
$$|\hat{\varphi}(\xi)| \geqslant c > 0 \quad (3/5 \leqslant |\xi| \leqslant 5/3).$$

对 $j \in Z$，令 $\hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}(\xi/2^j)$. 对于 $-\infty < \alpha < +\infty$，$0 < p, q \leqslant +\infty$，若 $f \in \mathscr{S}'/\mathscr{P}$($\mathscr{P}$ 代表多项式全体，若 $\mathscr{S}'$ 中的两个函数只相差一个多项式，则称这两个函数属于同一个等价类. 这种等价类的全体记为 $\mathscr{S}'/\mathscr{P}$，并称它为缓增广义函数模去多项式)，满足

$$\|f\|_{\dot{F}_p^{\alpha,q}} = \left\| \left(\sum_{j \in \mathrm{Z}} 2^{j\alpha} |\varphi_j * f(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p < +\infty,$$

则称 $f \in \dot{F}_p^{\alpha,q}$. $\dot{F}_p^{\alpha,q}$ 称为特里贝尔-立卓金空间.

特里贝尔-立卓金空间与经典空间有直接的关系，即

$$\dot{F}_p^{0,2} = L^p \quad (1 < p < +\infty),$$
$$\dot{F}_p^{0,2} = H^p \quad (0 < p \leqslant 1),$$
$$\dot{F}_\infty^{0,2} = \mathrm{BMO}.$$

特里贝尔-立卓金空间 $\dot{F}_p^{\alpha,q}$ 的定义与 φ 的选取无关.

傅里叶变换的反演公式(inverse formula of Fourier transform)　用函数的傅里叶变换表示函数自身的积分公式. 设 $f(x) \in L^1(\mathrm{R}^n)$，如果 f 的傅里叶变换 $\hat{f}$ 满足：$\hat{f}(y) \in L^1(\mathrm{R}^n)$，那么对几乎处处的 $x \in \mathrm{R}^n$，

$$f(x) = \int_{\mathrm{R}^n} \hat{f}(y) \mathrm{e}^{2\pi i x \cdot y} \mathrm{d}y.$$

特别地，在 f 的连续点，上述等式成立.

卡尔松测度(Carleson measure)　定义在 $n+1$ 维欧氏空间 R^{n+1}的上半空间中的一种特殊的非负波莱尔测度. 设 $B = B(x_0, r)$ 是 R^n 中以 x_0 为中心，$r > 0$为半径的开球. 以 B 为底的帐篷 $T(B)$定义为：

$$T(B) = \{(x, t) \in \mathrm{R}_+^{n+1} \mid |x - x_0| \leqslant r - t\}.$$

R_+^{n+1}上的非负波莱尔测度 μ 称为一个卡尔松测度，如果存在常数 $C > 0$，使对$\forall B \subset \mathrm{R}^n$，有 $\mu(T(B)) \leqslant C|B|$. 使上述不等式成立的最小常数 C 称为 μ 的卡

尔松模或称为卡尔松测度的范数，记为$\|\mu\|_C$.

卡尔松测度与BMO函数有如下重要关系：

设ψ是径向实值函数，且存在$c,\varepsilon>0$，使

$$\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$|\psi(x)|+|\nabla\psi(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-n-\varepsilon},\quad(1)$$

那么对$\forall b\in \mathrm{BMO}$，

$$\mathrm{d}\mu=|\psi_t*b(x)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}$$

是卡尔松测度. 反之，如ψ满足(1)式，且

$$\int_0^{+\infty}|\hat{\psi}(t\xi)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}\neq 0\quad(\forall\xi\neq 0),$$

那么如果

$$\mathrm{d}\mu=|\psi_t*b(x)|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}$$

是卡尔松测度，则$b\in\mathrm{BMO}$，其中

$$\psi_t(x)=\frac{1}{t^n}\psi\left(\frac{x}{t}\right).$$

帐篷空间(tent space)　一类联系着面积积分与卡尔松测度的函数空间. 设$f(x,t)$是定义在$\mathbf{R}^{n+1}_+$上的函数. 对$x\in\mathbf{R}^n$，$t>0$，记$\mathbf{R}^{n+1}_+$中以x为顶点的锥为$\Gamma(x)=\{(y,t)\mid|y-x|<t\}$. 令

$$A_q(f)(x)=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_{\Gamma(x)}|f(y,t)|^q\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right)^{1/q} & (0<q<+\infty),\\ \displaystyle\sup_{(y,t)\in\Gamma(x)}|f(y,t)| & (q=+\infty).\end{cases}$$

那么帐篷空间$T^p_q(0<p<+\infty,0<q\leqslant+\infty)$的定义如下：当$0<p<+\infty$，$0<q<+\infty$时，$T^p_q=\{f\mid A_q(f)\in L^p(\mathbf{R}^n)\}$；当$0<p<+\infty$，$q=+\infty$时，$T^p_q=T^p_\infty=\{f\mid f$ 在 $\mathbf{R}^{n+1}_+$上连续，且有$A_\infty(f)\in L^p(\mathbf{R}^n)$和$|\!|\!|f_\varepsilon-f|\!|\!|_{\infty,p}\to 0(\varepsilon\to 0^+)\}$，这里

$$|\!|\!|f|\!|\!|_{\infty,p}=\|A_\infty(f)\|_p,\quad f_\varepsilon(x,t)=f(x,t+\varepsilon).$$

当$p\geqslant 1$，$q\geqslant 1$时，T^p_q是巴拿赫空间. T^1_∞的对偶空间是卡尔松测度空间.

考尔德伦表示定理(Calderón representation theorem)　函数的一种积分表达式. 设$\psi\in\mathscr{S}$是径向实值函数，满足：

$$\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0\quad及\quad\int_0^{+\infty}|\hat{\psi}(\xi t)|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}=1.$$

如果$f\in\mathscr{S}'$，那么有

$$f(x)=\int_0^{+\infty}(f*\psi_t*\psi_t)(x)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

这里积分表示在$\mathscr{S}'$中的极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0,A\to+\infty}\int_\varepsilon^A f*\psi_t*\psi_t(x)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

其中$\psi_t(x)=\dfrac{1}{t^n}\psi\left(\dfrac{x}{t}\right)$.

柯特拉不等式(Cotlar inequality)　考尔德伦-赞格蒙算子与哈代-李特尔伍德极大算子间的关系式. 设T是考尔德伦-赞格蒙算子，$K(x,y)$是其积分核，对任意$\varepsilon>0$，记

$$T_\varepsilon f(x)=\int_{|x-y|\geqslant\varepsilon}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

$$f\in L^p(\mathbf{R}^n)\quad(1\leqslant p<+\infty).$$

算子族$\{T_\varepsilon\}$的极大算子T^*定义为

$$T^*f(x)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon f(x)|.$$

那么对任意$q>1$，存在仅与维数n有关的常数$C_q>0$，使

$$T^*f(x)\leqslant C_qM_q(f)(x)+M(Tf)(x),$$

其中M为哈代-李特尔伍德极大算子，M_q为q阶的哈代-李特尔伍德极大算子，它定义为

$$M_q(f)(x)=\sup_{r>0}\left(\frac{1}{r^n}\int_{|y|<r}|f(x-y)|^q\mathrm{d}y\right)^{1/q}.$$

费弗曼-施坦不等式(Fefferman-Stein inequality)　#函数与哈代-李特尔伍德极大算子的一个关系式. 设T是考尔德伦-赞格蒙算子，$1<p<+\infty$，则对$f\in L^r(p\leqslant r\leqslant+\infty)$，有下述不等式

$$(Tf)^\#(x)\leqslant C[M(|f|^p)(x)]^{1/p},$$

其中#函数定义参见“BMO函数空间”，M为哈代-李特尔伍德极大算子.

好λ不等式(good λ inequality)　用于比较两个集合测度的不等式. 设f,g是测度空间$(Z,\mathscr{F},\mu)$上的两个非负可测函数. 如果存在适当的正常数a,b,c，下式

$$\mu(\{x\mid f>\lambda,g\leqslant c\lambda\})\leqslant a\mu(\{x\mid f>b\lambda\})\quad(1)$$

对一切$\lambda>0$均成立，则称(1)为好λ不等式. 好λ不等式(1)的作用在于从它可导出

$$\int[f(x)]^p\mathrm{d}\mu(x)\leqslant A(a,b,c,p)\int[g(x)]^p\mathrm{d}\mu(x),\quad(2)$$

只要相应的$\|f\|_{L^p(\mathrm{d}\mu)}<+\infty$，其中$0<p<+\infty$.

振荡型积分(oscillatory integral)　积分核中带有振荡因子的积分变换. 设Ψ是关于x和ξ的$2n$元有紧支集的光滑函数，Φ是$2n$元实值光滑函数，且在Ψ的支集上，

$$\det\left(\frac{\partial^2\Phi(x,\xi)}{\partial x_i\partial\xi_j}\right)\neq 0,$$

其中$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$. 那么对$\lambda>0$，下面定义的算子族$T_\lambda$称为振荡积分：

$$T_\lambda f(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\Phi(x,\xi)}\Psi(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x.$$

考尔德伦交换子(Calderón commutator)　一类特殊的非卷积型的积分算子. 设φ是$\mathbf{R}$上实李普希茨函数，$h\in C^\infty(\mathbf{R})$，那么交换子是如下的奇异积分算子：

$$T[h,\varphi]f(x)=\mathrm{P.V.}\int_{\mathbf{R}}h\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}\right)\frac{f(y)}{x-y}\mathrm{d}y.$$

如果 $h=1$,那么 $T[h,\varphi]$为希尔伯特变换;如果

$$h(t)=\frac{1}{1+\mathrm{i}t},$$

那么 $T[h,\varphi]f(x)$为关于曲线 $y=\varphi(x)$的柯西积分;如果 $h(t)=t^k$,那么 $T[h,\varphi]$为 k 阶的交换子.

多线性算子(multilinear operator) 一类多个函数的积分变换.其定义为

$$M(f_1,f_2,\cdots,f_k)(x)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^{nk}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot\sigma(\bar{\varepsilon})}m(\bar{\varepsilon})\hat{f}_1(\varepsilon^{(1)})\hat{f}_2(\varepsilon^{(2)})\cdots\hat{f}_k(\varepsilon^{(k)})\mathrm{d}(\bar{\varepsilon}),$$

其中 $\bar{\varepsilon}=(\varepsilon^{(1)},\varepsilon^{(2)},\cdots,\varepsilon^{(k)})\in\mathbb{R}^{nk}$,$\varepsilon^{(j)}\in\mathbb{R}^n$,而 $\sigma(\bar{\varepsilon})=\varepsilon^{(1)}+\varepsilon^{(2)}+\cdots+\varepsilon^{(k)}$,$m(\bar{\varepsilon})$是 $\mathbb{R}^{nk}$ 上的有界函数,$f_j(\varepsilon^{(j)})\in\mathscr{S}(j=1,2,\cdots,k)$.例如,当 $m(\bar{\varepsilon})\equiv1$ 时,

$$M(f_1,f_2,\cdots,f_k)(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x).$$

柯尔莫哥洛夫不等式(Kolmogorov inequality) 次线性算子是弱型的一种不等式刻画.设次线性算子 T 是弱$(p,p)(0<p<+\infty)$型的,则对$\forall0<r<p$,$\forall E\subset\mathbb{R}^n$,$E$ 可测,且$|E|<+\infty$,有如下不等式

$$\left(\int_E|Tf(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{1/r}\leqslant K_{p,r}|E|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}}\|f\|_p,\quad(1)$$

且 $K_{p,r}\leqslant C_{p,r}\|T\|_{(L^p,L^{p,\infty})}$.

反之,如果(1)式对某 $r(0<r<p)$及$\forall E\subset\mathbb{R}^n(|E|<+\infty)$成立,那么 T 是弱(p,p)型算子.

逆向赫尔德不等式(inverse Hölder inequality) A_p 类中权函数的一种重要性质.设 $\omega(x)\in A_p$(参见"马肯厚普条件"),那么存在常数 $C>0$,$\delta>0$,使对任意的立方体$Q\subset\mathbb{R}^n$,有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)^{1+\delta}\mathrm{d}x\leqslant C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1+\delta}.$$

满足逆向赫尔德不等式是 A_p 权函数的最重要的性质之一.这一性质在研究算子的加权范数不等式中起着十分重要的作用.

齐型空间(spaces of homogeneous type) 一种拟距离空间,是 $\mathbb{R}^n$ 的一种推广.设 ρ 是集合 X 上的一个拟距离,即 ρ 是 $X\times X\to[0,+\infty]$的一个二元函数,满足:

1. $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;
2. 对$\forall x,y\in X$,$\rho(x,y)=\rho(y,x)$;
3. 存在数 k,使对$\forall x,y,z\in X$,有

$$\rho(x,y)\leqslant k[\rho(x,z)+\rho(z,y)];$$

那么由 ρ 可定义一个拓扑,中心在 x,半径为 $r>0$ 的球 $B(x,r)=\{y\in X\mid\rho(x,y)<r\}$形成点 x 的开邻域基.又设 μ 是 X 上的正测度,对$\forall x\in X$,$r>0$,有 $\mu(B(x,r))<+\infty$.此外,存在常数 A,使对$\forall x\in X$,$r>0$,有$\mu(B(x,2r))\leqslant A\mu(B(x,r))$.

带有上述拟距离 ρ 和正测度 μ 的集合 X,称为齐型空间(X,ρ,μ).

局部哈代空间(localized Hardy space) 较实哈代空间 H^p 更广泛的一类函数空间.其定义如下:设 $u(x,t)=(f*P_t)(x)$是 f 的泊松积分,记

$$u_*^{(1)}(f)(x)=\sup_{|x-y|\leqslant t\leqslant1}|u(y,t)|$$

为 u 的非切向极大函数的截断变形.如 $u_*^{(1)}(f)\in L^p(\mathbb{R}^n)$,则称 $f\in H_{\mathrm{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$,$0<p\leqslant+\infty$.与 $H^p(\mathbb{R}^n)$一样,$H_{\mathrm{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$有其类似的等价定义.

$H_{\mathrm{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$与 $L^p(\mathbb{R}^n)$,$H^p(\mathbb{R}^n)$的关系是:如果 $1<p\leqslant+\infty$,那么 $H_{\mathrm{loc}}^p(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$;如果 $0<p\leqslant1$,那么 $H_{\mathrm{loc}}^p(\mathbb{R}^n)\supset H^p(\mathbb{R}^n)$.

挂谷宗一极大函数(Kakeya maximal function) 一类积分变换.是哈代-李特尔伍德极大函数的一种变形.在二维的情形下,其定义如下:对于实数 $N\geqslant1$,记

$$\mathscr{R}_N=\left\{\text{矩形 }R\,\middle|\,\frac{R\text{ 长边之长}}{R\text{ 短边之长}}=N\right\},$$

那么 f 的挂谷宗一极大函数 $M_Nf(x)$定义为

$$M_Nf(x)=\sup_{x\in R\in\mathscr{R}_N}\frac{1}{|R|}\int_R|f(y)|\mathrm{d}y\quad(f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)).$$

傅里叶变换的限制定理(restriction theorem of the Fourier transform) 傅里叶变换大小的一种描述,是研究多元函数傅里叶积分的博赫纳-里斯平均 L^p 收敛的重要工具.设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的光滑子流形.$\mathrm{d}\sigma$ 是其上导出的勒贝格测度.如果对每一个施瓦兹函数 f 以及 S 的具有紧闭包含于 S 中的开子集 S_0,有

$$\left(\int_{S_0}|\hat{f}(\xi)|^q\mathrm{d}\sigma(\xi)\right)^{1/q}\leqslant A_{p,q,S_0}\|f\|_{L^p},$$

这里 $\hat{f}$ 为 f 的傅里叶变换,$1\leqslant p<p_0<2$,$p_0=p_0(S)$且 $q=q(p)$.那么称对于 S,傅里叶变换的 L^p 限制定理成立.有如下的结果:设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的 m 维的 K 型光滑子流形,那么存在 $p_0=p_0(S)(p_0>1)$,使得对于 $1\leqslant p<p_0$,$q=2$,S 具有傅里叶变换 L^p 限制性质.

值得指出的是,具有限制性质的 $\mathbb{R}^n$ 的子流形 S 的特征以及指标 p,q 最佳范围的确定是非常困难的问题,至今没有完全解决.

振荡型奇异积分(oscillatory singular integral) 积分核中带有振荡因子的一类奇异积分算子.其定义为

$$Tf(x)=\mathrm{P.V.}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}P(x,y)}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $P(x,y)$是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的 d 阶实多项式,$K(x,y)$为考尔德伦-赞格蒙核.这类算子密切联系着沿曲线(或沿曲面)的奇异积分算子.它首先由里奇(Ricci,F.)和施坦(Stein,E. M.)在 1987 年所研究,他们获得了 T 的 $L^p(1<p<+\infty)$有界性.

VMO 函数空间(the space of function vanishing mean oscillation) BMO 函数空间的一个子空间.$f\in\mathrm{VMO}$ 当且仅当 $f\in\mathrm{BMO}$,且

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\substack{I\subset\mathbb{R}^n\\|I|\leqslant\delta}}\frac{1}{|I|}\int_I|f-f_I|\mathrm{d}x=0,$$

这里 f_I 是 f 在 I 上的平均，即

$$f_I=\frac{1}{|I|}\int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

关于 VMO 函数空间，还有如下重要刻画：

$$f\in \mathrm{VMO}(\mathbb{R}^n)\Leftrightarrow f\in\overline{UC\cap \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 UC 为 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续函数的全体. 1977 年，科伊夫曼(Coifman, R. R.)和韦斯(Weiss, G.)证明了：$H^1=\mathrm{VMO}^*$(即哈代空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 是 VMO 的对偶空间).

奇异拉东变换(singular Radon transform) 一类低维流形上的积分变换. 设 Ω 是一个光滑流形，如对 $\forall P\in\Omega$，有一个低一维的光滑子流形 Ω_P 使 $P\in\Omega_P$，且有一个相关于 Ω_P，其奇性在点 P 的奇异积分密度 $K(P,\cdot)$. 那么如果映射 $P\to\Omega_P$ 及 $P\to K(P,\cdot)$ 均是光滑的，则对于任意的 $f\in C_0^\infty(\Omega)$，其奇异拉东变换定义为

$$R(f)(P)=\int_{\Omega_P}K(P,Q)f(Q)\mathrm{d}\sigma_P(Q),$$

其中 $\mathrm{d}\sigma_P$ 是 Ω_P 的体积元.

奇异拉东变换密切联系着一类振荡型奇异积分. 1986 年，冯(Phong, D. H.)和施坦(Stein, E. M.)证明了：如果 $K(P,Q)$ 满足一定的光滑性条件，那么 R 是 $L^p(\Omega)$ 有界的.

赫茨空间(Herz space) 幂权 L^q 空间的一种推广. 它在研究哈代空间 H^p 上的乘子定理尖锐性问题时起重要作用，可分为齐性赫茨空间和非齐性赫茨空间. 对 $0<p\leqslant 1<q<+\infty$ 及

$$\alpha=n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),$$

齐性赫茨空间的定义为

$$\dot K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)=\{f\in L_{\mathrm{loc}}^q(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\mid \cdot\ \|f\|_{\dot K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}<+\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_{A_K}|f(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{p/q}2^{k\alpha p}\right\}^{1/p}$$

且

$$A_K=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,2^{k-1}<|x|\leqslant 2^k\}.$$

非齐性赫茨空间的定义为

$$K_q^{\alpha,p}=L^q(\mathbb{R}^n)\cap\dot K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n),$$

且

$$\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}+\|f\|_{\dot K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|f\|_{L^q}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

拉德马赫函数系(system of Rademacher functions) 有重要理论和应用价值的一个特殊的正交函数系. 在一维情形，可先定义函数

$$r_0(t)=\begin{cases}1 & \left(0\leqslant t<\frac{1}{2}\right),\\ -1 & \left(\frac{1}{2}\leqslant t<1\right).\end{cases}$$

然后将 $r_0(t)$ 按周期 1 做延拓，即令 $r_0(t)=r_0(t-[t])$ $(t\geqslant 0$，$[t]$ 为 t 的整数部分)或 $r_0(t)=r_0(t-[t]+1)$ $(t<0)$，再定义

$$r_m(t)=r_0(2^m t)\quad(m\in\mathbb{N}),$$

则 $\{r_m(t)\}_{m=0}^{+\infty}$ 称为区间 $[0,1]$ 上的拉德马赫函数系. 它是 $[0,1]$ 上的正交系，但不是完备的. 拉德马赫函数系有如下重要性质：设数列 $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$ 有

$$\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|^2<+\infty,$$

则级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m r_m(t)$$

在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛，其和 $F(t)\in L^p[0,1]$ 对一切 $1\leqslant p<+\infty$ 成立；还存在正的常数 A_p 和 B_p，使

$$A_p\|f\|_p\leqslant\|F\|_2=\left(\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2\right)^{1/2}\leqslant B_p\|F\|_p.\qquad(1)$$

因此

$$\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|^2<+\infty$$

可用以刻画 $F\in L^p[0,1]$. 拉德马赫函数系的函数在二进区间上取值 1，-1 或 0，它与在应用中有重要意义的沃尔什函数系关系密切，在应用中常称为开关函数，是由德国数学家拉德马赫(Rademacher, H.)于 1922 年提出的. 还有一些等价的定义方式(例如可表示成 $r_m(x)=\mathrm{sgn}\sin 2^{m+1}\pi x$，这里 sgn 表示符号函数).

拉德马赫函数系可以推广到高维空间. 记

$$Q=\{t\in\mathbb{R}^n\,|\,t=(t_1,t_2,\cdots,t_n),\ 0\leqslant t_j\leqslant 1,j=1,2,\cdots,n\},$$

$$m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)\in\mathbb{N}^n,$$

则由 $r_m(t)=r_{m_1}(t_1)r_{m_2}(t_2)\cdots r_{m_n}(t_n)$ $(t\in Q)$ 定义的函数系 $\{r_m(t)\}_{m\in\mathbb{N}^n}$ 可称为 Q 上的拉德马赫函数系. 它具有与一维情形相同的性质和重要意义. 特别地，若将 $\|F\|_p$ 和 $\sum_m|a_m|^2$ 分别理解成 $\|F\|_{L^p(Q)}$ 和

$$\sum_{(m_1,m_2,\cdots,m_n)}|a_{m_1,m_2,\cdots,m_n}|^2,$$

则由 $\sum_m|a_m|^2<+\infty$ 仍有

$$F(t)=\sum_m a_m r_m(t)\in L^p(Q),$$

并且(1)式(其中各有关量均按 n 维情形定义)仍然成立.

抽象调和分析

抽象调和分析(abstract harmonic analysis) 经典调和分析理论的推广. 即在具有一定代数、拓扑结构的集合上建立的调和分析的理论和方法. 在经典的傅里叶级数理论中,以 2π 为周期的函数可以看做复平面中单位圆周 T^1 上的函数. 函数族

$$\{e^{inx} \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, e^{ix} \in T^1\}$$

是 $L^2(T^1)$的一组完备规范正交系. 对于 T^1 上的可积函数,以其傅里叶系数为系数的形式三角级数称为该函数的傅里叶级数. T^1 关于复数乘法成为一个群. 从群表示论的观点来看,对每个整数 n,e^{inx}是 T^1 的一个不可约酉表示,$L^2(T^1)$的上述完备规范正交系恰是 T^1 的不可约酉表示完全组,T^1 的酉对偶同构于整数加法群 $\mathbf{Z}$,T^1 上的可积函数按不可约酉表示完全组展开所得的形式三角级数即是该函数的傅里叶级数.

在经典的傅里叶变换理论中,$\mathbf{R}^1$ 上可积函数 f 的傅里叶变换是

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}dx,$$

当 f 是 $\mathbf{R}^1$ 上具有紧支集的 C^∞ 函数时,又可得反演公式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y)e^{iyx}dy.$$

$\mathbf{R}^1$ 对实数加法形成一个群,从群表示论的观点来看,对每个 $y\in\mathbf{R}^1$,e^{iyx}是 $\mathbf{R}^1$ 的一个不可约酉表示,函数族$\{e^{iyx} \mid y\in\mathbf{R}^1\}$是 $\mathbf{R}^1$ 的一个不可约酉表示完全组,$\mathbf{R}^1$ 的对偶同构于 $\mathbf{R}^1$,通过 $\mathbf{R}^1$ 的不可约酉表示完全组中的函数就可定义函数的傅里叶变换及其逆变换. 所以要将经典的傅里叶级数与傅里叶变换的理论推广到一般的拓扑群 G 上,首先要确定群 G 的不可约酉表示完全组,这是群表示论的基本问题之一,也是抽象调和分析的基础. 进而可展开抽象调和分析各种课题的研究.

彼得-外尔定理(Peter-Weyl theorem) 经典三角多项式可一致逼近连续函数的定理在紧李群上的一种推广. 在经典的傅里叶级数理论中,一个熟知的结果是,任一以 2π 为周期的连续函数可用三角多项式来一致逼近. 这一经典结果在紧李群上的推广,即是著名的彼得-外尔定理. 设 G 是一个紧李群,则 G 的不可约表示必是有限维的,且 G 的有限维表示必等价于一个酉表示. 所以,在表示空间中取一组适当的规范正交基时,G 的不可约表示将 G 的元映成酉矩阵.

设$\{U_\lambda \mid \lambda\in\hat{G}\}$是紧李群 G 的不可约酉表示完全组,则 $U_\lambda(x)$的每个矩阵系数定义了 G 上的实解析函数. 相应于 $L^2(G)$的内积,$U_\lambda(x)$的不同矩阵系数彼此正交;当 $\lambda_1,\lambda_2\in\hat{G}$ 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时,$U_{\lambda_1}(x)$与$U_{\lambda_2}(x)$的不同矩阵系数也彼此正交. 这时彼得-外尔定理可叙述为:紧李群 G 的不可约酉表示完全组$\{U_\lambda \mid \lambda\in\hat{G}\}$的矩阵系数全体是 $L^2(G)$的完备正交函数系,G 上的任一连续函数可用该正交系中函数的有限线性组合来一致逼近.

上述紧李群 G 的完备正交函数系在紧李群上调和分析中的地位,等同于$\{e^{inx} \mid n=0,\pm1,\cdots\}$在经典傅里叶分析中的地位.

紧李群上的傅里叶级数(Fourier serier on compact Lie group) 经典傅里叶级数在紧李群上的推广. 取定紧李群 G 的一个不可约酉表示完全组$\{U_\lambda \mid \lambda\in\hat{G}\}$,并用 d_λ 记表示 U_λ 的表示空间的维数. 对 G 上的哈尔可积函数 $f(x)$,做积分

$$\hat{f}_\lambda = \int_G f(x)U_\lambda(x^{-1})dx,$$

就得到一个 d_λ 阶复方阵 $\hat{f}_\lambda$,称 $\hat{f}_\lambda$ 为 $f(x)$的傅里叶系数矩阵,而与 $f(x)$对应的级数

$$f(x) \sim \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda \mathrm{tr}(\hat{f}_\lambda U_\lambda(x))$$

称为 $f(x)$的傅里叶级数. 这里,tr 表示矩阵的迹,即矩阵主对角线元素之和.

紧李群的有限维表示的迹称为该表示的特征. 如记 $\chi_\lambda(x)=\mathrm{tr}(U_\lambda(x))$,则 $f(x)$的傅里叶级数还有如下的等价记法

$$f(x) \sim \sum_{\lambda\in\hat{G}} d_\lambda f * \chi_\lambda(x),$$

其中 $*$ 表示函数的卷积.

紧李群上可积函数的傅里叶系数矩阵 $\hat{f}_\lambda$ 是与 G 的不可约酉表示完全组的选取有关的. 但它的傅里叶级数的上述两种表达式则与不可约酉表示完全组的选取无关.

非紧半单李群上的傅里叶变换(Fourier transform on noncompact semisimple Lie group) 经典傅里叶变换的一种推广. 非紧连通半单李群 G 的酉表示是无限维希尔伯特空间 V 上的表示,它将 G 的元映成 V 上的酉算子. 取定 G 的一个不可约酉表示完全组$\{U_\lambda \mid \lambda\in\hat{G}\}$,若 $f(x)$是 G 上哈尔可积函数,做哈尔积分

$$\hat{f}_\lambda = \int_G f(x)U_\lambda(x^{-1})dx,$$

则 $\hat{f}_\lambda$ 是希尔伯特空间 V 上的有界线性算子,它定义了 G 的对偶 $\hat{G}$ 上的算子值函数 $\hat{f}$,使 $\hat{f}$ 在 $\lambda\in\hat{G}$ 点取值为 $\hat{f}_\lambda$. 这时,称 $\hat{f}$ 为 f 的傅里叶变换,且 $\hat{f}$ 与 G 的不可约酉表示完全组的选取有关.

傅里叶变换的反演(the inverse of Fourier transform) 经典傅里叶变换反演公式的一种推

广. 设 $f(x)$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的 C^∞ 函数，它的傅里叶变换 $\hat{f}(y)$ 有反演公式

$$f(x)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(y)e^{ix\cdot y}dy.$$

紧李群上光滑函数 $f(x)$ 的傅里叶展开也有反演公式

$$f(x)=\sum_{\lambda\in\hat{G}}d_\lambda\mathrm{tr}(\hat{f}_\lambda U(x)).$$

这两个反演公式可统一表达成

$$f(x)=\int_{\hat{G}}\mathrm{tr}(\hat{f}_\lambda(U_\lambda(x))d\mu(\lambda),$$

其中当 G 是 $\mathbb{R}^n$ 时，$\hat{G}$ 也是 $\mathbb{R}^n$，$d\mu=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}dy$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格测度；当 G 是紧李群时，$\hat{G}$ 是可列离散集，$\hat{G}$ 的测度 μ 适合 $\mu(\lambda)=d_\lambda(\lambda\in\hat{G})$.

一个自然的想法是，上面的反演公式应对于非紧、半单、连通、具有有限中心的李群 G 也适用. 使上面的反演公式对 G 上有紧支集的光滑函数成立的 $\hat{G}$ 上的测度，称为普朗歇尔测度. 哈里什·钱德拉(Harish-Chandra)证明了，若 G 是非紧连通且有有限中心的半单李群，使得上式成立的 $\hat{G}$ 上的普朗歇尔测度是存在的.

另一方面，上式等价于

$$f(e)=\int_{\hat{G}}\mathrm{tr}(\hat{f}_\lambda)d\mu(\lambda)$$

对所有 G 上有紧支集的 C^∞ 函数 f 成立. 通常称这个等式为普朗歇尔公式. 它不但包含了上述反演公式，且包含了经典的普朗歇尔定理的推广

$$\|f\|_2^2=\int_{\hat{G}}\mathrm{tr}(\hat{f}_\lambda\hat{f}_\lambda^*)d\mu(\lambda).$$

普朗歇尔定理(Plancherel theorem)　见"傅里叶变换的反演".

局部域(local field)　一类特殊的阿贝尔群和局部紧空间. 局部紧域 K 是指这样的域，它在其加法运算"+"之下成为阿贝尔群 K^+，加法单位元记为 0；同时，在其乘法运算"·"之下，$K^*=K\backslash\{0\}$ 也成为阿贝尔群，且 K 在其拓扑结构之下成为局部紧空间，并使映射 $(x,y)\to x-y$ 与 $(x,y)\to x\cdot y^{-1}$ 连续. 若局部紧域 K 是连通的，则它是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$；若 K 不连通，则它全不连通. 通常把非平凡的、非离散的全不连通的局部紧域称为局部域.

***p* 级数域**(p-series field)　一类特殊的局部域. 设局部域 K 的特征数为 κ，当 κ 为有限数时，K 是伽罗瓦域 $\mathrm{GF}(p^c)$ 上的 p 级数域($c=1$)，或是 p 级数域的有限次代数扩张($c>1$)；当 κ 为 ∞ 时，K 是伽罗瓦域 $\mathrm{GF}(p^c)$ 上的 p 进数域($c=1$)，或是 p 进数的有限次代数扩张；这里 p 为素数. p 级数域是 $\mathrm{GF}(p)$ 上的形式幂级数域，亦即其元 x 可写为

$$x=\sum_{l=k}^{\infty}c_l\beta^l\quad(c_l\in\mathrm{GF}(p),k\in\mathbb{Z}),\qquad(1)$$

$x+y$ 与 xy 都是按位进行模 p 运算的(不进位). p 进数域中的模 p 的元 x 也是(1)表示，只是 $x+y$ 与 xy 是按位进行模 p 运算且自左向右进位. (1)中的 $p\in K$ 是 K 的生成元.

***p* 进数域**(p-adic number field)　见"p 级数域".

非阿基米德赋值(non-archimedian norm)　局部域上的一种特殊映射. 局部域 K 可以赋予非阿基米德范数 $|\cdot|$，使 K 成为一个赋值域. 若对 $x,y\in K$ 满足：

1. $|x|=0\Leftrightarrow x=0$；
2. $|xy|=|x||y|$；
3. $|x+y|\leqslant\max(|x|,|y|)$；

则称映射 $x\to|x|$ 为 K 上的非阿基米德赋值(范数). K 的非阿基米德范数的值域是数集

$$\{q^k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{0\},$$

其中 $q=p^c$，p 为素数，$c\in\mathbb{N}$. K 的非 0 元 β 满足 $|\beta|=q^{-1}$. K 的子集

$$\mathscr{B}^k=\{x\in K\,|\,|x|\leqslant q^{-k}\}\quad(k\in\mathbb{Z}),$$
$$\mathscr{D}=\{x\in K\,|\,|x|\leqslant 1\}=\mathscr{B}^0,$$
$$\mathscr{D}^*=\{x\in K\,|\,|x|=1\}$$

分别称为 K 的分数理想、整环与 K^* 的单位群.

特征(character)　经典特征函数在局部域上的一种推广. 局部域 K 的加群 K^+ 的特征 χ 是 K 到复数域 $\mathbb{C}$ 的子群 $T=\{e^{2\pi i\alpha}\,|\,\alpha\in[0,1)\}$ 上的连续函数，满足 $\chi(x+y)=\chi(x)\chi(y)$，$|\chi(x)|=1(\forall x,y\in K)$. 记 K^+ 上的特征的全体为 $\hat{K}^+$，据对偶理论，$\hat{K}^+$ 也是一个局部紧群，且 $\hat{K}^+\cong K^+$(拓扑同构).

$\mathscr{B}^k$ 的零化子定义为

$$\Gamma_k=\{\chi\in\hat{K}^+\,|\,\chi(x)=1,\forall x\in\mathscr{B}^k\}\quad(k\in\mathbb{Z}),$$

则有 $\Gamma_k\cong\mathscr{B}^{-k}(k\in\mathbb{Z})$，且成立

$$\mathscr{B}^{k+1}\subset\mathscr{B}^k;\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{B}^k=K,\ \bigcap_{k\in\mathbb{Z}}\mathscr{B}^k=\{0\}.$$
$$\Gamma_{k+1}\supset\Gamma_k;\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Gamma_k=\hat{K}^+,\ \bigcap_{k\in\mathbb{Z}}\Gamma_k=\{1\}.$$

$\{\mathscr{B}^k\}$ 与 $\{\Gamma_k\}$ 分别为 K 与 $\hat{K}^+$ 中既开又闭的子集系，成为 K 与 $\hat{K}^+$ 中单位元的基. K^* 的特征可类似定义.

特征群(character group)　特征的全体构成的群(参见"特征").

局部域上的傅里叶级数(Fourier series on local fields)　经典傅里叶级数在局部域上的一种推广. 取局部域 K 中的整环 $\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{D}$ 中的素理想 $\mathscr{B}=\mathscr{B}^1$，则 $\mathscr{D}/\mathscr{B}\cong\mathrm{GF}(q)=\mathrm{GF}(p^c)$，$p$ 为素数，$c\in\mathbb{N}$. $\mathscr{D}$ 上的特征是 $\hat{K}^+$ 中的元在 $\mathscr{D}$ 上的限制. 取 $\mathscr{D}$ 在 K^+ 中的陪集代表元的完全集 $\{u(n)\}_{n=0}^{\infty}$，其次序是按 K 上的一种自然序排列，并记相应的特征为 χ_n，则 $f\in L^1(\mathscr{D})$ 的傅里叶级数定义为

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x),\ c_n = \int_{\mathscr{D}} f(x)\overline{\chi}_n(x)\mathrm{d}x,$$

这里 $\mathrm{d}x$ 是 K 中的哈尔积分，满足 $\mathrm{d}(\alpha x)=|\alpha|\mathrm{d}x$ $(\forall \alpha\in K)$，$\overline{\chi}_n(x)$ 是 $\chi_n(x)$ 的复共轭.

$\mathscr{D}$ 上的傅里叶级数的性质与 $\mathbb{R}^n$ 情形相似，例如，有黎曼-勒贝格引理、帕塞瓦尔定理、惟一性定理、收敛定理等. 但也有不同之处，例如，对 $f\in L^1(\mathscr{D})$，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_n(x)$$

几乎处处收敛于 $f(x)$，这与经典情形不同. 此外，关于狄利克雷核、费耶尔核、阿贝尔-泊松核、乘积型核等都有新成果.

局部域上的检验函数空间(test function class on local field)　经典检验函数空间在局部域上的推广. 设 K 是局部域，记 $\mathscr{S}$ 为满足如下条件的函数 $\varphi: K\rightarrow \mathbb{C}$ 的全体，存在整数对 $(k,l)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，使 φ 在 $\mathscr{B}^k$ 的每个陪集上取常数，而且 φ 的支集 $\operatorname{supp}\varphi$ 含在 $\mathscr{B}^l$ 中. 赋于 $\mathscr{S}$ 如下拓扑：定义 $\mathscr{S}$ 中的序列 $\{\varphi_n\}$ 为零集，若它满足：

1. 存在固定的整数对 (k,l)，适用于每个 φ_n.

2. $\{\varphi_n\}$ 在 K 上一致趋于 0. 这样的拓扑使 $\mathscr{S}$ 成为一个拓扑线性空间，称之为 K 的检验函数空间.

$\mathscr{S}$ 是完备的、可分的拓扑线性空间，它在 $L^r(K)(1\leqslant r<+\infty)$ 与 $C_0(K)$ 中稠密，这里 $L^r(K)$ 为 K 上的 r 幂哈尔可积函数空间，$C_0(K)$ 为 K 上的有紧支集的连续函数的全体.

局部域上的分布(distribution on local fields)　经典分布在局部域上的推广. 局部域 K 的检验函数空间 $\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函的全体，记为 $\mathscr{S}'$，赋于弱 * 拓扑，则 $\mathscr{S}'$ 成为一个拓扑线性空间，称为 K 上的分布空间. $\mathscr{S}'$ 中的元称为分布或广义函数. $f\in\mathscr{S}'$ 对 $\varphi\in\mathscr{S}$ 的作用记为 $\langle f,\varphi\rangle$.

对于分布 $f\in\mathscr{S}'$，它的反射 $\tilde{f}$ 与平移 $\tau_h f$ 分别定义为满足如下关系的分布：

$\langle \tilde{f},\varphi\rangle = \langle f,\tilde{\varphi}\rangle \quad (\forall \varphi\in\mathscr{S})$；

$\langle \tau_h f,\varphi\rangle = \langle f,\tau_{-h}\varphi\rangle \quad (h\in K,\forall\varphi\in\mathscr{S})$.

这里 $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(-x)$，$\tau_h\varphi(x)=\varphi(x-h)$，分别是函数 φ 的反射与平移.

局部域上的分布空间(distribution space on local fields)　见“局部域上的分布”.

局部域上的傅里叶变换(Fourier transform on local fields)　经典傅里叶变换在局部域上的一种推广. 由于 $\hat{K}^+\cong K$，故 $\hat{K}^+$ 中的元可记为 $\chi_\zeta(\zeta\in K)$. 设 $L^r(K)$ 为 K 上的 $r(1\leqslant r<+\infty)$ 幂哈尔可积函数空间. 可得：

1. 若 $f\in L^1(K)$，则 f 的傅里叶变换定义为

$$\hat{f}(\zeta) = \int_K f(x)\overline{\chi}_\zeta(x)\mathrm{d}x \quad (\zeta\in K).$$

2. 若 $f\in L^2(K)$，则 f 的傅里叶变换定义为

$$\hat{f}(\zeta) = \lim_{k\to+\infty}\int_{|x|\leqslant q^k} f(x)\overline{\chi}_\zeta(x)\mathrm{d}x \quad (\zeta\in K).$$

3. 若 $f\in L^r(K)(1\leqslant r\leqslant 2)$，则写 $f=f_1+f_2$，$f_1\in L^1(K)$，$f_2\in L^2(K)$，f 的傅里叶变换定义为(与分解式无关) $\hat{f}(\zeta)=\hat{f}_1(\zeta)+\hat{f}_2(\zeta)$.

4. 若 $f\in\mathscr{S}'$，则 f 的傅里叶变换定义为满足 $\langle\hat{f},\varphi\rangle=\langle f,\hat{\varphi}\rangle(\forall\varphi\in\mathscr{S})$ 的分布 $\hat{f}$.

傅里叶变换是 $\mathscr{S}$ 到自身的同胚，也是 $\mathscr{S}'$ 到 $\mathscr{S}'$ 上的同胚. 局部域上的傅里叶变换与 $\mathbb{R}^n$ 情形的傅里叶变换有一些类似的性质，但也有许多不同之处. 例如，对局部域而言，有紧支集的函数的傅里叶变换仍可有紧支集，而在经典情形却不可能.

局部域上的泊松型核(kernel of Poisson type on local fields)　经典泊松核在局部域上的一种推广. 设 Φ_k 为 $\mathscr{B}^k$ 的特征函数，$k\in\mathbb{Z}$. 记 $R(x,k)=q^{-k}\Phi_k(x)$. 称 $R(x,k)$ 为局部域 K 上的泊松型核，它有如下性质：对 $x\in K$，$k,k_1,k_2\in\mathbb{Z}$，

1. $R(x,k)=|\beta^k|R(x\beta^k,0)$.

2. $R(x,k)\geqslant 0$.

3. $\int_K R(x,k)\mathrm{d}x=1$.

4. $R(x,k)=R(|x|,k)$.

5. $R(\cdot,k_1)*R(\cdot,k_2)=R(\cdot,k_1\vee k_2)$，其中 $k_1\vee k_2=\max(k_1,k_2)$.

6. $R(x,k)$ 具有任意阶 p 型导数.

局部域上的特征的分歧性质(ramified property of characters on local fields)　局部域上特征的一个重要性质. 记局部域 K 的乘法群 K^* 的特征群为 $\hat{K}^*$，$\hat{K}^*=\{\pi\mid K^*\rightarrow\mathbb{C},\pi$ 连续，$\pi(xy)=\pi(x)\pi(y)$，$|\pi(x)|=1\}$. 设 $A_0=\{x\in K\mid |x|=1\}$，$A_k=\beta^0+\mathscr{B}^k=1+\mathscr{B}^k(k\in\mathbb{N})$，$\forall\pi\in\hat{K}^*$ 具有性质：存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $\pi(x)|_{A_k}=1$. 据此定义：若对所有 $x\in A_0$ 都有 $\pi(x)=1$，则称 π 是不分歧的；否则称 π 是分歧的. 当 $\pi\in\hat{K}^*$ 是分歧特征时，称使 π 在 A_k 上恒为 1 的最小整数 k 为 π 的分歧阶，记为 $\deg(\pi)$. 不分歧特征的阶为 0.

K^+ 的特征也有类似的性质.

K^* 上的梅林变换(Mellin transform on K^*)　经典格林变换的推广. K^* 上的傅里叶变换称为梅林变换，记为 $\mathscr{M}f(\pi)$. 具体地说，对于 $f\in L^1(K^*)$，$\pi\in\hat{K}^*$，

$$\mathscr{M}f(\pi) = \int_{K^*} f(x)\pi(x)\frac{\mathrm{d}x}{|x|}.$$

逆梅林变换定义为：对于 $g\in L^1(\hat{K}^*)$，$x\in K^*$，

$$\mathscr{M}^{-1}g(x) = \int_{\hat{K}^*} g(\pi)\pi^{-1}(x)\mathrm{d}\pi.$$

K^*上的检验函数空间$\mathscr{S}^*$是如下的K^*上的函数φ的全体：$\forall\varphi\in\mathscr{S}^*$，存在正整数对$(m,n)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$，使$\varphi$在$A_m$的每个陪集上为常数，而其支集$\operatorname{supp}\varphi$含在集$\{x\in K\,|\,q^{-n}\leqslant|x|\leqslant q^n\}$中.记$\mathscr{S}^*$的分布空间为$\mathscr{S}'$，可类似地定义$\mathscr{S}'$与$\mathscr{S}'$上的梅林变换及逆变换.

梅林定理：$\mathscr{M}$是$\mathscr{S}^{*\prime}$到$\mathscr{S}^{*\prime}$上的同胚(当然也是$\mathscr{S}^*$到$\hat{\mathscr{S}}^*$上的同胚)；逆变换$\mathscr{M}^{-1}$是$\hat{\mathscr{S}}^{*\prime}$到$\mathscr{S}^{*\prime}$上的同胚(也是$\hat{\mathscr{S}}^*$到$\mathscr{S}^*$上的同胚).

K^*上的逆梅林变换(inverse Mellin transform on K^*)　见“K^*上的梅林变换”.

局部域上的Γ函数(Gamma function on local fields)　经典Γ函数在局部域上的一种推广.设$\pi\in\hat{K}^*$，则$\pi(x)=\pi(x')|x|^{i\alpha}$，其中$|x'|=1$，

$$\frac{-\rho}{\ln q}<\alpha\leqslant\frac{\rho}{\ln q},$$

$\rho=3.14159\cdots\cdots$为圆周率.

局部域K上的Γ函数定义为

1.若π是分歧特征，则对$\chi\in\hat{K}^+$，

$$\Gamma(\pi)=\lim_{n\to\infty}\int_{q^{-n}\leqslant|x|\leqslant q^n}\overline{\chi}(x)\pi(x)\frac{\mathrm{d}x}{|x|}.$$

2.若π是不分歧的，则对$\chi\in\hat{K}^+$，

$$\Gamma(\pi)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\int_{q^{-n}\leqslant|x|\leqslant q^n}\overline{\chi}(x)|x|^{\alpha-1}\mathrm{d}x\quad(\operatorname{Re}\alpha>0),\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\int_{q^{-n}\leqslant|x|\leqslant q^n}\overline{\chi}(x)|x|^{\alpha-1}\mathrm{d}x\\ \qquad(\operatorname{Re}\alpha=0,\alpha=0),\\ \Gamma(|x|^\alpha)\quad(\operatorname{Re}\alpha<0).\end{cases}$$

B函数定义为：

$$B(\pi,\lambda)=\frac{\Gamma(\pi)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\pi\lambda)},$$

$$\pi(x)=\pi(x')|x|^{i\alpha},\lambda(x)=\lambda(x')|x|^{i\alpha}.$$

局部域上的B函数(Beta function on local field)见“局部域上的Γ函数”.

里斯分数次积分(Riesz fractional integration)　经典里斯分数次积分的一种推广.称

$$I^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma_n(\alpha)}\int_{K^n}f(z)|x-z|^{\alpha-n}\mathrm{d}z$$

为f的里斯分数次积分，这里$K^n=K\times K\times\cdots\times K$为$n$维局部域.$\Gamma_n(\alpha)$为$n$维$\Gamma$函数.当

$$f\in L^r(K^n)(1<r<+\infty),\ \operatorname{Re}\alpha>0$$

且

$$\frac{1}{r}-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}>0$$

时，有$(I^\alpha f)^\wedge=|x|^{-\alpha}f^\wedge$(在分布意义下).对于$0<\operatorname{Re}\alpha,\operatorname{Re}\beta,\operatorname{Re}(\alpha+\beta)<n$，有

$$I^\alpha(I^\beta\varphi)=I^\beta(I^\alpha\varphi)=I^{\alpha+\beta}\varphi\quad(\varphi\in\mathscr{S}).$$

称$J^\alpha f$为$f\in\mathscr{S}'$的贝塞尔位势，$\alpha\in\mathbb{C}$，若

$$(J^\alpha f)^\wedge=\{\max(1,|x|)\}^{-\alpha}f^\wedge.$$

它具有性质：$J^\alpha(J^\beta f)=J^{\alpha+\beta}f$.

贝塞尔位势(Bessel potential)　见“里斯分数次积分”

哈代-李特尔伍德极大函数(Hardy-Littlewood maximal function)　经典哈代-李特尔伍德极大函数的一种推广.设$f\in L_{\mathrm{loc}}(K)$，即f为K上的局部可积函数.称

$$Mf(x)=\sup_{k\in\mathbb{Z}}q^k\int_{|x-z|\leqslant q^{-k}}|f(z)|\mathrm{d}z$$

为f的哈代-李特尔伍德极大函数.哈代-李特尔伍德极大算子M是强$(r,r)(1<r<+\infty)$型的与弱$(1,1)$型的.

称K上的函数m为$L^r(K)$上的乘子，若对每个$\varphi\in\mathscr{S}$，有

$$F^{-1}mF\varphi\in L^r(K)\ (1\leqslant r\leqslant+\infty),$$

且不等式成立

$$\|F^{-1}mF\varphi\|_{L^r(K)}\leqslant c\,\|\varphi\|_{L^r(K)},$$

其中F是傅里叶变换.K上乘子的一个典型例子是$m(x)=\pi(x)\ (\pi\in\hat{K}^*)$.

乘子(multiplier)　见“哈代-李特尔伍德极大函数”.

正则函数(regular function)　经典正则函数的推广.定义在$K\times\mathbb{Z}$上的函数$f(x,k)$称为正则函数，若：$f(x,k)$在$\mathscr{B}^k$的每个陪集上取常数值，且

$$\int_{y+\mathscr{B}^{-l}}f(x,k)\mathrm{d}x=\int_{y+\mathscr{B}^{-l}}f(x,l)\mathrm{d}x$$

$$(\forall\, l\geqslant k,y\in K).$$

对于$f\in\mathscr{S}'$，称$f(x,k)=(f*R(\cdot,k))(x)$为f的正则化，其中$R(x,k)=q^{-k}\Phi_k(x)$.任意一个$f\in\mathscr{S}'$的正则化是一个正则函数.反之，任意一个正则函数必是某个分布$f\in\mathscr{S}'$的正则化.

正则化(regularization)　见“正则函数”.

维纳型覆盖引理(covering lemma of Wiener type)　局部域上的一个覆盖引理.局部域K有一个与$\mathbb{R}^n$迥然不同的性质：K中任意两个球S与T只可能有以下两种不同的相对位置，即：

1.$S\cap T=\varnothing$.

2.$S\subset T$或$T\subset S$.

据此可以证明维纳型覆盖引理：设$E\subset K$是K的哈尔可测子集，且$|E|<+\infty$，$\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$E$的球覆盖族，则对任意$\lambda\in(0,1)$，恒存在两两不相交的球族$\{S_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N\in I$，满足

$$\sum_{k=1}^N|S_{\alpha_k}|>\lambda|E|.$$

考尔德伦-赞格蒙型分解(decomposition of Calderón-Zygmund type)　经典考尔德伦-赞格蒙

型分解的推广. 设 $f\in L^1(K^n)$, $f(x)\geqslant 0$, 则对于任意 $\lambda>0$, 存在互不相交的可数球列 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 与 f 的分解 $f=f_1+f_2$, 满足以下诸条件:

1. $|D_\lambda|\leqslant\frac{\|f\|_1}{\lambda}$, 其中 $D_\lambda=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}Q_k$.
2. 对于 $x\notin D_\lambda$, 有 $|f(x)|\leqslant\lambda$, a. e..
3. 对于 $x\in D_\lambda$, 有 $|f_2(x)|\leqslant q^n\lambda$, a. e..
4. 对于 $x\notin D_\lambda$, 有 $f_2(x)=f(x)$.
5. $\int_{Q_k}f_1(x)\mathrm{d}x=0(k\in\mathsf{N})$.

函数 f 的这种分解称为考尔德伦-赞格蒙型分解. 它在研究算子时起着基本的作用.

局部域上的希尔伯特变换(Hilbert transform on local fields)　经典希尔伯特变换在局部域上的推广. 令 $Q^l(x)=c_l\pi^l(x)|x|^{-n}(x\in K^n)$, 常数 c_l 为

$$c_l=\left\{\mathrm{P.V.}\int_{K^n}\frac{\pi^l(y)}{|y|^n}\overline{\chi}(y)\mathrm{d}y\right\}^{-1}$$
$$(l\in\{1,\cdots,q^n-1\}).$$

记 $Q^l(x)$ 的正则化为 $Q^l(x,k)=Q^l*R(\cdot,k)(x)$, 则称

$$T^lf=\lim_{k\to\infty}f*Q^l(\cdot,k)\quad(l\in\{1,\cdots,q^n-1\})$$

为 f 的希尔伯特变换. 它是 $(r,r)(1<r<+\infty)$ 型的, 也是弱 $(1,1)$ 型的. 主要性质有:

1. 若 $f\in\mathrm{Lip}(\alpha;L^r)(0<\alpha<1,1\leqslant r<+\infty)$, 则 $T^lf\in\mathrm{Lip}(\alpha;L^r)$.

2. 若 $f\in H^1$, 则 $f\in\mathrm{Lip}(\alpha;L^r)\Leftrightarrow T^lf\in\mathrm{Lip}(\alpha;L^r)(0<\alpha<1,1\leqslant r<+\infty)$. 这里 H^1 是局部域上的哈代空间.

L_α^r 空间(L_α^r spaces)　对于 $\alpha\in\mathsf{C}$, $1\leqslant r<+\infty$, 称 $L_\alpha^r=\{f|K\to\mathsf{C},f=J^\alpha g,g\in L^r\}$ 为 K 上的 L_α^r 空间, 这里 J^α 为贝塞尔位势, 赋于范数 $\|f\|_{L_\alpha^r}=\|J^{-\alpha}f\|_{L^r}$, 则 L_α^r 成为一个巴拿赫空间. 当 $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ 时, L_α^r 有一个等价表示:

$$f\in L_\alpha^r\Leftrightarrow f\in L^r,\ I^{-\alpha}f\in L^r,$$

这里 $I^{-\alpha}$ 是里斯分数次积分.

关于局部域 K 上的别索夫空间, 它与正则函数空间、原子分解空间、平均振荡空间的关系可参阅有关文献.

别索夫空间(Besov spaces)　见"L_α^r 空间".

局部域上函数的导数(derivatives of functions defined on local fields)　经典导数的推广. 设 $f:K\to\mathsf{C}$ 为 K 上的复值哈尔可测函数. 对 $x\in K$, 令 $\Delta_Nf(x)$ 表示

$$\sum_{j=-N}^{N}q^{-N-j+1}\sum_{l=0}^{q^N-1}\sum_{v=0}^{p-1}\exp\left(\frac{-2\pi\mathrm{i}}{p}vl\right)f(x+l\beta^{-j}),$$

若极限

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_Nf(x)$$

存在, 记为 $f^{(1)}(x)$, 则称它为 $f(x)$ 在 x 的按点 p 型导数(或称吉布斯型导数); 若 $\Delta_Nf(x)$ 具有 $L^r(1\leqslant r<+\infty)$ 强极限, 记为 $\mathrm{D}^{(1)}f$, 则称它为 f 的强导数. f 的 p 型导数和强导数统称为 f 的导数.

上面是局部域上函数的导数的一种定义, 它有许多重要性质, 并有很多应用, 还有其他方式的定义.

局部域上的恒等逼近核(approximation identity kernels over local fields)　经典恒等逼近核在局部域上的推广. 恒等逼近核与恒等逼近算子的定义可仿照 R^n 情形给出. 近年来, 在局部域上已构造了许多恒等逼近核. 主要有:

1. 径向恒等逼近核与一类恒等逼近核.
2. 乘积型核与阿贝尔-泊松型核.
3. 泊松型核.
4. 瓦莱·普桑型核.

局部紧交换群(locally compact abelian group)　一类特殊的交换群. 设 G 是一个局部紧豪斯多夫空间, 又是一个交换群, 且映射

$$G\times G\to G:(x,y)\to x-y$$

是连续的, 则称 G 为局部紧交换群. 简称 LCA 群.

LCA 群(LCA group)　见"局部紧交换群".

特征标(character)　局部紧交换群上的一类特殊的函数. 若 LCA 群 G 上复函数 r 满足 $|r(x)|=1(\forall x\in G)$ 和 $r(x+y)=r(x)r(y)(\forall x,y\in G)$, 则称 r 为 G 的特征标.

对偶群(dual group)　LCA 群 G 的特征标全体构成的群. 记 LCA 群 G 的连续特征标全体为 $\hat{G}$. $\hat{G}$ 中定义加法:

$(\gamma_1+\gamma_2)(x)=\gamma_1(x)+\gamma_2(x)(x\in G,\gamma_1,\gamma_2\in\hat{G})$, 则 $\hat{G}$ 成为一个交换群. 称 $\hat{G}$ 为 G 的对偶群或特征标群. 若对 $\hat{G}$ 赋以 G 的紧子集上一致收敛拓扑, 则 $\hat{G}$ 是一个 LCA 群. 当 G 为离散群时, $\hat{G}$ 为紧群; 当 G 为紧群时, $\hat{G}$ 为离散群.

特征标群(character group)　即"对偶群".

庞特里亚金对偶性定理(Pontryagin duality theorem)　关于 LCA 群与其对偶群的同构定理. 设 G 为 LCA 群, $\hat{G}$ 为 G 的对偶群. 对 $x\in G,\gamma\in\hat{G}$ 记 $\langle x,\gamma\rangle=\gamma(x)$, 则 x 可看做 $\hat{G}$ 上的特征标, 从而有映射 $G\to\hat{\hat{G}}:x\to\langle x,\gamma\rangle$. 庞特里亚金对偶性定理称: 上述映射是拓扑群 G 到 $\hat{\hat{G}}$ 上的同构. 因此 G 等同于 $\hat{\hat{G}}$, 常记 $G=\hat{\hat{G}}$.

傅里叶变换(Fourier transform)　经典傅里叶变换的推广. 设 G 为 LCA 群, $\hat{G}$ 为 G 的对偶群. 对 $\gamma\in\hat{G}$, 记 $\langle x,\gamma\rangle=\gamma(x)$, 于是, 对 $f\in L^1(G)$, 定义 $\hat{G}$ 上函数 $\hat{f}$:

$$\hat{f}(\gamma)=\int_Gf(x)\langle -x,\gamma\rangle\mathrm{d}x\ (\gamma\in\hat{G}),$$

称 $\hat{f}$ 为 f 的傅里叶变换.有时也称映射 $f\to\hat{f}$ 为傅里叶变换.

傅里叶变换可扩张到 $L^2(G)$ 上,此时称为普朗歇尔变换,但有时仍称为傅里叶变换(参见"普朗歇尔变换").

傅里叶反演公式(Fourier inversion formula)　经典傅里叶反演公式的推广.设 G 为 LCA 群,$\hat{G}$ 为 G 的对偶群.对 $x\in G,\gamma\in\hat{G}$,$p(G)$为 G 上正定函数全体,$f\in L^1(G)\cap p(G)$,$\hat{f}$ 为 f 的傅里叶变换,则当 G 上的哈尔测度 $\mathrm{d}x$ 确定后,$\hat{G}$ 上的哈尔测度 $\mathrm{d}\gamma$ 可规范化,使之成立公式

$$f(x)=\int_{\hat{G}}\hat{f}(\gamma)\langle x,\gamma\rangle\mathrm{d}\gamma\quad(x\in G),$$

其中 $\gamma\to\langle x,\gamma\rangle$ 为 $\hat{G}$ 上的特征标.称上面的公式为傅里叶反演公式.

傅里叶-斯蒂尔杰斯变换(Fourier-Stieltjes transform)　经典傅里叶-斯蒂尔杰斯变换的推广.设 G 为 LCA 群,$\hat{G}$ 为 G 的对偶群.设 $M(G)$为 G 上有界的正则复测度全体所成的集.对 $\mu\in M(G)$,定义 $\hat{G}$ 上的函数 $\hat{\mu}$:

$$\hat{\mu}(\gamma)=\int_G\langle -x,\gamma\rangle\mathrm{d}\mu(x)\quad(\gamma\in\hat{G}),$$

其中$\langle x,\gamma\rangle=\gamma(x)$为 G 上的特征标.称 $\hat{\mu}$ 为 μ 的傅里叶-斯蒂尔杰斯变换.更一般地,有时也称映射 $\mu\to\hat{\mu}$ 为傅里叶-斯蒂尔杰斯变换.

正定函数(positive definite function)　经典正定函数的推广.设 G 为 LCA 群,G 上的函数 φ,若使得 G 中任何 $x_1,x_2\cdots,x_N$ 及对任何复数 $c_1,c_2,\cdots,c_N$ 都成立不等式

$$\sum_{n,m=1}^{N}c_n\bar{c}_m\varphi(x_n-x_m)\geqslant 0\quad(N=1,2,\cdots),$$

则称 φ 为 G 上定义的正定函数.

容易验证,正定函数 φ 满足关系式:

$\varphi(-x)=\overline{\varphi(x)}$,

$|\varphi(x)|\leqslant\varphi(0)$,

$|\varphi(x)-\varphi(y)|^2\leqslant 2\varphi(0)\mathrm{Re}\,[\varphi(0)-\varphi(x-y)]$.

博赫纳定理(Bochner theorem)　经典博赫纳定理的推广.设 G 为 LCA 群,$\hat{G}$ 为 G 的对偶群,则 G 上连续函数 φ 为正定函数的充分必要条件是,存在 $\hat{G}$ 上非负的有界波莱尔测度 μ,使下式成立:

$$\varphi(x)=\int_{\hat{G}}\langle x,\gamma\rangle\mathrm{d}\mu(f)\quad(x\in G),$$

其中 $\gamma\to\langle x,\gamma\rangle$ 为 $\hat{G}$ 上的特征标.这就是博赫纳定理.

普朗歇尔定理(Plancherel theorem)　经典普朗歇尔定理的推广.设 G 为 LCA 群,$\hat{G}$ 为 G 的对偶群.普朗歇尔定理称映射 $L^1(G)\cap L^2(G)\to L^2(\hat{G})$,$f\to\hat{f}$($\hat{f}$ 为 f 的傅里叶变换)是映射到 $L^2(\hat{G})$的一个稠密子空间上的等距映射.因此,可以把它扩张成为 $L^2(G)$到 $L^2(\hat{G})$上的一个等距映射.

记上面扩张后的映射为 $\mathscr{F}$

$$L^2(G)\to L^2(\hat{G}):f\to\mathscr{F}f,$$

则普朗歇尔定理也可表述为:$\mathscr{F}$ 是 $L^2(G)$到 $L^2(\hat{G})$上的酉同构.$\mathscr{F}f$ 就是 f 的普朗歇尔变换.称等式

$$\int_G|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{\hat{G}}|\mathscr{F}f(\gamma)|^2\mathrm{d}\gamma$$

为普朗歇尔公式.

帕塞瓦尔公式(Parseval formula)　经典帕塞瓦尔公式的推广.设 G 为 LCA 群,$\hat{G}$ 为 G 的对偶群.设 $f,g\in L^2(G)$,$\mathscr{F}f,\mathscr{F}g$ 分别为 f,g 的普朗歇尔变换,则成立等式

$$\int_G f(x)\,\overline{g(x)}\mathrm{d}x=\int_{\hat{G}}\mathscr{F}f(\gamma)\,\overline{\mathscr{F}g(\gamma)}\mathrm{d}\gamma,$$

称此等式为帕塞瓦尔公式.在特殊情况 $f=g$ 时,上式就是普朗歇尔公式:

$$\int_G|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{\hat{G}}|\mathscr{F}f(\gamma)|^2\mathrm{d}\gamma.$$

普朗歇尔变换(Plancherel transform)　傅里叶变换的推广.设 G 为 LCA 群,$\hat{G}$ 为 G 的对偶群.线性映射 $\mathscr{F}:L^2(G)\to L^2(\hat{G})$,$f\to\mathscr{F}f$ 满足普朗歇尔公式

$$\int_G|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{\hat{G}}|\mathscr{F}f(y)|^2\mathrm{d}y,$$

且当 $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$时,$\mathscr{F}f$ 就是 f 的傅里叶变换 $\hat{f}$.对这样的映射 $\mathscr{F}$,称 $\mathscr{F}f$ 为 f 的普朗歇尔变换(参见"傅里叶变换"与"普朗歇尔定理").

撰　稿　丁　勇　王昆扬　王斯雷　苏维宜　陆善镇　郑学安

审　阅　王斯雷　刘和平　陆善镇

流 形 上 的 分 析

流形上的分析(analysis on manifold)　亦称大范围分析或整体分析.欧氏空间中的分析(经典分析)推广到流形上得到的分析学,是与拓扑学、几何学等数学分支相互渗透、相互综合而发展起来的.它更加注重的是流形的拓扑结构、微分结构以及复结构给分析学带来的影响.

流形上的分析包括:流形上的微积分、积分周期理论、莫尔斯理论、示性类理论、层论、流形上的微分算子理论等.

流形上的微积分是研究流形上微分形式的外微分运算与积分,以及与此相应的理论.流形上的微积分是经典微积分在流形上的推广,这种推广包含了定义域的推广以及研究对象与方法的推广.研究流形上微积分的重要目的是为流形上整体研究提供必备的基础.

莫尔斯理论是研究微分流形上可微实函数的性质同流形的拓扑、几何性质的相互关系.在微积分中,函数的极值理论曾是研究的一个重要内容.流形上的一个非退化函数的临界点与各种指数在数量上的关系,能完全反映了流形性态,这一点由莫尔斯(Morse,H. M.)在 20 世纪 30 年代首先发现,并发展成为莫尔斯理论.它使分析学与拓扑学结合并成为大范围分析的开端.柳斯捷尔尼克(Люстерник,Л. А.)与施尼雷尔曼(Шнирельман,Л. Г.)从另一个途径研究可以退化的临界点理论,建立了畴数理论.畴数是量度拓扑空间性质的一个整数,利用它可以估计紧流形上函数的临界点个数的下界,并得到柳斯捷尔尼克-施尼雷尔曼重数定理,这是从极小极大原理产生出临界值的定理.1973 年,阿姆布罗塞蒂(Ambrosetti,A.)与拉比诺维茨(Rabinowitz,P. H.)发展了柳斯捷尔尼克与施尼雷尔曼的思想,建立了山路引理.随后拉比诺维茨又提出了一系列极小极大原理,对于由微分方程引出的变分问题的解的存在性有广泛应用,特别对哈密顿方程组周期解的存在性及周期轨道的估计做出了重要贡献.博特(Bott,R.)应用莫尔斯理论给出了同伦论中著名的博特周期性定理,斯梅尔(Smale,S.)应用莫尔斯理论证明了维数 $n\geqslant 5$ 的庞加莱猜想,这是微分拓扑学的重大成就.

积分周期理论是研究微分形式的积分周期,它反映了流形的同调特征.积分周期理论的中心是德拉姆定理,它断言微分流形 M 的 p 维德拉姆上同调群与 M 的 p 维奇异上同调群是同构的,这个同构的单射性表明所有周期为零的闭形式是正合形式.霍奇(Hodge,W. V. D.)对德拉姆理论做了重要改进,他引进了调和微分形式的概念,霍奇分解定理指出每个德拉姆上同调类中存在惟一的调和微分形式.

示性类理论是研究向量丛的示性上同调类及计算.1935 年,施蒂费尔(Stiefel,E. L.)在霍普夫(Hopf,H.)指导下做博士论文时,引进并研究了光滑流形切丛所确定的示性同调类,而惠特尼(Whitney,H.)处理的是任意的球丛,这就是历史上较早出现的一种示性类,即施蒂费尔-惠特尼类.1942 年,庞特里亚金(Понтрягин,Л. С.)研究了格拉斯曼流形的同调论,得到庞特里亚金类.1946 年,陈省身研究复格拉斯曼流形的上同调结构,从而对复向量丛定义了陈类.后经吴文俊、托姆(Thom,R.)、希策布鲁赫(Hirzebruch,F. E. P.)等人的研究,使示性类理论更加完善.示性类理论在拓扑学、微分几何学、代数几何学中有许多应用.

层论是大范围分析的一个强有力的工具.层论作为一种理论,包括两个基本部分,一个是层系数的上同调理论,另一个是环式空间.后者对于代数几何是重要的,而前者正是为大范围分析提供的重要工具.层论在整体分析学中有广泛的应用,多复变函数论中著名的库辛问题是日本数学家冈洁利用了层系数上同调与全纯域给出解答的.以层论为基础,结合嘉当(Cartan,H.)关于全纯函数理想论的研究,发展了凝聚层的概念.利用凝聚层的理论,嘉当与塞尔(Serre,J. P.)得到施坦流形的基本定理——嘉当定理 A 与嘉当定理 B.层论还应用于多复变函数论、复流形、解析空间、代数几何、偏微分算子,甚至数论以及数理逻辑等数学分支.

流形上的微分算子理论是研究流形上的微分算子及拟微分算子,其中阿蒂亚-辛格的指标定理最具代表性.阿蒂亚-辛格定理包含了高斯-波涅公式、希策布鲁赫的符号差定理、黎曼-罗赫定理及狄喇克算子的指标计算为其特例,所含的定理皆很深刻并有很长的研究历史.

经过几十年的发展,1968 年,美国数学会在加州大学伯克利分校召开了以大范围分析为题的国际学术会议,这标志着流形上的分析(或大范围分析)已经成为分析学中的一个独立分支.

大范围分析(analysis in the large)　即"流形上的分析".

整体分析(global analysis)　即"流形上的分析".

流形上的微积分

流形上的微积分(calculus on manifold)　微积分在流形上的推广. 它研究流形上微分形式的外微分运算与积分,以及斯托克斯定理. 研究流形上的微积分的目的是为流形上整体研究提供必备的基础.

设 $E^k(M)$表示有限维流形 M 上微分 k 形式(简称 k 形式)全体构成的无穷维实向量空间,$E^*(M)$表示 M 上所有微分形式的实向量空间,按外积 $\wedge$,它还是一个代数. 对任意的 $k\in\mathrm{N}$,存在惟一的线性算子 $\mathrm{d}: E^k(M)\to E^{k+1}(M)$,满足:

1. $\mathrm{d}^2=0$,即对任何微分形式 $\omega\in E^*(M)$,有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}^2\omega=0$;

2. 若 $f\in C^\infty(M)=E^0(M)$,$\mathrm{d}f$ 就是函数 f 的微分;

3. 若 $\omega\in E^k(M)$,$\tau\in E^l(M)$,则 $\mathrm{d}(\omega\wedge\tau)=\mathrm{d}\omega\wedge\tau+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\tau$. d 称为外微分.

由此可以看出外微分 d 是经典分析中函数微分在流形上的推广.

设 M 是 n 维定向流形,D 是 M 的 k 维定向有边紧子流形,ω 是一个 k 形式,则可以定义 ω 在 D 上的积分

$$\int_D \omega.$$

从而可以证明著名的斯托克斯定理:设 D 是 n 维定向流形 M 的 k 维定向有边紧子流形,∂D 表 D 的边缘,ω 是$(k-1)$形式,则

$$\int_D \mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega.$$

这个定理描述了一个区域上的积分与它的边界上的积分之间的联系,是流形上微积分的基本定理. 它对于分片光滑的 D 也成立. 它的一些特殊情形都是经典分析中的重要公式. 例如:

1. 若 $M=\mathrm{R}$,$D=[a,b]$,∂D 是 D 的有向边界$\{b\}-\{a\}$,$f\in E^0(M)$,则

$$\int_D \mathrm{d}f=\int_{\partial D} f=f(b)-f(a).$$

这是著名的牛顿-莱布尼茨公式.

2. 若 $M=\mathrm{R}^2$,D 是 R^2 中的一个有界区域,其边界是一条分段光滑曲线,D 的定向与 R^2 的定向一致,$\omega\in E^1(M)$是 1-形式,

$$\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

则

$$\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\int_D\mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega=\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

故得

$$\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

这是格林公式.

3. 若 $M=\mathrm{R}^3$,D 是 R^3 中的带有分片光滑边界曲面的有界域,其定向与 R^3 一致,以外法线方向为正向诱导出边界 ∂D 的正向,2 形式

$$\omega=P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

则

$$\int_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\int_D\mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega=\int_{\partial D}P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

即得

$$\int_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{\partial D}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这是高斯公式.

4. 若 $M=\mathrm{R}^3$,D 是 R^3 中的一块分片光滑的有向曲面,∂D 是分段光滑的有向闭曲线,∂D 的正向与 D 的正法向符合右手法则(R^3 的定向是右手系),1 形式 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$,则

$$\int_D\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\int_D\mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega=\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

即

$$\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_D\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这是斯托克斯公式.

由此可见,斯托克斯定理是经典分析中上述四个公式的统一形式,同时又是它们在流形上的推广. 概括起来说,流形上的微积分是经典微积分在流形上的推广.

无穷维流形上的微积分完全类似于有限维流形上的情形.

复流形的定义在形式上和实流形是一样的. 但是复结构加在流形上的限制要比实流形强得多,因而所研究的内容更加丰富.

区图(chart)　微分流形的一个基本概念. 空间 M 的一个开集 U 和从 U 到 R^n 中某个开集上的同胚 ϕ,合起来(U,ϕ)称为 M 的一个区图或局部坐标系. 区图的集合$\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\mid\alpha\in A\}$若满足$\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha=M$,则称为 M 的一个图册.

图册(atlas)　见"区图".

C^k 类微分结构 $\mathscr{F}$(differentiable structure $\mathscr{F}$ of class C^k)　满足一定条件的图册.拓扑流形 M 上的图册 $\mathscr{F}=\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\mid\alpha\in A\}$ 若满足下述条件,则称 $\mathscr{F}$ 为 M 的 C^k 类微分结构:

1. $\bigcup\limits_{\alpha\in A}U_\alpha=M$;

2. 对所有的 $\alpha,\beta\in A$,$\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}$ 是 $C^k(1\leqslant k\leqslant+\infty)$的;

3. $\mathscr{F}$ 关于条件 2 是最大的,即对于 M 的任一区图(U,ϕ),若对所有的 $\alpha\in A$,$\phi\circ\phi_\alpha^{-1}$ 与 $\phi_\alpha\circ\phi^{-1}$ 都是 C^k 的,则$(U,\phi)\in\mathscr{F}$.

对于任意满足条件 1 与条件 2 的图册

$$\mathscr{F}_0=\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\mid\alpha\in A\},$$

存在惟一的包含 $\mathscr{F}_0$ 的 C^k 类微分结构 $\mathscr{F}$.

局部坐标系(local coordinate system)　即"区图".

C^k 流形(C^k manifold)　有 C^k 类微分结构的拓扑流形.由一个 n 维拓扑流形 M 以及 M 上的一个 C^k 类微分结构 $\mathscr{F}$ 组成的总体$(M,\mathscr{F})$称为 C^k 流形.当 $k=\infty$时,也称 M 为光滑流形.$C^k(k>1)$流形统称为微分流形.例如,n 维欧氏空间 R^n,n 维球面 S^n,在它们的通常拓扑之下都是微分流形.又如,由所有 $n\times n$ 非奇异实矩阵组成的集合 $\mathrm{GL}(n,\mathrm{R})$,若取其拓扑为 R^{n^2} 的通常拓扑的诱导拓扑,那么 $\mathrm{GL}(n,\mathrm{R})$是一个微分流形.

同一个拓扑流形可以有不同的微分结构,但它的维数是一个拓扑不变量.

光滑流形(smooth manifold)　见"C^k 流形".

微分流形(differentiable manifold)　见"C^k 流形".

积流形(product manifold)　由两个微分流形的笛卡儿积所生成的流形.设$(M_1,\mathscr{F}_1)$,$(M_2,\mathscr{F}_2)$分别为 m_1 维与 m_2 维的微分流形,则积流形 $M_1\times M_2$ 是 m_1+m_2 维拓扑空间,其微分结构 $\mathscr{F}$ 为含有 $\{(U_\alpha\times V_\beta,\phi_\alpha\times\psi_\beta)\mid(U_\alpha,\phi_\alpha)\in\mathscr{F}_1,(V_\beta,\psi_\beta)\in\mathscr{F}_2\}$的最大类.

C^k 流形间的 C^k 映射(C^k map between two C^k manifolds)　两个流形之间的具有某种光滑性的映射.设$(M_1,\mathscr{F}_1)$,$(M_2,\mathscr{F}_2)$分别为 m_1,m_2 维的 C^k 流形,映射 $F:M_1\to M_2$,若对于每个 $p\in M_1$,存在 p 处的区图 $(U,\phi)\in\mathscr{F}_1$,与 $F(p)$处的区图$(V,\psi)\in\mathscr{F}_2$,$F(U)\subset V$,使得$\psi\circ F\circ\phi^{-1}:\phi(U)\to\psi(V)$是 C^k 的,则称 $F:M_1\to M_2$ 为 C^k 流形间的 C^k 映射.于是可以看到 $\psi\circ F\circ\phi^{-1}$与其他诸映射之间,有如上图的交换图.

$$\begin{array}{ccc}M_1\supset U & \xrightarrow{\quad F\quad} & V\subset M_2\\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi\\ \mathbf{R}^{m_1}\supset\varphi(U) & \xrightarrow{\ \psi\circ F\circ\varphi^{-1}\ } & \psi(V)\subset\mathbf{R}^{m_2}\end{array}$$

当 $k=\infty$时,F 称为光滑映射,当 $M_2=\mathrm{R}$ 为通常的实直线时,F 称为 C^k 函数.M 上一切 C^k 函数所形成的空间记为$C^k(M)$.

C^k 微分同胚(C^k diffeomorphism)　两个微分流形之间的一种等价性.设 M,N 分别是两个 C^k 流形,映射 $f:M\to N$ 是一个双射,使得 f 与 f^{-1}是 C^k 映射,则称 f 为 M 与 N 之间的 C^k 微分同胚.这时 C^k 流形 M 与 N 也可以说成是 C^k 微分同胚的,而且 M 与 N 可以看做等同的.微分同胚对于流形的分类是一个重要的概念.例如,连通的一维流形只有两种,即 R 与 S^1.

单位分解(partition of unity)　流形上的函数集,其和为 1.C^k 流形 M 上的单位分解是 M 上 C^k 函数集$\{\phi_i\mid i\in I\}$,其中 I 是一个指标集,使得有:

1. 支集的集合$\{\mathrm{supp}\,\phi_i\mid i\in I\}$是局部有限的(即在每个 $p\in M$ 处,存在 p 的一个邻域 W_p,使得仅对有限多个 i 有 $W_p\cap\mathrm{supp}\,\phi_i\neq\varnothing$).

2. 当 p 遍历 M 时,$\sum\phi_i(p)=1$;并且对所有的 $p\in M$ 和 $i\in I$,有 $\phi_i(p)\geqslant0$.

若$\{U_\alpha\mid\alpha\in A\}$是 M 的一个覆盖,对于每个 $i\in I$,都存在一个 α,使 $\mathrm{supp}\,\phi_i\subset U_\alpha$,则称单位分解$\{\phi_i\mid i\in I\}$从属于覆盖$\{U_\alpha\mid\alpha\in A\}$.

单位分解存在性定理(theorem of existence of partition of unity)　在某些条件下单位分解的存在定理.该定理断言:若 M 是微分流形,$\{U_\alpha\mid\alpha\in A\}$是 M 的任一开覆盖,则存在从属于该覆盖的可数的单位分解$\{\phi_i\}$,对于每个 i,$\mathrm{supp}\,\phi_i$ 是紧集.或去掉紧支集条件,存在从属于覆盖$\{U_\alpha\mid\alpha\in A\}$的单位分解$\{\phi_\alpha\}$(即 $\mathrm{supp}\,\phi_\alpha\subset U_\alpha$),且至多有可数个 ϕ_α 不恒为零.

微分流形的仿紧性保证了它具有单位分解的性质.这个性质能把局部函数扩并为整体函数,反过来也能把整体函数分解为局部函数来研究.

芽(germ)　流形上函数的一种等价类.设 M 是一个 C^k 流形,$p\in M$,函数 f 与 g 分别是定义在包含 p 的开集 U 和 V 上的 C^k 函数.若存在开集 $W\subset U\cap V$,使得 $f|_W=g|_W$,就称 f 与 g 等价.由这个等价关系所形成 $C^k(M)$的等价类 $\bar{f}$,称为在 p 处 C^k 函数的芽.用 $\widetilde{F}_p=\{\bar{f}\mid f\in C^k(M)\}$表示在 p 处芽的集合.$\widetilde{F}_p$ 上可以简单地引入代数运算,并能说明 $\widetilde{F}_p$ 构成一个代数.同时 $\widetilde{F}_p$ 还是一个向量空间.

节(jet)　芽的等价类.设 $\bar{f}$ 与 $\bar{g}$ 分别是 $p\in M$ 处的两个 C^∞类芽,若对每个 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,$|\alpha|\leqslant n$,$\mathrm{D}^\alpha f(p)=\mathrm{D}^\alpha g(p)$,则称 $\bar{f}$ 与 $\bar{g}$ 是 n 等价的.称 $p\in M$ 处的一个 n 等价芽类为 p 处的一个 n 节.记 $J_n(M,p)$为 $p\in M$ 处 n 节的集合.

导子(derivation)　流形上可微函数在一点处

的方向导数. 它满足莱布尼茨条件的实线性映射. 设 M 是微分流形, $p\in M$, v_p 是定义在 p 的某邻域的可微函数代数上的实值泛函, 且满足下述条件:

1. $v_p(\alpha f+\beta g)=\alpha v_p(f)+\beta v_p(g)$, 其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, f,g 为 p 处可微函数;

2. $v_p(fg)=f(p)v_p(g)+g(p)v_p(f)$;

则称 v_p 为 p 处可微函数的导子, 条件 2 称为莱布尼茨条件.

切向量(tangent vector)　一个方向导数定义为一个切向量. 设 M 是微分流形, $p\in M$, v 是 p 的某邻域的可微函数代数 $C^k(M,p;\mathbb{R})$ 上的实值泛函, 若对 $f,g\in C^k(M,p;\mathbb{R})$ 与 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 有

1. $v(\alpha f+\beta g)=\alpha v(f)+\beta v(g)$;

2. $v(fg)=f(p)v(g)+g(p)v(f)$;

则称 v 为流形 M 在 p 处的切向量. $T_p(M)$ 表示 M 在 p 处的所有切向量构成的空间, 简称流形 M 在 p 处的切空间. 事实上, $T_p(M)$ 本身构成一个向量空间, 其维数与 M 的维数一样, 设为 n. 设 (U,ϕ) 是 M 在 p 处的一个区图, 若 $\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n)$, 令 $x_j=\phi_j(x)$. 对于每个 j, 相应地定义切向量

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\in T_p(M)$$

为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p f=\left.\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_j}\right|_{\phi(p)},$$

则 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right\}$ 构成了 $T_p(M)$ 的一个基, 也称为相配于区图 (U,ϕ) 的基. 因此, 在 (U,ϕ) 之下, $T_p(M)$ $(p\in U)$ 中的每一个切向量 v 可以表示为

$$v=\sum_{j=1}^{n}v_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p,$$

其中 $n=\dim M$.

若 (V,ψ) 是 M 在 p 处的另外一个区图, 记 $y_i=\psi_i(x)$ $(x\in V)$, 则 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p\right\}$ 也是 $T_p(M)$ 的一个基, 它与上面的基有关系

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p=\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right|_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p,$$

其中

$$\left.\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right|_p=\frac{\partial(\phi_j\circ\psi^{-1})}{\partial y_i}(\psi(p)).$$

这是切空间 $T_p(M)$ 中基的变换公式.

切空间(tangent space)　见“切向量”.

曲线上的切向量(tangent vector on the curve)　曲线的切线所确定的向量. 设 $\sigma: I\to M$ 是流形 M 上的光滑曲线, 其中 I 是一个区间, M 是一个微分流形. 定义曲线 $\sigma=\sigma(t)$ 在点 $p=\sigma(t)$ 处的切向量 $\dot{\sigma}(t)$ 为

$$\dot{\sigma}(t)(f)=\frac{\mathrm{d}(f\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}\in T_{\sigma(t)}(M).$$

对于 M 上任一点的非零切向量, 必存在 M 上一条光滑曲线 σ, 使其在该点处的曲线的切向量等于这个指定的非零切向量. 由此可以定义流形 M 上某点处的切向量为通过该点的光滑曲线的切向量.

余切空间(cotangent space)　流形 M 在点 p 处切空间的对偶空间. 余切空间记为 $T_p^*(M)$, 其中的向量称为 M 在 p 处的余切向量. $T_p^*(M)$ 的相配于区图 (U,ϕ) 的基是 $T_p(M)$ 的基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ 的对偶基 $\{\mathrm{d}x_i\}$, 即满足条件

$$\mathrm{d}x_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\delta_{ij}.$$

余切空间的维数等于切空间的维数, 且等于流形的维数. $T_p^*(M)$ 中基的变换公式为

$$\mathrm{d}y_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j.$$

余切向量(cotangent vector)　见“余切空间”.

映射的微分(differential of a map)　通常函数的微分在流形上的推广. 设 M,N 为微分流形, $\psi: M\to N$ 是可微映射, 所谓 ψ 在 $p\in M$ 处的微分 ψ_* (有时记为 $\mathrm{d}\psi$) 是如下的线性映射

$$\psi_*: T_p(M)\to T_{\psi(p)}(N),$$
$$\psi_*(v)(g)=v(g\circ\psi),$$

其中 $v\in T_p(M)$, $g\in C^\infty(V)$, V 是 $\psi(p)$ 的邻域. 若 ψ_* 是单射, 则称 ψ_* 在 p 处是非奇异的. 类似地可以定义 ψ_* 的对偶映射

$$\psi^*: T_{\psi(p)}^*(N)\to T_p^*(M),$$
$$\psi^*(w)(v)=w(\psi_*(v)),$$

其中 $w\in T_{\psi(p)}^*(N)$, $v\in T_p(M)$.

ψ_*, ψ^* 有如下性质:

1. 设 $\psi: M\to N$, $\phi: N\to X$ 是 C^∞ 映射, $p\in M$, 则

$$(\phi\circ\psi)_*=\phi_*\circ\psi_*,$$
$$(\phi\circ\psi)^*=\psi^*\circ\phi^*.$$

2. 若 $\psi: M\to N$ 和 $f: N\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 的, 则

$$\mathrm{d}(f\circ\psi)=\psi^*(\mathrm{d}f).$$

3. 设 $\psi: M\to N$ 是 C^∞ 的, $(U,x_1,\cdots,x_n)$, $(V,y_1,\cdots,y_l)$ 分别是 p 与 $\psi(p)$ 处的区图, 则

$$\psi_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right)=\sum_{i=1}^{l}\left.\frac{\partial(y_i\circ\psi)}{\partial x_j}\right|_p\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{\psi(p)}.$$

4. 若 $f: M\to\mathbb{R}$ 是 C^∞ 的, 则

$$\mathrm{d}f_p=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p\left.\mathrm{d}x_i\right|_p.$$

5. 若 ψ 是由连通流形 M 到流形 N 的一个 C^∞ 映射, 如果对每个 $p\in M$, $\psi_*|_p=0$, 则 ψ 是一个常映射.

6. 若 $f:M\to N$ 是微分同胚，则 $f_*:T_p(M)\to T_{f(p)}(N)$ 是切空间之间的同构，因而 M 的维数等于 N 的维数.

浸入(immersion)　亦称浸入映射.具有某种性质的流形间的映射.设 $\phi:M\to N$ 是一个可微映射，若对于每个 $p\in M$，$\phi_*|_p$ 为非奇异的，则称 ϕ 为浸入映射，简称浸入.若 ϕ 同时又是单映射，则称它为单浸入.浸入映射是局部单映射，它未必是整体单映射.

浸入映射(immersion map)　即"浸入".

单浸入(injective immersion)　见"浸入".

嵌入(imbedding)　一对一的浸入，且流形与其像是同胚的映射.设 $\psi:M\to N$ 是两个微分流形间的 C^∞ 映射，若 ψ 是一对一的浸入，且还是 M 与 $\psi(M)$ 之间的一个同胚，则称 ψ 是一个嵌入.

子流形(submanifold)　单浸入映射对应的流形间的关系.设 M 与 N 是两个微分流形，$\phi:M\to N$ 是 C^∞ 映射，若 ϕ 是单射，且 ϕ 是浸入，则称 (M,ϕ) 是 N 的子流形.或等价地定义为：M 作为点集是 N 的子集，且从 M 到 N 的恒等映射是 M 到 N 中的嵌入，就称 M 为 N 的子流形.

正则子流形(regular submanifold)　特殊的子流形.设 (M,ϕ) 是微分流形 N 的子流形，如果

$$\phi:M\to\phi(M)\subset N$$

是一个同胚，那么称 (M,ϕ) 是 N 的正则子流形，并称 ϕ 为 M 在 N 中的正则嵌入.

正则嵌入(regular imbedding)　见"正则子流形".

惠特尼浸入定理(Whitney theorem of immersion)　关于浸入的性质的定理.该定理断言：若 M 是一个 n 维 C^k 流形，并且 $q\geqslant 2n$，则从 M 到 R^q 中的浸入映射的集合是 $\mathfrak{C}^k(M,q)$ 中的一个开稠集，其中 $\mathfrak{C}^k(M,q)$ 表示 C^k 流形 M 到 R^q 中所有 C^k 映射的集合.

惠特尼嵌入定理(Whitney theorem of imbedding)　关于嵌入的性质的定理.该定理断言：若 M 是一个 n 维 C^k 流形，并且 $q\geqslant 2n+1$，则必有从 M 到 R^q 中的嵌入映射.

嵌入存在性定理(theorem of existence of imbedding)　有限维流形的嵌入存在定理.该定理断言：若 M 是一个 n 维 C^k 流形，则存在一个从 M 到 R^{2n} 中的闭嵌入映射，而当 $n\geqslant 2$ 时，存在一个从 M 到 R^{2n-1} 中的闭浸入映射.

所谓闭嵌入映射即该映射的像集中任一紧集的原像仍为紧集的嵌入.闭浸入映射的定义与闭嵌入映射完全类似.

浸入的存在性定理(theorem of existence of immersion)　见"嵌入存在性定理".

沃尔定理(Wall theorem)　关于嵌入的一个定理.该定理断言：任意一个三维紧致流形可以被嵌入到 R^5 中.

赫弗里格定理(Haefliger theorem)　关于嵌入的一个定理.该定理断言：如果 M 是一个紧的 k 连通流形，且 $n\geqslant 2k+3$，则 M 可以被嵌入到 R^{2n-k} 中.这里 M 称为 k 连通的，若对于任何 $m(0\leqslant m\leqslant k)$，从球面

$$S^m=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})\in\mathrm{R}^{m+1}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m+1}x_i^2=1\right\}$$

到 M 的任何连续映射 f，均可扩张为

$$D^{m+1}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})\in\mathrm{R}^{m+1}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m+1}x_i^2\leqslant 1\right\}$$

到 M 的连续映射 F.即 $F:D^{m+1}\to M$ 连续，

$$F|_{S^m}=f.$$

反函数定理(inverse function theorem)　通常反函数定理在流形上的推广.该定理指出：设 $U\subset\mathrm{R}^n$ 是开集，$f:U\to\mathrm{R}^n$ 是 C^k 函数，$1\leqslant k\leqslant+\infty$，如果雅可比矩阵

$$\left\{\frac{\partial(r_i\circ f)}{\partial r_j}\right\}_{i,j=1,2,\cdots,n}$$

在 $r_0\in U$ 处为非奇异的，则存在包含 r_0 的开集 $V\subset U$，满足 $f|_V$ 把 V 一对一地映射到开集 $f(V)$ 上，且 $(f|_V)^{-1}$ 是 C^k 的.

由这个定理可以推出：若 $\psi:M\to N$ 是两个微分流形之间的 C^k 映射，且

$$\psi_*:T_p(M)\to T_{\psi(p)}(N)$$

是一个同构，则存在 p 的邻域 U，使得 $\psi:U\to\psi(U)$ 是一个微分同胚.

秩定理(rank theorem)　映射的微分秩性质的一个定理.该定理断言：设 V 与 W 分别是 n 维与 m 维 C^k 流形.$f:V\to W$ 是一个 C^k 映射，且在每个点 $a\in V$ 处 $\mathrm{d}f$ 的秩是一个与 a 无关的整数 r，则存在 a 与 $f(a)$ 的区图 (U,ϕ) 与 (U',ϕ')，使得 $\phi'\circ f\circ\phi^{-1}|_{\phi(V)}$ 是映射

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leftrightarrow(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0).$$

淹没(submersion)　其微分具有某种性质的映射.设 M 与 N 分别是 m 维与 n 维微分流形，$f:M\to N$ 是可微映射，若 f_* 在 $p\in M$ 处是满射，则称 f 在 p 处是淹没的.若 f 在 M 的每点都是淹没的，则称 f 是一个淹没.特别地，令

$$\beta:\mathrm{R}^m=\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^{m-n}\to\mathrm{R}^n$$

表示投影 $\beta(u_1,u_2,\cdots,u_m)=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，则 β 是一个淹没，称为典型淹没.若 f 在 $p\in M$ 处是淹没，则存在 $p\in M$ 处的区图 (U,ϕ) 和 $f(p)\in N$ 的区图 (V,ψ)，使得 f 的局部表示

$$\hat{f}=\psi\circ f\circ\phi^{-1}:\phi(U)\to\psi(V)$$

具有形式 $\hat{f}(u_1,u_2,\cdots,u_m)=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，从而 f 在 p 的某个邻域上等价于典型淹没. 淹没映射是一个开映射.

典型淹没(canonical submersion)　见"淹没".

横截映射(transversal map)　其像点具有某种性质的映射. 设 $f:M\to N$ 是 m 维微分流形 M 与 n 维微分流形 N 之间的可微映射，S 是 N 的 p 维子流形，若对于 $x\in M$，有 $f(x)\notin S$ 或者

$$\mathrm{d}f(T_x(M))+T_{f(x)}(S)=T_{f(x)}(N),$$

则称 f 在点 x 处横截于子流形 S；若 f 在 M 的每点处横截于 S，则称 f 横截于 S，其中的加法是直和.

关于横截映射的一个重要结论是：若 f 为横截于 S 的映射，且 $P=f^{-1}(S)$，则 (P,i) 是 M 的一个子流形，其中 i 为包含映射.

托姆横截性引理(Thom transversality lemma)　关于横截映射集的性质的一个引理. 设 M,N 分别是 m 维与 n 维的光滑流形，S 是 N 的一个子流形，$C_S^\infty(M,N)$ 表示 $C^\infty(M,N)$ 中横截于 S 的映射全体构成的空间，则 $C_S^\infty(M,N)$ 是 $C^\infty(M,N)$ 中的开子集且在 $C^\infty(M,N)$ 中是稠密的.

零测度(measure zero)　利用区图把流形的子集映入 $\mathbb{R}^n$ 中，其像集测度为零. 设 M 是一个有可数基的 n 维微分流形，$S\subset M$，若对于 M 上的任何区图 (U,ϕ)，$\phi(S\cap U)$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测度集，则称 S 在 M 中有零测度.

萨德定理(Sard theorem)　映射临界值全体为零测度的定理. 该定理指出：设 M,N 是分别为 m,n 维的 C^k 流形，若 $f:M\to N$ 是一个 C^k 映射，且 $k>\max\{0,m-n\}$，则 f 的临界点集合 A 的像 $f(A)$ 在 N 中有零测度.

萨德定理有许多重要的应用. 例如，著名的布劳威尔不动点定理在 $\mathbb{R}^n$ 中的情形和横截性引理都可由萨德定理推出.

切丛(tangent bundle)　流形上每点的切空间的并. 设 M 是一个有微分结构 $\mathscr{F}$ 的 n 维 C^r 流形，令

$$T(M)=\bigcup_{p\in M}T_p(M),$$

则在 $T(M)$ 上可由 $\mathscr{F}$ 自然地引入一个 C^{r-1} 微分结构，使 $T(M)$ 成为一个 $2n$ 维的 C^{r-1} 流形如下：令 $\pi:T(M)\to M$ 为自然投影，$\pi(v)=p(v\in T_p(M))$. 对于 $(U,\phi)\in\mathscr{F}$，设 U 中每一点在 ϕ 之下的坐标函数为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，当

$$v=\sum_{j=1}^n a^j\frac{\partial}{\partial x_j}$$

时，令映射 $\tilde{\varphi}:\pi^{-1}(U)\to\mathbb{R}^{2n}$ 为

$$\tilde{\varphi}(v)=(\phi(\pi(v)),a^1,a^2,\cdots,a^n),$$

则 $\tilde{\varphi}$ 是从 $\pi^{-1}(U)$ 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 的开子集 $\phi(U)\times\mathbb{R}^n$ 上的一个双射，在 $T(M)$ 中引进拓扑使所有 $\tilde{\phi}$ 是同胚. 当 (U,ϕ) 取遍 $\mathscr{F}$ 中的一切成员时，相应 $\pi^{-1}(U)$ 的全体形成 $T(M)$ 的一个覆盖. 容易验证，在上述 $T(M)$ 的拓扑之下，含有

$$\{(\pi^{-1}(U),\tilde{\phi})\mid(U,\phi)\in\mathscr{F}\}$$

的最大集族 $\tilde{\mathscr{F}}$ 成为一个 C^{r-1} 微分结构. $T(M)$ 在此结构下，成为一个 $2n$ 维的 C^{r-1} 流形，称为 M 的切丛.

余切丛(cotangent bundle)　流形上每点的余切空间的并. 设 M 是一个有微分结构的 n 维 C^r 流形，令

$$T^*(M)=\bigcup_{p\in M}T_p^*(M),$$

则与切丛情形类似可在 $T^*(M)$ 上由 $\mathscr{F}$ 自然地引入一个 C^{r-1} 微分结构如下：令

$$\pi^*:T^*(M)\to M,\ \pi^*(\tau)=p\ (\tau\in T_p^*(M)).$$

设 $(U,\phi)\in\mathscr{F}$，坐标函数为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，令映射：$\tilde{\varphi}^*:(\pi^*)^{-1}(U)\to\mathbb{R}^{2n}$ 为 $\tilde{\varphi}^*(\tau)=(\phi(\pi^*(\tau)),b_1,b_2\cdots,b_n)$，当

$$\tau=\sum_{i=1}^n b_i\mathrm{d}x_i.$$

则 $\tilde{\varphi}^*$ 是从 $(\pi^*)^{-1}(U)$ 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 的开子集 $\phi(U)\times\mathbb{R}^n$ 上的一个双射，在 $T^*(M)$ 中引进拓扑使所有 $\tilde{\varphi}^*$ 是同胚. 则当 (U,ϕ) 取遍 $\mathscr{F}$ 中的一切成员时，相应 $(\pi^*)^{-1}(U)$ 的全体形成 $T^*(M)$ 的一个覆盖. 在上述引入 $T^*(M)$ 的拓扑之下，含有

$$\{((\pi^*)^{-1}(U),\tilde{\phi}^*)\mid(U,\phi)\in\mathscr{F}\}$$

的最大集族 $\tilde{\mathscr{F}}^*$ 即为 $T^*(M)$ 上的一个 C^{r-1} 微分结构. $T^*(M)$ 在 $\tilde{\mathscr{F}}^*$ 之下成为一个 $2n$ 维的 C^{r-1} 流形，称为 M 的余切丛.

纤维丛(fibre bundle)　坐标丛的一个等价类. 设给了下列事物：空间 E 称为全空间，空间 B 称为底空间，连续映射 $\pi:E\to B$ 称为投影，空间 F 称为典型纤维，G 为作用在 F 上的有效拓扑变换群，称为结构群，$\{V_j\}_{j\in J}$ 为 B 的开覆盖，且对每个 V_j 有同胚 $\phi_j:V_j\times F\to\pi^{-1}(V_j)$，$(V_j,\phi_j)$ 称为局部平凡化区图，而 $\{(V_j,\phi_j)\}$ 称为图册. 若满足下列条件，它就是一个坐标丛：

1. $\pi\phi_j(x,y)=x$，对任意 $x\in V_j$ 和任意 $y\in F$；

2. 令 $\phi_{j,x}:F\to\pi^{-1}(x)$ 为 $\phi_{j,x}(y)=\phi_j(x,y)$，则对任意 $x\in V_i\cap V_j$，同胚 $\phi_{i,x}^{-1}\circ\phi_{j,x}:F\to F$ 属于 G；

3. 对任意 $i,j\in J$，由 $g_{ij}(x)=\phi_{i,x}^{-1}\circ\phi_{j,x}$ 定义的映射 $g_{ij}:V_i\cap V_j\to G$ 连续，$\{g_{ij}\}$ 称为转移函数族.

坐标丛记为

$$(E,B,\pi,F,G,\{(V_j,\phi_j)\},\{g_{ij}\}).$$

对任意 $x\in B$，记 $F_x=\pi^{-1}(x)$，称为点 x 上的纤

维，它同胚于典型纤维 F.

若两个具有相同的全空间、底空间、投影、典型纤维和结构群的坐标丛的两个转移函数族合并起来仍满足条件 1,2 和 3，即仍成为一个转移函数族，则称这两个坐标丛严格等价.

坐标丛在严格等价之下的一个等价类称为一个纤维丛.

由于每一个坐标丛都惟一地决定了一个纤维丛，故通常当得到一个坐标丛时，就认为得到了一个纤维丛，且简记为 (E,B,π,F,G)，当 G 无需指明时也简记为 (E,B,π,F). 当 F,G 和 π 无需指明时也说 E 是 B 上的一个纤维丛. 例如，若 M 是 n 维微分流形，其切丛 $T(M)$ 在自然投影 π 之下是 M 上的一个纤维丛，实际上是以 $T(M)$ 为全空间，M 为底空间，π 为投影，R^n 为典型纤维，一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathrm{R})$ 为结构群的纤维丛.

纤维(fibre)　见“纤维丛”.

典型纤维(fibre type, typical fibre)　见“纤维丛”.

坐标丛(coordinate bundle)　见“纤维丛”.

转移函数(transition fuction)　见“纤维丛”.

丛射(bundle morphism)　纤维丛之间的保纤维的映射. 设给了具有相同典型纤维 F 的两个纤维丛 (E_1,B_1,π_1) 与 (E_2,B_2,π_2)，如果有映射对 (u,f)，

$$u:E_1\to E_2,\quad f:B_1\to B_2$$

使得 $\pi_2\circ u=f\circ\pi_1$，就称 (u,f) 为丛射.

丛射保持纤维，即把一个丛的纤维映为另一个丛的纤维.

向量丛(vector bundle)　特殊的纤维丛. 典型纤维为向量空间的纤维丛称为向量丛. 特别是当典型纤维分别为 R^n 与 C^n 时，相应的纤维丛分别称为秩为 n 或 n 维实向量丛与复解析向量丛. 作为例子，n 维微分流形 M 的切丛 $(T(M),M,\pi,T_p(M))$ 是一个向量丛.

纤维丛的截面(cross section of fibre bundle)　纤维丛中满足一定条件的映射. 设有纤维丛 (E,B,π,F)，如果连续映射 $s:B\to E$ 满足条件

$$\pi\circ s=\mathrm{id},$$

那么 s 称为 (E,B,π,F) 的一个截面，其中 id 表示恒同映射.

特别地，当 B 是 n 维微分流形，E 为 B 的切丛时，截面恰为流形 B 的向量场.

对于任意的纤维丛 (E,B,π,F) 的两个截面 σ_1 与 σ_2，及任意的 $f\in C^0(B)$，存在惟一的截面 $\sigma_1+\sigma_2$: $B\to E$ 与 $f\sigma_1:B\to E$，使得

$$(\sigma_1+\sigma_2)(x)=\sigma_1(x)+\sigma_2(x),$$
$$(f\sigma_1)(x)=f(x)\sigma_1(x)\ (x\in B).$$

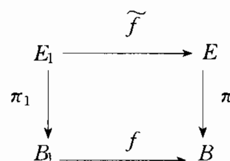
从而使得纤维丛的截面全体构成了一个 $C^0(B)$ 模，称为截面模.

一个截面 $s:B\to E$，如果 $s(x)=0\in\pi^{-1}(x)(\forall x\in B)$，则称 s 为 0 截面. 显然，对于每一个纤维丛，它的 0 截面总是存在的，但是一般地，不一定存在处处非 0 的截面，例如 $(T(S^2),S^2,\pi)$ 上便不存在处处非 0 的截面. 一个 n 维实向量丛 (E,B,π)，如果存在 n 个处处线性无关的截面 $s_1,s_2,\cdots,s_n$，则称它是可以平行化的. (E,B,π) 可平行化的充分必要条件是 (E,B,π) 等价于 $(B\times\mathrm{R}^n,B,\pi)$.

实向量丛(real vector bundle)　特殊的向量丛. 典型纤维为实(复)向量空间 $\mathrm{R}^n(\mathrm{C}^n)$，且其结构群为通常的一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathrm{R})(\mathrm{GL}(n,\mathrm{C}))$，这样构成的向量丛称为实(复) n 维向量丛. 当 $n=1$ 时称为实(复)线丛.

复向量丛(complex vector bundle)　见“实向量丛”.

诱导丛(induced bundle)　由一空间到某纤维丛的底空间的映射诱导出的纤维丛. 设 $\xi=(E,B,\pi)$ 是一个纤维丛，$f:B_1\to B$ 为连续映射，其中 B_1 为一拓扑空间，则由 f 与 ξ 可以自然地产生一个以 B_1 为底空间的纤维丛 $f^*\xi$，称它为 ξ 在 f 之下的诱导丛或 ξ 用 f 的拉回.



对于给定的 ξ 与 f，令

$E_1=\{(e,b_1)\mid e\in E,b_1\in B_1,\pi(e)=f(b_1)\}$，$E_1$ 的拓扑是 $E\times B_1$ 的诱导子空间拓扑，然后令

$$\pi_1:E_1\to B_1,\quad \pi_1(e,b_1)=b_1,$$

则容易验证 (E_1,B_1,π_1) 是一个丛. 如果令

$$\tilde{f}:E_1\to E,\quad \tilde{f}(e,b_1)=e,$$

则上图可交换，并且 $f^*\xi=(E_1,B_1,\pi_1)$ 在等价意义下是由此图所决定的.

拉回(pull-back)　见“诱导丛”.

C^k 类可微纤维丛(differentiable fiber bundle of class C^k)　转移函数是 C^k 可微的纤维丛. 若坐标丛 (E,B,π,F,G) 中 E,B,F 均为 C^k 微分流形，G 为一个李群，且图册 $\{(U,\phi)\mid U\subset B,\phi:U\times F\to\pi^{-1}(U)\}$ 中的 U 是 B 的微分结构的定义域，转移函数 $g_{ij}:U_i\cap U_j\to G$ 是 C^k 可微的，则 (E,B,π,F,G) 称为 C^k 类可微纤维丛.

作为例子，n 维 C^k 微分流形 M 的切丛 $T(M)$ 使 $(T(M),M,\pi,\mathrm{R}^n,\mathrm{GL}(n,\mathrm{R}))$ 成为一个 C^{k-1} 类可微纤维丛，亦称为 C^{k-1} 类微分切丛.

向量场(vector field)　切丛的截面. n 维微分流形 M 上一个开集 U 到切丛 $T(M)$ 的映射 X，即 $X:U\to T(M)$，且满足 $\pi\circ X=\mathrm{id}|_U$. 特别取 U 为 M

时，称 X 为 M 上的向量场. 若 $X\in C^{\infty}(U,T(M))$，则称向量场 X 为光滑向量场.

若 f 是 U 上一个 C^{∞} 函数，则 $X(f)$ 是 U 上的函数，它在 $p\in U$ 处的值为 $X_p(f)$.

设 X 是一个光滑向量场，$(U,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 M 的一个区图，$\{a_i\}$ 是 U 上的光滑函数，则 X 局部地可以表为

$$X|_U=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

反之，这样一个表达式显然也确定了 U 上的一个向量场.

其次，若 $f:M\to N$ 是微分流形间的可微映射，定义 $\mathrm{d}f\circ X:M\to T(N)$ 为

$$\forall p\in M,\quad \mathrm{d}f\circ X(p)=\mathrm{d}f|_p\circ X_p,$$

则称它为向量场 X 在 $\mathrm{d}f$ 下的像. 特别当 $M=N$，$f:M\to M$ 是一个微分同胚，若 $\mathrm{d}f\circ X=X$，则称 X 为关于 f 的不变向量场.

光滑向量场(smooth vector field)　见“向量场”.

不变向量场(invariant vector field)　见“向量场”.

李括号(Lie bracket)　关于向量场的一种运算. 设 X 与 Y 是微分流形 M 上的两个光滑向量场，定义向量场 $[X,Y]$ 在 p 点的取值为

$$[X,Y]_p(f)=X_p(Yf)-Y_p(Xf)$$
$$(p\in M,f\in C^{\infty}(M)),$$

称 $[X,Y]$ 为 X 与 Y 的李括号. 李括号有以下性质：

1. $[X,Y]$ 是 M 上的光滑向量场.
2. 若 $f,g\in C^{\infty}(M)$，则
$$[fX,gY]=fg[X,Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X.$$
3. $[X,Y]=-[Y,X]$.
4. $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$.

性质 4 称为雅可比恒等式. 一个向量空间有满足性质 3 与 4 的双线性运算就称为李代数.

设 $(U,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 M 上一个区图，则李括号的局部表示为

$$[X,Y]=\sum_{i,j=1}^{n}\left(f_i\frac{\partial g_j}{\partial x_i}-g_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

其中

$$X=\sum_{i=1}^{n}f_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad Y=\sum_{i=1}^{n}g_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

雅可比恒等式(Jacobi identity)　见“李括号”.

活动标架(moving frame)　微分流形的一组局部基. n 维微分流形 M 中开集 U 上的 n 个线性无关光滑向量场所构成的模 $\mathscr{H}(U)$ 的一组基，称为活动标架. 这样一组基是局部的，而整体上可能是不存在的.

向量场的积分曲线(integral curve of a vector field)　向量场导出的微分方程的一条解曲线. 设 X 是微分流形 M 上的光滑向量场，σ 是 M 中的一条光滑曲线，若对 σ 的定义域中每个 t 有 $\dot{\sigma}(t)=X(\sigma(t))$，则称 σ 为向量场 X 的一条积分曲线.

光滑流(smooth flow)　满足某些条件的映射. 设 M 是微分流形，$\phi:M\times\mathrm{R}\to M$ 是光滑映射，具有性质：

1. $\phi(p,0)=p(\forall p\in M)$；
2. $\phi(p,s+t)=\phi(\phi(p,s),t)$
$(\forall p\in M;\forall s,t\in\mathrm{R})$；

则称 ϕ 是 M 上的光滑流. 微分流形 M 上任一有紧支集的光滑向量场在 M 上产生一个光滑流. 特别地，紧致微分流形 M 上的每个光滑向量场都在 M 上产生一个光滑流.

局部流(local flow)　微分流形上开子集的光滑流. 设 W 是微分流形 M 的开子集，$I_\varepsilon=(-\varepsilon,\varepsilon)$，$\phi:W\times I_\varepsilon\to M$ 是光滑映射，若它具有性质：

1. $\phi(p,0)=p(\forall p\in W)$；
2. $\phi(p,s+t)=\phi(\phi(p,s),t)$
$(\forall s,t,s+t\in I_\varepsilon,p,\phi(p,s)\in W)$；

则称 ϕ 是 M 上的一个局部流.

单参数微分同胚群(one parameter group of diffeomorphisms)　含一个参数的微分同胚全体构成的群. 设 M 是微分流形，$\Theta:M\times\mathrm{R}\to M$ 是光滑映射，对每个 t，定义 $\theta_t:M\to M$ 使得

$$\theta_t(p)=\Theta(p,t)\ (\forall p\in M).$$

若映射族 $\{\theta_t|t\in\mathrm{R}\}$ 有性质：

1. 每个 θ_t 都是微分同胚；
2. $\theta_0=\mathrm{id}_M$；
3. $\theta_s\circ\theta_t=\theta_{s+t}(\forall s,t\in\mathrm{R})$；

则称 Θ 是 M 上一个单参数微分同胚群.

***c* 维分布**(*c*-dimensional distribution)　n 维微分流形 M 的切丛中各个 c 维子空间的一种选择. 设 M 是 n 维微分流形，对于每个点 $p\in M$，在 $T_p(M)$ 中选取一个 c 维子空间 $\mathscr{D}(p)\subset T_p(M)$. 记这个分布为 $\mathscr{D}$(其中 $c\leqslant n$).

若对每个点 $p\in M$，存在 p 的一个邻域 U，及存在 U 上的 c 个光滑向量场 $X_1,X_2,\cdots,X_c$，使这些光滑向量场在 U 中每点张成 $\mathscr{D}$，则称 $\mathscr{D}$ 为光滑分布.

M 上的向量场 X，若对于每个点 $p\in M$，$X_p\in\mathscr{D}(p)$，则称 X 是属于分布 $\mathscr{D}$ 的，记为 $X\in\mathscr{D}$. 对于 M 上光滑分布 $\mathscr{D}$ 的任意两个光滑向量场 X,Y，若 $[X,Y]\in\mathscr{D}$，则称 $\mathscr{D}$ 是对合分布，或称完全可积的分布.

光滑分布(smooth distribution)　见“c 维分布”.

对合分布(involutive distribution)　见“c 维

分布”.

积分流形(integral manifold) 光滑分布的积分子流形. 设 M 是 n 维微分流形,(N,ψ)是 M 的一个子流形,$\mathscr{D}$ 是 M 上的一个分布,若对于每个 $p\in N$,

$$\psi_*(T_p(N)) = \mathscr{D}(\psi(p)),$$

则称子流形(N,ψ)为 $\mathscr{D}$ 的一个积分流形. 设 $\mathscr{D}$ 是 M 上的光滑分布,则在 M 的每一点处均有 $\mathscr{D}$ 的一个积分流形的充分必要条件是 $\mathscr{D}$ 为对合分布.

弗罗贝尼乌斯定理(第一形式)(Frobenius theorem (first form)) 积分流形存在性定理. 该定理断言:若 $\mathscr{D}$ 是微分流形 M 上的一个 c 维光滑的对合分布,$p\in M$,则存在通过 p 的 $\mathscr{D}$ 的一个积分流形.

弗罗贝尼乌斯定理(经典形式)(Frobenius theorem (classical form)) 弗罗贝尼乌斯定理在 R^n 中的形式. 设 U 与 V 分别是 R^m 与 R^n 中的开集,R^m 中坐标用 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 表示,R^n 中坐标用 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 表示. 令 $b:U\times V\to A(n,m)$为 $U\times V$ 到所有 $n\times m$ 实矩阵的集合的一个 C^∞映射. 设$(r_0,s_0)\in U\times V$. 若在 $U\times V$ 上

$$\frac{\partial b_{i\beta}}{\partial r_\gamma} - \frac{\partial b_{i\gamma}}{\partial r_\beta} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial b_{i\beta}}{\partial s_j}b_{j\gamma} - \frac{\partial b_{i\gamma}}{\partial s_j}b_{j\beta}\right) = 0$$

$$(i = 1,2,\cdots,n;\gamma,\beta = 1,2,\cdots,m),$$

则在 U 中存在 r_0 的邻域 U_0,在 V 中存在 s_0 的邻域 V_0 以及惟一的映射 $\alpha:U_0\times V_0\to V$,使得如果

$$\alpha_s(r)=\alpha(r,s)\quad(s\in V_0,r\in U_0),$$

那么

$$\alpha_s(r_0) = s,\ \mathrm{d}\alpha_s|_r = b\ (r,\alpha(r,s)).$$

极大积分流形(maximal integral manifold) 某种意义下为极大的积分流形. 设(N,ψ)是流形 M 的分布 $\mathscr{D}$ 的连通积分流形,且其像不是 $\mathscr{D}$ 的其他连通积分流形的真子集,则称(N,ψ)为 $\mathscr{D}$ 的极大积分流形.

向量空间的张量积(tensor product of vector spaces) 具有泛映射性质的向量空间的某种乘积. 设 V,W 是两个有限维的实向量空间,$F(V,W)$是由对$(v,w)(v\in V,w\in W)$的所有有限线性组合所构成的 R 上的向量空间. $R(V,W)$是由$F(V,W)$的下述形式的元素全体生成的子空间

$$(v_1 + v_2,w) - (v_1,w) - (v_2, - w),$$
$$(v,w_1 + w_2) - (v,w_1) - (v,w_2),$$
$$(av,w) - a(v,w),$$
$$(v,aw) - a(v,w),$$

其中 $a\in\mathrm{R},v,v_1,v_2\in V,w,w_1,w_2\in W$,则称商空间 $F(V,W)/R(V,W)$为 V 与 W 的张量积,记为 $V\otimes W$,其元素记为

$$\sum_{i,j}a_{ij}v_i\otimes w_j,$$

$\{v_i\,|\,i=1,2,\cdots,m\}$与$\{w_i\,|\,i=1,2,\cdots,n\}$分别为 V 与 W 的一组基.

向量空间 V 与 W 的张量积 $V\otimes W$ 具有泛映射性质. 即当令 $\phi:V\times W\to V\otimes W(\phi(v,w)=v\otimes w)$时,若 $l:V\times W\to U$ 为双线性映射(U 是一个向量空间),则存在惟一的线性映射$\tilde{l}:V\otimes W\to U$,使得右图为交换图. 这时称 $V\otimes W$ 与 ϕ 组成的对因为有此性质,称为解决了泛映射问题.

$V\otimes W$ $\tilde{l}$ U
φ
$V\times W$ l

向量空间的张量代数(tensor algebra of vector space) 由向量空间与其对偶空间的张量积直和所构成的代数. 向量空间 V 的(r,s)型张量空间 $V_{r,s}$定义为

$$V_{r,s} = \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{个}}\underbrace{\otimes V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s\text{个}},$$

其中 $V_{0,0}=\mathrm{R}$,V^*是 V 的对偶空间. 对于这样一些向量空间取直和

$$T(V) = \sum_{r,s\geqslant 0}V_{r,s},$$

则在张量积的运算之下,$T(V)$成为一个代数,称为向量空间 V 的张量代数.

$T(V)$中的元素称为张量,它是各个 $V_{r,s}$中的元素关于 R 的有限线性组合,$V_{r,0}$中的元素称为 r 阶反变张量,$V_{0,s}$中的元素称为 s 阶协变张量,$V_{r,s}$中的元素称为(r,s)阶齐次张量.

设$\{e_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}$与$\{e^{*i}\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}$分别是 V 和 V^*彼此对偶的基底,则

$$e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s}$$

$$(1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_r,k_1,k_2,\cdots,k_s\leqslant n)$$

是 $V_{r,s}$的基底. 因此,(r,s)型张量 x 可以惟一地表成

$$x = \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_r\\k_1,\cdots,k_s}} x^{i_1,\cdots,i_r}_{k_1,\cdots,k_s}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s},$$

其中 $x^{i_1,\cdots,i_r}_{k_1,\cdots,k_s}$称为张量 x 在上述基底下的分量.

处理张量时,通常采用爱因斯坦的和式约定:在一个单项表达式中出现重复的上、下指标,表示该式关于这个指标在它的取值范围内求和,而略去和号不写,采用这个约定,上述张量 x 可写成

$$x = x^{i_1,\cdots,i_r}_{k_1,\cdots,k_s}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s}.$$

设 x 是(r_1,s_1)型张量,y 是(r_2,s_2)型张量,则它们的积 $x\otimes y$ 是(r_1+r_2,s_1+s_2)型张量.

张量(tensor) 见“向量空间的张量代数”.

反变张量(contravariant tensor) 见“向量空间的张量代数”.

协变张量(covariant tensor) 见“向量空间的

张量代数".

齐次张量(homogeneous tensor)　见"向量空间的张量代数".

对称张量(symmetric tensor)　各分量关于指标对称的张量,即在正整数$\{1,2,\cdots,r\}$的置换作用下不变的r阶反变张量.记$T^r(V)=V_{r,o}$,它表示r阶反变张量全体.$P(r)$表示$\{1,2,\cdots,r\}$的置换群.设$x\in T^r(V)$,若对任意的$\sigma\in P(r)$,都有$\sigma x=x$,则称x是对称的r阶反变张量.若对任意的$\sigma\in P(r)$,都有$\sigma x=\operatorname{sgn}\sigma\cdot x$,其中$\operatorname{sgn}\sigma$表示置换$\sigma$的符号,即

$$\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases}1 & (\sigma\text{是偶置换}),\\ -1 & (\sigma\text{是奇置换}),\end{cases}$$

则称x是反对称r阶反变张量.设$x\in T^r(V)$,则x是对称张量的充分必要条件是它的分量关于各指标是对称的.x是反对称张量的充分必要条件是它的分量关于各指标是反对称的.

反对称张量(anti-symmetric tensor)　见"对称张量".

对称化算子(symmetrization operator)　作用于反对称张量上的算子.对任意的$x\in T^r(V)$,令

$$S_r(x)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in P(r)}\sigma x,\ A_r(x)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in P(r)}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\sigma x.$$

它们分别称为r阶反变张量的对称化算子和反对称化算子.用$P^r(V)$表示全体对称的r阶反变张量的集合,用$\Lambda^r(V)$表示全体反对称的r阶反变张量的集合.不难验证有性质:$S_r\circ S_r=S_r,A_r\circ A_r=A_r$,且

$$P^r(V)=S_r(T^r(V)),\ \Lambda^r(V)=A_r(T^r(V)).$$

这里对于对称张量与反对称张量的讨论同样适用于协变张量.

反对称化算子(anti-symmetrization operator)　见"对称化算子".

外积(exterior product)　反变张量之间的一种运算.反对称的r阶反变张量也称为外r次向量,空间$\Lambda^r(V)$称为V上的外r次向量空间.设ξ是外k次向量,η是外l次向量,命

$$\xi\wedge\eta=A_{k+l}(\xi\otimes\eta),$$

其中A_{k+l}是反对称化算子,则$\xi\wedge\eta$是外$(k+l)$次向量,称为外向量ξ与η的外积.

外积有下列运算规律:设$\xi,\xi_1,\xi_2\in\Lambda^k(V),\eta,\eta_1,\eta_2\in\Lambda^l(V),\zeta\in\Lambda^h(V)$,则有:

1. 分配律

$$(\xi_1+\xi_2)\wedge\eta=\xi_1\wedge\eta+\xi_2\wedge\eta,$$
$$\xi\wedge(\eta_1+\eta_2)=\xi\wedge\eta_1+\xi\wedge\eta_2;$$

2. 反交换律

$$\xi\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\xi;$$

3. 结合律

$$(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta=\xi\wedge(\eta\wedge\zeta).$$

设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是V的一个基底,由结合律有

$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}=A_r(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r})$$
$$(1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_r\leqslant n).$$

设ξ是r次外向量,用分量可表示成

$$\xi=\xi^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r},$$

A_r是线性算子,故

$$\begin{aligned}\xi&=\xi^{i_1\cdots i_r}A_r(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r})\\&=\xi^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r},\end{aligned}$$

所以ξ可表示成

$$\xi=r!\sum_{i_1<\cdots<i_r}\xi^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}.$$

设$v^{*1},v^{*2},\cdots,v^{*r}$是$V^*$中任意$r$个元素,则$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}$的求值公式为

$$\begin{aligned}&e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}(v^{*1},\cdots,v^{*r})\\&=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in P(r)}(\operatorname{sgn}\sigma)\langle e_{i_1},v^{*1}\rangle\cdots\langle e_{i_r},v^{*r}\rangle\\&=\frac{1}{r!}\begin{vmatrix}\langle e_{i_1},v^{*1}\rangle & \cdots & \langle e_{i_1},v^{*r}\rangle\\ \langle e_{i_2},v^{*1}\rangle & \cdots & \langle e_{i_2},v^{*r}\rangle\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \langle e_{i_r},v^{*1}\rangle & \cdots & \langle e_{i_r},v^{*r}\rangle\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

由这个求值公式可以推出,当$r\leqslant n$时$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$构成外向量空间$\Lambda^r(V)$的基底.因此,$\Lambda^r(V)$的维数是

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

另外,还有另一种含义不同的外积运算.设X,Y是局部紧拓扑空间,则附加于$K(X)$与$K(Y)$(关于$K(X)$的定义可参见"局部紧空间的$K(X)$")的环结构上,存在一个外积

$$\boxtimes:K(X)\otimes K(Y)\to K(X\times Y).$$

$\otimes$为张量积.

外代数(exterior algebra)　各阶反变张量空间的并构成的代数.用$\Lambda(V)$记形式和

$$\sum_{r=0}^{n}\Lambda^r(V),$$

则$\Lambda(V)$是2^n维向量空间.设

$$\xi=\sum_{r=0}^{n}\xi^r,\quad\eta=\sum_{s=0}^{n}\eta^s,$$

其中$\xi^r\in\Lambda^r(V),\eta^s\in\Lambda^s(V)$.$\xi$与$\eta$的外积是

$$\xi\wedge\eta=\sum_{r,s=0}^{n}\xi^r\wedge\eta^s,$$

则$\Lambda(V)$关于外积成为一个代数,称为向量空间V的外代数或格拉斯曼代数.

向量空间$\Lambda(V)$的基底是$\{1,e_i,e_{i_1}\wedge e_{i_2},\cdots,e_1\wedge\cdots\wedge e_n\}(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant i_1<i_2\leqslant n)$.

同样,人们也有对偶空间V^*的外代数

$$\Lambda(V^*) = \sum_{0\leq r\leq n} \Lambda^r(V^*).$$

$\Lambda^r(V^*)$的元素称为向量空间上的 r 次外形式，它是 V 上反对称 r 重线性函数.

格拉斯曼代数(Grassmann algebra)　见“外代数”.

(r,s)型张量丛(tensor bundle of type (r,s))　切丛与余切丛概念的推广. 所谓(r,s)型张量丛，是指微分流形 M 上各点处切空间的(r,s)型张量空间的无交并，即 M 上(r,s)型张量丛

$$T_{r,s}(M) = \bigcup_{p\in M}(T_p(M))^r_s,$$

其中$(T_p(M))^r_s$ 表示 T_pM 的(r,s)型张量空间.

$(1,0)$型张量丛就是切丛，而$(0,1)$型张量丛就是余切丛. 与切丛类似，张量丛上也可以定义流形结构与微分结构，使张量丛成为一个微分流形.

(r,s)型张量场(tensor field of type (r,s))　微分流形上(r,s)型张量丛的 C^∞ 截面. 设$\pi: T_{r,s}(M)\to M$ 为张量丛的丛射影，映射$\alpha: M\to T_{r,s}(M)$. 若$\pi\circ\alpha=\mathrm{id}$，则称 α 为$T_{r,s}(M)$的一个截面，即 M 上(r,s)型张量场.

外形式丛(exterior form bundle)　由余切空间的外代数诱导出的一个重要概念. 所谓外形式丛，是指微分流形 M 各点处余切空间的外代数的无交并，即

$$\Lambda(TM^*) = \bigcup_{p\in M}\Lambda(T_p^*(M)).$$

M 上的 r 次外形式丛为

$$\Lambda^r(TM^*) = \bigcup_{p\in M}\Lambda^r(T_p^*(M)).$$

当然，外形式丛也能成为一个微分流形.

微分形式(differential form)　微分流形 M 上外形式丛的一个光滑截面. 设 $\omega: M\to\Lambda(TM^*)$，若对于外形式丛的丛射影 π，满足$\pi\circ\omega=\mathrm{id}$，则称 ω 为 M 上的微分形式.

r 次外形式丛的光滑截面称为 r 次微分形式，简称 r 形式. 微分 r 形式全体构成的空间记为 $E^r(M)$，$E^r(M)$是$C^\infty(M)$模. 因此，M 上微分 r 形式是光滑的反对称 r 阶协变张量场. 微分形式全体构成的空间为

$$E(M) = \sum_{r=0}^{m} E^r(M).$$

设 $\beta\in E^k(M)$，$(U,y_1,\cdots,y_n)$为 M 上某点处的区图，则微分 k 形式 β 局部地可表示为

$$\beta|U = \sum_{i_1<\cdots<i_k} b_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}y_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_{i_k},$$

其中 $b_{i_1\cdots i_k}$是 U 上的 C^∞ 函数.

$E(M)$关于外积有一个代数结构，设 $\omega,\phi\in E(M)$，c 为常数，可以定义 $\omega+\phi, c\omega, \omega\wedge\phi, f\wedge\omega$ (f 是 0 形式)，从而使 $E(M)$在外积之下构成一个分次代数.

外微分(exterior differentiation)　亦称外微分算子或外导数. 微分形式上的一种形式微分，使得 k 形式经外微分以后成为$(k+1)$形式. 对于微分流形 M，一个映射

$$\mathrm{d}: E(M)\to E(M)\ (\mathrm{d}(E^k(M))\subset E^{k+1}(M)),$$

若它满足下列条件，则称 d 为外微分：

1. 对于任意的 $\omega_1,\omega_2\in E(M)$，
$$\mathrm{d}(\omega_1+\omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2;$$
2. 若 ω_1 是 r 次微分形式，则
$$\mathrm{d}(\omega_1\wedge\omega_2) = \mathrm{d}\omega_1\wedge\omega_2 + (-1)^r\omega_1\wedge\mathrm{d}\omega_2;$$
3. 若 $f\in E^0(M)$，则 $\mathrm{d}f$ 正是函数 f 的微分；
4. 若$f\in E^0(M)$，则 $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=0$.

可以证明，$E(M)$上存在惟一满足上述性质的外微分. 此外，外微分 d 还有下列性质：

5. $\mathrm{d}^2=0$，即对于任意微分形式 ω，有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$；
6. 设 $U\subset M$ 为开集，则 $\mathrm{d}\omega|U=\mathrm{d}(\omega|U)$.

外微分算子(exterior differentiation operator)　即“外微分”.

外导数(exterior derivative)　即“外微分”.

向量场的李导数(Lie derivative of vector field)　作用于向量场的一种形式导数. 设 X 与 Y 分别是微分流形 M 上的两个光滑向量场，X_t 是与 X 联系的局部单参数变换群. 向量场 Y 关于向量场 X 在 $p\in M$ 处的李导数$(L_XY)_p$ 为

$$(L_XY)_p = \lim_{t\to 0}\frac{(X_{-t})_*(Y_{X_t(p)}) - Y_p}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(X_{-t})_*(Y_{X_t(p)}).$$

也可以等价地利用李括号定义向量场的李导数为 $L_XY=[X,Y]$. 显然，L_XY 也是一个光滑向量场.

微分形式的李导数(Lie derivative of differential form)　作用于微分形式的一种形式导数. 设 ω 是微分流形 M 上的一个微分形式，X 是 M 的一个光滑向量场，X_t 是相应于 X 的局部单参数变换群. ω 关于 X 在 $p\in M$ 处的李导数$(L_X\omega)_p$ 为

$$(L_X\omega)_p = \lim_{t\to 0}\frac{(X_t)^*(\omega_{X_t(p)}) - \omega_p}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(X_t)^*(\omega_{X_t(p)}).$$

不难证明，$L_X: E(M)\to E(M)$，故$L_X\omega\in E(M)$ 且 L_X 与 d 可交换.

微分理想(differential ideal)　外代数中满足一定条件的理想. 设 $\Phi\subset\Lambda(M)$是代数 $\Lambda(M)$的一个理想，若 $\mathrm{d}(\Phi)\subset\Phi$，即理想 Φ 关于外微分 d 是封闭的，则称 Φ 为微分理想.

微分流形 M 上一个 C^∞ 分布 $\mathscr{D}$ 是对合的充分必要条件是，理想 $\Phi(\mathscr{D})$是一个微分理想，其中

$$\Phi(\mathscr{D})=\{\omega\in\Lambda(M)\mid\omega\text{ 零化 }\mathscr{D}\}.$$

理想的积分流形(integral manifold of an ideal) 与微分理想相关的积分流形. 设$\Phi\subset\Lambda(M)$是一个理想,(N,ψ)是M的一个子流形,若对每个$\omega\in\Phi$,$\psi_*(\omega)\equiv0$,则称(N,ψ)为理想Φ的积分流形. 设(N,ψ)是理想Φ的连通积分流形,若它的像集不是该理想的其他积分流形像集的真子集,则称积分流形(N,ψ)是最大的.

弗罗贝尼乌斯定理(第二形式)(Frobenius theorem (second form)) 理想的积分流形存在性定理. 设$\Phi\subset\Lambda(M)$是由$n-m$个独立的局部生成的1形式微分理想,$n=\dim(M)(m<n)$. 设$p\in M$,则存在惟一的通过p的Φ的最大连通积分流形,且这个积分流形的维数为m.

向量空间的定向(orientation on vector space) 用最高可能阶的张量空间定向. 设V是n维向量空间,由于$\Lambda^n(V)$是一维空间,故$\Lambda^n(V)\setminus\{0\}$有两个分支. 向量空间$V$的定向就是$\Lambda^n(V)\setminus\{0\}$的分支的一个选择.

可定向流形(orientable manifold) 有确定定向的流形. 设M是n维连通微分流形,O是n次外形式丛$\Lambda^n(TM^*)$的0截面,即

$$O=\bigcup_{p\in M}\{0\in\Lambda^n(T_p^*(M))\}.$$

由于每个$\Lambda^n(T_p^*(M))\setminus\{0\}$恰有两个分支,故$\Lambda^n(M^*)\setminus O$至多有两个分支. 若$\Lambda^n(M^*)\setminus O$有两个分支,则称$M$为可定向的流形. 若$M$是不连通流形,$M$的每个分支是可定向的,则称$M$是可定向流形.

流形的定向(orientation on manifold) 类似于数学分析中给曲面确定方向那样给流形确定方向. 设M是n维连通微分流形. 若M是可定向流形,$\Lambda^n(M^*)\setminus O$的两个分支之一的一种选择称为流形$M$的定向. 若$M$是可定向的非连通流形,则$M$的定向是$M$的每个分支上定向的一个选择.

保定向映射(orientation preserving map) 保持两个流形确定定向的映射. 设M,N是两个可定向的n维流形,映射$\psi:M\to N$是可微的,若ψ_*的对偶映射

$$\psi^*:\Lambda^n(N^*)\to\Lambda^n(M^*)$$

把确定N定向的$\Lambda^n(N^*)\setminus O$的分支变成确定$M$定向的$\Lambda^n(M^*)\setminus O$的分支,则称$\psi$是保定向映射.

可微奇异 p 单形(differentiable singular p-simplex) 单形到流形的一种映射. 对于每个$p\geqslant1$,设

$$\Delta^p=\left\{(a_1,a_2,\cdots,a_p)\in\mathrm{R}^p\mid\sum_{i=1}^{p}a_i\leqslant1\text{ 且每个 }a_i\geqslant0\right\},$$

称Δ^p为标准p单形.

微分流形M中可微奇异p单形σ是一个映射$\sigma:\Delta^p\to M$,这个映射σ可以扩张为Δ^p在R^p中的一个邻域到M的一个可微映射.

称有限个可微奇异p单形的线性组合

$$c=\sum_{i=1}^{k}a_i\sigma_i$$

为M中的p链. 对于每个$p\geqslant0$,定义可微奇异p单形σ的第i个面$\sigma^i(0\leqslant i\leqslant p)$为一个可微奇异$(p-1)$单形$\sigma^i=\sigma\circ k_i^{p-1}$,其中对于$0\leqslant i\leqslant p+1$,$k_i^p:\Delta^p\to\Delta^{p+1}$为:$p=0$时,$k_0^0(0)=1$,$k_1^0=0$;$p\geqslant1$时

$$\begin{cases}k_0^p(a_1,a_2,\cdots,a_p)=(1-\sum_{i=1}^{p}a_i,a_1,a_2,\cdots,a_p),\\ k_i^p(a_1,a_2,\cdots,a_p)=(a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},0,a_i,\cdots,a_p,)\end{cases}$$
$$(1\leqslant i\leqslant p+1).$$

p单形σ的边缘定义为

$$\partial\sigma=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma^i,$$

它是$(p-1)$链.

对于一般的p链

$$c=\sum_{j=1}^{k}a_j\sigma_j,$$

c的边缘为

$$\partial c=\sum_{j=1}^{k}a_j\partial\sigma_j=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=1}^{k}(-1)^i a_j\sigma_j^i.$$

容易验证,一个链的边缘的边缘总是0,即$\partial\circ\partial c=0$,$c$是任意的$p$链.

标准 p 单形(standard p-simplex) 见"可微奇异p单形".

p 链(p-chain) 见"可微奇异p单形".

链的边缘(boundary of a chain) 见"可微奇异p单形".

链上的积分(integral over chains) 可微奇异单形的组合上的积分. 设ω是微分流形M上的p形式,σ为可微奇异p单形,定义ω在σ上的积分为

$$\int_\sigma\omega=\int_{\Delta^p}\sigma^*(\omega),$$

其中$\sigma^*(\omega)$是ω通过σ的拉回,即

$$\sigma^*(\omega)(v_1,v_2,\cdots,v_p)$$
$$=\omega(\mathrm{d}\sigma(v_1),\mathrm{d}\sigma(v_2),\cdots,\mathrm{d}\sigma(v_p))\quad(v_i\in T_pM).$$

可以把在单形上的积分线性地推广到链上. 设

$$c=\sum_{j=1}^{k}a_j\sigma_j$$

为一个p链,则p形式ω在p链c上的积分为

$$\int_c\omega=\sum_{j=1}^{k}a_j\int_{\sigma_j}\omega.$$

斯托克斯定理(Stokes' theorem) 流形上的微积分基本定理. 设c是微分流形M内的一个p链($p\geqslant1$),ω是定义在c的像的邻域内的光滑$(p-1)$形

式，则

$$\int_{\partial c}\omega=\int_c \mathrm{d}\omega$$

(参见“流形上的微积分”).

带边 C^k 流形(C^k manifold with boundary) 一种有边缘的 C^k 类微分流形. 设 M 是一个仿紧豪斯多夫空间，$\{(U_i,\phi_i)\mid i\in I\}$ 是一个图册，其中 U_i 是 M 中的开集，ϕ_i 是 U_i 到 R_+^n 的一个开集上的同胚，使得当 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$ 时，映射 $\phi_i\circ\phi_j^{-1}|_{\phi_j(U_i\cap U_j)}$ 是 C^k 类的，且至少有一个 U_i 使得 $\phi_i(U_i)\cap\mathrm{R}^{n-1}\neq\varnothing$(其中 R^{n-1} 是 R_+^n 的边界)，则称这个图册定义 M 为一个带边 C^k 流形. 在这个意义上，“C^k 流形”中的流形也称为无边 C^k 流形. 带边 C^k 流形 M 的边缘 ∂M 是一个无边 $n-1$ 维 C^k 流形. 流形是否带边是一个拓扑性质，与微分结构 $\mathscr{F}=\{(U_i,\phi_i)\mid i\in I\}$ 的选取无关.

由这个定义易知 n 维球体

$$D^n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid \sum_{i=1}^n x_i^2\leqslant 1\right\}$$

在通常拓扑之下为带边 C^k 流形.

边缘的定向(orientation of boundary) 由定向流形的定向自然诱导的流形内正则域边缘的定向. 设 M 是 n 维定向微分流形，D 是 M 内的正则域，$p\in\partial D$，一个切向量 $v\in T_p(M)$ 称为 D 的外法向量，如果对于 M 中任意一条在 p 点切于 v 的光滑曲线，它在 p 点以后总是属于 D 的外面. 即当光滑曲线 $\alpha(t)$ 使得 $\dot\alpha(0)=v$ 时，则对于 $0<t<\varepsilon$，总有

$$\alpha(t)\cap D=\varnothing.$$

设 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 为 $T_p(\partial D)$ 的一组基，如果 $v,v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 确定 M 的定向，则称 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 确定 ∂D 的诱导定向. 容易证明，∂D 的这个诱导定向与外法向量 v 和基 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 的选取无关.

无限维流形(infinite-dimensional manifold) 有限维流形的推广. 所谓无限维流形，通常是指以巴拿赫空间或希尔伯特空间为模型空间的微分流形. 无限维流形是为了适应数学研究的需要而发展起来的. 除了它在维数等方面有别于普通的微分流形之外，很多概念都可以类似于有限维情形而获得定义. 例如，可以定义 C^k 类图册：

设 X 是一个集合，$\{(U_i,\phi_i)\mid i\in I\}$ 是一族区图集，若它满足下列条件，则称这样的 $\{(U_i,\phi_i)\mid i\in I\}$ 为一个 C^k 类图册，而每个 (U_i,ϕ_i) 称为该图册中的区图：

1. 每个 U_i 是 X 的一个子集，且 U_i 的全体覆盖 X；

2. 每个 ϕ_i 是 U_i 到某个巴拿赫空间 E 的开子集 $\phi_i(U_i)$ 的双射，且对任意的 i,j，$\phi_i(U_i\cap U_j)$ 在 E 中是开子集；

3. 映射 $\phi_j\circ\phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i\cap U_j)}:\phi_i(U_i\cap U_j)\to\phi_j(U_i\cap U_j)$ 对每一对指标 i,j 是一个 C^k 同构.

也可以定义切向量：设 X 是一个 E 流形(参见下一条目)，则在任一点 $x\in X$ 处的切向量有两个等价的定义：

1. 在流形 X 处的切向量是在 x 处相切的曲线的一个等价类. 即所有的曲线 $\gamma:I\subset\mathrm{R}\to X$，$\gamma(0)=x$，若在某个区图 (U,ϕ) 中，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi\circ\gamma_1)|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi\circ\gamma_2)|_{t=0},$$

则称 $\gamma_1\sim\gamma_2$，从而形成等价类. 若向量

$$V\in E,\quad V=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi\circ\gamma)|_{t=0},$$

则它称为在区图 (U,ϕ) 中在 x 处切于曲线 γ 的切向量的代表.

2. 是 $x\in X$ 处三元组 (U_i,ϕ_i,V_i) 的等价类，其中 (U_i,ϕ_i) 是 X 在 x 处的任一相容区图，V_i 是 E 的一个向量. 若 $V_j=(\phi_j\circ\phi_i^{-1})'(\phi_i(x))V_i$，则三元组 (U_i,ϕ_i,V_i) 与 (U_j,ϕ_j,V_j) 等价.

X 在 x 处切向量的全体构成一个向量空间，称这个向量空间为切空间，记为 $T_x(X)$. 类似地也可定义相应的余切向量与余切空间 $T_x^*(X)$.

***E* 流形**(E-Manifold) 以无限维空间为模型空间的微分流形. 设 X 是一个拓扑空间，U 为 X 的一个开子集，拓扑同构 $\phi:U\to U'$ 是映到巴拿赫空间 E 的一个开子集 U' 上的，若 $\phi_i\circ\phi^{-1}$ 是一个 C^k 同构，就称 (U,ϕ) 与图册 $\{(U_i,\phi_i)\}$ 是相容的.

图册之间的相容性关系是一个等价关系. 称 X 上 C^k 类图册的等价类在 X 上定义了 C^k 流形的结构，若某个图册中的 E_i 都是拓扑线性同构的，即它们都等于向量空间 E，则称这样的 X 为 E 流形或模 E 的流形. E 流形是无限维流形.

若 E 为巴拿赫空间，则称 X 为巴拿赫流形. 若 E 为希尔伯特空间，则称 X 为希尔伯特流形.

有限维流形中许多概念，在无限维流形中都可类似地定义.

希尔伯特流形(Hilbert manifold) 见“E 流形”.

切纤维丛(tangent fiber bundle) E 流形上的每一点切空间的并所组成的纤维丛. 设 X 是有图册 $\mathscr{F}=\{(U_i,\phi_i)\mid i\in I\}$ 的 E 流形，令

$$T(X)=\bigcup_{x\in X}T_x(X),$$

$\pi:T(X)\to X$，$\pi(x,V)=x$，关于 $(U_i,\phi_i)\in\mathscr{F}$，令

$$\hat\varphi_i:\pi^{-1}(U_i)\to\phi_i(U_i)\times E,$$

$$\hat\varphi_i(x,U_x)=(\phi_i(x),V_x),$$

其中 V_x 是 U_x 在 ϕ_i 之下的代表，则容易验证，含 $\{(\pi^{-1}(U_i),\hat\varphi_i)\mid i\in I\}$ 的最大图册，构成 $T(X)$ 的一个图册，在此图册之下，$T(X)$ 成为模型在 $E\times E$ 内

的 C^{k-1} 流形，称为 E 流形 X 的切丛.

另一方面，从纤维丛的角度，把一切与 $T(X)$ 有关的对象集中于一起，可以写为 $(T(X),X,\pi,E,\mathrm{GL}(E))$，它是一个纤维丛，以 $T(X)$ 为全空间，X 为底空间，E 为典型纤维以及 $\mathrm{GL}(E)$ 为结构群.

若 v 是切纤维丛 $T(X)$ 的一个截面，即映射

$$v:X\to T(X)\ (x\mapsto(x,v_x))$$

使得 $\pi\circ v=\mathrm{id}$，则 v 称为 X 上的向量场.

模 E 子流形(submanifold of module E)　模 E 的 C^k 流形满足某些条件的子集. 设 Y 是模 E 的 C^k 流形 X 的一个子集，若存在 E 的一个闭子空间 F 和 X 的一个图册 $\{(U_i,\phi_i)\}$，使当 $U_i\cap Y\neq\varnothing$ 时，

$$\phi(U_i\cap Y)=\phi(U_i)\cap F,$$

则称 Y 是 X 的子流形.

不难验证 $\{(\tilde{U}_i,\tilde{\varphi}_i)\}$ 是模 F 的子流形 Y 的一个 C^k 图册，其中 $\tilde{U}_i=U_i\cap F$，$\tilde{\varphi}_i$ 是 ϕ_i 在 $\tilde{U}_i$ 上的限制. 若 X 是一个 E 流形，$f:X\to\mathbb{R}$ 是可微映射，c 不是 f 的临界点，则 $Y=f^{-1}(c)$ 就是 X 的一个子流形.

设 Y 是 E 流形 X 的一个子流形，F_1 是 E 的子空间. 若 F_1 可以给出 E 的一个拓扑余子空间 F_2，则称 Y 为可余子流形.

设 X 与 Y 分别为模 E 与 F 的两个微分流形，可微映射 $f:Y\to X$. 若对每一点 $y\in Y$，$f'(y)$ 是 $T_y(Y)$ 到 $T_{f(y)}(X)$ 的一个子空间上的一个同构，而该子空间同 E 中可余的固定子空间 F_1 同构，则称 f 是浸入映射，或简称浸入.

设 X 与 Y 是两个巴拿赫流形，$f:Y\to X$ 是一个同构，则每一点 $y\in Y$ 有一个邻域 V，使得 $f(V)$ 是 X 的微分同胚于 V 的子流形.

一个单射的浸入就称为嵌入；一个同胚的嵌入称为正则嵌入.

微分形式(differential form)　向量丛的截面. 在光滑巴拿赫流形 X 上的一个微分 p 形式 α 是 X 上反对称共变 p 张量的向量丛 $\Lambda^p(X)$ 的一个截面.

设 α 是一个 p 形式，β 是一个 q 形式，则它们的外积定义为

$$\begin{aligned}&(\alpha\wedge\beta)_x(v_1,v_2,\cdots,v_{p+q})\\&=\frac{1}{p!}\frac{1}{q!}\sum_{\pi}(\mathrm{sgn}\pi)\alpha_x(v_{\pi(1)},v_{\pi(2)},\cdots,v_{\pi(p)})\\&\quad\times\beta_x(v_{\pi(p+1)},\cdots,v_{\pi(p+q)}),\end{aligned}$$

其中的和式取在 $1,2,\cdots,p+q$ 的所有置换 π 上. 与有限维光滑流形类似，也可以定义外微分等概念.

辛形式(symplectic form)　满足辛条件的微分形式. 设 X 是模于巴拿赫空间 E 的一个光滑流形，X 上的辛形式 ω 是一个 2 形式，且满足：

1. ω 是闭形式，即 $\mathrm{d}\omega=0$；

2. 对每个 $x\in X$，$\omega_x:T_x(X)\times T_x(X)\to\mathbb{R}$ 是一个非退化双线性形式(即映射 $T_x(X)\to T_x^*(X)$：$v\mapsto\omega_x(v,\cdot)$ 是一个同构).

达布定理(Darboux theorem)　关于辛形式性质的定理. 该定理断言：若 ω 是一个巴拿赫流形上的辛形式，则关于每点都存在一个区图 (U,ϕ)，在这个区图中 ω 是常量(即 $\phi(U)\subset E\to\Lambda^2(E):\phi(x)\mapsto\bar{\omega}_x$ 是一个常映射).

复流形(complex manifold)　区图中映射是映到复空间的流形. 设 M 是一个仿紧豪斯多夫拓扑空间，若在 M 上存在一个图册 $A=\{(U_i,\phi_i)\mid i\in I\}$，满足下列条件，则称 A 是 M 的一个 n 维复流形结构，M 为复 n 维流形，或 n 维复流形(参见本卷《多复变函数论》同名条)：

1. 对所有的 $i\in I$，ϕ_i 是 U_i 到 $\mathbb{C}^n$ 的开子集 $\phi_i(U_i)$ 上的一个同胚；

2. 对于任意的 $i,j\in I$，当 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$ 时，$\phi_i\circ\phi_j^{-1}|_{\phi_j}(U_i\cap U_j):\phi_j(U_i\cap U_j)\to\phi_i(U_i\cap U_j)$ 是一个双全纯映射.

此处通常总认为图册 A 是最大的. 即若 (U,ϕ) 是 M 的任一个区图且 $\phi\circ\phi_j^{-1}$ 是双全纯的，则 $(U,\phi)\in A$. 容易证明，每个 n 维复流形有 $2n$ 维实解析流形的结构，作为实解析流形是可定向的而且具有一个由复结构决定的特定的定向.

复子流形(complex submanifold)　复流形的子流形. 设 M 是一个 m 维复流形，其图册为 A，N 是 M 的一个连通子集. 若对于每个 $x\in N$，存在 $(U,\phi)\in A$，使得 ϕ 同胚地映 $U\cap N$ 到

$$\mathbb{C}^n\times\{0\}\subset\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^{m-n}=\mathbb{C}^m$$

的一个开子集上，则称 N 是 M 的 n 维复子流形. 作为例子，容易知道，n 维复流形 M 的一个开连通子集是 M 的 n 维复子流形.

全纯映射(holomorphic map)　复流形上的一种有解析性的映射. 设 M,N 是分别有图册 A,B 的复流形，一个映射 $f:M\to N$，若对于所有的 $(U,\phi)\in A$，$(V,\xi)\in B$，映射

$$\xi f\phi^{-1}:\phi(U\cap f^{-1}(V))\to\xi(V)$$

是解析的，则称 f 是全纯映射或解析映射.

若 f 是一个同胚且 f 与 f^{-1} 都是解析映射，则称 f 是双全纯的，也称 M 与 N 是双全纯的或解析等价的(参见本卷《多复变函数论》同名条).

施坦流形(Stein manifold)　一种特殊的复流形. 设 M 是一个复 m 维流形，$A(M)$ 是 M 上所有全纯函数所成的环，满足下列条件，则称 M 为施坦流形：

1. 给定 $x,y\in M$，$x\neq y$，存在 $f\in A(M)$ 使得 $f(x)\neq f(y)$.

2. M 是全纯凸的：给定 M 的一个紧子集 K，$\hat{K}$

$=\{z\in M \mid |f(z)|\leqslant \|f\|_K, \forall f\in A(M)\}$是 M 的一个紧子集.

3. 给定 $z\in M$, M 中存在 z 的一个邻域 U 和 $f_1, f_2, \cdots, f_m\in A(M)$,使得当限制于 U 时,$(f_1,f_2,\cdots,f_m):U\to \mathrm{C}^m$ 是 M 的一个复解析区图.

施坦流形是全纯域的自然推广.每一个非紧黎曼曲面是施坦流形(参见本卷《多复变函数论》同名条).

复射影空间(complex projective space) 实射影空间在复情形的推广,是一种典型的复流形.设

$$\mathrm{C}^{n+1}=\{(z_1,z_2,\cdots,z_{n+1})\mid z_i\in \mathrm{C}\}$$

为 $n+1$ 维复空间,把 C^{n+1}中每一条过原点的复直线等同于一个点,便得复 n 维射影空间 $P^n(\mathrm{C})$.另一方面,$\mathrm{C}^{n+1}\setminus\{0\}$中的两个点$(z_1,z_2,\cdots,z_{n+1})$,$(z'_1,z'_2,\cdots,z'_{n+1})$称为等价的,如果$(z'_1,z'_2,\cdots,z'_{n+1})=\lambda(z_1,z_2,\cdots,z_{n+1})$,其中 λ 为一个非零复数.显然,这是一个等价关系,记此关系之下,含点$(z_1,z_2,\cdots,z_{n+1})$的等价类为$[z_1,z_2,\cdots,z_{n+1}]$,则 $P^n(\mathrm{C})$便是一切$[z_1,z_2,\cdots,z_{n+1}]$之集合,令

$$q:\mathrm{C}^{n+1}\setminus\{0\}\to P^n(\mathrm{C}),$$
$$q(z_1,z_2,\cdots,z_{n+1})=[z_1,z_2,\cdots,z_{n+1}],$$

则这是一个商映射,$P^n(\mathrm{C})$具有这个商映射之下的商拓扑.容易证明,$P^n(\mathrm{C})$在自然结构之下,成为紧连通复流形.特别地,当 $n=1$ 时,$P^1(\mathrm{C})$是普通 2 维球面 S^2 的复数表示,称为黎曼球面(参见本卷《多复变函数论》有关条目).

代数簇(algebraic variety) $P^n(\mathrm{C})$的一个子集,若它可以表示为定义在 C^{n+1}中一组齐次多项式公共零点的集合,则称它为射影代数簇,简称代数簇,也可称它为 $P^n(\mathrm{C})$的代数子集.

周(炜良)定理(Chow theorem) 关于解析子簇与代数簇之间关系的一个定理.该定理断言:$P^n(\mathrm{C})$的每个解析子簇是代数簇.

代数流形(algebraic manifold) 复射影空间中的代数子集.若 $P^n(\mathrm{C})$的一个子流形是 $P^n(\mathrm{C})$的一个代数子集,则称这个复子流形为代数子流形.若一个复流形是双全纯于某个复射影空间的一个代数子流形,也称这个复流形为代数流形.

复超平面(complex hyperplane) 复射影空间中的超平面.设$(a_0,a_1,\cdots,a_n)\in P^n(\mathrm{C})$,线性式 $a_0z_0+a_1z_1+\cdots+a_nz_n$ 的零点集合就称为复超平面.每个复超平面双全纯同构于 $P^{n-1}(\mathrm{C})$.

复环面(complex torus) 一种商空间.设 $\omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{2n}\}$是 C^n 的一个实基,L_ω 表示 C^n 的格子群为

$$L_\omega=\Big\{\sum_{j=1}^{2n}m_j\omega_j \,\Big|\, (m_1,m_2,\cdots,m_{2n})\in \mathrm{Z}^{2n}\Big\}.$$

定义商空间 $T_\omega=\mathrm{C}^n/L_\omega$ 为复 n-环面.

商映射 $\pi:\mathrm{C}^n\to T_\omega$ 是一个局部同胚,而 T_ω 是一个紧豪斯多夫空间.T_ω 是 C^n 的一个子群,其群结构为 C^n 所固有的,且在 T_ω 上的群运算是解析的,所以 T_ω 有一复李群(复李群是一复流形,且群运算为解析的)结构.复 n 维环面 T_ω 与实 $2n$ 维环面 T^{2n}从拓扑上讲是同胚的,但它们的复结构可截然不同.

阿贝尔簇(Abel variety) 特殊的复环面.所谓阿贝尔簇,是指同时是代数流形的复环面.复环面是一个簇.但当 $n>1$ 时,不是每个 n 维复环面都是代数流形,大多数不是代数流形.因此,就要寻找维数大于 1 而为代数流形的充分必要条件(参见"黎曼形式").

黎曼形式(Riemann form) 一种复正定双线性形式.设 T 为复环面,L 为 T 的格(是由 T 的实基生成的).设 $A:\mathrm{C}^n\times\mathrm{C}^n\to\mathrm{R}$ 是实反对称双线性形式,若:

1. $A(L,L)\subset \mathrm{Z}$;

2. $A(\mathrm{i}x,y)$是 C^n 上的对称正定形式;

则称 A 是 T(或 L)的黎曼形式.

一个复环面是代数流形的充分必要条件为它容许一个黎曼形式.

纯不连续群(properly discontinuous group) 双全纯变换群的一种子群.设 $\mathrm{Aut}(M)$为 M 的双全纯变换群,Γ 是 $\mathrm{Aut}(M)$的子群.若对于 M 的任意一对紧子集 K_1,K_2,集合$\{g\in\Gamma\mid g(K_1)\cap K_2\neq\varnothing\}$是有限集,就称 Γ 为 $\mathrm{Aut}(M)$的纯不连续群.

霍普夫流形(Hopf manifold) 特殊的复流形.所谓霍普夫流形,是指与$S^{2n+1}\times S^1$同胚的复流形.若 $n=1$,就称霍普夫曲面.例如,设 $H=\mathrm{C}^{n+1}\setminus\{0\}$,$G=\{g^m\mid m\in\mathrm{Z}, g(z_0,z_1,\cdots,z_n)=(a_0z_0,a_1z_1,\cdots,a_nz_n)\}$是 $\mathrm{Aut}(H)$的循环群.H/G 就是紧的且同胚于 $S^{2n+1}\times S^1$,所以 H/G 是一个霍普夫流形.

霍普夫纤维化(Hopf fibration) 映射 $q:S^{2n+1}\to P^n(\mathrm{C})$就是 S^{2n+1}的霍普夫纤维化.

解析超曲面(analytic hypersurfaces) 复流形的超曲面.设 M 是一个复流形,X 是 M 的真解析子集,若对于每个 $x\in X$,存在 $U\in U_x$ 和 $f\in A(U)$,使得 $X\cap U=f^{-1}(0)$,则称 X 为 M 的解析超曲面.

可约解析子集(reducible analytic subset) 特殊的解析子集.设 X 是复流形 M 的解析子集.若存在 M 的不等于 X 的解析子集 Y,Z,使得$X=Y\cup Z$,则称 X 为可约解析子集.若不存在 X 的具有上述性质的解析子集 Y,Z,则称 X 为不可约解析子集.

复化(complexification) 把实向量空间变为复向量空间的一种特殊的张量积.设 E 是一个实向量空间,则向量空间 $E\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{C}$ 称为 E 的复化,记为${}_{\mathrm{C}}E$.复

化有下列性质：

1. ${}_{\mathrm{C}}E$ 有自然的复向量空间的结构，其数乘定义为 $c(e\otimes_{\mathrm{R}}d)=e\otimes_{\mathrm{R}}cd\ (e\in E,c,d\in\mathrm{C})$.

2. $\dim_{\mathrm{C}}{}_{\mathrm{C}}E=\dim_{\mathrm{R}}E$.

3. ${}_{\mathrm{C}}E$ 自然分裂为实部与虚部 $E_R\oplus E_I$，实部 $E_R=\{e\otimes_{\mathrm{R}}1\mid e\in E\}$，虚部 $E_I=\{e\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{i}\mid e\in E\}$.

4. 复化运算与张量积、外积相交换.

5. ${}_{\mathrm{C}}(E')\cong L_{\mathrm{R}}(E,\mathrm{C})$，这个同构定义映 $\phi\otimes_{\mathrm{R}}c$ 为 $c\phi$.

6. 对偶对 $E\times E'\to\mathrm{R}$ 复化为对偶对

$${}_{\mathrm{C}}E\times{}_{\mathrm{C}}E'\to\mathrm{C}.$$

复化也可以把一个实向量丛变为复向量丛. 设 (E,M,P) 是微分流形 M 上的一个实向量丛，则 E 的复化${}_{\mathrm{C}}E$ 定义为把 M 上每一点的实向量空间 E_p $(p\in M)$ 复化为 $E_p\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{C}$，于是 E 成为 $E\otimes_{\mathrm{R}}\mathrm{C}$.

复结构(complex structure)　具有特殊自同态的实向量空间，由此自同态可以视该向量空间为一个复向量空间. 设 E 是实向量空间，若 E 的自同态 J 满足 $J^2=-I$，则称 J 为 E 上的复结构. 若 E 有复结构 J，只要规定

$$(a+\mathrm{i}b)e=a+bJ(e)\quad(a,b\in\mathrm{R},e\in E),$$

就可以给 E 复向量空间的结构. 反之，若 E 是复向量空间，则也能在 E 上定义复结构 J 为 $J(e)=\mathrm{i}e(e\in E)$.

复结构有下列性质：

1. 若 E,F 是分别有复结构 J_E,J_F 的向量空间，则映射 $A\in L_{\mathrm{R}}(E,F)$ 是复线性映射的充分必要条件是 $A\cdot J_E=J_F\cdot A$. 而空间 $L_{\mathrm{C}}(E,F)$ 有自然的复结构 J 为 $J(A)=A\cdot J_E=J_F\cdot A$.

2. 若 E 有复结构，则 E^* 上的复结构可以定义为 $J(\phi)=\phi\cdot J=\mathrm{i}\phi(\phi\in E^*)$.

复结构可以看成向量丛射. 设 (E,M,P) 是微分流形 M 上的实向量丛，则 E 上的复结构 J 是一个满足 $J^2=-I$ 的向量丛射 $J:E\to E$.

殆复流形(almost complex manifold)　其切空间具有复结构的实微分流形. 设 M 是一个微分流形，若它的切丛有复结构，则切丛 $T(M)$ 上的一个复结构 J 称为 M 上的殆复结构. 有此结构的流形 M 称为殆复流形.

殆复结构(almost complex structure)　见"殆复流形".

共轭映射(conjugation mapping)　复化流形之间的映射. 映射 $S:{}_{\mathrm{C}}E\to{}_{\mathrm{C}}E$ 定义为

$$S(e\otimes_{\mathrm{R}}c)=e\otimes_{\mathrm{R}}\bar{c}\quad(e\in E,c\in\mathrm{C}),$$

称 S 为共轭映射. 通常写成 $S(X)=\overline{X}(X\in{}_{\mathrm{C}}E)$. 共轭映射有下列性质：

1. $S\mathrm{i}=-\mathrm{i}S$.

2. 设 $X\in{}_{\mathrm{C}}E$，则 $X=\overline{X}$ 的充分必要条件为 $X\in E_R$，而 $X=-\overline{X}$ 的充分必要条件为 $X\in E_I$.

3. 共轭映射与张量积、外积相交换.

4. 利用自然同构${}_{\mathrm{C}}E'\cong L_{\mathrm{R}}(E,\mathrm{C})$，可以把共轭映射看做函数的共轭.

5. 共轭映射与对偶对${}_{\mathrm{C}}E\times{}_{\mathrm{C}}E'\to\mathrm{C}$ 相交换，且对所有的 $X\in{}_{\mathrm{C}}E,\phi\in{}_{\mathrm{C}}E'$，有 $\overline{\langle X,\phi\rangle}=\langle\overline{X},\bar{\phi}\rangle$.

6. 映射 $A\in L_{\mathrm{C}}({}_{\mathrm{C}}E,{}_{\mathrm{C}}F)$ 的共轭 $\overline{A}=S\cdot A\cdot S$.

共轭向量空间(conjugate vector space)　共轭于复向量空间的空间. 设 E 是有复结构 J 的向量空间，可在集合 $\{\bar{e}\mid e\in E\}$ 上定义 $(a+\mathrm{i}b)\bar{e}=\overline{(a-\mathrm{i}b)e}$，其中 $a,b\in\mathrm{R},e\in E$，则它成为一个复向量空间，称为共轭于 E 的向量空间，记为 $\overline{E}$. 共轭空间有下列性质：

1. $\overline{E}^*\cong\overline{E^*}$. 这个同构的定义为，映 $\varphi\in\overline{E}^*$ 为 $\bar{\varphi}\in E^*$，这里的 $\bar{\varphi}(e)=\overline{\varphi(\bar{e})}(e\in E)$.

2. 取共轭空间的运算为取对偶的运算，则张量幂和外幂相交换.

复化线性映射(complexified linear map)　复向量空间间的线性映射被复化. 设 E,F 是复向量空间，$A\in L_{\mathrm{R}}(E,F)$. A 的复化为

$${}_{\mathrm{C}}A=A\otimes_{\mathrm{R}}1\in L_{\mathrm{C}}(E,F),$$

则称${}_{\mathrm{C}}A$ 是复化线性映射.

${}_{\mathrm{C}}E$ 的外代数(exterior algebra of ${}_{\mathrm{C}}E$)　实向量空间复化的外代数. 由同构

$$\mu:\Lambda^p\,{}_{\mathrm{C}}E\to\bigoplus_{r+s=p}\Lambda^rE\otimes\Lambda^s\overline{E},$$

$$\mu:\Lambda^p\,{}_{\mathrm{C}}E'\to\bigoplus_{r+s=p}\Lambda^rE^*\otimes\Lambda^s\overline{E}^*$$

可知，若令

$$\Lambda^{r,s}(E)=\mu^{-1}(\Lambda^rE\otimes\Lambda^s\overline{E}),$$

$$\Lambda^{r,s}(E')=\mu^{-1}(\Lambda^rE^*\otimes\Lambda^s\overline{E}^*),$$

则${}_{\mathrm{C}}E,{}_{\mathrm{C}}E'$ 的外代数分别为

$$\Lambda^p_{\mathrm{C}}E=\bigoplus_{r+s=p}\Lambda^{r,s}(E),\Lambda^p({}_{\mathrm{C}}E')=\bigoplus_{r+s=p}\Lambda^{r,s}(E').$$

$\Lambda^{r,s}(E)$ 的元素称为复 (r,s) 向量，$\Lambda^{r,s}(E')$ 的元素称为复 (r,s) 形式.

${}_{\mathrm{C}}E'$ 的外代数(exterior algebra of ${}_{\mathrm{C}}E'$)　见"${}_{\mathrm{C}}E$ 的外代数".

对偶向量丛(dual vector bundle)　共轭转换函数所确定的向量丛. 设 E 是一个复向量丛，它的转换函数为 $\theta_{ij}:U_{ij}\to\mathrm{GL}(\mathrm{C}^n)$. 规定新的映射

$$\theta_{ij}^*:U_{ij}\to\mathrm{GL}(\mathrm{C}^{n*}),$$

θ_{ij}^* 满足转换函数的条件，以 θ_{ij}^* 为转换函数的复向量丛就称为 E 的对偶向量丛，记为 E^*.

全纯向量丛(holomorphic vector bundle)　实流形上实向量丛的概念在复数情形的推广. 设 M 是一个复流形，则 M 上的一个 m 维全纯向量丛是一个三元组 (E,M,P)，其中 E 为复流形，$P:E\to M$ 为全纯映射，称为投影，而且存在 M 上的一个开覆盖

$\{U_i|i\in I\}$，使得对于每个 U_i，都有全纯同胚 ϕ_i：$p^{-1}(U_i)\to U_i\times \mathbf{C}^m(\phi_i(e)=(x,v)$，当 $p(e)=x)$，同时对于任意 i,j，当 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$ 时，

$\phi_i\circ\phi_j^{-1}|_x:\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^m$，

$\phi_i\circ\phi_j^{-1}|_x(v)=q(\phi_i\circ\phi_j^{-1}(x,v))\ (q(x',v')=v')$

是 $\mathbf{C}^m$ 上的一个线性同构，其中 $q:U_j\times\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^m$ 是投射.

反全纯向量丛(anti-holomorphic vector bundle)　其共轭向量丛为全纯向量丛时的向量丛. 设 E 是 M 上的复向量丛，若 $\overline{E}$ 是一个全纯向量丛，就称 E 是反全纯向量丛.

复化切丛(complexified tangent bundle)　复流形的实切丛的复化丛. 设 M 是复微分流形，$T(M)$ 为 M 的实切丛，则称复向量丛 ${}_{\mathbf{C}}T(M)$ 为复化切丛；而称 ${}_{\mathbf{C}}T^*(M)$ 为复化余切丛.

复化余切丛(complexified cotangent bundle)　见“复化切丛”.

复微分 *p* 形式(complex differential *p*-form)　一种截面. 从 $\Lambda^p{}_{\mathbf{C}}T^*(M)$ 的截面就称为 M 上的复微分 p 形式，$p\geqslant 0$. 外微分复化后给出复微分形式上的算子，仍记为 d，算子 d 的性质与实流形的外微分运算的性质相同，此外它是实的，即

$$\overline{\mathrm{d}\phi}=\mathrm{d}\overline{\phi}\quad(\phi\in C^\infty(\Lambda^p\mathbf{C}T^*(M))).$$

复化李括号(complexification of Lie bracket)　实流形中李括号经复化后的结果. 李括号复化给出 $C^\infty({}_{\mathbf{C}}T(M))$ 的李括号，定义为

$$[X_1+\mathrm{i}Y_1,X_2+\mathrm{i}Y_2]$$
$$=[X_1,X_2]-[Y_1,Y_2]-\mathrm{i}([Y_1,X_2]+[X_1,Y_2]),$$

其中 $X_1,X_2,Y_1,Y_2\in C^\infty({}_{\mathbf{C}}T(M))$.

类似地，也可把李导数复化为 ${}_{\mathbf{C}}T(M)$ 的全张量代数上的导数.

挠率(torsion)　一种由殆复结构决定的张量场. M 上殆复结构 J 的挠率是张量场

$$N\in C^\infty(\Lambda^2T^*(M)\otimes T(M)).$$

张量场 N 表述为

$$[N,X\wedge Y]$$
$$=[JX,JY]-[X,Y]-J[X,JY]-J[JX,Y],$$

其中 $X,Y\in C^\infty(T(M))$.

算子 ∂(operator ∂)　复流形上的一种微分算子. 设 M 是复流形，定义算子 $\partial:C^{r,s}(M)\to C^{r+1,s}(M)$ 与 $\overline{\partial}:C^{r,s}(M)\to C^{r,s+1}(M)$ 为 $\mathrm{d}=\partial+\overline{\partial}$，其中 $C^{r,s}(M)$ 表示丛 $\Lambda^{r,s}(M)'$ 的 C^∞ 截面的空间. 对于 $p\geqslant 0$，算子 ∂，$\overline{\partial}$ 诱导出算子 $\partial,\overline{\partial}:C^p(M)\to C^{p+1}(M)$ 且满足 $\mathrm{d}=\partial+\overline{\partial}$.

算子 ∂ 与 $\overline{\partial}$ 有性质：

1. $\partial^2=0,\overline{\partial}^2=0,\partial\overline{\partial}+\overline{\partial}\partial=0$.
2. ∂ 与 $\overline{\partial}$ 是共轭算子，$\overline{\partial\phi}=\overline{\partial}\,\overline{\phi}(\phi\in C^p(M))$.
3. $\partial(\phi\wedge\xi)=\partial\phi\wedge\xi+(-1)^p\phi\wedge\partial\xi(\phi\in C^p(M),\xi\in C^q(M))$；对 $\overline{\partial}$ 类似的等式也成立.
4. 若 $f:M\to N$ 是全纯的，$\phi\in C^p(N)$，则 $f^*\partial\phi=\partial(f^*\phi)$；类似地对 $\overline{\partial}$ 也成立，其中 f^* 为 f 的拉回.
5. 局部坐标下，

$$\phi=\sum_{IJ}\phi_{IJ}\mathrm{d}z_I\mathrm{d}z_J,$$

$$\partial\phi=\sum_{j=1}^m\sum_{IJ}\frac{\partial\phi_{IJ}}{\partial z_j}\mathrm{d}z_j\mathrm{d}z_I\mathrm{d}z_J,$$

$$\overline{\partial}\phi=\sum_{j=1}^m\sum_{I,J}\frac{\partial\phi_{IJ}}{\partial\overline{z}_j}\mathrm{d}\overline{z}_j\mathrm{d}z_I\mathrm{d}z_J.$$

6. 对 $p\geqslant 0$，

$$\Omega^p(M)=\mathrm{Ker}(\overline{\partial}:C^{p,0}(M)\to C^{p,1}(M)),$$

$\Omega^p(M)$ 是 $\Lambda^{p,0}(M)$ 的全纯截面的空间.

算子 $\overline{\partial}$(operator $\overline{\partial}$)　见“算子 ∂”.

铎尔博尔-格罗腾迪克引理(Dolbeault-Grothendieck lemma)　方程 $\overline{\partial}u=f$ 解的存在定理. 该定理断言：设 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开多圆柱，$f\in C^{p,q+1}(D)$ 满足 $\overline{\partial}f=0(p,q\geqslant 0)$，若 W 是 D 的相对紧开子集，则存在 $u\in C^{p,q}(W)$，使得 $\overline{\partial}u=f$ 在 W 上成立.

复线丛(complex line bundle)　一维复向量丛.

全纯线丛(holomorphic line bundle)　转换函数为全纯函数的复线丛. 设 E 是黎曼曲面 M 上的一个复线丛，$\theta_{ij}:U_{ij}\to\mathrm{GL}(\mathbf{C})$ 是 E 的转换函数. 若 θ_{ij} 都是全纯函数，则称 E 为 M 上的一个全纯线丛.

黎曼曲面(Riemann surface)　有复解析图册的拓扑空间. 若拓扑空间 M 上的图册 $A=\{(U_i,\phi_i)|i\in I\}$ 满足下列条件，则 A 称为复解析图册，M 与图册 A 一起就称为黎曼曲面：

1. $\{U_i\}$ 是 M 的一个开覆盖；
2. 对每个 $i\in I$，ϕ_i 是 U_i 到 $\mathbf{C}$ 的一个开子集的同胚；
3. 对所有 $i,j\in I$，$\phi_i\phi_j^{-1}$ 是 $\phi_j(U_i\cap U_j)$ 到 $\phi_i(U_i\cap U_j)$ 的一个双全纯映射.

标准丛(canonical bundle)　复流形的余切丛的 n 次外形式丛. 设 M 为 n 维复流形，则称 $\Lambda^n(T^*M)$ 为 M 的标准丛，记为 $K(M)$.

超平面截面丛(hyperplane section bundle)　$P^n(\mathbf{C})$ 中全纯线丛的对偶丛. 设 $L\subset P^n(\mathbf{C})\times\mathbf{C}^{n+1}$ 表示集合 $\{(l,z)|l\in P^n(\mathbf{C}),z\in l\}$，$P^n(\mathbf{C})$ 上的射影诱导一个射影 $\pi:L\to P^n(\mathbf{C})$. 可以验证，L 有 $n+1$ 维复流形结构，π 是全纯的，且 L 有 $P^n(\mathbf{C})$ 上的全纯线丛的自然结构，称 L 的对偶丛 L^* 为 $P^n(\mathbf{C})$ 的超平面截面丛，记为 H.

几何亏格(geometric genus)　与标准丛相关的复维数. 设 M 为 m 维紧复流形，$K(M)$ 表示 M 的标准丛 $\Lambda^mT^*(M)$. M 的几何亏格 $P_g(M)$ 为

$$\dim_{\mathbf{C}}(\Omega(K(M))).$$

埃尔米特形式(Hermite form)　复流形上的一

种特殊双线性形式. 设 E 是 m 维复向量空间，映射 $H:E\times E\to\mathbb{C}$，若满足条件：

1. $H(x,y)=\overline{H(y,x)}(\forall x,y\in E)$；
2. $H(ax_1+bx_2,y)=aH(x_1,y)+bH(x_2,y)$ $(a,b\in\mathbb{C},x_1,x_2,y\in E)$；

则称 H 为 E 上的埃尔米特形式. 若 H 还满足：

3. $H(x,x)>0(x\neq0,x\in E)$；

则称 H 为正定埃尔米特形式.

设 M 是复流形，若 $T^*(M)\otimes\overline{T^*(M)}$ 的截面 H 使得对所有的 $x\in M$，$H(x)$ 是 $T_x(M)$ 上的埃尔米特形式，则称该截面 H 为复流形 M 的埃尔米特形式.

列维形式(Levi form)　复形的(1,1)微分形式. 设 M 是一个复流形，$\phi\in C^2_{\mathbb{R}}(M)$，$\phi$ 的列维形式是(1,1)形式 $L(\phi)=\partial\bar{\partial}\phi$.

***M* 的定义函数**(defining function for M)　复流形的相对紧集上的函数. 设 M 是 m 维复流形 $\widetilde{M}$ 中的相对紧域，且 M 有 C^2 边界 ∂M. 如果 $\phi\in C^2_{\mathbb{R}}(\widetilde{M})$ 满足条件：

1. $M=\{x\in\widetilde{M}\mid\phi(x)<0\}$；
2. $\partial M=\phi^{-1}(0)$；
3. 在 ∂M 上 $\mathrm{d}\phi\neq0$；

则称 ϕ 是 M 的定义函数.

***q* 拟凸域**(q-quasiconvex domain)　复流形上列维形式满足某些条件的相对紧集. 假设 M 是复流形 $\widetilde{M}$ 中的相对紧域，M 有 C^2 边缘. 再设 M 有定义函数 ϕ，$L(\phi)$ 是列维形式. 称 M 为 q 拟凸域(或严格 q 拟凸域)，若对所有的 $x\in\partial M$，有

$n(x)=n(L(\phi)(x))\leqslant q$ (或 $n(x)+z(x)\leqslant q$)，

其中 $n(x)=n(L(\phi)x)$ 表示埃尔米特形式 $L(\phi)(x)$ 的系数函数的负特征值的数目，$z(x)=z(L(\phi)(x))$ 表示埃尔米特形式 $L(\phi)(x)$ 的系数函数零特征值数目.

0 拟凸域称为列维拟凸域，简记为 Lp 域. 严格 0 拟凸域称为严格列维拟凸域，简记为 SLp 域.

***SLp* 域**(SLp domain)　见"q 拟凸域".

弱正向量丛(weakly positive vector bundle)　有特殊的零截面的全纯向量丛. 设 E 是紧复流形 M 上的一个全纯向量丛，若 E 的零截面上存在一个 SLp(严格列维拟凸)邻域，则称 E 为弱负向量丛. 若 E^* 为弱负向量丛，则称 E 为弱正向量丛.

弱负向量丛(weakly negative vector bundle)　见"弱正向量丛".

小平邦彦嵌入定理(Kodaira embedding theorem)　紧复流形容许到射影空间的嵌入定理. 该定理断言：若 M 是一个紧复流形，E 是 M 上的一个弱正向量丛，则 M 容许在射影空间中的一个嵌入.

上述嵌入定理是由小平邦彦得到的，故称为小平邦彦嵌入定理.

莫尔斯理论

莫尔斯理论(Morse theory)　研究可微流形 M 上定义的可微实函数 f 的性质与流形 M 的拓扑与几何性质相互关系的数学分支. 给定拓扑空间 X 与其上的连续实函数 f，则称定义了变分问题 (X,f). 大范围变分法即是对于给出的变分问题 (X,f)，以函数 f 的性质与空间 X 的性质之间的关系作为研究对象的数学分支. 在应用上重要的变分问题有：

1. 与可微函数 f 有关的问题；
2. 与由道路构成的空间 Ω 上的能量函数 E 有关的问题.

其中特别是问题 2 是以黎曼流形上的测地线理论为基础，因而是以普通的变分法为其分析学基础的. 问题 1 和 2 是由庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)与伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)所开创，莫尔斯(Morse，H. M.)把它们发展成近代的样子，即莫尔斯理论. 继莫尔斯以后，柳斯捷尔尼克(Люстерник,Л. А.)和施尼雷尔曼(Шнирельман,Л. Г.)开辟了另一条估计临界点个数的途径，即利用畴数来估计流形上函数的临界点. 而斯梅尔(Smale,S.)把莫尔斯理论中梯度向量场零点的问题推广为流形 M 上一般向量场的零点问题，从而导致维数 $n\geqslant5$ 情形广义庞加莱猜测的解决，这是微分拓扑中的一个重大成就.

其次，由于测地线问题是一维变分问题，故可使得无限维空间 Ω 上的问题，化为有限维流形上的临界点问题. 但是对于多维变分问题，无法做到这一点，这就使得发展无限维流形上的莫尔斯理论成为需要. 总之，近年来莫尔斯理论被进一步推广和精密化，并应用于微分拓扑、微分几何、偏微分方程、杨-米尔斯方程等各个数学领域而取得重要的结果.

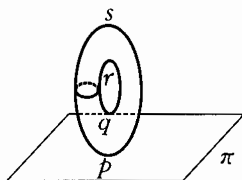


图 1

可以给莫尔斯理论一个直观的、有典型意义的解释，使得据此窥见这个理论之一斑. 设 M 为切于平面 π 的一个环面，$f:M\to\mathbb{R}$ 是由环面上的点到平面 π 的距离所决定的映射(见图 1)，这是 M 上的一个莫尔斯函数. 设 M^a 是 M 上一切使得 $f(x)\leqslant a$ 的点 x 所构成的集合，则由图 2 可见：

1. 当 $a<0$ 时，M^a 为空集.
2. 当 $f(p)<a<f(q)$ 时，M^a 同胚于 2 维胞腔(见图 2(a)).
3. 当 $f(q)<a<f(r)$ 时，M^a 同胚于柱面(见图 2(b)).
4. 当 $f(r)<a<f(s)$ 时，M^a 是环面挖去一个开

2维胞腔(见图2(c)).

5. 当 $f(s)<a$ 时，M^a 为整个环面(见图2(d)).

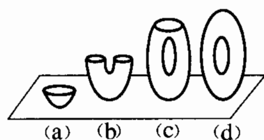


图 2

为了考虑 a 经过 $f(b),f(q),f(r),f(s)$ 时 M^a 的改变，人们来考察图2中的流形(a)，(b)，(c)，(d)的同伦型～：

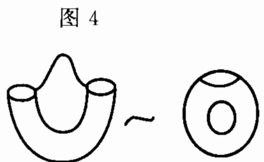
1. →2.. 相当从空集∅出发，粘一个0维胞腔，即从同伦型来看，增加了一个点(图3)；

2. →3.. 从同伦型来看，是在2维胞腔(a)的基础上粘一个1维胞腔(见图4)；



图 3　　图 4

3. →4.. 再在原先基础上粘一个1维胞腔(见图5)；



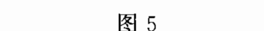


图 5

4. →5.. 在原先基础上粘一个2维胞腔. 另一方面，在 M 上每一点附近，可以取一个局部坐标系，使得 f 在该点附近表示为一个 x,y 的二元函数. 特别地，可以看到，在 M 上的点 p,q,r,s 处，有偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

而 f 在 p 点附近，可表示为

$$f(x,y)=x^2+y^2,$$

在 q 点或 r 点附近，可表示为 $f(x,y)=$常数$+x^2-y^2$，在 s 点附近可表为 $f(x,y)=$常数$-x^2-y^2$. 因此，上述表达式中负号的数目等于 M^a 经临界点变为 $M^b\sim M^a\cup e^k$ 时，所粘胞腔 e^k 的维数 k.

其次，由切除定理，

$$H_*(M^b,M^a)=H_*(M^a\cup e^k,M^a)=H_*(e^k,e^k),$$

所以 $H_k(M^b,M^a)=\mathsf{Z}$，$H_i(M^b,M^a)=0,i\neq k$，从而 $H_*(M^b,M^a)$ 在某一维数 k 的贝蒂数是负号数为 k 的临界点的个数.

临界点(critical point)　莫尔斯理论中的基本概念. 设 $f:M\to\mathsf{R}$ 是流形 M 上的光滑实值函数，如果 f 在点 $p\in M$ 的微分 $f_*:T_p(M)\to T_{f(p)}(\mathsf{R})$ 为零，就称点 p 为函数 f 的一个临界点. 点 p 处的函数值 $f(p)$ 就称为临界值.

临界值(critical value)　见“临界点”.

非退化临界点(non-degenerate critical point)　使黑塞矩阵可逆的临界点. 设 p 是 f 的临界点，若矩阵 $((\partial^2 f/\partial x^i\partial x^j)(p))$ 是可逆的，就称 p 是 f 的非退化临界点. 若此矩阵不是可逆的，则称 p 是 f 的退化临界点.

退化临界点(degenerate critical point)　见“非退化临界点”.

黑塞矩阵(Hessian matrix)　其元为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(p)$$

的矩阵. 设 p 是 f 的临界点，切空间 $T_p(M)$ 上的对称双线性泛函

$$f_{**}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j(p)}$$

就是函数 f 在 p 处的黑塞矩阵.

退化阶数(nullity)　莫尔斯理论的一个概念. 函数 f 在临界点 p 的退化阶数就是黑塞矩阵的零空间的维数.

指数(index)　莫尔斯理论的一个概念. 函数 f 在非退化临界点 p 的指数是黑塞矩阵的负特征值的个数，也称为临界点的指数.

莫尔斯函数(Morse function)　可微流形上一种具有良好性质的可微实函数. 设 $f:M\to\mathsf{R}$ 是可微函数，若 f 的所有临界点都是非退化的，则称函数 f 为莫尔斯函数. 由萨德定理可以证明，对于每个可微流形 M，总存在 M 上的莫尔斯函数 f，使得每个 $f^{-1}(-\infty,a]$ 都是紧的.

莫尔斯引理(Morse lemma)　关于函数在非退化临界点附近的性状的一个命题. 它断言：设 $f:M\to\mathsf{R}$，$p\in M$ 为 f 的非退化临界点，则存在 p 的一个邻域 U 上的局部坐标系 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，它以 p 为坐标原点，而 f 在 U 上可以表示为

$$f(q)=f(p)-x_1^2-\cdots-x_\lambda^2+x_{\lambda+1}^2+\cdots+x_n^2,$$

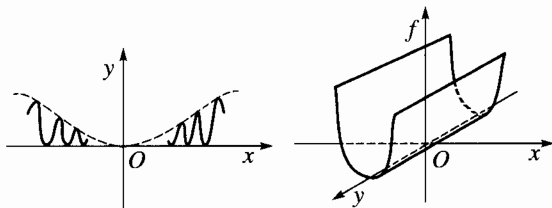


图 1

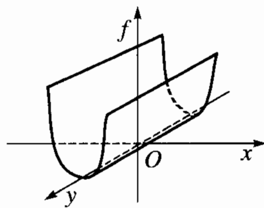


图 2

其中 $q=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$p=(0,0,\cdots,0)$，λ 为 f 在 p 点的指数. 由这个引理可知，f 的每一个非退化临界点是孤立的.

函数在退化临界点附近的情况可能比较复杂，例如，$f:\mathsf{R}\to\mathsf{R}$，$f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}\sin^2(1/x)$，则 $0\in\mathsf{R}$ 是 f 的一个退化临界点，它在 f 的临界点集合中不

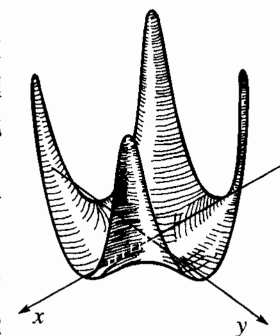


图 3

是孤立的，其图象见图 1；又如，$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，$f(x,y)=x^2$，$f$ 的临界点均退化，临界点集为 y 轴，临界点不是孤立的，$f(x,y)$的图象见图 2；再如，$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，$f(x,y)=x^2y^2$，它的图象见图 3，一切临界点均退化，临界点集为 x 轴与 y 轴，甚至不是 $\mathbb{R}^2$ 的一个子流形.

流形的同伦型(homotopy type of manifold) 可微流形可用其上的莫尔斯函数的临界值来陈述其同伦型. 设 $f:M\to\mathbb{R}$ 为可微流形 M 上的可微实函数，对于 $a,b\in\mathbb{R}$，令

$$M^a=\{p\in M\mid f(p)\leqslant a\},$$

$$f^{-1}[a,b]=\{p\in M\mid a\leqslant f(p)\leqslant b\}.$$

令 $e^k=\{x\in\mathbb{R}^k\mid \|x\|\leqslant 1\}$，$e^k$ 称为 k 维胞腔，于是 e^k 的边界 $=s^{k-1}=\{x\in\mathbb{R}^k\mid\|x\|=1\}$. 设 Y 为拓扑空间，$g:s^{k-1}\to Y$ 连续，则 e^k 通过 g 粘于 Y 是无交并 $Y\cup e^k$ 在关系 $x\sim g(x)(x\in s^{k-1})$之下的商空间，记为 $Y\cup_g e^k$. 特别地，$s^{-1}=\varnothing$，$Y\cup_g e^0$ 即是在 Y 上加入一个另外的点.

关于流形在正则点与临界点附近的性状，有下列结论：

1. 设 $f:M\to\mathbb{R}$ 为可微流形 M 上的可微函数，$a<b$，$f^{-1}([a,b])$为 M 中的紧集，不含临界点，则 M^a 微分同胚于 M^b，且含入映射 $i:M^a\to M^b$ 是一个同伦等价.

2. 设 $f:M\to\mathbb{R}$ 为可微流形 M 上的可微函数，$p\in M$ 为 f 的一个指数为 λ 的非退化临界点，$f(p)=c$，使得对于充分小的 ε，$f^{-1}[c-\varepsilon,c+\varepsilon]$紧且不含除 p 以外的临界点，则 $M^{c+\varepsilon}$与 $M^{c-\varepsilon}\cup_g e^\lambda$ 有相同的同伦型.

3. 设 $f:M\to\mathbb{R}$ 为可微流形 M 上的莫尔斯函数，关于每个 $a\in\mathbb{R}$，M^a 紧，则 M 与一个 CW 复形 K 有相同的同伦型，其中 K 对于 M 的每个指数为 λ 的临界点有一个 λ 维胞腔.

球面的拓扑特征(topological characterization of sphere) 作为莫尔斯理论的一个应用，对 n 维球面 S^n 用微分拓扑的语言来描述：设 M 为 n 维连通闭(紧、无边)可微流形，而且在它上面有一个恰有两个非退化临界点的莫尔斯函数，则 M 同胚于 n 维球面 S^n. 这个结论成立的原因是比较显然的，因为 $f:M\to\mathbb{R}$ 恰有两个临界点，故必为极大点 p 与极小点 q，因而由莫尔斯引理，分别有指数 0 与 n，不妨设 $f(p)=0$，$f(q)=1$，则$f^{-1}[\varepsilon,1-\varepsilon]$同胚于$S^{n-1}\times I$(参见"流形的同伦型")，因此 M 同胚于 S^n.

关于这个结论，当 f 的两个临界点为退化时也能证明，但比较复杂一些. 其次，此处所指的同胚并非微分同胚，因为米尔诺(Milnor，J. W.)曾证明在 S^7 上有不同的微分结构.

莫尔斯不等式(Morse inequalities) 表示流形的拓扑与流形上莫尔斯函数的临界点指数之间关系的一些不等式. 设 F 为域，$R_\lambda(M)$是可微流形 M 以 F 为系数域的 λ 维贝蒂数，即同调群 $H_\lambda(M;F)$的秩，c_λ 为莫尔斯函数 $f:M\to\mathbb{R}$ 的指数为 λ 的临界点的个数，于是有下列结论成立：若 M 为紧可微流形，则

$$R_\lambda(M)\leqslant c_\lambda, \tag{1}$$

$$\chi(M)=\sum(-1)^\lambda R_\lambda(M)=\sum(-1)^\lambda c_\lambda, \tag{2}$$

$$R_\lambda(M)-R_{\lambda-1}(M)+\cdots\pm R_0(M)\leqslant c_\lambda-c_{\lambda-1}+\cdots\pm c_0, \tag{3}$$

其中 $\chi(M)$为 M 的欧拉示性数. 利用(1)与(3)，还容易得到，若 $c_{\lambda+1}=c_{\lambda-1}=0$，则$R_{\lambda+1}(M)=R_{\lambda-1}(M)=0$ 且$R_\lambda(M)=c_\lambda$.

临界点理论(theory of critical points) 见"莫尔斯理论"和"流形的同伦型".

道路空间的变分(variation on path space) 临界点理论在测地线问题上的应用. 设 M 为可微流形，$p,q\in M$，M 上全体以 p 为始点，q 为终点的道路 $\omega:[0,1]\to M$ 之集记为 $\Omega(M;p,q)=\Omega$，Ω 在 ω 处的切空间定义为一切沿 ω 的使 $\omega(0)=\omega(1)=0$ 的 M 的切向量之集，并在其上引进线性运算，这个切空间记为 Ω_ω. Ω 上端点 ω 固定的变分是映射 $\bar\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Omega$，使得

$$\bar\alpha(0)=\omega,\quad \alpha(u,t)=\bar\alpha(u)(t)$$

为分块光滑映射. 同理，若把$(-\varepsilon,\varepsilon)$换作 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心的邻域 U，则 $\bar\alpha:U\to\Omega$，$\bar\alpha(0)=\omega$，称为 ω 的具有 n 个参数的变分.

设 M 为黎曼流形，则对于 $\omega\in\Omega$，ω 从 a 到 b 的能量定义为

$$E_a^b(\omega)=\int_a^b\left\|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right\|^2\mathrm{d}t,$$

其中 $0\leqslant a<b\leqslant 1$，且记 $E_0^1=E$. 今设 M 为完备黎曼流形，$p,q\in M$ 之间的距离为 d，$\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Omega$ 是 ω 的变分，

$$\omega_t=\frac{\partial\alpha}{\partial u}(0,t)=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)(0,t)$$

是由 α 诱导的变分向量场，

$$v_t=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},\quad A_t=\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)',$$

以及 $\Delta_t v=v_{t+}-v_{t-}$，则 $\Delta_t v$ 除有限个 t 值以外都是 0. 于是有第一变分公式

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}E(\alpha(u))}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0}=-\sum_{t\in(0,1)}\langle\omega_t,\Delta_t v\rangle-\int_0^1\langle\omega_t,A_t\rangle\mathrm{d}t,$$

由此可知仅当 ω 是 E 的临界点时，ω 才是测地线. 其次，设$\gamma:[0,1]\to M$ 为测地线，$\omega_1,\omega_2\in\Omega_\omega$，$U$ 是 $\mathbb{R}^2$

上原点的邻域，$\alpha: U\times[0,1]\to M$ 为双参数变分，满足

$$\alpha(0,0,t)=\gamma(t),$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial u_1}(0,0,t)=\omega_1(t),$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial u_2}(0,0,t)=\omega_2(t),$$

则黑塞泛函 $E_{**}(\omega_1,\omega_2)$ 可定义为

$$E_{**}(\omega_1,\omega_2)=\left.\frac{\partial^2 E(\bar\alpha(u_1,u_2))}{\partial u_1\partial u_2}\right|_{(0,0)},$$

其中 $\bar\alpha(u_1,u_2)\in\Omega$，$\bar\alpha(u_1,u_2)(t)=\alpha(u_1,u_2,t)$. 于是有第二变分公式

$$\frac{1}{2}E_{**}(\omega_1,\omega_2)=-\sum_{t\in(0,1)}\langle\omega_2(t),\Delta_t\omega'_1(t)\rangle-\int_0^1\langle\omega_2,\omega''_1+R(v,\omega_1)v\rangle\mathrm{d}t,$$

其中 $v=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$，$\Delta_t\omega'_1=\omega'_1(t+0)-\omega'_1(t-0)$，它在(0，1)上除有限个点外全为0，故当 γ 为短程测地线时，$E_{**}(\omega,\omega)$ 是半正定的. 而泛函 $E_{**}:\Omega_\gamma\times\Omega_\gamma\to\mathrm{R}$ 的指数定义为使 E_{**} 负定的 Ω_γ 的子空间的最大维数，于是有莫尔斯指数定理：E_{**} 在 γ 处的指数 λ 等于 γ 上 $\gamma(0)$ 的共轭点 $\gamma(t)$ 的个数，其中 $0<t<1$，共轭点个数把重数也计算在内. 于此指数 λ 常为有限数.

在 $\Omega=\Omega(M,p,q)$ 中引进度量，设 ρ 为连通黎曼流形 M 上的黎曼度量所诱导的距离函数. 对于 $\omega_1,\omega_2\in\Omega$，设 $s_1(t),s_2(t)$ 为它们的弧长，则定义 ω_1，ω_2 之间的距离为

$$d(\omega_1,\omega_2)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\rho(\omega_1(t),\omega_2(t))+\left(\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}s_2}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中后一项是为使能量函数 $E_a^b(\omega)$ 成为 Ω 上的连续函数而附加的. 在这个 d 之下，Ω 为距离空间，于是有莫尔斯理论的基本定理：设 M 为完备黎曼流形，$p,q\in M$ 沿所有测地线互不共轭，则 $\Omega(M;p,q)$ 有可数CW复形的同伦型，仅对于从 p 到 q 每条指数为 λ 的测地线，对应一个 λ 维胞腔.

在莫尔斯(Morse，H. M.)的临界点理论的应用中，最完美的是上述对于测地线问题的应用，它可以说是变分学的莫尔斯理论.

道路空间(path space)　见“道路空间的变分”.

能量(energy)　见“道路空间的变分”.

第一变分公式(first variation formula)　见“道路空间的变分”.

第二变分公式(second variation formula)　见“道路空间的变分”.

共轭点(conjugate point)　见“道路空间的变分”.

莫尔斯指数定理(Morse index theorem)　见“道路空间的变分”.

莫尔斯理论的基本定理(fundamental theorem of Morse theory)　见“道路空间的变分”.

畴数(category)　量度拓扑空间性质的一个整数. 设 M 为可微流形，A 为 M 的任意闭子集，若 A 能被 m 个可缩闭集所覆盖但不能被 $m-1$ 个这样的集所覆盖，则称 A 在 M 中的畴数为 m，记为 $\mathrm{cat}(A)=m$. 畴数是一个拓扑不变量. 为估计紧流形 M 上的函数 f 的临界点个数有下界 $\mathrm{cat}(M)$，柳斯捷尔尼克(Люстерник，Л. А.)和施尼雷尔曼(Шнирельман，Л. Г.)引进下列重数定理：设

$$c_n=\inf_{\mathrm{cat}(A)\geqslant n}\{\sup_{x\in A}f(x)\}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则当 $c=c_{m+1}=\cdots=c_{m+k}$ 时，f 的以 c 为临界值的临界点集 K_0 有畴数 $\mathrm{cat}(K_0)\geqslant k$. 前面例子中的环面的畴数是3，所以环面上的任意可微函数至少有3个不同的临界点. 柳斯捷尔尼克-施尼雷尔曼理论较莫尔斯理论适用范围宽. 例如，它所要求的函数 f 的临界点不必非退化，但有时畴数的估计比较困难.

阿姆布罗塞蒂(Ambrosetti，A.)和拉比诺维茨(Rabinowitz，P. H.)发展了柳斯捷尔尼克和施尼雷尔曼的思想，并于1973年提出了山路引理：设 f 是巴拿赫空间 X 上的一个满足帕莱斯-斯梅尔条件的 C^1 函数，又设有 θ 的一个开邻域 U 与一点 $x_0\notin U$，使得

$$f(\theta)=f(x_0)=0,\quad f|_{\partial U}\geqslant\alpha>0,$$

则 f 至少有一个临界值 $c\geqslant\alpha$. 随后，拉比诺维茨又提出一系列极小极大原理，对许多由方程引出的变分问题的解的存在性以及系数估计有广泛的应用. 特别是对哈密顿方程组周期解的存在性以及周期轨道个数的估计，引出重要的结果.

积分周期理论

积分周期理论(integral period theory)　流形上分析的一个分支. 主要研究微分形式的积分周期，这反映了流形的同调特征. 1930年，德拉姆(de Rham，G.-W.)引进微分流形 M 的德拉姆上同调群，并指出它是一个微分不变量与拓扑不变量. 还证明了当 M 为紧致流形时，M 的 p 维德拉姆上同调群的维数是有限的，等于第 p 个贝蒂数，这是流形 M 的微分结构与拓扑结构的一个重要关系. 积分周期理论的中心定理是德拉姆定理，它断言微分流形 M 的 p 维德拉姆上同调群与 M 的 p 维可微奇异上同调群是同构的. 同构的单性表明所有周期为零的闭微分形式是正合形式，而同构的满性意味着对

每个闭链类 z 赋予一个实数 $\mathrm{per}(z)$，则存在一个闭形式 α，使对所有的闭链 z 有

$$\int_z \alpha = \mathrm{per}(z).$$

霍奇(Hodge，W. V. D.)对德拉姆理论做了重要改进，他引进调和微分形式，霍奇理论断言每个德拉姆上同调类中存在惟一的调和微分形式.

闭形式(closed form) 外微分作用后为零的微分形式. 设 M 是一个微分流形，α 是 M 上的一个 p 形式，若 $d\alpha=0$，则称 α 为闭 p 形式，简称闭形式，这里的 d 是外微分.

正合形式(exact form) 可表示为另一微分形式的外微分的微分形式. 设 M 是微分流形，α 是 M 上的一个 p 形式. 若存在 $(p-1)$ 形式 β，使得 $\alpha=d\beta$，则称 α 为正合 p 形式，简称正合形式. 由于外微分 d 有性质 $d^2=0$，故每个正合形式必定是闭形式.

德拉姆复形(de Rham complex) 一种与微分形式相关的链复形. 设 M 是微分流形. 序列

$$0 \to E^0(M) \xrightarrow{d} E^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} E^n(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

称为德拉姆复形，亦称为德拉姆链复形，其中 $E^i(M)$ 表示 M 的 i 形式的集合，d 为外微分. 显然 d 的核都是闭形式，而 d 的像都是正合形式.

德拉姆上同调群(de Rham cohomology group) 闭形式空间关于正合形式空间的商. 设 M 是微分流形，称闭 p 形式的实向量空间关于正合 p 形式子空间的商空间

$$H^p_{\mathrm{deR}}(M) = \{闭\ p\ 形式\}/\{正合\ p\ 形式\}$$

为 M 的 p 维德拉姆上同调群.

这是 1930 年由德拉姆(de Rham，G.-W.)给出的，他建立了微分流形的微分结构与拓扑结构的一个重要关系.

设 $f: M \to N$ 是 C^∞ 映射，则有代数同态 $\delta f: E^*(N) \to E^*(M)$，$\delta f$ 与 d 可交换，从而诱导出一个同态 $f^*: H^p_{\mathrm{deR}}(N) \to H^p_{\mathrm{deR}}(M)$，且对另一个 C^∞ 映射 $g: N \to X$ 有 $(g\circ f)^* = f^* \circ g^*$，$(\mathrm{id})^*=\mathrm{id}$. 若 $f: M\to N$ 是一个微分同胚，则诱导出的同态 f^* 是同构. 这就表明德拉姆上同调群是微分流形的微分拓扑不变量. 可以证明，若 M 是紧致流形，则 $H^p_{\mathrm{deR}}(M)$ 是有限维的，其维数等于 M 的第 p 个贝蒂数 b_p.

实系数微分奇异同调群(differential singular homology group with real coefficients) 边缘算子诱导的线性变换的核关于其像的商空间. 对于每个 $p\geqslant 0$，设 ${}_\infty S_p(M,\mathbb{R})$ 表示由微分流形 M 内的可微奇异 p 单形所生成的实向量空间. 因此，${}_\infty S_p(M,\mathbb{R})$ 的元素是 M 中可微奇异 p 链. 当 $p<0$ 时，规定 ${}_\infty S_p(M,\mathbb{R})$ 为零向量空间.

由边缘算子 ∂ 诱导出线性变换

$$\partial_p: {}_\infty S_p(M,\mathbb{R}) \to {}_\infty S_{p-1}(M,\mathbb{R}).$$

当 $p\leqslant 0$ 时令 ∂_p 为零变换. 显然，$\partial_p \circ \partial_{p+1}=0$，即 ∂_{p+1} 的像在 ∂_p 的核中，称 ${}_\infty H_p(M,\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\partial_p/\mathrm{Im}\partial_{p+1}$ 为 p 维实系数微分奇异同调群. $\mathrm{Ker}\partial_p$ 的元素称为可微 p 闭链. $\mathrm{Im}\partial_{p+1}$ 的元素称为可微 p 边缘.

微分形式的周期(period of differential forn) 微分形式在可微闭链上的积分值. 设 M 是一个微分流形，α 是 M 的一个微分形式，z 是一个可微闭链. 微分形式 α 在可微闭链 z 上的积分 $\int_z \alpha$ 确定了一个实数，称该实数为微分形式 α 的周期.

由斯托克斯定理知，若 α 为正合形式，$\alpha=d\beta$，则

$$\int_z \alpha = \int_z d\beta = \int_{\partial z} \beta = 0.$$

因此，正合形式的周期全为零.

德拉姆同态(de Rham homomorphism) 联系微分流形 M 上的德拉姆上同调群与奇异上同调群的一个自然同态. 建立这个同态的关键是流形上的斯托克斯公式.

设 ${}_\infty S_p(M,\mathbb{R})$ 为流形 M 中可微奇异 p 链所构成的群. $S^p_\infty(M,\mathbb{R})$ 是它的对偶，即其中的每一个元素是 M 上一切可微奇异 p 单形到 $\mathbb{R}$ 的一个映射 f，这样的 f 称为 M 上的可微奇异 p 上链. 令

$$k_p: E^p(M) \to S^p_\infty(M,\mathbb{R}),\ k_p(\omega)(\sigma) = \int_\sigma \omega,$$

其中 ω 为 M 上的 p 形式，σ 是 M 中的可微奇异 p 单形，则由斯托克斯定理，

$$\delta k_p(\omega)\sigma^{p+1} = k_p(\omega)\partial\sigma^{p+1}$$
$$= \int_{\partial\sigma^{p+1}} \omega = \int_{\sigma^{p+1}} d\omega = k_{p+1}(d\omega)\sigma^{p+1},$$

即 $\delta k_p = k_{p+1}d$，其中 d 为外微分，δ 为奇异上链群 $S^p_\infty(M,\mathbb{R})$ 中的上边缘运算，这表示同态族 $k_p(p\geqslant 0)$ 与上边缘运算 d，δ 可交换，因此诱导上同调群之间的同态

$$k_p^*: H^p_{\mathrm{deR}}(M) \to H^p_{\Delta^\infty}(M,\mathbb{R}),$$
$$k_p^a([\omega]) = [k_p(\omega)].$$

这个同态称为德拉姆同态.

德拉姆定理(de Rham theorem) 德拉姆同态为同构的定理. 该定理断言：设 M 为紧微分流形，则对每个整数 p，德拉姆同态 $k_p^*: H^p_{\mathrm{deR}}(M) \to H^p_{\Delta^\infty}(M,\mathbb{R})$ 是同构.

德拉姆定理还有另一个等价形式：设 M 为紧微分流形，则对每个整数 p，p 维德拉姆上同调群与 p 维可微奇异同调群的对偶同构.

庞加莱引理(Poincaré Lemma) 论述单位球上微分形式的零调性质. 该引理断言：若 U 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中开单位球体，$E^k(U)$ 是 U 上微分 k 形式的空间，则对每个 $k\geqslant 1$，存在一个线性变换

$$h_k: E^k(U) \to E^{k-1}(U),$$

使得

$$h_{k+1} \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ h_k = \mathrm{id}.$$

这个引理有两个推论：

1. 若 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中开单位球体上的一个 k 形式，且 $\mathrm{d}\omega=0$，则存在一个 $(k-1)$ 形式 β 使得 $\mathrm{d}\beta=\omega$.

2. $\mathbb{R}^n$ 中开单位球的德拉姆上同调群对于 $p\geqslant 1$ 都为零.

同伦算子(homotopy operator) 具有同伦性质的线性变换. 设 f_1,f_2 是两个微分流形 M,N 之间的 C^∞ 映射，则有诱导映射

$$\delta f_i: E^k(N)\to E^k(M) \quad (i=1,2),$$

k 为非负整数，对于这些诱导映射，若存在一组线性变换 $h_k: E^k(N)\to E^{k-1}(M)$，使得

$$h_{k+1} \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ h_k = \delta f_1 - \delta f_2,$$

则称这组线性变换 $\{h_k\}$ 为 f_1 与 f_2 的同伦算子. 可以看出庞加莱引理中的 $\{h_k\}$ 也是同伦算子.

示性类理论

示性类理论(theory of characteristic class) 流形上的分析(即大范围分析学)的一个分支；也是拓扑学的一个分支. 示性类理论研究向量丛的上同调类及其计算. 示性类是一般向量丛结构的基本不变量，具有不可缺少的重要性. 因为研究示性类的方法有许多种，所以示性类的定义就有多种.

示性类理论最早的创始者是施蒂费尔(Stiefel, E. L.)和惠特尼(Whitney, H.)，他们几乎同时在1935年发现了示性类，施蒂费尔引进并研究了光滑流形切丛所确定的示性同调类，而惠特尼处理的是任意球丛. 1942年，庞特里亚金(Понтрягин, Л. С.)研究了格拉斯曼流形的同调论，得到一种新的示性类(庞特里亚金类). 1946年，陈省身研究了复格拉斯曼流形的上同调结构，从而对复向量丛定义了示性类(陈类). 后来有吴文俊、托姆(Thom, R.)、希策布鲁赫(Hirzebruch, F. E. P.)、斯廷罗德(Steenrod, N. E.)等人的研究工作，使示性类的理论更加完善.

示性类理论在拓扑学、几何学与分析学中都有广泛的应用.

施蒂费尔-惠特尼类(Stiefel-Whitney classes) 向量丛的底空间的上同调类. 利用以下四条公理定义施蒂费尔-惠特尼类：

1. 对每个实向量丛 ξ 都相应于一个 ξ 的底空间 $B(\xi)$ 的以 $\mathbb{Z}/2$ 为系数的上同调类序列

$$w_i(\xi) \in H^i(B(\xi);\mathbb{Z}/2) \quad (i=0,1,2,\cdots),$$

称为 ξ 的施蒂费尔-惠特尼类. 类 $w_0(\xi)$ 等于单位元 $1\in H^0(B(\xi);\mathbb{Z}/2)$，而若 ξ 是 n-平面丛，对于大于 n 的 i，$w_i(\xi)=0$.

2. 自然性. 若 $f: B(\xi)\to B(\eta)$ 被从 ξ 到 η 的一个丛映射覆盖，则

$$w_i(\xi) = f^* w_i(\eta),$$

f^* 为 f 诱导的同态.

3. 惠特尼乘积定理. 若 ξ 与 η 是同一底空间上的向量丛，则

$$w_k(\xi\oplus\eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \cup w_{k-i}(\eta).$$

4. 对于圆周 P^1 上的典则线丛 γ_1^1，施蒂费尔-惠特尼类 $w_1(\gamma_1^1)$ 不为零.

施蒂费尔-惠特尼类是1935年由施蒂费尔(Stiefel, E. L.)与惠特尼(Whitney, H.)定义的. 而施蒂费尔-惠特尼类的公理定义是1956年由希策布鲁赫(Hirzebruch, F. E. P.)提出的. 惠特尼乘积定理属于惠特尼与吴文俊.

微分流形 M 的切丛 $T(M)$ 的施蒂费尔-惠特尼类称为 M 的施蒂费尔-惠特尼类，记为 $w_i(M)$ $(i=0,1,2,\cdots)$.

惠特尼乘积定理(Whitney product theorem) 见"施蒂费尔-惠特尼类".

实 n 平面丛(real n-plane bundle) 特殊的纤维丛. 所谓实 n 平面丛，是指这样的一个纤维丛，它的纤维是实 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$，它的结构群是一般的线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. 又称为秩 n 的实向量丛.

惠特尼和(Whitney sum) 同一底空间上的两个向量丛的某种和. 设 ξ_1,ξ_2 是在同一个底空间 B 上的两个向量丛，$d: B\to B\times B$ 表示对角嵌入，称 B 上的丛 $d^*(\xi_1\times\xi_2)$ 为 ξ_1 与 ξ_2 的惠特尼和，记为

$$\xi_1\oplus\xi_2.$$

丛同态(bundle homomorphism) 两个向量空间之间保持纤维中代数结构的映射. η 到 ξ 的丛同态是一个连续函数

$$g: E(\eta) \to E(\xi),$$

g 把每个向量空间 $F_b(\eta)$ 线性地映到向量空间 $F_{b'}(\xi)$ 之上，其中记号 $F_b(\eta)$ 是 b 在 η 上的纤维，构成一个向量空间.

全施蒂费尔-惠特尼类(total Stiefel-Whitney class) 各阶施蒂费尔-惠特尼类之和. 设 $H^{\pi}(B;\mathbb{Z}/2)$ 表示所有形式无穷级数

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

的环，其中 $a_i\in H^i(B;\mathbb{Z}/2)$. 这个环中的乘法运算为

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots)(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) \\ = (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1) \\ + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + \cdots,\end{aligned}$$

这个乘法是交换的与结合的.

B 上实 n 维向量丛 ξ 的全施蒂费尔-惠特尼类

定义为

$$w(\xi)=w_0(\xi)+w_1(\xi)+\cdots+w_n(\xi)+\cdots,$$

是环 $H^{\pi}(B;\mathbb{Z}/2)$ 的一个元素，其中 $w_i(\xi)$ 是 ξ 的施蒂费尔-惠特尼类.

所有首项为 1 的无穷级数

$$w=1+w_1+w_2+\cdots\in H^{\pi}(B;\mathbb{Z}/2)$$

的集合在乘法运算下构成一个交换群，w 的逆元 $\overline{w}$ 为

$$\overline{w}=1+\overline{w}_1+\overline{w}_2+\overline{w}_3+\cdots,$$

而

$$\overline{w}_n=w_1\overline{w}_{n-1}+w_2\overline{w}_{n-2}+\cdots+w_{n-1}\overline{w}_1+w_n.$$

若 P^n 是实 n 维射影空间，a 是 $H^1(P^n;\mathbb{Z}/2)$ 的非零元，则 P^n 的全施蒂费尔-惠特尼类

$$w(P^n)=(1+a)^{n+1}=1+\binom{n+1}{1}a+\binom{n+1}{2}a^2+\cdots+\binom{n+1}{n}a^n.$$

惠特尼对偶定理(Whitney duality theorem) 微分流形的切丛与余切丛的施蒂费尔-惠特尼类的关系. 设 τ_M 是欧氏空间中微分流形 M 的切丛，ν 是法丛，则 $w_i(\nu)=\overline{w}_i(\tau_M)$.

克罗内克指数(Kronecker index) 一种特定的指标. 设 M 是闭连通光滑 n 维流形. 利用模 2 系数，存在一个基本同调类 $\mu_M\in H_n(M,\mathbb{Z}/2)$，故对任意上同调类 $V\in H^n(M,\mathbb{Z}/2)$，定义克罗内克指数为

$$\langle V,\mu_M\rangle\in\mathbb{Z}/2.$$

施蒂费尔-惠特尼数(Stiefel-Whitney number) 所有施蒂费尔-惠特尼类的单项式模 2 的整数. 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 是非负整数，

$$r_1+2r_2+\cdots+nr_n=n.$$

相应于任一实向量丛 ξ，可以在 $H^n(B(\xi),\mathbb{Z}/2)$ 中构作单项式

$$w_1(\xi)^{r_1}w_2(\xi)^{r_2}\cdots w_n(\xi)^{r_n},$$

模 2 的整数

$$\langle w_1(\tau_M)^{r_1}w_2(\tau_M)^{r_2}\cdots w_n(\tau_M)^{r_n},\mu_M\rangle$$

称为微分流形 M 的施蒂费尔-惠特尼数，其中 τ_M 为流形 M 的切丛.

施蒂费尔-惠特尼数的重要性可由下述两个结论看出：

1.（庞特里亚金(Понтрягин, Л. С.)）若 B 是一个光滑紧 $n+1$ 维流形，其边缘等于 M，则 M 的施蒂费尔-惠特尼数全为零.

2.（托姆(Thom, R.)）若 M 的所有施蒂费尔-惠特尼数都为零，则 M 可以看做某个光滑紧流形的边缘.

未定向配边类(unoriented cobordism class) 流形的一种等价类. 两个光滑闭 n 维流形 M_1 与 M_2 属于同一个无定向的配边类的充分必要条件是它们的不相交的并 $M_1\cup M_2$ 是光滑紧 $n+1$ 维流形的边缘.

格拉斯曼流形(Grassmann manifold) 与欧氏空间相关的一种特殊流形. 格拉斯曼流形 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是通过坐标空间 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的原点的所有 n 维平面的集合，这可以视为一个商空间.

$\mathbb{R}^{n+k}$ 的一个 n 标架是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中线性无关向量的一个 n 元组，$\mathbb{R}^{n+k}$ 中的所有 n 标架的全体构成 n 重直积 $\mathbb{R}^{n+k}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n+k}$ 的一个开子集，称其为施蒂费尔流形 $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$. 有一个标准映射

$$q:V_n(\mathbb{R}^{n+k})\to G_n(\mathbb{R}^{n+k}),$$

它把每个 n 标架映为它所生成的 n 平面. 现在，给 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 以商拓扑如下：子集 $U\in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是开集的充分必要条件是 q 的逆映射的像 $q^{-1}(U)\in V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是开集.

格拉斯曼流形 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是 nk 维紧光滑流形.

***n* 标架**(n-frame) 见“格拉斯曼流形”.

施蒂费尔流形(Stiefel manifold) 见“格拉斯曼流形”.

CW 复形(CW complex) 划分为各维胞腔的豪斯多夫空间. 一个 CW 复形是由称为基础空间的豪斯多夫空间 K 和 K 划分为不相交子集全体 $\{e_d\}$ 构成的，使下述条件满足：

1. 每个 e_d 拓扑地是一个 $n(d)>0$ 维的开胞腔. 进而，对每个胞腔 e_d，存在一个连续映射

$$f:D^{n(d)}\to K,$$

它把圆盘 $D^{n(d)}$ 的内部同胚地映到 e_d 上(f 称为胞腔 e_d 的特征映射)；

2. 属于闭包 $\bar{e}_d$ 而不属于 e_d 的每个点，必定位于低维胞腔 e_β 中；

3. 闭包有限性. K 的每点包含在一个有限的子复形中；

4. 怀特海拓扑. K 的拓扑为它的有限子复形的顺向极限，即 K 的一个子集是闭的当且仅当它与每个有限子复形的交是闭的.

舒伯特符号(Schubert symbol) 一种特定的整数序列. 舒伯特符号 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 是 n 个整数的一个序列，满足条件

$$1\leqslant\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_n\leqslant m.$$

对每个舒伯特符号 σ，$e(\sigma)\subset G_n(\mathbb{R}^m)$ 表示所有 n 平面 X 的集合，且使得对于 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$\dim(X\cap\mathbb{R}^{\sigma_i})=i,\ \dim(X\cap\mathbb{R}^{\sigma_i-1})=i-1.$$

显然，每个 $X\in G_n(\mathbb{R}^m)$ 正好属于集合 $e(\sigma)$ 之一. 可以证明，$e(\sigma)$ 是

$$d(\sigma)=(\sigma_1-1)+(\sigma_2-2)+\cdots+(\sigma_n-n)$$

维的一个开胞腔.

施蒂费尔-惠特尼类的惟一性(uniqueness of

Stiefel-Whitney class）对于每个向量丛至多只存在一个施蒂费尔-惠特尼类. 至多存在一个对应 $\xi \to w_i(\xi)$，它把在仿紧底空间上的每个实向量丛对应于满足施蒂费尔-惠特尼类的四条公理的上同调序列.

施蒂费尔-惠特尼类的存在性（existence of Stiefel-Whitney classes）对每个向量丛存在非零的施蒂费尔-惠特尼类. 设 ξ 是一个实 n 平面丛，其全空间为 E，底空间为 B，射影映射 $\pi: E \to B$，纤维 $F = \pi^{-1}(b)$. E_0 表示 E 的所有非零元的集合，F_0 表示纤维 F 的非零元的集合，显然 $F_0 = F \cap E_0$.

取系数群 $\mathbb{Z}/2$，则群 $H^i(E, E_0) = 0 (i < n)$，而 $H^n(E, E_0)$ 包含惟一的类 u，使得对每个纤维 $F = \pi^{-1}(b)$，限制

$$u|_{(F,F_0)} \in H^n(F, F_0)$$

是 $H^n(F, F_0)$ 中惟一的非零类. 进而对应关系 $x \mapsto x \cup u$ 对每个 k 定义了一个同构 $H^k(E) \to H^{k+n}(E, E_0)$. 通常称 u 为基本上同调类.

然后利用托姆同构 $\phi: H^k(B) \to H^{k+n}(E, E)$ 来定义

$$w_i(\xi) = \phi^{-1} Sq^i \phi(1) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots).$$

可以验证，它们满足施蒂费尔-惠特尼类的四条公理.

托姆同构（Thom isomorphism）向量丛的底空间的上同调群与全空间的上同调群同构. 即映射 $\phi: H^k(B) \to H^{k+n}(E, E_0)$，它定义为两个同构的复合

$$H^k(B) \xrightarrow{\pi^*} H^k(E) \xrightarrow{\cup u} H^{k+n}(E, E_0).$$

斯廷罗德运算（Steenrod operation）上同调群中一种特定的加法同态. 斯廷罗德运算由下述四个基本性质定义，这里系数群理解为 $\mathbb{Z}/2$.

1. 对于每一对空间 $X \supset Y$，和每一对非负整数 n, i，定义一个加法同态

$$Sq^i: H^n(X, Y) \to H^{n+i}(X, Y).$$

2. 自然性. 若 $f: (X, Y) \to (X', Y')$，则

$$Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i.$$

3. 若 $a \in H^n(X, Y)$，则 $Sq^0(a) = a$，$Sq^n(a) = a \cup a$，而 $Sq^i(a) = 0 (i > n)$. 因此，最有意义的运算是 $0 < i < n$ 的那些运算.

4. 嘉当公式. 只要 $a \cup b$ 有定义，等式

$$Sq^k(a \cup b) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) \cup Sq^j(a)$$

成立.

全斯廷罗德运算（total Steenrod operation）各阶斯廷罗德运算之和. 全斯廷罗德运算为

$$Sq(a) = a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + \cdots + Sq^n(a),$$
$$a \in H^n(X, Y).$$

定向丛（oriented bundle）纤维具有协调定向的向量丛. 实 n 维向量丛 ξ 的定向是一个函数，它给 ξ 的每个纤维 F 以一个定向，且服从下述局部相容性条件：对底空间的每个点 b_0，存在一个局部平凡化区图 (N, h)，$b_0 \in N$，而 $h: N \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(N)$，使得 N 上每个纤维 $F = \pi^{-1}(b)$，从 $\mathbb{R}^n$ 到 F 的同胚 $x \mapsto h(b, x)$ 是保定向的.

欧拉类（Euler class）实向量丛底空间的一个上同调类. 定向实 n 维向量丛 ξ 的欧拉类是上同调类 $e(\xi) \in H^n(B; \mathbb{Z})$，在标准同构

$$\pi^*: H^n(B; \mathbb{Z}) \to H^n(E; \mathbb{Z})$$

下，它对应于 $u|_E$，其中 u 是 $H^n(E_1 E_0)$ 中惟一的上同调类，限制在 $H^n(F_1 F_0)$ 中是标准的定向类. 这里的 E 为全空间，B 为底空间.

欧拉类的性质：

1. 自然性. 若 $f: B \to B'$ 被一个保定向的丛映射 $\xi \to \xi'$ 覆盖，则 $e(\xi) = f^* e(\xi')$.

2. 若把 ξ 的定向反向，则欧拉类 $e(\xi)$ 变号.

3. 若纤维维数 n 是奇数，则 $e(\xi) + e(\xi) = 0$.

4. 自然同态 $H^n(B; \mathbb{Z}) \to H^n(B; \mathbb{Z}/2)$ 把欧拉类 $e(\xi)$ 变为施蒂费尔-惠特尼类 $\omega_n(\xi)$.

5. 惠特尼和的欧拉类满足 $e(\xi \oplus \xi') = e(\xi) \cup e(\xi')$. 类似地，笛卡儿积的欧拉类满足

$$e(\xi \times \xi') = e(\xi) \times e(\xi').$$

6. 若定向向量丛 ξ 具有一个处处为零的截面，则其欧拉类 $e(\xi)$ 必为零.

托姆同构定理（Thom isomorphism theorem）向量丛上同调群之间存在同构的定理. 该定理断言：若 ξ 是有向 n 平面丛，Λ 是系数环，则存在一个且仅有一个上同调类 $u \in H^n(E, E_0; \Lambda)$，对于每个纤维 F，u 在 (F, F_0) 上的限制等于 $u_F \in H^n(F, F_0; \Lambda)$. 进而对应关系 $y \mapsto y \cup u$ 对每个整数 j 同构地把 $H^j(E; \Lambda)$ 映为 $H^{j+n}(E, E_0; \Lambda)$.

吴（文俊）类（Wu class）n 维光滑流形上的一种上同调类. 对于 n 维光滑流形 M，吴文俊发现对每个 k 存在一个且仅有一个上同调类 $v_k \in H^k(M)$，对每个 x 满足等式

$$\langle v_k \cup x, \mu \rangle = \langle Sq^k(x), \mu \rangle,$$

其中 μ 为 M 的基本同调类. 当 $k > n - k$ 时 v_k 为零. v_k 称为吴（文俊）类. 全吴（文俊）类

$$v \in H^{*}(M) = H^0(M) \oplus H^1(M) \oplus \cdots \oplus H^n(M)$$

为形式和

$$v = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

显然，全吴（文俊）类对每个上同调类 x 满足等式

$$\langle v \cup x, \mu \rangle = \langle Sq(x), \mu \rangle,$$

Sq 为全斯廷罗德运算.

全吴（文俊）类（total Wu class）见“吴（文俊）类”.

施蒂费尔-惠特尼类的吴(文俊)公式(Wu formula for Stiefel-Whitney class)　关于光滑流形切丛的全施蒂费尔-惠特尼类与全吴类的一个公式. 设 M 是光滑流形,τ_M 为 M 的切丛,则 τ_M 的全施蒂费尔-惠特尼类等于 $Sq(v)$,即

$$w_k = \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j),$$

其中 $v_j \in H^j(M)$ 为吴(文俊)类,v 为全吴(文俊)类.

古津序列(Gysin sequence)　特殊的正合列. 对于任意的定向实 n 维向量丛 ξ,存在整数系数的形如

$$\cdots \to H^i(B) \xrightarrow{\cup e} H^{i+n}(B) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(E_0)$$
$$\to H^{i+1}(B) \xrightarrow{\cup e} \cdots$$

的正合列,其中 $\pi_0: E_0 \to B$(E_0 为全空间 E 的非零向量组成的空间),e 为 ξ 的欧拉类,$\cup e$ 代表同态 $a \mapsto a \cup e(\xi)$. 这个正合列称为古津序列.

陈(省身)类(Chern class)　复向量丛的一种上同调类. 设 ω 为复 n 维向量丛,$\omega_{\mathbb{R}}$ 为其基本实向量丛,E_0 表 $E(\omega_{\mathbb{R}})$ 中所有非零向量所成子空间,E_0 中任意点 v 位于 ω 的一个确定的纤维 F_b 中. 设 ω 上给定埃尔米特度量,取 v 在 F_b 中的正交补作为点 v 上的纤维,得以 E_0 为底空间的复 $n-1$ 维向量丛 ω_0,则陈类 $c_i(\omega) \in H^{2i}(B;\mathbb{Z})$ 按 ω 的复维数递推地定义为:顶陈类(即最高维陈类)$c_n(\omega)$ 等于欧拉类 $e(\omega_{\mathbb{R}})$;对 $i<n$,定义为

$$c_i(\omega) = \pi_0^{*-1} c_i(\omega_0);$$

对 $i>n$,类 $c_i(\omega)=0$.

这种定义是有意义的,因为在古津序列中,$\pi_0^*: H^{2i}(B) \to H^{2i}(E_0)$ 对于 $i<n$ 是一个同构.

全陈类(total Chern class)　各阶陈类之和. 环 $H^{\pi}(B;\mathbb{Z})$ 中形式和式 $c(\omega)=1+c_1(\omega)+\cdots+c_n(\omega)$ 就称为 ω 的全陈类,其中 $c_i(\omega)$ 为复 n 维向量丛 ω 的第 i 个陈类.

陈类的乘积公式(product formula for Chern class)　陈类的一个乘积公式. 若 ω 与 ϕ 是仿紧底空间 B 上的两个复向量丛,则惠特尼和 $\omega \oplus \phi$ 的全陈类有下述公式

$$c(\omega \oplus \phi) = c(\omega) \cdot c(\phi),$$

它被称为陈类的乘积公式.

共轭丛(conjugate bundle)　与复向量丛相关且有相互复结构的向量丛. 若 ω 是一个复向量丛,共轭丛 $\bar{\omega}$ 是一个复向量丛,与 ω 有相同的基本实向量丛

$$\omega_{\mathbb{R}} = \bar{\omega}_{\mathbb{R}},$$

但有"相反的"复结构. 因而映射 $f: E(\omega) \to E(\bar{\omega})$ 是共轭线性的,即对每个复数 λ 及每个 $e \in E(\omega)$,有

$$f(\lambda e) = \bar{\lambda} f(e),$$

其中 $\bar{\lambda}$ 是 λ 的共轭复数.

共轭丛的陈类 $c_k(\bar{\omega})$ 等于 $(-1)^k c_k(\omega)$,因而

$$c(\bar{\omega}) = 1 - c_1(\omega) + c_2(\omega) + \cdots + (-1)^n c_n(\omega).$$

庞特里亚金类(Pontriagin class)　复化的实向量丛的整陈类. 设 ξ 为实向量丛,$\xi \otimes \mathbb{C}$ 为 ξ 的复化,第 i 个庞特里亚金类 $p_i(\xi) \in H^{4i}(B;\mathbb{Z})$ 定义为整上同调类 $(-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbb{C})$.

显然,当 $i>n/2$ 时,$p_i(\xi)$ 为零.

全庞特里亚金类(total Pontriagin class)　各阶庞特里亚金类之和. 全庞特里亚金类定义为环 $H^{\pi}(B;\mathbb{Z})$ 中的可逆元

$$p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \cdots + p_{[n/2]}(\xi),$$

$[n/2]$ 为不超过 $n/2$ 的最大整数,其中 $p_i(\xi)$ 为实向量丛 ξ 的第 i 个庞特里亚金类.

惠特尼和的全庞特里亚金类 $p(\xi \oplus \eta)$ 同余于 $p(\xi)p(\eta)$(模 2 阶元素). 换言之,

$$2(p(\xi \oplus \eta) - p(\xi)p(\eta)) = 0.$$

陈数(Chern number)　与陈类相关的数. 设 K^n 是复 n 维紧复流形,则对于 n 的每个划分 $I=i_1,i_2,\cdots,i_r$,第 I 个陈数

$$c_I[K^n] = c_{i_1} \cdots c_{i_r}[K^n]$$

定义为整数

$$\langle c_{i_1}(\tau^n) \cdots c_{i_r}(\tau^n), \mu_{2n} \rangle,$$

其中 τ^n 表示 K^n 的切丛,μ_{2n} 表示由特定的定向确定的基本同调类,对于非 n 的一个整数之划分 I,定义 $c_I[K^n]=0$. 例如,$P^n(\mathbb{C})$ 为复射影空间,则对于 n 的任一划分 $(i_1,i_2,\cdots,i_r)$,

$$c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}[P^n(\mathbb{C})] = \binom{n+1}{i_1} \cdots \binom{n+1}{i_r}.$$

庞特里亚金数(Pontriagin number)　与庞特里亚金类相关的数. 设 M^{4n} 是一个光滑紧定向流形,对 n 的任一个划分 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_r)$,第 I 个庞特里亚金数

$$p_I[M^{4n}] = p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r}[M^{4n}]$$

定义为整数

$$\langle p_{i_1}(\tau^{4n}) p_{i_2}(\tau^{4n}) \cdots p_{i_r}(\tau^{4n}), \mu_{4n} \rangle,$$

其中 τ^{4n} 表示切丛,μ_{4n} 表示基本同调类.

若把 M^{4n} 的定向反过来,注意到庞特里亚金类不变,而 μ_{4n} 改变正负号,故庞特里亚金数要改变正负号.

作为一个例子,复射影空间 $P^{2n}(\mathbb{C})$ 忘掉它的复结构,它是实维数 $4n$ 的紧定向流形,因此,

$$p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r}[P^{2n}(\mathbb{C})] = \binom{2n+1}{i_1} \cdots \binom{2n+1}{i_r}.$$

对称函数(symmetric function)　对各分量置换下不变的多项式函数. 设 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是未定元,若整系数的多项式函数 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 在 $t_1,t_2,\cdots,t_n$

的置换下是不变的，就称它为一个对称函数.

对称函数构成一个子环

$$S \subset Z[t_1, t_2, \cdots, t_n],$$

而 S 本身也构成了 n 个代数独立生成元的多项式环

$$S = Z[\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n],$$

$\sigma_k = \sigma_k(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 表示 k 次初等对称函数，σ_k 是 t_1，$t_2, \cdots, t_n$ 的 k 次齐次多项式，且

$$1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = (1 + t_1)(1 + t_2)\cdots(1 + t_n).$$

对于 k 的任意划分 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$，即使得 $k = i_1 + i_2 + \cdots + i_r$，定义一个 k 变元的多项式 s_I. 选择 $n > k$ 使 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的初等对称函数 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ 是代数独立的. 设 $s_I = s_{i_1, i_2, \cdots, i_r}$ 是满足

$$s_I(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k) = \sum t_1^{i_1} t_2^{i_2} \cdots t_r^{i_r}$$

的惟一的多项式. 这个多项式不依赖于 n.

设 ω 是复 n 维向量丛，底空间为 B，全陈类为 $c = 1 + c_1 + \cdots + c_n$. 对于任意 $k > 0$ 及 k 的任意划分 I，上同调类 $s_I(c) = s_I(c_1, c_2, \cdots, c_k) \in H^{2k}(B; Z)$，惠特尼和的示性类 $s_I(c(\omega \oplus \omega'))$ 等于

$$\sum_{JK=I} s_J(c(\omega)) s_K(c(\omega')).$$

特别地，惠特尼和的示性类 $s_k(c(\omega \oplus \omega'))$ 等于 $s_k(c(\omega)) \oplus s_k(c(\omega'))$. 示性数 $\langle s_I(c(\tau^n)), \mu_{2n} \rangle \in Z$ 等于陈数的一个适当的线性组合.

利用庞特里亚金类与庞特里亚金数也可得到类似的示性类与示性数.

陈数的线性独立性(linear independence of Chern numbers)　诸陈数组成的矩阵为非奇异的. 设 $K^1, K^2, \cdots, K^n$ 是复流形，满足 $s_k(c)[K^k] \neq 0$，则陈数的 $p(n) \times p(n)$ 矩阵

$$[c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r} [K^{j_1} \times K^{j_2} \times \cdots \times K^{j_s}]]$$

是非奇异的，其中 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 与 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 取遍 n 的所有划分.

庞特里亚金数的线性独立性(linear independence of Pontriagin numbers)　诸庞特里亚金数组成的矩阵为非奇异的. 若 $M^{4\times 1}, M^{4\times 2}, \cdots, M^{4n}$ 是定向流形，满足 $s_k(p)[M^{4k}] \neq 0$，则庞特里亚金数的 $p(n) \times p(n)$ 矩阵

$$[p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r} [M^{4j_1} \times M^{4j_2} \times \cdots \times M^{4j_s}]]$$

是非奇异的.

陈特征标(Chern character)　全陈类在对称函数作用下的一种形式和. 复 n 维向量丛 ω 的陈特征标 $\mathrm{ch}(\omega)$ 定义为形式和

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} s_k(c(\omega))/k! \in H^{\pi}(B; Q).$$

陈特征标满足可加性与乘法性.

定向配边类(oriented cobordism class)　流形的一种等价类. 对于两个光滑紧定向 n 维流形 M 与 M'，若存在一个光滑紧的带边的定向流形 X，使得 ∂X 及其诱导定向在保持定向的同胚之下同胚于 M 与 $(-M')$ 的无交并，则称 M 与 M' 属于同一个定向配边类.

定向配边类的这种关系是自反的、对称的和传递的，因此是一个等价关系，在这种等价关系之下的等价类之集记为 Ω_n. 对 Ω_n 中的任意两个元素 $\{M\}$，$\{M'\}$，用无交并作为群运算，则 Ω_n 构成一个阿贝尔群，这个群的零元就是空流形的配边类. 例如，可以列出定向配边类群如下：$\Omega_0 \cong \mathbb{Z}$，$\Omega_1 = 0$，$\Omega_2 = 0$，$\Omega_3 = 0$，$\Omega_4 \cong \mathbb{Z}$，$\Omega_5 = \mathbb{Z}/2$，$\Omega_6 = 0$，$\Omega_7 = 0$，$\Omega_8 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，$\Omega_9 = (\mathbb{Z}/2) \oplus (\mathbb{Z}/2)$，$\Omega_{10} \cong \mathbb{Z}/2$，$\Omega_{11} \cong \mathbb{Z}/2$.

托姆空间(Thom space)　某种特殊的商空间. 设 ξ 是 k 平面丛(具有欧氏度量)，$A \subset E(\xi)$ 是全空间中满足 $|v| \geq 1$ 的全体向量 v 所组成的子集，则当 $E(\xi)$ 中的 A 缩为一点，所对应的商空间 $E(\xi)/A$ 称为 ξ 的托姆空间，记为 $T(\xi)$. A 缩成的点记为 t_0，则其补 $T(\xi) \backslash \{t_0\}$ 由满足 $|v| < 1$ 的向量 $v \in E(\xi)$ 组成.

关于 $T(\xi)$ 的拓扑有下列性质：

1. 如果底空间 B 是一个 CW 复形，则托姆空间 $T(\xi)$ 是一个 $(k-1)$ 连通 CW 复形，而且相应于 B 的每个 n 胞腔有一 $(n+k)$ 胞腔.

2. 如果 ξ 是 B 上定向 k 平面丛，则每个整同调群 $H_{k+i}(T(\xi), t_0)$ 同构于 $H_i(B)$.

托姆定理(Thom theorem)　关于托姆空间的同伦群同构于定向配边群的定理. 该定理断言：设 $k > n+1$，万有托姆空间的同伦群 $\pi_{n+k}(T(\tilde{\gamma}^k), t_0)$ 标准同构于定向配边群 Ω_n. 类似地，与未定向万有丛相联系的同伦群 $\pi_{n+k}(T(\gamma^k), t_0)$ 标准同构于未定向配边群 N_n.

由此得出关于配边群的托姆定理：若 $n \not\equiv 0 \pmod 4$，则定向配边群 Ω_n 是有限的，若 $n = 4r$，则 Ω_n 是一个有限生成群，其秩为 r 的划分数 $p(r)$.

乘法序列(multiplicative sequence)　多项式构成的一个序列. 设 Λ 是一个固定的有单位元的交换环，$A^* = (A^0, A^1, A^2, \cdots)$ 代表一个分次 Λ 代数，对于每个这样的 A^* 有一个相联系的交换环 A^{π}，是由形式和式 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots (a_i \in A^i)$ 构成的. $\{K_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$ 是多项式序列，其系数在 Λ 中，x_i 是 i 次，每个多项式 $K_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 次齐次多项式. 对于首项为 1 的元素 $a \in A^{\pi}$，定义为一个首项为 1 的元素 $K(a)$：

$$K(a) = 1 + K_1(a_1) + K_2(a_1, a_2) + \cdots.$$

若 $K(ab) = K(a)K(b)$ 对所有这样的分次代数 A^* 及所有首项为 1 的元素 $a, b \in A^{\pi}$ 成立，则称 $\{K_n\}$ 构

成一个多项式的乘法序列.

属于幂级数的乘法序列(multiplicative sequence belonging to power series) 由 n 级数的系数组成的乘法序列. 给定一个系数在 Λ 中的形式幂级数 $f(t)=1+\lambda_1 t+\lambda_2 t^2+\cdots$, 存在一个且仅有一个系数在 Λ 中的乘法序列 $\{K_n\}$, 满足条件 $K(1+t)=f(t)$, 就称 $\{K_n\}$ 是属于幂级数 $f(t)$ 的乘法序列.

K 亏格(K-genus) 庞特里亚金类的某种有理线性组合. 设 $\{K_n\}$ 是有理系数的多项式乘法序列, 若 M^m 的维数不被 4 整除, 则定义 K 亏格 $K[M^m]$ 等于零; 若 $m=4n$, 则定义为有理数

$$K_n[M^{4n}]=\langle K_n(p_1,p_2,\cdots,p_n),\mu_{4n}\rangle,$$

$\{K_n\}$ 是乘法序列, p_i 表示 M^m 的切丛的第 i 个庞特里亚金数.

显然, $K[M^m]$ 是 M^m 的庞特里亚金数的某种有理线性组合. 若乘法序列为"符号差定理"中的 $\{L_n\}$, 则 $L[M^n]$ 就称为 L 亏格.

L 亏格(L-genus) 见"K 亏格".

符号差(signature) 紧定向流形的一种指标. 设 M^m 是一个紧定向流形, 若维数不能被 4 整除, 则 M^m 的符号差 σ 定义为零; 若 $m=4k$, 选择 $H^{2k}(M^{4k};Q)$ 的基 $a_1,a_2,\cdots,a_r$, 使得对称矩阵

$$[\langle a_i\cup a_j,\mu\rangle]$$

是对角阵, 则 $\sigma(M^{4k})$ 是正对角元的数目减去负对角元的数目. 早期文献中有时也称 σ 为 M 的指标.

符号差函数有下列性质:

1. $\sigma(M+M')=\sigma(M)+\sigma(M')$.
2. $\sigma(M\times M')=\sigma(M)\sigma(M')$.
3. 若 M 是一个定向边缘, 则 $\sigma(M)=0$.

符号差定理(signature theorem) 紧定向流形的符号差等于 L 亏格的定理. 设 $\{L_k(p_1,p_2,\cdots,p_k)\}$ 是属于幂级数

$$\frac{\sqrt{t}}{\tanh\sqrt{t}}=1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{45}t^2+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}B_k t^k}{(2k)!}+\cdots$$

的多项式乘法序列, 则任意光滑紧定向流形 M^{4k} 的符号差 $\sigma(M^{4k})$ 等于 L 亏格 $L[M^{4k}]$, 其中 B_i 表示第 i 个伯努利数(参见《初等数论》同名条).

也可称这个定理为流形的指标定理或希策布鲁赫指标定理.

乘法示性类(multiplicative characteristic class) 由乘法序列引入的一种上同调类. 设 Λ 是包含 1/2 的整环, $\{K_n\}$ 是系数在 Λ 中的乘法序列, 对于实定向向量丛 ξ, 令

$$k_n(\xi)=K_n(p_1(\xi),p_2(\xi),\cdots,p_n(\xi)).$$

显然得到一个"示性类"序列,

$$k_n(\xi)\in H^{4n}(B;\Lambda),$$

它关于丛映射是自然的, 且满足乘法公式

$$k_n(\xi\oplus\eta)=\sum_{i+j=n}k_i(\xi)k_j(\xi),$$

$k_0(\xi)=1$. 称 $k_n(\xi)$ 为乘法示性类.

组合庞特里亚金类(combinatorial Pontriagin class) 庞特里亚金类的有理多项式. 设 K^n 是 n 维紧有理同调流形, Σ^r 是标准 $r+1$ 维单形的边缘. 当 $f:K^n\to\Sigma^r$ 是分片线性映射, 且 $n-r=4i$, 对几乎全体 $y\in\Sigma^r$, $f^{-1}(y)$ 是一个 $4i$ 维紧有理同调流形, 给定了 K^n 的定向, 则 $f^{-1}(y)$ 有一个诱导定向, 其符号差 $\sigma(f^{-1}(y))$ 与 y 无关, 记为 $\sigma(f)$. 于是对 $4i<(n-1)/2$, 存在一个且仅有一个上同调类 $l_i\in H^{4i}(K^n;Q)$, 满足

$$\langle l_i\cup f^*(u),\mu_n\rangle=\sigma(f),$$

其中 $f:K^n\to\Sigma^{n-4i}$. 当 K 是 M^n 的剖分时, 类 $l_i(M^n)$ 等于 M^n 的切丛的希策布鲁赫类 $L_i(p_1,p_2,\cdots,p_i)$. 由于在 $(p_1,p_2,\cdots,p_i)$ 中 p_i 的系数不为零, 故由等式 $l_i=L_i(p_1,\cdots,p_i)$ 中递推地解出庞特里亚金类 p_i 为 $l_1,\cdots,l_i$ 的有理多项式. 例如

$$p_1=3l_1,\quad p_2=(45l_2+9l_1^2)/7$$

等. 上述的作法在组合流形上可行, 因此, 这样的 p 类 p_i 称为组合庞特里亚金类.

以前讲的庞特里亚金类, 其定义要依赖于纤维丛的微分结构. 因此组合定义是一个进步. 已经证明, 庞特里亚金类不是拓扑不变量, 而有理系数者是拓扑不变量.

示性类(characteristic class) 示性类理论的基本概念. 施蒂费尔-惠特尼类、陈类、庞特里亚金类等统称为示性类. 施蒂费尔-惠特尼数、陈数、庞特里亚金数等总称为示性数.

示性数(characteristic number) 见"示性类".

流形的示性类(characteristic class of a manifold) 各种流形上的示性类. 微分流形或(殆)复流形 M, 其切丛的示性类称为流形 M 的示性类.

取值于 Z/2 的流形的施蒂费尔-惠特尼数及取整数值的流形的陈数与庞特里亚金数统称为流形的示性数.

流形的示性数(characteristic number of a manifold) 见"流形的示性类".

层　　论

层论(sheaf theory) 提供从局部到整体的一个有力工具. 层论作为一个理论, 其基本内容是层系数上同调论, 这正好为流形上的整体分析提供了强有力的工具.

多复变函数论中著名的库辛问题(库辛第一问

题与库辛第二问题)是日本数学家冈洁利用了层系数的上同调论与全纯域给出解答的. 以层论为基础,结合嘉当(Cartan,H.)与冈洁关于全纯函数理想论的研究,发展为凝聚层的概念,利用凝聚层的理论,嘉当与塞尔(Serre,J. P.)得到施坦流形的基本定理——嘉当定理 A 与嘉当定理 B.

勒雷(Leray,J.)1945 年发表的在战俘营中讲授代数拓扑的讲义中包含着层论的萌芽,而在 1946 年的两篇短文中正式引进层、层的上同调和谱序列等概念,接着从 1947 年起在法兰西学院系统讲授,而于 1950 年详细发表.

嘉当在其讨论班(1950—1951 年间)发表了层论,采纳了拉扎尔(Lazard,M.)的建议重新定义了层的概念. 这就是希策布鲁赫(Hirzebruch,F. E. P.)1956 年著作中采用的层(德文 Gavbe),原来勒雷意义下的层将其中闭集改为开集后被称为 Garbendaten. 在 1966 年的英文版中分别被译成为 sheaf 和 presheaf.

格罗腾迪克(Grothendieck,A.)在 1957 年又重新定义层的概念,并由哥德曼(Godement,R.)的书广为传播. 预层概念与嘉当-拉扎尔的一样,层定义为满足附加两条性质的预层,并且嘉当-拉扎尔的层被称为平展空间(法文 espace étalé,英文 étalé space).

可以证明,嘉当-拉扎尔的说法与格罗腾迪克的说法是等价的. 但由于这两种讲法已广泛流传,便派生出陈述上的困难. 读者遇到时需弄清其定义方才不至误会. 本篇有关概念均按嘉当-拉扎尔的说法.

由于层论提供了整体分析研究的强有力的工具,它在数学的诸多分支如多复变函数论、复流形、解析几何及代数几何等均有广泛的应用.

预层(presheaf)　一种与拓扑空间的开集族相联系的群与同态的族. 设 X 是以开集族 $\mathscr{U}$ 为拓扑的拓扑空间,如果对于每个 $U\in\mathscr{U}$,存在一个群 $G(U)$,以及对于每一对 $U,V\in\mathscr{U},V\subset U$,存在一个群同态 $r_{vu}:G(V)\to G(U)$,而且这些群与同态满足:

1. 若 $U=\varnothing$,则 $G(U)$ 为零群;
2. 对于每个 $U\in\mathscr{U}$,r_{uu} 为恒等同态 id;
3. 对于 $U,V,W\in\mathscr{U},W\subset V\subset U$,有

$$r_{wv}r_{vu}=r_{wu};$$

则称这些群与同态之族为一个预层,记为 $\{G(U),r_{vu}\}$,或简记为 G. 预层定义中的 $G(U)$ 也可以为环或是模等.

层(sheaf)　一种具有特殊结构的拓扑空间与映射的三元组 (F,π,X). 设 F 与 X 为拓扑空间,π: $F\to X$ 为局部同胚的连续映射,如果下列条件成立,则称 (F,π,X) 是 X 上的一个群层,π 称为投影:

1. 对于每个 $x\in X$,$\pi^{-1}(x)$ 是 F 的一个有群结构的子空间;
2. $\pi^{-1}(x)$ 上的群运算在 F 的诱导拓扑之下是连续的.

此外上述定义中的群 $\pi^{-1}(x)$ 也可以是环或是模等.

茎(stalk)　层论的基本概念. 层的定义中的群 $\pi^{-1}(x)$ 就称为 x 上的茎,记为 $F_x(x\in X)$.

层的截面(section of sheaf)　具有某种条件的一种特定的连续映射. 设 (F,π,X) 是一个群层,一个连续映射 $s:U\to F,U\subset X$,若 $\pi\circ s=\mathrm{id}$,则称 s 为层在 U 上的一个截面. 令 $F(U)$ 表示层在 U 上连续截面所形成的空间,则易知 $F(U)$ 是一个群. 若 $s:X\to F$ 满足 $\pi\circ s=\mathrm{id}$,则称 s 为层的整体截面.

层同态(sheaf homomorphism)　两类之间的映射诱导出的一个群同态. 设 (F,π,X) 与 (F',π',X) 是 X 上的两个群层,若连续映射 $A:F\to F'$ 满足 $\pi'A=\pi$,且对所有 $x\in X$,由 A 在茎上诱导出的映射 $A_x:F_x\to F_x'$ 是群同态,则称 A 为一个层同态.

若层同态 A 是同胚,且 A^{-1} 也是层同态,则称 A 为层同构.

层同构(sheaf isomorphism)　见"层同态".

子层(subsheaf)　由子群关系对对应的层. 设 (R,π,X) 与 (S,η,X) 是 X 上的群层,若 R 是 S 的开子集,$\eta|R=\pi$,且对所有的 $x\in X$,$R_x=\pi^{-1}(x)$ 是 $S_x=\eta^{-1}(x)$ 的子群,则称 (R,π,X) 是 (S,η,X) 的子层.

层的截面预层(presheaf of sections of a sheaf)　由层的截面所构成的预层. 设 (F,π,X) 是一个群层,$F(U)$ 表示在 $U\subset X$ 上连续截面的空间,则它是一个群. 此外,对于每一对 $U,V\subset X,V\subset U$,有一个群同态

$$\gamma_{VU}:F(U)\to F(V),$$

从而 $\{F(U),\gamma_{VU}\}$ 构成一个预层,称为层的截面预层.

相配层(associated sheaf)　由一个预层通过一定的构造过程而得到的层. 设 $\{G(U),\gamma_{VU}\}$ 为 X 上的一个预层,下面的构造过程将得到一个层. G_m^* 表示包含 $m\in X$ 的 $U\in X$ 上每个群 $G(U)$ 的不相交的并. 当且仅当存在 $m\in X$ 的一个邻域 $W,W\subset V\cap U$,使得

$$\gamma_{WU}f=\gamma_{WV}g\quad(f\in G(U),\ g\in G(V))$$

时,就称 f 与 g 是等价的. 这就得到 G_m^* 上一个等价关系. G_m^* 元素的等价类集合记为 G_m. 如 $m\in U$,设 $\gamma_{m,U}:G(U)\to G_m$ 是一个自然射影,它把 $G(U)$ 的每个元素映为其等价类. 不难验证,G_m 上可以定义一个群结构. 设

$$G=\bigcup_{m\in X}G_m,$$

$\pi:G\to X,\pi(G_m)=m$. 对于各个 $f\in G(U)$ 及各个开

集 $U \subset X$，取 G 的拓扑基为 $O_f=\{\gamma_{pU}f \mid p\in U\}$. π 是一个局部同胚，从而 (G,π,X) 是一个层，G_m 是层在 m 处的茎. 这样构造的层称为预层相配层，记为 $\beta(p)$，$p=\{G_U,\gamma_{VU}\}$. 有的作者也称这个层是预层的层化.

常值层(constant sheaf)　亦称平凡层，一种特殊的层. 设 Γ 为具有离散拓扑的一个群，做直积 $X\times\Gamma$，令 $\pi: X\times\Gamma\to X$，$\pi(x,\gamma)=x$，则 $(X\times\Gamma,\pi,X)$ 称为常值层.

平凡层(trivial sheaf)　即"常值层".

亚纯函数的芽层(sheaf of germs of meromorphic functions)　解析函数的芽环的商构成的芽层. 设 M 是具有拓扑 $\mathscr{U}$ 的 m 维复流形，令 $A(U)$ 表示 $U\in\mathscr{U}$ 上 $\mathbf{C}$ 值解析函数的环，O_x 表示在点 $x\in M$ 解析函数的芽环，μ_x 表示 O_x 的商域，μ 表示 μ_x 在 M 上不相交的并，则称 μ 为 M 上亚纯函数的芽层.

复流形上的亚纯函数(meromorphic function on complex manifold)　复流形上解析函数之商. 设 M 是复流形，映射 $m: M\to\mu$，若：

1. 对所有的 $x\in M$，$m(x)\in M_x$；

2. 对于每点 $x\in M$，可以找到 x 的一个开邻域 U，$f,g\in A(U)$ 使得
$$m(y)=f_y/g_y\quad(y\in U);$$
则称映射 m 为 M 上的一个亚纯函数.

其中的记号 $A(U)$，μ，μ_x 参见"亚纯函数的芽层".

***O* 模层**(sheaf of O-modules)　亦称解析层，全纯向量丛的全纯截面的芽层. 设 E 是复流形上的一个全纯向量丛，$\underline{E}$ 是与 E 的全纯截面的预层相联系的 E 上的全纯截面的芽层，对于每个 $x\in X$，$\underline{E}_x$ 是一个 O_x 模，称 E 为 O 模层.

解析层(analytic sheaf)　即"O 模层".

丛截面的芽层(sheaf of germ of sections of the bundle)　微分形式丛的截面芽层. 设 X 为一个微分流形，$C^p(p\geqslant 0)$ 表示复 p 形式的丛 $\Lambda^p_{\mathbf{C}}T^*(X)$ 的 C^∞ 截面的芽层. 设 X 为一个复流形，$C^{p,q}(p,q\geqslant 0)$ 表示复 (p,q) 形式的丛 $\Lambda^{p,q}(X)'$ 的 C^∞ 截面的芽层.

完全预层(complete presheaf)　符合某些条件的预层. 设 $\{G(U),\gamma_{VU}\}$ 是 X 上的预层，如果对于任意开集 $U\subset X$，当它可以表示为 X 上开集的一个并 $\bigcup_\alpha U_\alpha$ 时，下述条件成立，则称这个预层为完全预层：

1. 若 $f,g\in G(U)$ 使得 $\gamma_{U_\alpha U}f=\gamma_{U_\alpha U}g$ 对所有 α 成立，则 $f=g$；

2. 若对每个 α，存在一个元素 $f_\alpha\in G(U_\alpha)$，使对所有的 α 与 β，有
$$\gamma_{U_\alpha\cap U_\beta,U_\alpha}f_\alpha=\gamma_{U_\alpha\cap U_\beta,U_\beta}f_\beta;$$
则存在一个 $f\in G(U)$，使得 $f_\alpha=\gamma_{U_\alpha,U}f\ (\forall\alpha)$.

若 P 是一个完全预层，则 $\alpha(\beta(P))$ 标准地同构于 P.

软层(soft sheaf)　一种特殊的层. 一个层 (F,π,X)，若对 X 的所有闭子集 K 和截面 $s\in F(K)$，s 可扩张为 X 上的一个连续截面，即自然映射 $F(X)\to F(K)$ 对 X 的所有闭子集 K 是满的，则称 (F,π,X) 为软层.

精细层(fine sheaf)　容许有单位分解的层. 若层 (F,π,X) 容许从属于 X 的局部有限开覆盖 F 的恒等同态的单位分解，即给定 X 的局部有限开覆盖 $\{U_i\}$，存在层同态 $\eta_i: F\to F$ 满足条件：

1. X 的包含 U_i 的某个闭子集之外，$\eta_i=0$；

2. $\sum_{i\in I}\eta_i=I$，I 是 F 的恒等同态；

则称层 (F,π,X) 为一个精细层. 每个精细层是软层.

层的分解(resolution of sheaf)　层的长正合列. 层 (F,π,X) 的分解是层的长正合列
$$0\to F\to F_0\xrightarrow{d_0}F_1\xrightarrow{d_1}F_2\xrightarrow{d_2}\cdots,$$
于此，若每个 F_i 是软(或精细)的，则称相应的层的分解是软(或精细)的.

层的标准分解(canonical resolution of sheaf)　一种特殊的层分解. 层 F 的标准分解为层的长正合列
$$0\to F\xrightarrow{i}F_0\xrightarrow{d_0}F_1\xrightarrow{d_1}F_2\xrightarrow{d_2}\cdots,$$
其中 i 为包含映射.

层系数的上同调群(cohomology group with coefficients in sheaf)　由层的标准分解构成的复形所产生的上同调群. 设 F 为 X 上的层，与 F 的标准分解
$$0\to F\xrightarrow{i}F_0\xrightarrow{d_0}F_1\xrightarrow{d_1}\cdots$$
相联系的复形为
$$0\to F(X)\xrightarrow{i^*}F_0(X)\xrightarrow{d_0^*}F_1(X)\xrightarrow{d_1^*}\cdots.$$
令
$$H^0(X,F)=\mathrm{Ker}(d_0^*),$$
$$H^p(X,F)=\mathrm{Ker}(d_p^*)/\mathrm{Im}(d_{p-1}^*)\ (p>0),$$
每个 $H^p(X,F)$ 都是一个阿贝尔群. 称 $H^p(X,F)$ 为系数在层 F 中的 X 的 p 维层上同调群.

X 的层上同调群的性质：

1. 给定 X 的层 F，则：

1) $H^0(X,F)\cong F(X)$；

2) 对于 $p>0$，若 F 是精细的，则 $H^p(X,F)=0$.

2. 设 $a: F\to G$ 是 X 上两个层间的层同态，则对 $p>0$，存在一个诱导同态
$$a^p: H^p(X,F)\to H^p(X,G)$$
满足：

1) $a^0: H^0(X,F)\to H^0(X,G)$ 恰是 a 诱导的在

截面上的映射；

2）若 $a:F\to F$ 为恒等同态，则 $a^p(p\geqslant 0)$ 也是恒等同态；

3）若 $a:F\to G, b:G\to H$ 是 X 上层的同态，则对于 $p\geqslant 0$，有

$$(ba)^p=b^pa^p:H^p(X,F)\to H^p(X,H).$$

3. 若 $0\to F\xrightarrow{a}G\xrightarrow{b}H\to 0$ 是 X 上层的短正合列，则对 $p\geqslant 0$，存在相应的同态 $\delta:H^p(X,H)\to H^{p+1}(X,F)$ 满足：

1）上同调列 $0\to H^0(X,F)\xrightarrow{a^0}H^0(X,G)\xrightarrow{b^0}H^0(X,H)\xrightarrow{\delta}H^1(X,F)\xrightarrow{a_1}\cdots$ 是正合的；

2）给定 X 上层的短正合列的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{a} & G & \xrightarrow{b} & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\eta & & \downarrow\varphi & & \downarrow\omega & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{c} & B & \xrightarrow{d} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

相应的上同调图（见“铎尔博尔复形”图）是交换的.

德拉姆复形（de Rham complex） C 模序列与外微分运算组成的复形. 设 X 是一个 n 维微分流形，德拉姆复形是下述 C 模序列与外微分构成

$$0\to \mathbf{C}\xrightarrow{i}\underline{C}^0\xrightarrow{d}\underline{C}^1\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\underline{C}^{n-1}\xrightarrow{d}\underline{C}^n\to 0.$$

铎尔博尔复形（Dolbeault complexes） 由复流形的 C 模序列与算子 ∂ 与 $\bar\partial$ 构成的复形. 设 X 是 n 维复流形，对于 $p,q\geqslant 0$，有下述铎尔博尔复形

$$0\to \Omega^p\xrightarrow{i}\underline{C}^{p,0}\xrightarrow{\bar\partial}\underline{C}^{p,1}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\underline{C}^{p,n-1}\xrightarrow{\bar\partial}\underline{C}^{p,n}\to 0,$$

$$0\to \overline{\Omega}^p\xrightarrow{i}\underline{C}^{0,q}\xrightarrow{\partial}\underline{C}^{1,q}\xrightarrow{\partial}\cdots\xrightarrow{\partial}\underline{C}^{n-1,q}\xrightarrow{\partial}\underline{C}^{n,q}\to 0,$$

其中 $\overline{\Omega}^p$ 表示反全纯丛 $\Lambda^{0,q}X'$ 的反全纯截面的芽层.

$$\begin{array}{ccccccc} 0\longrightarrow H^0(X,F) & \xrightarrow{a^0} & H^0(X,G) & \xrightarrow{b^0} & H^0(X,H^0) & \xrightarrow{\delta} \\ \downarrow\eta^0 & & \downarrow\varphi^0 & & \downarrow\omega^0 & \\ 0\longrightarrow H^0(X,A) & \xrightarrow{C^0} & H^0(X,B) & \longrightarrow & H^0(X,C) & \xrightarrow{\delta} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \longrightarrow H^1(X,F)\xrightarrow{d} & \cdots\cdots \\ \downarrow\eta' & \\ \longrightarrow H^1(X,F)\xrightarrow{c'} & \cdots\cdots \end{array}$$

德拉姆上同调群（de Rham cohomology group） 由德拉姆复形产生的上同调群. 设 X 是 n 维微分流形，

$$0\to\mathbf{C}\to\underline{C}^0\xrightarrow{d}\underline{C}^1\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\underline{C}^n$$

是 X 的德拉姆复形. 层 $\underline{C}^p$ 都是精细层，德拉姆复形是常数层 C 的一个精细分解，设

$$H^0_{DR}(X,\mathbf{C})=\operatorname{Ker} d:C^0(X)\to C'(X),$$

$$H^p_{DR}(X,\mathbf{C})=\frac{\operatorname{Ker} d:C^p(X)\to C^{p+1}(X)}{\operatorname{Im} d:C^{p-1}(X)\to C^p(X)}(p\geqslant 1),$$

称 $H^p(X,\mathbf{C})(p\geqslant 0)$ 为 p 维德拉姆上同调群.

铎尔博尔同构（Dolbeault isomorphism） 由铎尔博尔复形产生的上同调群与由算子 ∂ 核的等价类所产生的群同构. 设 X 是 n 维复流形，铎尔博尔复形为

$$0\to\Omega^p\to\underline{C}^{p,0}\xrightarrow{\bar\partial}\underline{C}^{p,1}\xrightarrow{\bar\partial}\cdots\xrightarrow{\bar\partial}\underline{C}^{p,n}\to 0,$$

层 $\underline{C}^{p,q}(p,q\geqslant 0)$ 是精细层，因而有铎尔博尔同构

$$H^q(X,\Omega^p)\cong\frac{\operatorname{Ker}\bar\partial:C^{p,q}(X)\to C^{p,q+1}(X)}{\operatorname{Im}\bar\partial:C^{p,q-1}(X)\to C^{p,q}(X)}\quad(q\geqslant 0).$$

凝聚层（coherent sheaf） 与复流形相关的关系层. 对于复流形 M 上的解析层 F，若：

1. F 具有有限型，即 M 中每点 x 可以找到一个开邻域和有限个截面 $s_1,s_2,\cdots,s_k\in F(U)$，使得对每个 $y\in U$，$\{s_{1,y},s_{2,y},\cdots,s_{k,y}\}$ 生成 F_y 作为一个 O_y 模.

2. 给定 M 的任意的开子集和截面 $f_1,f_2,\cdots,f_p\in F(U)$，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_p):O^p_U\to F_U$ 是层同态，定义为

$$f(g_1,g_2,\cdots,g_p)=\sum_{j=1}^{p}g_jf_{j,z},$$

$$(g_1,g_2,\cdots,g_p)\in O^p_z\quad(z\in U).$$

f 的核是 O^p_U 的子层 $R(f_1,f_2,\cdots,f_p)$，它被称为在 $f_1,f_2,\cdots,f_p$ 之间的关系层. 若关系层 $R(f_1,f_2,\cdots,f_p)$ 具有有限型，则称 F 为凝聚层.

凝聚层的性质有：

1. 具有有限型的一个凝聚层的每个解析子层是凝聚层.

2. 设 $0\to F\xrightarrow{a}G\xrightarrow{b}H\to 0$ 是解析层的短正合列，若 F,G,H 中任两个是凝聚层，则第三个也是凝聚层.

3. 凝聚层的有限族的直和是凝聚层.

4. 若 $a:F\to G$ 是凝聚层的一个同态，则 $\operatorname{Ker}(a)$，$\operatorname{Im}(a)$，$\operatorname{Coker}(a)$ 是凝聚层.

5. 若 F,G 是凝聚层 H 的凝聚子层，则层 $F+G$，$F\cup G$ 是凝聚层.

6. 若 F,G 是凝聚层，则 $F\otimes_o G$ 是凝聚层.

嘉当定理 A（Cartan theorem A） 以凝聚层为系数的上同调群的性质的定理. 该定理断言：若 F 是施坦流形 M 上的一个凝聚层，则给定 $x\in M$，可以找到

$$s_1,s_2,\cdots,s_p\in H^0(M,F)=F(M),$$

使得 $s_{1,x},s_{2,x},\cdots,s_{p,x}$ 生成 F_x 作为一个 O_x 模.

嘉当定理 B（Cartan theorem B） 以凝聚层为系数上同调群为零的定理. 该定理断言：若 F 是施坦流形 M 上的一个凝聚层，则

$$H^q(M,F)=0\ (q\geqslant 1).$$

弗雷歇层（Fréchet sheaf） 复流形上一种特殊

的 O 模层.设 F 是复流形 M 上的 O 模层,若:

1.对 M 的每个开子集 U,$F(U)$是一个弗雷歇空间;

2.限制映射 $\gamma_{VU}:F(U)\to F(V)$都是连续的,

$$V\subset U;$$

则称 F 为弗雷歇层.

嘉当-塞尔有限性定理(finiteness theorem of Cartan-Serre) 复流形上的凝聚层为系数的上同调群的维数为有限的定理.设 F 是紧复流形 M 上的凝聚层,则

$$\dim_{\mathbf{C}} H^q(M,F) < +\infty \quad (q \geqslant 0).$$

格劳尔特有限性定理(finiteness theorem of Grauert) 复流形上严格拟凸域上以凝聚层为系数的上同调群维数为有限的定理.若 M 是复流形 $\hat{M}$ 中的一个严格列维拟凸域,则对于 $\hat{M}$ 上任意凝聚层 F,均有

$$\dim_{\mathbf{C}} H^p(M,F) < +\infty \quad (p \geqslant 1).$$

塞尔定理(Serre theorem) 复射影空间以其凝聚层为系数的上同调群的性质.设 F 是复射影空间 $P^n(\mathbf{C})$上的凝聚层,则存在$m_0=m_0(F)\in\mathbf{Z}$,使得:

1.对于每个 $z\in P^n(\mathbf{C})$,$H^0(P^n(\mathbf{C}),F(m))$生成 $F(m)_z$作为一个 G_z 模$(m\geqslant m_0)$.

2.对 $m\geqslant m_0$,$H^p(P^n(\mathbf{C}),F(m))=0 \ (p\geqslant 1)$.

塞尔对偶定理(Serre duality theorem) 复流形上全纯向量丛与对偶向量丛的上同调群同构的定理.设 M 是 m 维紧复流形,E 是 M 上的全纯向量丛,E^* 为 E 的对偶向量丛,则

$$H^p(M,\Omega^q(E)) \cong H^{m-p}(M,\Omega^{m-q}(E^*)).$$

格劳尔特上同调致零的定理(cohomology vanishing theorem of Grauert) 关于紧复流形的凝聚层为系数的上同调群为零的定理.设 E 是紧复流形 M 上的弱正向量丛,则对 M 上任意凝聚层 F,存在 $m_0=m_0(F)$,使得

$$H^p(M,F^{(m)}(E)) = 0 \quad (p \geqslant 1, m \geqslant m_0).$$

流形上的微分算子

流形上微分算子理论(theory of differential operators on manifold) 流形上的分析的一个分支,它研究流形上椭圆微分算子及拟微分算子的阿蒂亚-辛格指标定理及其应用.

设 M 是紧可定向流形,E,F 是 M 上的 C^∞复向量丛,线性映射 $P:C^\infty(E)\to C^\infty(F)$,其中$C^\infty(E)$与$C^\infty(F)$分别是 E 与 F 的 C^∞截面构成的复向量空间,若在局部坐标下 P 表示为向量微分算子,则称 P 为 M 上的线性微分算子.类似地可以定义 M 上的拟微分算子.对于这两种算子,可以定义丛同态

$$\sigma(P):\pi^*(E)\to\pi^*(F),$$

$\sigma(P)$是算子 P 的象征.若象征是同构的话,微分算子(或拟微分算子)P 就是椭圆算子.对于椭圆算子 P,阿蒂亚-辛格指标定理指出:椭圆算子的指标

$$\mathrm{ind}(P)=(-1)^n\alpha^{n+m}([\sigma(P)\boxtimes b^m]),$$

其中 α^{n+m}是博特同构的迭代,b 是贝蒂类,$\boxtimes$是外积.这个定理有三种证明方法:配边证明、嵌入证明和热方程证明.

阿蒂亚-辛格定理有极广泛的应用,能包容高斯-波涅公式、希策布鲁赫符号差定理、黎曼-罗赫-希策布鲁赫定理;推出莱夫谢茨公式及更广泛的阿蒂亚-博特-莱夫谢茨数公式;能应用于有边界的紧流形的椭圆型边值问题;还可应用于规范场理论等.

指标定理是阿蒂亚(Atiyah,M.F.)与辛格(Singer,I.M.)于1963年的一篇合作论文中首先发表的,继而于1968年阿蒂亚和辛格又给出了指标定理的上同调形式.阿蒂亚-辛格指标定理是分析学与拓扑学结合的范例.

微分算子(differential operator) 流形的向量丛之间的线性映射,在局部坐标下为微分算子.设 M 为紧可定向 n 维光滑流形,E,F 是 M 上的 C^∞复向量丛.$C^\infty(E)$与$C^\infty(F)$分别表示 E 与 F 的 C^∞截面所构成的复向量空间.线性映射 $P:C^\infty(E)\to C^\infty(F)$,若在局部坐标系下可以表示为向量微分算子,则称 P 为线性微分算子,而且这样的 P 若不出现高于 $k+1$ 阶的导数,则称为从 E 到 F 的 k 阶微分算子,记为 $P\in\mathrm{Diff}_k(E,F)$(参见本卷《泛函分析》同名条).

象征(symbol) 一种由微分算子确定的丛同态.设 $T^*(M)$为 M 的余切丛,$T'(M)$是丛$T^*(M)$挖去零截面,射影 $\pi:T'(M)\to M$ 导出的$\pi^*(E)$,$\pi^*(F)$是丛拉回到$T'(M)$,有丛同态$\sigma(P):\pi^*(E)\to\pi^*(F)$.这就是微分算子 P 的象征(参见本卷《泛函分析》同名条).

由$\sigma(P)$的定义得到一个映射$\sigma:\mathrm{Diff}_k(E,F)\to\mathrm{Smbl}_k(E,F)$.而 $\mathrm{Smbl}_k(E,F)=\{\sigma\in\mathrm{Hom}(\pi^*E,\pi^*F)\mid\sigma(x,\lambda_v)=\lambda^k\sigma(x,v)$,对所有的 $\lambda>0,(x,v)\in T'(M)\}$.

象征有下述性质:

1.向量空间列

$$0\to\mathrm{Diff}_{k-1}(E,F)\xrightarrow{j}\mathrm{Diff}_k(E,F)\xrightarrow{\sigma}\mathrm{Smbl}_k(E,F)$$

是正合列,其中 j 是一个自然包含映射.

2.若 $P\in\mathrm{Diff}_k(E,F)$,$Q\in\mathrm{Diff}_j(F,G)$,则算子 $QP\in\mathrm{Diff}_{k+j}(E,G)$且 $\sigma(QP)=\sigma(Q)\sigma(P)$.

3.对于每个 $P\in\mathrm{Diff}_k(E,F)$,存在一个伴随微分算子 $P^*\in\mathrm{Diff}_k(F,E)$,使得 $\sigma(P^*)=\sigma(P)^*$,其中$\sigma(P)^*:\pi^*(F)\to\pi^*(E)$是逐点伴随于$\sigma(P)$的同

态.

$\mathbb{R}^n$ 中的拟微分算子(pseudo-differential operator in $\mathbb{R}^n$) 与奇异积分算子相关的 $\mathbb{R}^n$ 中微分算子的推广. 在开子集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上, 局部形式为

$$P(u)(x)=\int e^{i\langle x,\xi\rangle}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

的算子 P 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的拟微分算子, 其中 p 是算子的"振幅", 而 $\langle x,\xi\rangle=x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n$ 是它的"相函数",

$$\hat{u}(x)=\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}u(\xi)d\xi$$

是 u 的傅里叶变换, $u\in C_0^\infty(U)$ (即 $u\in C^\infty(U)$, 且有紧支集). 算子 P 的象征为 $p(x,\xi)$.

拟微分算子是微分算子和奇异积分算子的一种自然推广, 它产生的原始动机之一是为证阿蒂亚-辛格指标定理. 最早对此做系统研究的是科恩(Kohn, J. J.)和尼伦伯格(Nirenberg, L.)(1965), 稍后有赫尔曼德尔(Hörmander, L. V.)的实质性工作, 才使得在奇异积分算子理论中, 避免了对奇核的繁杂处理.

$\mathbb{R}^n$ 中标准拟微分算子(canonical pseudo-differential operator in $\mathbb{R}^n$) 在局部坐标下满足某些条件的拟微分算子. 在开子集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上局部形式为

$$(Pu)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\langle x,\xi\rangle}p(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$
$$(x\in U,u\in C_0^\infty(U)).$$

若振幅 $p\in C^\infty(U\times\mathbb{R}^n)$ 满足下述渐近增长条件(当 $\xi\to\infty$): 对每个紧子集 $K\subset U$ 和多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, 存在常数 $C\in\mathbb{R}$, 使得对所有的 $x\in K$ 和 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{k-|\alpha|},$$

则称 P 是 $k\in\mathbb{Z}$ 阶标准拟微分算子.

每个标准拟微分算子 P 实质是一个线性映射

$$P:C_0^\infty(U)\to C^\infty(U).$$

每个标准拟微分算子 P 可以写成积分算子

$$(Pu)(x)=\int_U K(x,x-y)u(y)dy,$$

或

$$(Pu)(x)=\int_U K_\lambda(x,x-y)(1-\Delta)^\lambda u(y)dy,$$

其中 $u\in C_0^\infty(U)$, 权函数 $K(x,z)$, $K_\lambda(x,z)$ 对于 $z\neq0$ 是 C^∞ 的, Δ 是拉普拉斯算子.

希尔伯特变换(Hilbert transform) $\mathbb{R}$ 中零阶拟微分算子.

希尔伯特变换 $Q:C_0^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R})$ 定义为

$$(Qu)(x)=-\frac{1}{\pi i}(\text{P. V.})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(y)}{x-y}dy$$
$$(u\in C_0^\infty(\mathbb{R})),$$

其中积分取主值. 参见《调和分析》同名条.

射影算子(projection operator) $S^1=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上零阶拟微分算子.

射影算子 $P:C^\infty(S^1)\to C^\infty(S^1)$ 定义为

$$Pe^{im\theta}=\begin{cases}e^{im\theta} & (m\geqslant0),\\ 0 & (m<0).\end{cases}$$

特普利茨算子(Toeplitz operator) $S^1=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上零阶拟微分算子. 特普利茨算子 $gP+(\text{id}-P)$, $g\in C^\infty(S^1)$, P 是射影算子.

$$gP+(\text{id}-P)=\begin{cases}T_g & (C^\infty(S^1)\cap H_0),\\ \text{id} & (C^\infty(S^1)\cap H_0^{\perp L^2(S^1)}),\end{cases}$$

其中 H_0 是哈代空间, T_g 是由 g 诱导的维纳-霍普夫算子.

里斯算子(Riesz operator) 一个标准拟微分算子. 里斯算子 $P=\sum a_\alpha R^\alpha(a_\alpha\in C_0^\infty(U))$, 而

$$(R^\alpha u)(x)=\int e^{i\langle x,\xi\rangle}(\xi/|\xi|)^\alpha\hat{u}(\xi)d\xi.$$

有紧支集的拟微分算子(pseudo-differential operator with compact support) $\mathbb{R}^n$ 中有紧支集的拟微分算子. 设 P 是 $k\in\mathbb{Z}$ 阶拟微分算子, 若 P 的振幅 p 满足下述条件, 就称 P 是有紧支集的拟微分算子:

1. 对每个紧子集 $K\subset U$ 及多重指标 α,β, 存在常数 $C\in\mathbb{R}$, $x\in K$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{k-\alpha}.$$

2. 对所有的 $x\in U$ 和 $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, 极限

$$\sigma_k(p)(x,\xi)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{p(x,\lambda\xi)}{\lambda^k}.$$

3. 截断函数 $\chi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 当 $|\xi|$ 充分小时 $\chi(\xi)=0$, 当 $|\xi|\geqslant1$ 时 $\chi(\xi)=1$. 设 $p(x,\xi)-\chi(\xi)\sigma_k(p)(x,\xi)$ 是 $k-1$ 阶标准拟微分算子的振幅.

4. $p(x,\xi)$ 关于变量 x 有紧支集.

流形上的拟微分算子(pseudo-differential operator on manifold) 流形上有紧支集的函数空间之间的线性映射, 局部坐标下是拟微分算子. 设 X 是仿紧 C^∞ 流形, 线性映射 $P:C_0^\infty(X)\to C^\infty(X)$, 其中 $C_0^\infty(X)$ 表示 X 上 C^∞ 中有紧支集的函数空间. 对每个局部坐标系 $\kappa:U\to\mathbb{R}^n$, U 是 X 的开子集, 由 P 得到一个"局部算子"

$$P_\kappa u=p(\overline{u\circ\kappa})\circ\kappa^{-1}\quad(u\in C_0^\infty(\kappa(U))),$$

其中

$$\overline{u\circ\kappa}=\begin{cases}u\circ\kappa & (\text{在 } U \text{ 上}),\\ 0 & (\text{在 } X\backslash U \text{ 上}).\end{cases}$$

若对所有 C^∞ 区图 κ 有相对紧的像, P_κ 是一个 k 阶拟微分算子, 则称 P 是流形 X 上 k 阶拟微分算子, 记为 $P\in\text{PDiff}_k(X)$. 对于 $\text{PDiff}_k(X)$, 有下述结果:

1. 若 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个有界开子集, 则由"局部化"定义的空间 $\text{PDiff}_k(X)$ 与这里定义的 k 阶拟微分算子的空间相重合.

2. $\mathrm{PDiff}_k(X)$有向量空间的结构.

3. $\mathrm{PDiff}_k(X)\subset\mathrm{PDiff}_{k+1}(X)$.

4. 设$\kappa:U\to\mathbb{R}^n$是X的一个局部坐标系,U是X中的开集,$f\in C_0^\infty(U)$,$P\in\mathrm{PDiff}_k(X)$,当p是局部算子P_k的振幅,且f在邻域$\kappa^{-1}(x)$中恒为1时,公式

$$(x,\xi)\mapsto q_f(x,\xi)$$
$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}(p(f(\cdot\cdot)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle k(\cdot\cdot),\xi\rangle}))\kappa^{-1}(x)$$
$$(x\in\kappa(U),\xi\in\mathbb{R}^n)$$

定义$\kappa(U)$上一个k阶拟微分算子的振幅且

$$\sigma_k(q_f)(x,\xi)=(2\pi)^{-n}\sigma_k(P)(x,\xi).$$

5. 令$\mathrm{Smbl}_k(X)=\mathrm{Smbl}_k(C_X,C_X)$为$X$上平凡线丛的$k$-象征,因而

$$s\in\mathrm{Smbl}_k(X)\Leftrightarrow s:T'X\to\mathbb{C},$$

有

$$s(x,\lambda V)=\lambda^k s(x,V)\quad(x\in X,v\in(T^*X)_x);$$

定义线性映射

$$\sigma_k:\mathrm{PDiff}_k(X)\to\mathrm{Smbl}_k(X),$$

它与在$\mathrm{Diff}_k(X)\subset\mathrm{PDiff}_k(X)$上的定义重合,称为$k$阶拟微分算子的$k$象征.

仓西定理(Kuranishi theorem) 某些条件保证$\mathbb{R}^n$中拟微分算子写成有紧支集的拟微分算子的定理. 设$U\subset\mathbb{R}^n$是开集,$k\in\mathbb{Z}$,考察形如

$$(Qu)(x)=\iint\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(x,y,\xi)}q(x,y,\xi)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi$$
$$(x\in U,u\in C_0^\infty(U))$$

的算子,其中"振幅"$q\in C^\infty(U\times U\times\mathbb{R}^n)$满足下述条件:

1. $|D_\xi^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma q(x,y,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{k-\alpha}$.

2. $\sigma_k(q)(x,y,\xi)=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\dfrac{q(x,y,\lambda\xi)}{\lambda^k}$对$\xi\neq0$存在.

3. $q(x,x,\xi)-\chi(\xi)\sigma_k(q)(x,x,\xi)$是$U$上$k-1$阶标准拟微分算子的振幅($\chi$是截断函数).

4. $q(x,y,\xi)$关于变量x,y有紧支集,相函数ϕ定义于$U\times U\times\mathbb{R}^n$上是实值的,关于变量$\xi$是线性的,对$\xi\neq0$是$C^\infty$的及对固定的$x$(或$y$)没有临界点$(y,\xi)$(或$(x,\xi)$).进而假设

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}(x,y,\xi)=\cdots=\frac{\partial\phi}{\partial\xi_n}(x,y,\xi)=0\Leftrightarrow x=y,$$

则Q可以写成为一个具紧支集的拟微分算子.

复向量丛上的拟微分算子(pseudo-differential operator on complex vector bundle) 流形上复向量丛之间的算子,在局部坐标下为拟微分算子. 设X是C^∞流形,E与F是X上的复向量丛,算子$P:C_0^\infty(E)\to C^\infty(F)$,局部表示算子为具有紧支集的$k$阶拟微分算子的$N\times M$矩阵,称为复向量丛上的拟微分算子,记为$P\in\mathrm{PDiff}_k(E,F)$.

若$\mathrm{OP}_k(E,F)$是E到F的k阶微分算子的集合,则$\mathrm{PDiff}_k(E,F)\subset\mathrm{OP}_k(E,F)$. 这里一个线性算子$P:C_0^\infty(E)\to C^\infty(F)$在$\mathrm{OP}_k(E,F)$中是要把$P$扩张为连续算子$P_s:W^s(E)\to W^{s-k}(F)$,其中$s$是任意实数,且$s\geqslant0,s-k\geqslant0$,而$W^s(E),W^{s-k}(F)$是索伯列夫空间.

象征映射(symbol map) 流形上复向量丛的拟微分算子空间到对应的象征空间的映射. 设X是C^∞流形,E和F是X上的复向量丛,对于任意一个拟微分算子$P\in\mathrm{PDiff}_k(E,F)$,总存在一个线性映射

$$\sigma_k:\mathrm{PDiff}_k(E,F)\to\mathrm{Smbl}_k(E,F),$$

称σ_k为象征映射.

σ_k有下述性质:

1. 映射σ_k是满的;

2. 直和$\mathrm{PDiff}(E,F)=\sum_k\mathrm{PDiff}_k(E,F)$构成一个分次代数(通过复合运算)且在取形式伴随的运算下是闭的.

对于σ_k有下述计算规则:

1. 如果$P\in\mathrm{PDiff}_k(E,F)$,$Q\in\mathrm{PDiff}_j(E,F)$,则$Q\circ P\in\mathrm{PDiff}_{j+k}(E,F)$,且

$$\sigma_{j+k}(Q\circ P)(x,\eta)=\sigma_j(Q)(x,\eta)\circ\sigma_k(P)(x,\eta)$$
$$(x\in X,\eta\in(T^*X)_x\backslash\{0\}).$$

2. 如果$P\in\mathrm{PDiff}_k(E,F)$,$E$与$F$有埃尔米特度量,$X$是定向的黎曼流形,则存在惟一一个算子$P^*\in\mathrm{PDiff}_k(E,F)$,有

$$\int_X\langle Pu,v\rangle_F=\int_X\langle u,P^*v\rangle_E$$
$$(u\in C_0^\infty(E),v\in C_0^\infty(F)),$$

且有

$$\sigma_k(P^*)(x,\eta)=(\sigma_k(P)(x,\eta))^*$$
$$(x\in X,\eta\in(T^*X)_x\backslash\{0\}).$$

3. 若σ_k是已定义的一个满的象征映射,则

$$\mathrm{Ker}(\sigma_k)\subset\mathrm{OP}_{k-1}(E,F).$$

4. 有正合列

$$\mathrm{PDiff}_k(E,F)\xrightarrow{\sigma_k}\mathrm{Smbl}_k(E,F)\to0.$$

椭圆算子(elliptic operator) 其象征为同构的微分算子. 设P是向量丛E到F的k阶微分算子,若其象征$\sigma(P)$是一个同构,就称P为椭圆算子. 若P为椭圆算子,则P^*也是椭圆算子.

设$P\in\mathrm{PDiff}(E,F)$,若$\sigma(P)(x,\xi)$对于所有的$x\in X$都是从E_x到F_x的一个同构,$\xi\in(T^*X)_x\backslash\{0\}$,则称$P$为椭圆算子. k阶椭圆算子全体记为

$$\mathrm{Ell}_k(E,F).$$

拟基本解(parametrix) 微分算子的基本解的一种近似. 若对每个$P\in\mathrm{PDiff}_k(E,F)$,存在$Q\in\mathrm{Ell}_{-k}(E,F)$使得$PQ-Id_F\in\mathrm{OP}_{-1}(F,F)$,$QP-Id_E\in\mathrm{OP}_{-1}(E,E)$,就称$Q$是$P$的拟基本解. 格林函数是一种经典的拟基本解.

椭圆算子的指标(index of elliptic operator) 椭圆算子的核维数与余核维数之差. 设 $P:E\to F$ 是一个椭圆算子,若 P 的核 $\mathrm{Ker}P$ 与其余核 $\mathrm{Coker}P$ 都是有限维,则称 $\dim\mathrm{Ker}P-\dim\mathrm{Coker}P$ 为椭圆算子 P 的指标,记为 $\mathrm{index}P$. 也称 $\mathrm{index}P$ 为 P 的解析指标. 设 E,F,G,H 是闭定向黎曼流形 X 上的埃尔米特向量丛,$P\in\mathrm{Ell}_k(E,F)$,$Q\in\mathrm{Ell}_j(F,G)$,$R\in\mathrm{Ell}_k(G,H)$,则有下述结论:

1. $\mathrm{index}P^*=-\mathrm{index}P$.

2. $\mathrm{index}QP=\mathrm{index}P+\mathrm{index}Q$.

3. $\mathrm{index}P\oplus R=\mathrm{index}P+\mathrm{index}R$.

4. 若 $\sigma(P)(x,\xi)$ 仅依赖于 x 而不依赖于 $\xi\in(SX)_x$,则 $\mathrm{index}P=0$. 其中

$$SX=\{(x,\xi)\,|\,x\in X,\xi\in T^*X\text{ 且 }|\xi|=1\},$$

SX 称为共变球丛,$(SX)_x$ 为其纤维.

环绕数(winding number) 复平面上不过原点的闭路径绕原点的次数,它与拓扑度相关. 设 $f:S^1\to\mathbf{C}^*$ 是从圆周 S^1 到非零复数的有孔平面的连续映射,即平面中不经过原点的一条闭路径. 这个闭路径绕原点的次数,就称为 f 的环绕数,记为 $W(f,0)$ 或 $\deg(f)$. 对于环绕数有下述结论:设 $f:S^1\to\mathbf{C}^*$ 为前述之映射,则:

1. f 具有一个"环绕数";

2. 这个数仅是这样的不变量,即当且仅当 $\deg(f)=\deg(g)$ 时,f 可以形变(同伦地)到 g;

3. 对于每个整数 m,总存在一个映射 f 有

$$\deg(f)=m.$$

博特定理(Bott theorem) 同伦群的周期性定理,是关于从球面到复数域上一般线性群的连续映射性质的一个定理. 设 S^{n-1} 为 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面,$\mathrm{GL}(N,\mathbf{C})$ 是从 $\mathbf{C}^N$ 到 $\mathbf{C}^N$ 上线性映射(从而是双射)所构成的一般线性群,于是博特(Bott,R.)的一个定理说,对于连续映射

$$f:S^{n-1}\to\mathrm{GL}(N,\mathbf{C}),$$

当 $2N\geqslant n$ 时,若 n 为奇数,则 f 同伦于常值映射,若 n 为偶数,对于每个 f 可以定义一个整数 $\deg(f)$,使得:

1. f 同伦于 g,当且仅当 $\deg(f)=\deg(g)$;

2. 对于任意给定的整数 m,存在一个连续映射 $f:S^{n-1}\to GL(N,\mathbf{C})$,使得 $\deg(f)=m$.

于是在分支条目中的结论是博特定理在 $n=2$,$N=1$ 时的特殊情形. 另一方面,依照同伦论的术语,它可以被陈述为:当 $2N\geqslant n$ 时 $\mathrm{GL}(N,\mathbf{C})$ 的同伦群为

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}(N,\mathbf{C}))=\begin{cases}0 & (n\text{ 为奇数}),\\ Z & (n\text{ 为偶数}).\end{cases}$$

由此可知,$\mathrm{GL}(N,\mathbf{C})$ 的同伦群之间有关系

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}(N,\mathbf{C}))\cong\pi_{n+1}(\mathrm{GL}(N,\mathbf{C})).$$

因此,这是一种周期性的定理.

紧空间的 K 群(K group for compact space) 紧拓扑空间上的复向量丛的同构类构成的阿贝尔群. 设 X 是紧拓扑空间,$\mathrm{Vect}(X)$ 是 X 上复向量丛的同构类的阿贝尔半群,若 X 由一个单点组成,则 $\mathrm{Vect}(X)\cong\mathbf{Z}_+$. 设 $A=\mathrm{Vect}(X)$,按下述方法,从每个有零元的阿贝尔半群得到一个阿贝尔群 $K(X)$,$K(X)$ 定义为 $A\times A/\sim$,其中 $\sim$ 是 $A\times A$ 中的等价关系,定义为

$$(a_1,a_2)\sim(a'_1,a'_2)\Leftrightarrow(a_1\oplus a,a_2\oplus a)=(a'_1\oplus a',a'_2\oplus a')\ (a,a'\in A).$$

还得到一个半群同态 $\varphi:A\to K(X)$ 为 $a\to(a,0)$. 这样得到的阿贝尔群 $K(X)$ 称为紧空间的 K 群,是 K 理论中研究的基本对象.

对于 X 上的每个向量丛 E,由同态 ϕ 可以得到 $[E]\in K(X)$,$[E]$ 是 $K(X)$ 中的同构类,$K(X)$ 的每个元素都是这样元素的一个线性组合. 当 X 为一个单点时,则 $K(X)\cong\mathbf{Z}$.

若 X 为非紧空间,则上述构造的 $K(X)$ 是一个环(没有单位元).

向量丛的稳定等价(stably equivalent for vector bundle) 向量丛的一种等价关系. 设 E,F 是 X 上的两个向量丛,若存在正整数 M 和 N,使得

$$E\oplus\mathbf{C}_X^N\cong F\oplus\mathbf{C}_X^M,$$

就称 E 与 F 稳定等价. $\mathbf{C}_X^M$ 是 X 上有纤维 $\mathbf{C}^N$ 的平凡丛.

把稳定等价的向量丛看做同一得到的等价类称为稳定向量丛.

局部紧空间的 $K(X)$($K(X)$ for locally compact space) 有紧支集的 K 群. 设 X 是局部紧拓扑空间,令

$$K(X)=K(X^*,+)=\mathrm{Ker}(K(X^+)\to K(+)),$$

此处 $X^+=X\cup\{+\}$ 是 X 的一点紧化. 这个 $K(X)$ 是具有紧支集的 K 群,它在 K 理论中起重要作用.

若 X 是紧拓扑空间,这个定义没有给出新的东西. 这里的 $K(X)$ 也可用向量丛的复形来表示. 这是阿蒂亚(Atiyah,M. F.)与希策布鲁赫(Hirzebruch,F. E. P.)给出的.

博特周期性定理(Bott periodicity theorem) 紧空间 K 群同构定理. 该定理断言:对于每个局部紧空间 X,存在同构 $\alpha:K(\mathbf{R}^2\times X)\to K(X)$,其逆 $\beta:K(X)\to K(\mathbf{R}^2\times X)$ 通过外乘以博特类给出为

$$x\to\beta(x)=b\boxtimes x.$$

$\mathbf{R}^n$ 中的指标公式(index formula in $\mathbf{R}^n$) $\mathbf{R}^n$ 上椭圆拟微分算子指标的公式. 设 $\mathrm{Ell}_c(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上零阶椭圆拟微分算子类,对于所有的 $P\in\mathrm{Ell}_c(\mathbf{R}^n)$,有

指标公式

$$\mathrm{index}P = (-1)^n\alpha^n([\sigma(P)]),$$

其中 $\alpha^n: K(\mathbb{R}^{2n}) \to K(\mathbb{R}^0) \cong \mathbb{Z}$ 是由迭代

$$\alpha_X: K(\mathbb{R}^2 \times X) \to K(X),$$
$$X = \mathbb{R}^{2(n-1)}, \mathbb{R}^{2(n-2)}, \cdots$$

得出的"周期性同态".

阿蒂亚-辛格指标定理(Atiyah-Singer index theorem) 黎曼流形上埃尔米特向量丛之间的椭圆算子指标公式的定理. 设 X 是 n 维定向闭的 C^∞ 黎曼流形, E 和 F 是 X 上的埃尔米特向量丛, $P \in \mathrm{Ell}_k(E,F)$, $k \in \mathbb{Z}$, 则有

$$\mathrm{index}\ P = (-1)^n\alpha^{n+m}([\sigma(P)] \oplus b^m),$$

其中 $[\sigma(P)] \in K(TX)$ 是 P 的"象征类", $b \in K(\mathbb{R}^2)$ 是博特类, $\alpha^{n+m}: K(\mathbb{R}^{2(n+m)}) \to \mathbb{Z}$ 是博特同构的迭代.

阿蒂亚-辛格指标定理的证明有:

1. 配边证明. 这是由阿蒂亚(Atiyah, M. F.)与辛格(Singer, I. M.)给出概略性的证明;

2. 嵌入证明. 由阿蒂亚给出;

3. 热方程证明. 这是一个解析证明. 热方程方法是麦基恩(Mckean, H. P.)与辛格于 1967 年发表的.

阿蒂亚-辛格指标定理有着极广泛的应用.

指标定理的上同调形式(cohomological formulation of index theorem) 把阿蒂亚-辛格指标公式写成上同调类的形式. 若 P 是 n 维闭定向流形 X 上的一个椭圆算子, 则有

$$\mathrm{index}P = (-1)^{n(n+1)/2}\{\phi^{-1}\mathrm{ch}[\sigma(P)] \cup \tau(TX \otimes \mathbb{C})\}[X],$$

其中 $[\sigma(P)] \in K(X)$ 是 P 的象征 $\sigma(P)$ 的差丛,

$$\mathrm{ch}[\sigma(P)] \in H_0^*(TX;\mathscr{Q})$$

为 $[\sigma(P)]$ 的陈特征,

$\phi: H^*(X;\mathscr{Q}) \to H^*(TX,(TX)_0;\mathscr{Q}) = H_C^*(TX;\mathscr{Q})$ 是托姆同构, $[X] \in H_n(X;\mathscr{Q})$ 是 X 定向的基本闭链,

$$\tau(E) = \frac{y_1}{1-\mathrm{e}^{-y_1}} \cdot \cdots \cdot \frac{y_N}{1-\mathrm{e}^{-y_N}} \in H^*(X,\mathscr{Q})$$

是纤维维数 N 的复向量丛的类.

若 X 不是定向的, 则

$$\mathrm{index}\ P = (-1)^n\{\mathrm{ch}[\sigma(P)] \cup \pi^*\tau(TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})\}[TX],$$

这里的 $[TX]$ 是切丛 TX 的基本闭链.

黎曼-罗赫-希策布鲁赫定理(Riemann-Roch-Hirzebruch theorem) 把指标定理应于铎尔博尔复形, 就得出黎曼-罗赫-希策布鲁赫定理. 设

$$0 \to \Omega^0 \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{0,1} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{0,n} \to 0$$

是 n 维克勒(Kähler, E.)流形的铎尔博尔复形. $\Omega^{0,p}$ 表示 p 次复外微分形式空间, $\bar\partial$ 是外导数. 若 V 是 X 上一个全纯向量丛, 则可构造广义铎尔博尔复形

$$0 \to \Omega^0(V) \xrightarrow{\bar\partial_V} \Omega^{0,1}(V) \xrightarrow{\bar\partial_V} \cdots \xrightarrow{\bar\partial_V} \Omega^{0,n}(V) \to 0.$$

定义欧拉示性数

$$\chi(X,V) = \mathrm{index}\,\overline{D}_V = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \dim H^p(X;O(V^*)),$$

其中 $\overline{D}_V = (\bar\partial_V + \bar\partial_V^*) \mid \Sigma\Omega^{0,\mathrm{even}}(V)$ 是一阶椭圆算子, 而 $H^{n-p}(X;O(V^*))$ 是系数在 V^* 中全纯截面的芽层 X 的 $n-p$ 维上同调. $H^{n-p}(X;O(V^*)) \cong \mathrm{Ker}\ \bar\partial_V^{0,p}/\mathrm{Im}\ \bar\partial_V^{0,p-1} \cong \mathrm{Ker}(\Box_V: \Omega^{0,p}(V) \to \Omega^{0,p}(V))$ (这里的 $\Box_V = \bar\partial_V\bar\partial_V^* + \bar\partial_V^*\bar\partial_V$) $\cong$ 系数在 V 中的 X 上 p 次整体全纯微分形式的空间. 因而有黎曼-罗赫-希策布鲁赫定理

$$\chi(X,V) = (\mathrm{ch}(V) \cup \tau(TX))[X],$$

$\mathrm{ch}(V)$ 是 V 的陈特征, $\tau(TX)$ 是 X 的 Todd 类.

特别当 V 是平凡的线丛 $\mathbb{C}_X$, 则 $\chi(X) = \chi(X,V)$ 称为 X 的算术亏格, 有

$$\chi(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}C_2(X)[X] & (\dim_{\mathbb{C}}X = 1), \\ \frac{1}{12}(C_1^2(X) + C_2(X))[X] & (\dim_{\mathbb{C}}X = 2), \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

$C_i(X) \in H^{2i}(X)$ 是 TX 的第 i 个陈类.

莱夫谢茨数(Lefschetz number) 与映射的不动点集相关的数, 可展为一个和式. 设 $f: X \to X$ 是连续映射, X 是紧的, 而

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

是 f 的不动点集. 莱夫谢茨(Lefschetz, S.)引入公式

$$L(f) = \sum \gamma(x),$$

和式展布在 f 的不动点上, $\gamma(x)$ 是整数, 即对孤立不动点, $\gamma(x) = 1$, 而一点的邻域中 $f = Id$, $\gamma(x) = 0$. 莱夫谢茨数 $L(f)$ 定义为一个交错和 $\sum(-1)^i \mathrm{trace}(H^i f)$, 其中

$$H^i f: H^i(X,\mathbb{C}) \to H^i(X,\mathbb{C})$$

是复向量空间 $H^i(X,\mathbb{C})$ 的上同调自同态. 这个公式是由阿蒂亚(Atiyah, M. F.)和博特(Bott, R.)导出的, 并于 20 世纪 60 年代中加以改进.

阿蒂亚-博特-莱夫谢茨数(Atiyah-Bott-Lefschetz number) 与椭圆算子可交换的映射的莱夫谢茨数的公式. 设 X 是没有边缘的一个紧 C^∞ 流形, P 是椭圆微分算子, $f: X \to X$ 是可微的且与 P 可交换. 假设 f 提升为一个丛映射, 例如 $\tilde{f}$, 以使 f 通过

$$f \cdot s(x) = \tilde{f}(s(f^{-1}(x)))$$

作用在截面上, 则 f 得到有限维空间 $\mathrm{Ker}P$ 与 $\mathrm{Coker}P$ 的一个已定义的自同态, 规定阿蒂亚-博特-莱夫谢茨数为

$$L(f,P) = \mathrm{trace}(f|\mathrm{Ker}P) - \mathrm{trace}(f|\mathrm{Coker}P).$$

霍 奇 理 论

霍奇理论(Hodge theory)　关于调和微分形式的理论.霍奇理论是基于德拉姆上同调理论.假定M是紧黎曼流形,对于贝尔特拉米-拉普拉斯算子$\Delta = d\delta + \delta d$,$\Delta\phi = 0$时,称$\phi$为调和微分形式,调和$p$形式的全体记为$H^p$.霍奇分解定理是霍奇理论的中心结果,它指出$M$的$p$形式空间$E^p(M)$有正交直和分解

$$E^p(M) = \Delta(E^p(M)) \oplus H^p.$$

由这个分解定理可推出:每个德拉姆上同调类中存在惟一个调和形式及德拉姆上同调群的维数是有限的.类似地可以把霍奇理论推广到全纯向量丛和克勒流形上,并分别有相应的分解定理.

霍奇理论是霍奇(Hodge,W.V.D.)首创于20世纪30年代,后来为小平邦彦(Kodaira,Kunihiko)加以发展与推广.

霍奇理论使得分析与拓扑之间有着深刻的联系,它在分析学中有着广泛的应用,它可以应用到多复变函数论、超定微分方程组及拟微分算子等分支.

黎曼流形(Riemann manifold)　有二阶共变张量场的微分流形.设M是微分流形,g是M上连续的2阶共变张量场,若$(U;u^i)$为M的一个局部坐标系,则g在U上表为

$$g = g_{ij}du^i \otimes du^j \quad (g_{ij} = g_{ji}).$$

设

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i},\ Y = Y^i \frac{\partial}{\partial u^i},\ p \in U,$$

得$g(X,Y) = g_{ij}X^iY^j$,如果对于任意$X \in T_p(M)$,$g(X,Y) \geqslant 0$,则称张量g为正定的.这个对称2阶共变张量场称为度量张量.

若微分流形M上给定了一个度量张量,则称M为黎曼流形.

度量张量(metric tensor)　见“黎曼流形”.

星算子(star operator)　外代数之间的线性映射.设V是一个有向的内积空间,则存在一个线性变换

$$* : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$$

称为星算子,使得对任一正交基$e_1,e_2,\cdots,e_n$有

$$*(1) = \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

$$*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \pm 1,$$

$$*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) = \pm e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n,$$

其中若$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$位于由定向所决定$\Lambda_n(V)\backslash\{0\}$的分支内时,取“+”号,反之取“−”号.

可以等价地把星算子写成

$$* : \Lambda_p(V) \to \Lambda_{n-p}(V),$$

则星算子有性质:

1. $** = (-1)^{p(n-p)}\mathrm{id}$;
2. 对任意的$v,w \in \Lambda_p(V)$,它们的内积为 $\langle v,w\rangle = *(w \wedge *v) = *(v \wedge *w)$.

伴随形式(adjoint form)　星算子作用的微分形式.微分形式

$$\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_p} \alpha_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

的伴随形式是形式

$$*\alpha = \sum_{j_1<\cdots<j_{n-p}} (*\alpha)_{j_1\cdots j_{n-p}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-p}},$$

其中

$$(*\alpha)_{j_1\cdots j_{n-p}} = \sum_{i_1<\cdots<i_p} e_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{n-p}} \alpha^{i_1\cdots i_p}.$$

$E^p(M)$中的内积(inner product in $E^p(M)$)　$E^p(M)$中定义的一种内积.M上p形式的向量空间$E^p(M)$中定义内积为

$$\langle \alpha,\beta\rangle = \int_M \alpha \wedge *\beta \quad (\alpha,\beta \in E^p(M)),$$

$*$为星算子.不难检验上述内积是一个对称正定双线性形式.

拉普拉斯-贝尔特拉米算子(Laplace-Beltrami operator)　由星算子的伴随算子与外微分算子所确定的算子.设M是n维紧定向黎曼流形,利用星算子$*$定义算子$\delta: E^p(M) \to E^{p-1}(M)$为$\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d *$,算子$\delta$是d的伴随算子.利用$\delta$与d定义算子$\Delta: E^p(M) \to E^p(M)$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$为$\Delta = \delta d + d\delta$.$\Delta$就是拉普拉斯-贝尔特拉米算子.

算子Δ的性质:

1. Δ与星算子$*$可交换,即$*\Delta = \Delta *$.
2. Δ是自伴随算子,即$\langle\Delta\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha,\Delta\beta\rangle$.
3. $\Delta\alpha = 0$当且仅当$d\alpha = 0$且$\delta\alpha = 0$.
4. 在紧定向连通的黎曼流形上只有调和函数(即$\Delta f = 0$)是常值函数.

弱解(weak solution)　算子方程的一个有界线性泛函的解.设M是定向紧黎曼流形,$\alpha \in E^p(M)$.方程$\Delta\omega = \alpha$的弱解就是一个有界线性泛函$\iota: E^p(M) \to \mathbb{R}$使得

$$\iota(\Delta^* \phi) = \langle \alpha,\phi\rangle \quad (\forall \phi \in E^p(M)),$$

其中Δ^*是Δ的伴随算子.尽管Δ是自伴随算子,但仍把Δ^*与Δ相区分开,是因为这个定义将适用于其他形式的算子,例如椭圆型算子.

正则性定理(regularity theorem)　关于拉普拉斯-贝尔特拉米算子方程的弱解为经典解的定理.设$\alpha \in E^p(M)$,ι为方程$\Delta\omega = \alpha$的一个弱解,则存在$\omega \in E^p(M)$使得

$$\iota(\beta) = \langle \omega,\beta\rangle \quad (\forall \beta \in E^p(M)).$$

因此,$\Delta\omega = \alpha$.这个定理断言方程的每个弱解都有一

个通常的解作为代表.

调和 p 形式(harmonic p-forms)　经拉普拉斯-贝尔特拉米算子作用为零的微分 p 形式. 记

$$H^p=\{\omega\in E^p(M)\mid\Delta\omega=0\},$$

其中 Δ 为 M 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子, H^p 中所有元素均称为调和 p 形式.

霍奇分解定理(Hodge decomposition theorem)　微分 p 形式空间可以分解为其被算子作用的像集与调和 p 形式空间的直和的定理. 设 M 是 n 维定向的紧黎曼流形, 对每个整数 $p(0\leqslant p\leqslant n)$, H^p 是有限维的, 且 M 的光滑 p 形式空间 $E^p(M)$ 有如下正交直和分解

$$\begin{aligned}E^p(M)&=\Delta(E^p)\oplus H^p\\&=\mathrm{d}\delta(E^p)\oplus\delta\mathrm{d}(E^p)\oplus H^p\\&=\mathrm{d}(E^{p-1})\oplus\delta(E^{p+1})\oplus H^p.\end{aligned}$$

因此, 方程 $\Delta\omega=\alpha$ 有一解 $\omega\in E^p(M)$ 的充分必要条件是, p 形式 α 与调和 p 形式的空间正交, 即当 $\alpha\in(H^p)^\perp$ 时, $\Delta\omega=\alpha$ 有惟一解 $\omega\in E^p(M)$.

格林算子(Green's operator)　微分 p 形式空间到调和 p 形式空间的直交补的一个映射. 设 $G:E^p(M)\to(H^p)^\perp$, $\forall\alpha\in E^p(M)$, $G(\alpha)$ 是方程

$$\Delta\omega=\alpha-H(\alpha)\text{在}(H^p)^\perp$$

中的惟一解, 其中 $H:E^p(M)\to H^p$ 是一个投影算子, 就称 G 为一个格林算子.

算子 G 的性质:

1. G 是一个有界自伴随线性算子.

2. 把有界序列变成有柯西子序列的序列.

3. 凡与拉普拉斯算子 Δ 交换的线性算子均与 G 交换.

利用格林算子易得到:

1. 在定向紧黎曼流形 M 上, 每个德拉姆上调和类包含了惟一的调和形式.

2. 定向紧微分流形的德拉姆上同调群都是有限维的.

庞加莱对偶性定理(Poincaré duality theorem)　德拉姆上同调群与其对偶上同调群同构的定理. 设 M 是 n 维定向的紧微分流形, 规定双线性函数

$$H^p_{\mathrm{deR}}(M)\times H^{n-p}_{\mathrm{deR}}(M)\to\mathbb{R}$$

为

$$(\{\phi\},\{\psi\})\mapsto\int_M\phi\wedge\psi,$$

其中 ϕ 与 ψ 是代表了上同调类 $\{\phi\}$ 与 $\{\psi\}$ 的闭形式, 则这个双线性函数是一个非奇异的配对函数, 因而确定了 $H^{n-p}_{\mathrm{deR}}(M)$ 与 $H^p_{\mathrm{deR}}(M)$ 的对偶空间的同构, 即

$$H^{n-p}_{\mathrm{deR}}(M)\cong(H^p_{\mathrm{deR}}(M))^*.$$

由庞加莱对偶性定理可知, 若 M 是 n 维定向紧连通微分流形, 则 $H^n_{\mathrm{deR}}(M)\cong\mathbb{R}$.

全纯向量丛上的分解定理(decomposition theorem on holomorphic vector bundle)　由算子 ∂ 与 $\bar\partial^*$ 所确定的算子$\square$的直交分解的定理. 设 $\pi:E\to M$ 是秩为 ι 的全纯向量丛, M 为紧的复 m 维埃尔米特流形. $A^{(p,q)}(E)$ 为系数在 E 中的 $C^\infty(p,q)$ 形式全体. $\{T_{j_k}\}$ 是定义在 M 的覆盖 $\{U_j\}$ 能确定 E 的转移函数矩阵.

E 的纤维上的埃尔米特形式是由每个 U_j 上给定的正定形式 $\sum h_{j\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$ 确定的, 记 h_j 为矩阵 $\{h_{j\mu\nu}\}$, 显然有 $h_k=J_{jk}h_jT'_{jk}$, 设 U_j 上埃尔米特度量为

$$\mathrm{d}s^2=\sum g_{\lambda\bar\sigma}\mathrm{d}z^\lambda\mathrm{d}\bar z^\sigma.$$

对于 $\phi,\psi\in A^{p,q}(E)$, 记

$$\begin{aligned}\langle\phi,\psi\rangle&=\sum h_{j\mu\nu}\langle\phi^\mu_j,\psi^\nu_j\rangle\\&=\frac{2^n\cdot g}{p!q!}\sum h_{j\mu\bar\nu}\phi_{j\alpha_1\cdots\alpha_p\bar s_1\cdots\bar s_q}\psi^{\nu\alpha_1\cdots\alpha_p}p^{\beta_1\cdots\beta_q}\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{2n},\end{aligned}$$

定义内积为

$$(\phi,\psi)=\int_M\langle\phi,\psi\rangle.$$

算子 $\bar\partial$ 与 $\bar\partial^*$ 确定共轭算子

$$\overline{\square}=\overline{\partial\partial^*}+\bar\partial^*\bar\partial,$$

若 $\phi\in A^{p,q}(E)$, 当 $\overline{\square}\phi=0$ 时, 称 ϕ 为调和的 E 值 (p,q) 形式, 它等价于 $\bar\partial\phi=0$, $\bar\partial^*\phi=0$, 记其全体为 $H^{p,q}$, $L^{p,q}$ 为 $A^{p,q}(E)$ 按上述内积的完备化. $L^{p,q}$ 到 $H^{p,q}$ 的正交射影记为 P, 则下述结论成立:

1. $L^{p,q}=\overline{\square}(L^{p,q})\oplus H^{p,q}$
$=\bar\partial(L^{p,q-1})\oplus\bar\partial^*(L^{p,q+1})\oplus H^{p,q}.$

2. 存在格林算子 $G:L^{p,q}\to\overline{\square}(L^{p,q})$, 在 $\overline{\square}(L^{p,q})$ 上是一一的. 当 $\phi\in H^{p,q}$ 时, $G\phi=0$, $\overline{\square}G+P=I$.

3. 若 ϕ 为闭形式, 则 $P\phi$ 与 ϕ 同在一个铎尔博尔上同调中.

克勒流形上的分解定理(decomposition theorem on Kähler manifold)　克勒流形上德拉姆上同调群的分解定理. 该定理断言: 若 M 是克勒流形, 则存在直和分解

$$H^r(M,\mathbb{C})=\sum_{p+q=r}H^{p,q}(M),$$

其中 $H^r(M,\mathbb{C})$ 是 M 上德拉姆上同调群, $H^{p,q}(M)$ 是铎尔博尔群, 而且

$$\overline{H}^{p,q}(M)=H^{q,p}(M).$$

撰　稿　干丹岩　申启阳　杨家新　李志毅　何伯和　戴文惠

审　阅　干丹岩　虞言林

位　势　论

位势论(potential theory)　现代分析数学领域的一个分支,主要研究各种形式的位势(函数)和与其密切关联的调和函数、上(下、超、次)调和函数族的各种性质及其应用.经典位势论的主要研究工具是微积分,并与微分方程、复变函数论紧密关联;现代位势论以拓扑、泛函分析与测度论、广义函数等为主要工具,与分析数学领域的诸多分支相互渗透并和随机过程建立了深刻的内在联系.位势论起源于物理学的万有引力学说和静电学,远在1733年,拉格朗日(Lagrange,J.-L.)就注意到引力场是一个函数(称为牛顿位势)的梯度.在三维欧氏空间,一个单位质点 ε_y 的引力场在点 $x(x\neq y)$ 的牛顿位势等于把一个单位质点从无穷远移到点 x 所做的功,其值是 $1/|x-y|$.因此,一个质量分布 μ 的引力场在 x 的牛顿位势是

$$U^{\mu}(x)=\int\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}\mu(y).$$

1772年,拉普拉斯(Laplace,P.-S.)证明了,在不分布质量的地方,位势满足拉普拉斯方程.这样,物理问题便化为求解偏微分方程的数学问题.

从18世纪到19世纪末,位势论的研究限于 n 维欧氏空间上的牛顿位势 $(n\geqslant 3)$ 和对数位势 $(n=2)$,即所谓经典位势论.其中心问题之一是古典狄利克雷问题的求解.1823年,泊松(Poisson,S.-D.)就球域情形给出了解的积分公式;1828年,格林(Green,G.)对边界充分光滑的有界区域,从物理直观出发并借助于格林函数给出了解;1840年,高斯(Gauss,C.F.)采用变分法解决了平衡问题并得出狄氏问题的新解法.这两个问题与扫除问题相关联,此后一直被称为位势论三大基本问题.1855年,狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)和黎曼(Riemann,(G.F.)B.)利用所谓狄利克雷原理给出了解.此外,还有庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)的扫除法,施瓦兹(Schwarz,H.A.)的交错法等.但是,由于缺乏足够的数学工具,这些解法是不严密的,需要附加条件.另外,在这一时期的主要成果还有:1839年,埃恩苏(Earnshaw,E.)证明狄氏解的极值原理;1850年,黎曼把位势论与函数论作统一处理,揭示了格林函数和位势同保形映射之间的密切联系;1886年,哈纳克(Harnack,C.G.A.)建立哈纳克不等式及哈纳克收敛原理.此外,关于诺伊曼问题及多重调和函数的研究也有不少成果.这样,直到19世纪末,位势论的三个基本原理,即极小值原理、收敛性质及狄利克雷问题的可解性已基本建立,它为现代位势论的发展作了很好的准备.

20世纪以来,由于深入应用现代函数论、测度和积分的理论、泛函分析、一般拓扑学、抽象代数、现代概率论的思想和方法,位势论得到蓬勃发展,开辟了新的研究方向,创造了新的方法,成为分析数学领域中比较彻底完成了现代化变革的一个分支,也影响了其他数学分支的发展.

20世纪初,一个重要发现是,1909年,扎雷姆巴(Zaremba,S.)所揭示的去心球体的经典的狄利克雷问题未必可解这一事实.1913年,由勒贝格(Lebesgue,H.L.)利用所谓勒贝格刺给出的不可解区域的反例更有深刻意义,这导致了对区域边界非正则点的研究和广义狄利克雷问题的提出,前者由凯洛格(Kellogg,O.D.)、布利冈(Bouligund,G.L.)、维纳(Wiener,N.)等人完全解决;而佩龙(Perron,O.)于1923年提出了关于一般区域的广义狄利克雷问题并给出新的解法,经过维纳(1925年),特别是布雷洛(Brélot,M.E.)(1939年)的改进和推广,得到解的存在和惟一性定理的一般形式.此外,柯尔狄希(Keldysh,M.V.)等人在20世纪30年代还研究了狄利克雷问题的解的稳定性.

1925年,里斯(Riesz,F.)引进了上(下)调和函数的概念,为位势论研究提供了新的方法;里斯分解定理建立了上调和函数与位势之间的紧密联系;而对上调和函数连续性的研究导致了细拓扑概念的引入.

20世纪30年代,瓦莱·普桑(Vallée-Poussin,C.-J.-G.-N. de la)用现代观点改进并发展了庞加莱扫除法;弗罗斯特曼(Frostman,O.)发展了高斯变分法,成功地解决了紧集的平衡问题和扫除问题.同期,位势论已推广到非古典核的情况,特别是里斯位势核,它已不属于通常与偏微分方程关联的位势核了.

从20世纪40年代起,泛函分析、拓扑学的方法被系统地引入位势论并使它发展到一个新水平.1941年,嘉当(Cartan,H.)利用希尔伯特空间理论研究具有有限能量的测度等,得到很大成功;同年,马丁(Martin,R.S.)建立了马丁边界理论,导致了关于一般理想边界的深入研究;1950年,戴尼(Deny,J.)用广义函数论解决了完备化问题;1955年,绍凯(Choquet,G.)建立了一般容量理论及可容性定理,并用凸锥极端点理论改进了马丁的成果.此

外，对于更一般空间(例如流形、LCA 群)和更一般位势核的位势论也有了深入的探讨.

近 30 多年来，位势论迅速发展，其显著特点之一是各种公理体系的建立. 为统一处理已有的理论并加以推广使之适用于一般椭圆型和抛物型方程或随机过程，自 20 世纪 50 年代中期起，陶茨(Tautz，G.)、杜布(Doob，J. L.)、布雷洛、鲍尔(Bauer，H.)、邦尼(Bony，J. M.)、康斯坦丁斯库(Constantinescu，C.)和柯尼(Cornea，A.)等人分别提出了不同的公理系统，建立各种形式的调和空间位势论(最近，关于多重调和空间及非线性位势论的公理系统也先后建立起来)；而戴尼和博灵(Beurling，A.)等人则从能量和狄利克雷积分等概念出发建立了狄利克雷空间论. 位势论发展的另一个显著特点是，越来越广泛深入地与相邻分支，如复分析(包括黎曼曲面)、拓扑学、几何测度论、微分几何、微分方程、调和分析等相互结合和渗透，且发挥日益明显的作用与影响. 特别引人注目的是，对于它与随机过程论之深刻联系的深入研究，同时促进了这两个分支的繁荣和发展，在杜布、亨特(Hunt，G. A.)、迈耶(Meyer，P. A.)和钟开莱等人出色工作的基础上，产生了所谓概率位势论或马尔可夫过程位势论，与此有关的课题正吸引着大批学者去做深入研究.

一般位势论与广义核

一般位势(general potential)　经典位势的一种直接推广形式，常为一个二元数值函数(核)关于某个测度的积分. 对于一个取定的核，考虑诸测度所确定的位势及有关的调和、上(下)调和函数等的性质及其应用的理论称为关于该核的一般位势论. 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是一个可测空间，$K(x,y)$ 是从 $\Omega\times\Omega$ 到 $[-\infty,+\infty]$ 的可测函数，μ 是 $\mathscr{F}$ 上的实测度. 若对每个 $x\in\Omega$，下式中的积分有意义，则由 Ω 到 $[-\infty,+\infty]$ 的函数

$$U^{\mu}=U_K^{\mu}(x)=\int K(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

称为 μ 以 K 为核的一般位势，简称位势. 通常考虑上述 Ω 同时为局部紧豪斯多夫空间，核 K 为不取 $-\infty$ 值的下半连续函数，μ 为拉东测度(有时设 $\mu\geqslant 0$，即 μ 为正测度). 以下对于一般位势均作此假定.

一般位势论(theory of general potential)　见“一般位势”.

核(kernel)　位势论的基本概念. 在位势论中，所谓核，常指一般位势的核(参见“一般位势”). 这时若 $K(x,y)\geqslant 0$ 恒成立，则称 K 为正核；令 $K'(x,y)=K(y,x)$(K' 称为 K 的转置核)，若 $K'=K$，则称 K 为对称核；当 Ω 为阿贝尔群且有 $K(x,y)=K(x-y)$ 时，则称 K 为平移不变核；若对于任意有紧支集的 μ，有

$$\iint K(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)\geqslant 0,$$

则称 K 为正定核. 此外，还有各种广义形式的核，如测度核、广义函数核等.

正核(positive kernel)　见“核”.

转置核(transposed kernel)　见“核”.

对称核(symmetry kernel)　见“核”.

平移不变核(invariant kernel under translation)　见“核”.

正定核(positive definite kernel)　见“核”.

位势(potential)　位势论的基本概念. 所谓位势，通常指某个函数(核)确定的参变量积分. 产生位势概念的原型是力学中的引力位势，即一个梯度场(引力场)的参变量积分，一般在 $\mathrm{R}^n(n\geqslant 2)$ 中，由公式

$$-\operatorname{grad}u=-\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

给出向量场时，函数 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为位势. 此概念现已大大发展，除了常指一般位势外，还有相应于广义形式核的位势，在调和空间用上调和函数定义的无显示核的位势，在鞅论中用上鞅定义的位势等.

α 位势(α-potential)　亦称里斯位势，关于 α 核的一般位势. 设 $\Omega=\mathrm{R}^n(n\geqslant 2)$，$|\cdot|$ 表示欧氏范数，$0<\alpha<n$，称 $K(x,y)=|x-y|^{\alpha-n}$ 为 α 核或里斯核. 它是正的、对称的、平移不变的正定核；相应的位势记为 U_α^μ，称它为 α 位势或里斯位势. 必要时采用 α 核的正规化形式，令 $K(x,y)=K_\alpha(x-y)$，而 $K_\alpha(x)=A(n,\alpha)\cdot|x|^{\alpha-n}$，其中正规化因子

$$A(n,\alpha)=\pi^{\alpha-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

这时，按广义函数的运算定义

$$U_\alpha^\mu(x)=(K_\alpha*\mu)(x).$$

α 位势是里斯(Riesz，F.)为推广牛顿位势而引进的，兰德柯夫(Landkof，N. S.)等人对此有深入研究. 里斯位势又称分数次积分(参见本卷《调和分析》有关条目).

里斯位势(Riesz potential)　即“α 位势”.

里斯位势论(theory of Riesz potential)　位势论的一个组成部分. 所谓里斯位势论，就是研究 α 位势(即里斯位势)及其关联的 α 调和、α 上(下)调和函数等的性质及其应用的理论.

α 核(α-kernel)　见“α 位势”.

里斯核(Riesz kernel)　见“α 位势”.

牛顿位势(Newton potential)　一般位势的经典模型之一. 在 $\mathrm{R}^n(n\geqslant 3)$ 中，2 核 $K=|x-y|^{2-n}$ 称

为牛顿核，相应的位势 U_2^μ 称为牛顿位势；当 $n=3$ 时，据牛顿万有引力公式，一个物体(或其质量分布)产生的引力场在任何一点 x 的位势等于

$$U_2^\mu(x)=\int_B \frac{1}{|x-y|}\sigma \mathrm{d}v(y),$$

这里 B 表示物体所占据的区域，$\mathrm{d}\mu=\sigma\mathrm{d}v$，$\sigma$ 表示密度，$\mathrm{d}v$ 是体积元素；且为表达简明略去一个常数因子. 当 σ 仅集中在某一曲面 Γ 时，关于 $\mathrm{d}\mu=\sigma\mathrm{d}S$ 在 Γ 上积分就是单层位势；若同时把 $1/|x-y|$ 改为它关于 y 在 Γ 的内法向导数

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|x-y|},$$

就得到所谓双层位势(参见《偏微分方程》相应条目).

牛顿核(Newton kernel)　见“牛顿位势”.

2 核(2 kernel)　即“牛顿核”.

对数位势(logarithmic potential)　一般位势的经典模型之一. 在 R^2 中，以 $K(x,y)=-\log|x-y|$ 为核(称为对数核)的位势称为对数位势，记为 U_l^μ. 对数核是对称的、平移不变的，但不是正核. 二维引力场的位势即为对数位势.

对数核(logarithmic kernel)　见“对数位势”.

经典位势(classical potential)　几类位势的经典模型的统称. 所谓经典位势，常指牛顿位势和对数位势，也指与它们密切关联的、R^n 的子区域上的格林位势. 它们与泊松方程有密切联系. 例如在 R^3 中，当 $\mu=\sigma\mathrm{d}v$，且密度 σ 充分光滑时，U_2^μ 满足方程 $\Delta u=-4\pi\sigma$. 古典位势常考虑 $\mu\geqslant 0$ 且支集为紧的情形，这时它在定义空间内在 μ 的支集之外为调和(参见“调和函数”)；R^n 的一个区域上定义的调和函数可表成单层位势与双层位势之和.

经典位势论(classial potential theory)　位势论的一个组成部分. 所谓经典位势论，是指研究经典位势及其关联的调和函数、上(下)调和函数等的性质及其应用的理论，也称为关于拉普拉斯方程的位势论.

单层位势(potential of simple layer)　见《偏微分方程》相应条目.

双层位势(potential of double layer)　见《偏微分方程》相应条目.

阿龙扎扬-史密斯核(Aronszajn-Smith kernel)　一种位势核. 在 R^n 中称

$$K^{(\alpha)}=(2\pi)^{-p/2}2^{1-\alpha/2}\Gamma^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{K_{(p-\alpha)/2}(|x-y|)}{|x-y|^{(p-\alpha)/2}}$$

为阿龙扎扬-史密斯核. 此处 $0<\alpha<+\infty$，K_λ 表示第三类修正贝塞尔函数，即

$$K_\lambda(x)=\frac{\pi \mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\lambda/2}H_\lambda^{(1)}(\mathrm{i}x).$$

Λ 核(Λ-kernel)　一种位势核. 从 $\mathsf{R}^2\times\mathsf{R}^2$ 到 $(-\infty,+\infty]$ 的函数 Λ：

$$\Lambda(x,y)=\begin{cases}-\log|x-y| & (|y|<1),\\ -\log|x-y|+\log|y| & (|y|\geqslant 1)\end{cases}$$

称为 Λ 核. 以它为核的位势称为阿南达姆-布雷洛位势，阿南达姆(Anandam，V.)和布雷洛(Brélot，M. E.)两人于 1981 年给出了该位势的性质的研究，目前已把它推广到一类黎曼曲面上.

阿南达姆-布雷洛位势(Anandam-Brélot potential)　见“Λ 核”.

位势的基本原理(fundamental principles of potentials)　指与核 K 相关联的位势可能满足的一些基本性质，包括：

Ⅰ. 连续性原理.

Ⅱ. 第一极大值原理.

Ⅲ. 广义极大值原理.

Ⅳ. 第二极大值原理(控制原理).

Ⅴ. 惟一性原理.

Ⅵ. 下包络原理.

Ⅶ. 能量原理.

Ⅷ. 弱平衡原理.

Ⅸ. 平衡原理.

Ⅹ. 扫除原理.

在一定条件下，这些原理之间有蕴涵或等价关系. 如 Ⅱ ⇒ Ⅲ，Ⅹ ⇒ Ⅳ，Ⅸ ⇒ Ⅷ；当 K 是正的、连续的对称核且当 $x\neq y$ 时取有限值，则 Ⅲ ⇒ Ⅰ，Ⅱ ⇔ Ⅸ，Ⅳ ⇔ Ⅹ. 深入研究核与各原理之间的关系也是位势论的一大课题.

连续性原理(continuity principle)　描述位势在子集上连续蕴涵全空间上连续的一个原理. 对任何 $\mu\geqslant 0$，若限制在 μ 的支集 $\operatorname{supp}\mu$ 上，U_K^μ 连续(有限)蕴涵 U_K^μ 在整个 Ω 连续，则称核 K 满足连续性原理. 例如，R^n 中的 α 核，R^2 中的对数核满足该原理.

第一极大值原理(first maximum principle)　描述位势局部极大值蕴涵整体极大值的一个原理. 若对任何 $\mu\geqslant 0$，$U_K^\mu\leqslant M$ 在 μ 的支集 $\operatorname{supp}\mu$ 上成立蕴涵该不等式在整个 Ω 成立，则称 K 满足第一极大值原理. α 核当 $0<\alpha\leqslant 2$ 时满足该原理，而当 $2<\alpha<n$ 时不满足该原理.

广义极大值原理(generalized maximum principle)　第一极大值原理的推广. 若存在常数 $C\geqslant 0$，对任何 $\mu\geqslant 0$，使 $U_K^\mu\leqslant M$ 在 $\operatorname{supp}\mu$ 成立蕴涵 $U_K^\mu\leqslant CM$ 在整个 Ω 成立，则称 K 满足广义极大值原理. α 核都满足该原理.

第二极大值原理(second maximum principle)　亦称控制原理，描述两个位势的大小关系的一个原理. 具体地，若对任意 $\mu\geqslant 0$，$\lambda\geqslant 0$，$U_K^\mu\leqslant U_K^\lambda$ 在 $\operatorname{supp}\mu$

上成立蕴涵该不等式在 Ω 成立，则称 K 满足第二极大值原理. α 核满足该原理.

控制原理(domination principe)　即"第二极大值原理".

惟一性原理(uniqueness principle)　确定两个位势所对应的测度相等的一个充分必要条件. 具体地，若对任何能量有限的正测度 μ 和 λ，$U_K^{\mu}=U_K^{\lambda}$ 在 $\mathrm{supp}\,\mu\cup\mathrm{supp}\,\lambda$ 似乎处处(参见"似乎处处")成立蕴涵 $\mu=\lambda$，则称 K 满足惟一性原理. 例如 α 核满足此原理.

下包络原理(lower envelope principle)　描述两个位势的下确界仍是位势的一个原理. 确切地，若对任意 $\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0$，存在 $\gamma\geqslant0$，使

$$U_K^{\gamma}(x)=\min\{U_K^{\mu}(x),U_K^{\lambda}(x)\},$$

则称 K 满足下包络原理. 所有的 α 核都满足该原理.

超调和函数(hyperharmonic function)　在任意点的值不小于以该点为中心的球面上的平均值的函数. 设 D 是 $\mathrm{R}^n(n\geqslant2)$ 的开集，f 是 D 上的下半连续函数，若存在 $r_0>0$，使任何 $r\in(0,r_0)$ 和 $x\in D$，恒有

$$f(x)\geqslant\int_{S(x,r)}f(y)\mathrm{d}\varepsilon_x^{(r)}(y)\equiv f*\varepsilon^{(r)}(x),$$

其中 $\varepsilon^{(r)}=\varepsilon_0^{(r)}$，$\varepsilon_x^{(r)}$ 表示单位正质量在球面

$$S(x,r)=\{y\,|\,|y-x|=r\}$$

上的均匀分布(因而上式中的积分表示 f 在 $S(x,r)$ 上的平均值)，则称 f 在点 x 超调和. 若 f 在 D 内处处超调和，则称 f 在 D 内超调和. 上式 $\varepsilon^{(r)},\varepsilon_x^{(r)}$ 可分别改为单位正质量在$S(0,r)$，$S(x,r)$界定的球内的均匀分布 $m^{(r)}$ 与 $m_x^{(r)}$. 当 $\mu\geqslant0$ 时，U_l^{μ} 与 $U_{\alpha}^{\mu}(2\leqslant\alpha<n)$分别是 R^2 与 R^n 内的超调和函数.

D 内超调和函数全体 $\mathscr{U}$ 成为一个凸锥，即 $f,g\in\mathscr{U},\alpha,\beta\geqslant0$ 蕴涵 $\alpha f+\beta g\in\mathscr{U}$(假定 $0\cdot(+\infty)=0$)；$\mathscr{U}$ 关于有限子族 $\mathscr{U}'$ 的下包络运算封闭，即

$$\inf\{f(x)\,|\,f\in\mathscr{U}'\}\in\mathscr{U},$$

但若 $\mathscr{U}'$ 为无限子族则未必成立；若子族 $\mathscr{U}'$ 为上定向集，即 $f,g\in\mathscr{U}'$ 蕴涵存在 $h\in\mathscr{U}'$ 使 $h\geqslant f,h\geqslant g$，则

$$\sup\{f(x)\,|\,f\in\mathscr{U}'\}\in\mathscr{U};$$

对闭包含于 D 的开球 B 内的、以 $f\in\mathscr{U}$ 为边界值的泊松积分 H_f，则 $f\geqslant H_f$ 在 B 内成立；进一步，若把 f 在 B 内的取值换成 H_f，所得函数仍在 $\mathscr{U}$ 中.

亚调和函数(hypoharmonic function)　一类与超调和函数紧密相关的函数. 若 $-f$ 在 $x\in D$ 超调和，则称 f 在 x 亚调和；若 $-f$ 在区域 D 内超调和，则称 f 在 D 内亚调和.

上调和函数(superharmonic function)　超调和函数的一个子类. 若 R^n 的区域 D 内的超调和函数 $f\not\equiv\infty$，则称 f 为 D 内的上调和函数. 它必定在 D 内几乎处处取有限值且局部可积. 例如，当 $2\leqslant\alpha<n$ 时，$|x|^{\alpha}$ 为 R^n 内的上调和函数；二次连续可微的函数 f 为上调和当且仅当

$$\Delta f\equiv\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\leqslant0,$$

其中 x_i 是点 x 的第 i 个坐标. 若把一般的下半连续函数 f 看成广义函数，上式仍是上调和的充分必要条件. 对 D 内上调和的函数 f，在子区域 D_1(设 $\overline{D}_1\subset D$)上，$r>0$ 充分小时，$k+1(k\geqslant0)$重卷积

$$f*m^{(r)}*m^{(r)}*\cdots*m^{(r)}(x)$$

为 k 次连续可微的上调和函数，且当 $r\downarrow0$ 时，单调不减地收敛于 f. 又对取定的 $x\in D$，$f*\varepsilon^{(r)}(x)$与 $f*m^{(r)}(x)$都是 r 的单调不增函数且为 $-\log r(n=2)$ 或 $r^{2-n}(n\geqslant3)$的凹函数.

下调和函数(subharmonic function)　亦称次调和函数. 亚调和函数的一个子类. 若 $-f$ 为上调和函数，则 f 称为同一区域内的下调和函数. 此时，若 $\varphi(t)$是 t 的单调增的凸函数，则 $\varphi\circ f$ 为下调和函数. 例如，当 $u(x)$为 $D\subset\mathrm{R}^2$ 上的复值解析函数，实数 $\alpha>0$时，$|u(x)|^{\alpha}$ 与 $\alpha\log|u(x)|$都是下调和函数.

次调和函数(subharmonic function)　即"下调和函数".

调和函数(harmonic function)　兼备上调和与下调和性的函数. 从区域 D 到$(-\infty,+\infty)$的函数 f，若在 $E(E\subset D)$的每一点既为上调和，又为下调和，则称 f 在 E 调和. f 在点 x 调和当且仅当在该点的一个邻域内连续且满足平均值性质，即 $f(x)=f*\varepsilon^{(r)}(x)$(或等价地，$f(x)=f*m(x)$)对充分小的 $r>0$ 恒成立. 当 f 为二次连续可微时，f 在 D 调和当且仅当满足 $\Delta f=0$；把局部可积的函数视为广义函数，上式也是调和的充分必要条件. D 内调和函数是解析的，即在其中每一点 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的一个球邻域 $B(x_0,r)(\subset D)$内可惟一地展开成实的幂级数

$$\sum a_{k_1\cdots k_n}(x_1-x_1^0)^{k_1}(x_2-x_2^0)^{k_2}\cdots(x_n-x_n^0)^{k_n},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为非负整数. 调和函数及其性质的研究是经典位势论和相邻分支的重要课题，它有明确的物理意义，在概率论中，对应于鞅的概念并得到深入的研究，更一般意义下的调和函数见后(参见本卷《复变函数论》同名条).

泊松积分(Poisson integral)　球内狄利克雷问题的解的积分表示. 对于从 n 维球面 $S=S(x_0,r)$到$[-\infty,+\infty]$的可积函数 f，积分

$$H_f(x)=\frac{1}{\sigma_n r^n}\int_S f(y)\frac{r^2-|x-x_0|^2}{|x-y|^n}\mathrm{d}\sigma(y)$$

(σ_n 为 n 维单位球面面积)定义了一个在球内调和的

函数，它就是以 f 为边界值的狄利克雷问题的解. H_f 称为泊松积分. 若 f 在 $y\in S$ 连续，则

$$\lim_{x\to y}H_f(x)=f(y).$$

球内的调和函数 u 何时可表成一个泊松积分曾是一个引人注目的问题；当 $u\geqslant 0$ 必可做到，马丁(Martin, R. S.)把它推广到一般区域上得到所谓马丁积分表现(参见"马丁积分表现").

极小值原理(minimum principle) 估计超调和函数极小值点的位置的论断，为位势论的基本原理之一. 若 f 在区域 $D(D\subset \mathsf{R}^n)$ 内超调和，则

$$\inf\{f(x)\mid x\in D\}$$
$$\geqslant \inf\{\liminf_{x\to y} f(x)\mid y\in \partial D^*\},$$

其中 ∂D^* 是 D 在 $\overline{\mathsf{R}}^n=\mathsf{R}^n\cup\{\infty\}$ 中的边界；若 f 在某个 $x_0\in D$ 达到极小值，则 $f\equiv f(x_0)$. 特别地，D 内调和函数若非常数不能在内点达到极小值. 这些性质分别称为超调和函数与调和函数的极小值原理. 类似地，对于下调和函数与调和函数，有极大值原理.

哈纳克引理(Harnack lemma) 通过不等式描述区域上的正调和函数族的一个整体性质. 若紧集 $K\subset D$(D 是 R^n 中的区域)，则存在常数 $C=C(K,D)>0$，使得不等式

$$0<u(x_1)\leqslant Cu(x_2)$$

对任何在 D 内调和的正值函数 $u>0$ 和任意 $x_1,x_2\in K$ 一致成立. 这个性质称为哈纳克引理(或哈纳克不等式). 它是研究调和函数性质，特别是边界性质的重要工具，该不等式有许多推广形式.

哈纳克不等式(Harnack inequality) 即"哈纳克引理".

哈纳克原理(Harnack principle) 断言调和函数列的一致极限仍为调和函数的一个原理. 该原理指出：设 $\{f_k\}$ 是在区域 D 内调和的函数列，若每个 f_k 在 $\overline{D}$ 上连续且 $\{f_k\}$ 在 ∂D 上一致收敛，则 $\{f_k\}$ 在 $\overline{D}$ 上一致收敛且极限函数 f 在 D 内调和；同时，在 D 的任意紧子集上，

$$\left\{\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_n}f_k}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}}\right\}$$

都一致收敛于

$$\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_n}f}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}},$$

其中 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 是任意取定的非负整数.

调和函数的正规族(normal family of harmonic functions) 调和函数的一个子类. 设 $\{f_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ 是区域 D 内调和的函数族，若其中由无限个元素组成的子族中，必存在子列使其在 D 的任意紧子集上一致收敛于一个在 D 内调和的函数，则称 $\{f_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ 为调和函数的正规族.

在区域 D 内一致有界的调和函数族必为正规族. 上述条件"一致有界"改为"局部一致下有界"时，未必为正规族，但结论类似，不同之处在于极限函数可能调和，也可能恒为 $+\infty$(这时，一致收敛是广义的).

广义哈纳克原理(generalized Harnack principle) 哈纳克原理的推广. 若 $\{f_i\mid i\in I\}$ 是一族在区域 $D\subset\mathsf{R}^n$ 内调和的函数组成的上定向集，即对 $i,j\in I$，必有 $l\in I$ 使得 $f_l\geqslant f_i$ 且 $f_l\geqslant f_j$，则必存在不减序列 $\{f_i\mid i\in I_0\subset I\}$，使得

$$\sup\{f_i(x)\mid i\in I\}=\sup\{f_i(x)\mid i\in I_0\}\quad(x\in D),$$

它或者恒为 $+\infty$，或者在 D 内调和. 这个性质称为广义哈纳克原理，它为佩龙(Perron, O.)用于求广义狄利克雷问题的解(参见"广义狄利克雷问题").

调和不变性(invariance of harmonicity) 描述调和函数在某种变换之下的像保持调和的一个概念. 所谓调和不变性，是指 R^2 的调和性在共形映射下不变，即区域 $D\subset\mathsf{R}^2$ 内调和的函数在共形映射 f: $x\to x'$ 下所得到的函数 $u(f^{-1}(x'))$ 在 D 的像域 $f(D)$ 内调和. $\mathsf{R}^n(n\geqslant 3)$ 的调和性在解析变换下一般不再保持，但在开尔文变换下保持不变. 区域 $D\subset\mathsf{R}^n$ 上的调和函数 $u(x)$ 及 R^n 的反演

$$\tau: x\mapsto x'=k^2x/|x|^2\quad(k>0)$$

定义的函数 g 称为 u 的开尔文变换，这里

$$g(x')=\left(\frac{k}{|x'|}\right)^{n-2}u\left(\frac{k^2x'}{|x'|^2}\right),\ g(\infty)=0,$$

它在 D 的像域 $\tau(D)$ 为调和. 利用这种变换，通过在有界区域里调和性质的研究可得到函数在无穷远点 ∞ 的邻域上的同样性质.

开尔文变换(Kelvin transform) 见"调和不变性"或本卷《偏微分方程》相应条目.

在无穷远点的调和性(harmonicity at infinity) 位势论的一个概念. 在 $\mathsf{R}^n(n\geqslant 2)$ 的某个球 B 的外部调和的函数 f，若其开尔文变换在原点的邻域调和(即以原点为可去奇点)，则称 f 在 ∞ 调和. 这种函数可表示为

$$f(x)=C+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k(x)}{|x|^{2k+1}}\quad(x\in\mathsf{R}^n\backslash\overline{B}),$$

其中 C 为常数，$H_k(x)$ 为齐 k 次的(关于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的分量 x_i 的)调和多项式，这时 f 在无穷远点 ∞ 存在有限的极限，且等于以任何一点 x_0 为中心、半径充分大的球面 $S(x_0,r)\subset(\mathsf{R}^n\backslash\overline{B})$ 上 f 的平均值. 进一步，在 ∞ 的上(超)调和等概念也可用平均值来相应定义. 1944 年，布雷洛(Brélot, M. E.)对此问题做了深入研究，从而把 R^n 上的位势论的研究推广到 $\overline{\mathsf{R}}^n=\mathsf{R}^n\cup\{\infty\}$ 及更一般的 $\mathscr{E}$ 空间上去.

调和多项式(harmonic polynomial) 一类特殊的多项式. 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 P}{\partial x_n^2}=0$$

的多项式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为调和多项式.

调和上属(harmonic majorant) 函数值大于或等于给定函数的调和函数.设 f 和 h 均为区域 D 上的函数,h 调和且 $h\geqslant f$(相应地,$h\leqslant f$),则称 h 是 f 的调和上属(相应地,调和下属).D 上的一个上调和函数若有调和下属,则它必有最大的调和下属.

调和上属习惯上也称调和强函数,调和下属也称调和弱函数.

调和强函数(harmonic majorant) 即"调和上属".

调和下属(harmonic minorant) 见"调和上属".

调和弱函数(harmonic minorant) 即"调和下属".

里斯分解定理(Riesz decomposition theorem) 位势论中的重要定理.一个上(下)调和函数可表示成调和函数与位势之和(差)的形式,这种表示法称为里斯分解.关于一种位势,这种分解的准确表述为:函数 f 在区域 $D(D\subset\mathsf{R}^n)$内上调和的充分必要条件是存在惟一的、集中在 D 的测度 $\mu\geqslant 0$(称为 f 的对应测度),使得对任何相对紧的区域 $D_1(\overline{D}_1\subset D)$,有

$$f(x)=U^{\mu_1}(x)+H_1(x)\quad(x\in D_1),$$

其中 μ_1 为 μ 在 D_1 的限制,U^{μ_1}为对数位势($n=2$)或牛顿位势($n\geqslant 3$);H_1 在 D_1 内调和.上式U^{μ_1}也可取作以 D_1 的格林函数(参见"格林函数"条)$G_1(x,y)$为核的位势

$$\int G_1(x,y)\mathrm{d}\mu_1(y).$$

这时 H_1 就是 f 在 D_1 的最大调和下属.此外,f 的对应测度 μ 实质上就是把 f 看做广义函数时,$m\Delta f$ 所表示的测度,其中 $m<0$ 为实常数;特别地,对牛顿位势,$m=-1/4\pi^2$.

上调和函数的对应测度(associated measure with a hyperharmonic function) 见"里斯分解定理".

α 调和函数(α-harmonic function) 在里斯位势论中,与经典位势论里的调和函数相对应的概念.若 R^n 到$(-\infty,+\infty)$的函数 f 在 $x_0\in\mathsf{R}^n$ 满足下述条件:

1. f 在 x_0 的一个邻域上连续;

2. $\int_{|x|>1}f(x)|x|^{-(n+\alpha)}\mathrm{d}x<+\infty$;

3. 对充分小的正数 r,恒有

$$f(x_0)=(\varepsilon_\alpha^{(r)}*f)(x_0)=\int f(x_0-y)\mathrm{d}\varepsilon_\alpha^{(r)}(y),$$

其中

$$\varepsilon_\alpha^{(r)}(y)=\begin{cases}0 & (|y|<r),\\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\pi^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}r^2\sin\frac{\pi\alpha}{2}(|y|^2-r^2)^{-\frac{\alpha}{2}}|y|^{-n} & (|y|>r);\end{cases}$$

则称 f 为在 x_0 为 $\alpha(0<\alpha<2)$调和的.若 f 在区域 D 的每一点为 α 调和,则称 f 在 D 内为 α 调和.例如,α 位势 $U_\alpha^\mu(0<\alpha<2)$在 μ 的支集之外为 α 调和;常值函数在 R^n 上为 α 调和.应注意,$\varepsilon_\alpha^{(r)}$ 的支集为$\{x\mid|x|\geqslant r\}$,故 α 调和及 α 上调和(参见"α 上调和函数")都不是局部性质;又 R^n 上的 α 调和函数 f 为 α 上调和当且仅当 $f\geqslant 0$.这两点明显区别于通常的调和与上调和函数.

α 上调和函数(α-superharmonic function) 在里斯位势论中,与经典位势论里的上调和函数相对应的概念.称 R^n 到$[0,+\infty]$的函数 f 为 α 上调和函数$(0<\alpha<2)$,若 $f\geqslant 0,f\not\equiv+\infty$,对 f 下半连续,且满足"α 调和函数"中的条件 2(参见"α 调和函数"),并使$(\varepsilon_\alpha^{(r)}*f)(x)\leqslant f(x)$对任意 $x\in\mathsf{R}^n$ 及充分小的 $r>0$ 恒成立.例如,当 $\mu\geqslant 0$,$0<\alpha<2$ 时,α 位势 U_α^μ 为 α 上调和但不是上调和(为方便起见,通常的上调和也称为 2 上调和),而当 $2\leqslant\alpha<n$ 时,U_α^μ 为上调和.类似于上调和函数,对固定的 $r>0$ 及 α 上调和函数 f,$f*\varepsilon_\alpha^{(r)}(x)$为 α 上调和且当 $r\downarrow 0$ 时,$f*\varepsilon_\alpha^{(r)}(x)\to f(x)$;若在某点 $x_0\in\mathsf{R}^n$,f 达到极小值,则$f(x)\equiv f(x_0)$;α 上调和函数的不减列$\{f_n(x)\}$的极限或者恒等于$+\infty$,或者为 α 上调和;类似的里斯分解定理也成立.特别当 $n\geqslant 3$ 时,这种分解呈简单形式

$$f(x)=U_\alpha^\mu(x)+A\quad(x\in\mathsf{R}^n),$$

其中 $\mu\geqslant 0$,A 为非负常数;这时若 f 且为 α 调和,则 $\mu=0$,即 $f\equiv A$.

2 上调和函数(2 superharmonic function) 即经典位势论中的上调和函数,又称为通常的上调和函数.

$\mathscr{E}$ 空间($\mathscr{E}$-space) 一类豪斯多夫空间.所谓 $\mathscr{E}$ 空间,是指满足如下条件的、连通的、可分的豪斯多夫空间 Ω:Ω 的每一点 x 有开邻域 V_x 与 $\overline{\mathsf{R}}^n=\mathsf{R}^n\cup\{\infty\}$的一个开子集同胚,并且任何两个这样的邻域 V_x 与 V_y 的交 $V_x\cap V_y$ 在相应的两个同胚映射下是共形的($n=2$)或保距的($n\geqslant 3$,关于无穷远点不变).于是 $\overline{\mathsf{R}}^n$ 上的调和、超(亚)、上(下)调和等局部性概念可以在 $\mathscr{E}$ 空间上相应地定义,局部的里斯分解定理也成立.为了推广黎曼曲面,布雷洛(Brélot,M.E.)等人引入这种空间并建立了相应的位势论.没有无穷远点的 $\mathscr{E}$ 空间在几何学上称为局部平坦的

或局部欧氏的黎曼空间.

格林空间(Green space) 特殊的 $\mathscr{E}$ 空间.存在非常数的非负上调和函数的 $\mathscr{E}$ 空间称为格林空间. $\mathrm{R}^n(n\geqslant 3)$ 及其子区域都是格林空间,黎曼曲面是 $\mathscr{E}$ 空间但未必是格林空间;复球面与 R^2 都不是格林空间. R^2 中的区域为格林空间当且仅当其余集为正容量集.一般地, $\mathscr{E}$ 空间 Ω 为格林空间当且仅当 Ω 上存在格林函数.在格林空间,扫除测度与极集都可通过扫除函数来明确刻画(参见“格林函数”及“格林空间的扫除”).

格林函数(Green function) 一类重要函数.设 Ω 是 $\mathscr{E}$ 空间,所谓格林函数,是指从 $\Omega\times\Omega$ 到 $(0,+\infty]$ 满足下述条件的函数 $G(x,y)$:

1. 对称性,即 $G(x,y)=G(y,x)$.

2. 固定 y 时,它是 x 的上调和函数,且其里斯分解中位势的对应测度为狄喇克测度 ε_y,即集中在点 y 的概率测度.

3. 在满足上述性质的诸上调和函数中 G 为最小.

格林函数也可用扫除或广义函数来定义,还可用概率论的语言描述.

格林位势(Green potential) 一类重要位势.在格林空间中以格林函数为核(称为格林核)的、正测度的位势称为格林位势.它若不恒为 $+\infty$,则必为正的上调和函数且以 0 为最大调和下属.

格林核(Green kernel) 见“格林位势”.

等位面(equipotential surface) 调和函数的水平面.设 u 在区域 $D(D\subset\mathrm{R}^n)$ 内调和, a 为实数,称 $\Sigma_a=\{x\,|\,u(x)=a\}$ 为等位面或水平面.当 u 不恒等于常数时,对于 D 内的点 x,若 x 属于

$$N=\{y\,|\,\mathrm{grad}\ u(y)=0\},$$

则称 x 为 u 的临界点. N 为 $n-2$ 维(局部地)点集,可分解为最多可数个维数不超过 $n-2$ 的实解析流形且它们不聚集于 D,即 D 中任意紧集仅与其中有限个流形相交;任何 $\Sigma_a\backslash N$ 由 $n-1$ 维的不聚集于 D 的解析流形所构成.又,包含于 D 内的解析曲线若在各处的切线都平行于 $\mathrm{grad}u$ 且在同类曲线中为极大(以包含关系为序),则称之为正交轨线,它与每个等位面在交点处正交.当 x 沿某正交轨线的一个方向变动时, $u(x)$ 为严格增加(或减少)的,因而正交轨线不是闭曲线,且对每个 $x\notin N$,有且仅有一条正交轨线通过它(不会终止于它).

格林线(Green line) 格林函数的等位面的正交轨线.设区域 D 的格林函数为 $G(x,a)$, a 为 D 中某个取定的点,那么它的正交轨线称为格林线.对 a 的充分小邻域内的每一点 $x_0(x_0\neq a)$,有惟一的格林线经过它;这种格林线惟一对应着从 a 处出发与该格林线相切的射线,这种对应给出了从 a 点发出的格林线全体与射线全体之间的一一映射,其中从 a 发出的格林线,若在其上满足 $\inf G=0$,则此格林线称为正则的.因此,从 a 发出的格林线几乎都是正则的,即其中非正则者所对应的射线与球面 $S(a,C)=\{x\,|\,|x-a|=C\}$ 的交是 $(n-1)$ 维的勒贝格零测集.此外,存在一个 n 维勒贝格零测集 N_1 包含了临界点全体 N,使在每一点 $x_1\in D\backslash N$ 有惟一的正则格林线 Γ 经过.让 x_1 与 $r=G(x_1,a)$ 及 Γ 在 a 的单位切向量 l 组成的有序对 (r,l) 建立对应,就得到 $D\backslash N$ 中的格林坐标系, (r,l) 称为 x_1 的格林坐标.它是研究格林区域上的位势的重要工具.若用 s 表示 Γ 从 a 到 x_1 处的弧长,那么有

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial G}{\partial n}\frac{\partial}{\partial r}$$

在 $D\backslash N$ 成立,此处 $\partial G/\partial n$ 表示等位面在 x_1 处的外法向导数.

格林坐标(Green coordinates) 见“格林线”.

能量(energy) 位势核的二重积分,物理学中电荷系统的位能这一概念的数学描述与推广.设 λ, μ 表示 Ω 上的测度,当下式成立时,它所定义的取值于 $(-\infty,+\infty]$ 的函数 I_K 称为 λ,μ(关于核 K)的相互能量:

$$\begin{aligned}I_K(\lambda,\mu)&=\int K(x,y)\mathrm{d}\lambda(x)\mathrm{d}\mu(y)\\&=\int U^{\mu}(x)\mathrm{d}\lambda(x)=\int U^{\lambda}(y)\mathrm{d}\mu(y).\end{aligned}$$

特别地, $I_K(\mu)=I_K(\mu,\mu)$ 称为 μ(关于核 K)的能量.若对于具有紧支集的正测度 μ,恒有 $I_K(\mu)\geqslant 0$ 且等号仅当 $\mu=0$ 时才成立,则称核 K 满足能量原理.满足能量原理的 K 又称为严格正定核,它必正定(参见“核”及“位势的基本原理”).

相互能量(mutual energy) 见“能量”.

能量原理(energy principle) 见“能量”.

α 相互能量(α-mutual energy) 关于 α 核的相互能量,记为 $I_\alpha(\lambda,\mu)$.见“能量”.

α 能量(α-energy) 关于 α 核的能量,记为 $I_\alpha(\mu)$.它满足能量原理.见“α 相互能量”.

强收敛(strong convergence) 测度网(或列)依范数(能量)的收敛.设核 K 满足能量原理,那么能量为有限的测度全体 $\mathscr{E}_K$ 在通常实线性运算下,以 $I_K(\lambda,\mu)$ 为内积构成一个准希尔伯特空间.若 $\mathscr{E}_K$ 中的点网(列) $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 依范数 $\|\cdot\|=I_K(\cdot)$ 收敛于 μ,则称 $\{\mu_i\}_{i\in I}$ 为强收敛于 μ;若对任意 $\lambda\in\mathscr{E}_K$,网(列) $\{I_K(\mu_i-\mu,\lambda)\}$ 收敛于 0,则称 $(\mu_i)_{i\in I}$ 弱收敛于 μ.又记测度全体为 M,称 M 中的网(列) $(\mu_i)_{i\in I}$ 浑收敛于 $\mu\in M$,指的是对任何具紧支集的连续实函数 f,网(列) $\left\{\int f\mathrm{d}\mu_i\right\}$ 收敛于 $\int f\mathrm{d}\mu$.当 K 为 α 核时,测度网(列)强收敛必弱收敛,弱收敛必浑收敛.特别

地，关于牛顿核的、能量有界的网(列)，这三种收敛一致.

弱收敛(weak convergence) 见"强收敛".

浑收敛(vague convergence) 见"强收敛".

一般容量(general capacity) 一类集函数. 设 φ 是 2^{Ω}(Ω 的子集全体)到$[-\infty,+\infty]$上的集函数，若 φ 满足下列条件，则称为 Ω 上的一个一般容量，并称 $\varphi(E)$为集合 E 的容量(值)：

1. 单调不减性，即对 $E_1\subset E_2$ 有 $\varphi(E_1)\leqslant\varphi(E_2)$.

2. 下连续性，即对单调不减的集列$\{E_n\}$，有

$$\varphi(E_n)\to\varphi(\bigcup E_n).$$

3. 对单调不增的紧集列$\{K_n\}$，有

$$\varphi(K_n)\to\varphi(\bigcap K_n).$$

容量的物理背景是 R^3 中导体的电容量，即给予导体的正电荷量与由它所产生的表面电位之比. 1924 年，维纳(Wiener，N.)首先引入并用数学方法来研究集合的容量，以后人们(特别是法国学者)越来越多地把它与位势论相联系而加以发展. 上述一般容量的概念来自绍凯容量理论，康斯坦丁斯库(Constantinescu，C.)和柯尼(Cornea，A.)等人做了进一步的推广，用映射 $\xi\to\hat{R}_f^E$(上调和函数 f 的扫除)来定义广义容量.

可容性(capacitability) 一个集的容量与它的紧子集的容量之间的某种相容性. 对 Ω 上的一般容量 φ，若集 E 满足 $\varphi(E)=\sup\{\varphi(K)\mid K$ 为 E 的紧子集$\}$，则称 E 具有可容性或 E 为可容集. 著名的绍凯定理指出，包含于一个 K_σ 集(即可数个紧集之并)的任何 $\mathscr{K}$ 解析集为可容集，从而任何波莱尔集必为可容集. 特别地，因 R^n 为 K_σ 集，故其中任何 $\mathscr{K}$ 解析集均为可容集.

关于具体的绍凯容量的可容性参见"内容量"和"外容量".

可容集(capacitable set) 见"可容性".

$\mathscr{K}$ 解析集($\mathscr{K}$-analytic set) 一类集合的连续像. 紧度量空间的 $K_{\sigma\delta}$集在豪斯多夫空间的连续像称为 $\mathscr{K}$ 解析集，其中 $K_{\sigma\delta}$集是可列个 K_σ 集之交，K_σ 集是可列个紧集之并. 解析集、第二可数豪斯多夫空间的波莱尔集都是 $\mathscr{K}$ 解析集. 所谓解析集指的是波兰空间(它同胚于紧度量空间的 G_δ 集)在度量空间的连续像.

解析集(analytic set) 见"$\mathscr{K}$ 解析集".

绍凯容量(Choquet capacity) 简称容量，一类重要的集函数. 设 ψ 是从 Ω 的紧集全体$\{K\}$到$[0,+\infty]$上的集函数，若 ψ 满足下列条件，则称 ψ 为 Ω 上的绍凯容量：

1. 单调不减性.

2. 上连续性，即对任意紧集 K 和任意正数 ε，必存在开集 $V\supset K$，使得任何紧集 K'若满足 $K\subset K'\subset V$，则 $\psi(K')-\psi(K)<\varepsilon$.

3. 强次可加性.

例如，$\mathrm{R}^n(n\geqslant2)$上的 α 容量是绍凯容量. 推广的绍凯容量指的是取值限于$[0,+\infty]$的一般容量.

另外，在研究一般位势时，应区别那些称为容量而实非绍凯容量的概念(参见"倒容量").

容量(capacity) 指绍凯容量或它的推广形式.

推广的绍凯容量(extended Choquet capacity) 见"绍凯容量".

内容量(inner capacity) 集合的一种度量. 设 ψ 是 Ω 上的绍凯容量或它的推广形式，称由

$$\psi_*(E)=\sup\{\psi(K)\mid K \text{ 为 } E \text{ 的紧子集}\}$$

定义的 2^{Ω} 上的集函数 ψ_* 为 Ω 上的内容量；而称由

$$\psi^*(E)=\inf\{\psi_*(G)\mid G \text{ 为包含 } E \text{ 的开集}\}$$

定义的 2^{Ω} 上的集函数 ψ^* 为 Ω 上的外容量. ψ^* 作为 2^{Ω} 上的集函数是一般容量且满足可数次可加性. E 关于 ψ^* 可定容的充分必要条件是 $\psi^*(E)=\psi_*(E)$. 考虑具体的容量时也常把此等式作为关于 ψ 可容的定义. 对于所谓倒容量，因其具有单调不增性，故定义相应的内(倒)容量 w_i 与外(倒)容量 w_e 时，应将上述定义中的 sup 与 inf 对调位置.

外容量(outer capacity) 见"内容量".

零(外)容集(set of (outer) capacity zero) 在位势论中有特殊重要地位的一类集合. 关于绍凯容量 ψ，外容量或内容量为零的集分别称为零外容集或零内容集，零外容集又称为零容集. 容量未必有可加性，但因外容量具有次可加性，故可数个零容集之并仍为零容集. 另外，对倒容量，满足 $w_i(E)=+\infty$ 或 $w_e(E)=+\infty$的集 E 分别称为零内容集或零外容集(参见"倒容量").

零内容集(set of inner capacity zero) 见"零(外)容集".

近乎处处(approximately everywhere) 对某种性质成立的范围进行描述的术语. 设 $P=P(x)$是一个与 x 有关的性质. 如果使 P 不成立的点全体所成之集 A 为零内容集，则称 P 是近乎处处成立的(记为 p. p. (法文 à peu près partout))；如果 A 为零外容集，则称 P 是似乎处处成立的(记为 q. p. (法文 à quasi-partout)).

似乎处处(quasi-everywhere) 见"近乎处处".

***K* 容量**(K-capacity) 牛顿容量的推广. 取定一般位势核 K，令 $V(\mu)=\sup\{U_K^\mu(x)\mid x\in\operatorname{supp}\mu\}$. 称 $C_K(F)=\sup\{\mu(\Omega)\mid V(\mu)\leqslant1,\mu\geqslant0,\operatorname{supp}\mu\subset F\}$ 为紧集 F 的 K 容量. 在一定条件下，C_K 是一个绍凯容量. 它概括了 α 容量的基本特征，用于一般核的位势的基本原理的研究.

***K* 近乎处处**(K-approximately everywhere) 对某种性质成立的范围进行描述的术语. 性质 P 称

为 K 近乎处处成立，指的是使 P 不成立的点全体 A 满足

$$V_*(A)=\inf\{V(\mu)\mid\mu\geqslant 0,\mu(\Omega)=1,\text{supp }\mu\subset A\}=+\infty$$

（参见"K 容量"）. 此外，也可据 K 容量来定义 K 近乎处处与 K 似乎处处的概念，且在一定条件下，关于 K 近乎处处的两种定义等价.

位势网（列）的收敛准则（convergence criterion for potential net (sequence)） 有关网列浑收敛的一个命题，即如下论断：若正测度网（列）$\{\mu_i\}_{i\in I}$浑收敛于 μ，且存在紧集 F 使每个 μ_i 的支集 supp $\mu_i\subset F$，则

$$\liminf_{i\to\infty} U_K^{\mu_i}(x)\geqslant U_K^{\mu}(x);$$

进一步，若核 K 的转置 K' 满足连续性原理，则上式等号在 Ω 上 K 似乎处处成立.

平衡原理（equilibrium principle） 如下静电学中平衡问题的数学描述与推广：确定在某一导体 F 上的正电荷分布使其产生的能量为极小. 给定一般位势核 K，若对任何紧集 $F\subset\Omega$，存在支集包含于 F 的正测度 μ，$\mu(\Omega)=1$，使 $U_K^{\mu}(x)$ 在 F 上 K 近乎处处等于某个常数 $E_K(F)$，则称 K 满足弱平衡原理，μ 称为关于 F 的弱平衡问题的解；若同时有

$$U_K^{\mu}(x)\leqslant E_K(F)$$

在 Ω 处处成立，则称 K 满足平衡原理. 当$E_K(F)>0$ 时，$1/E_K(F)$等于 F 的 K 容量 $C_K(F)$. α 核满足弱平衡原理且当 $0<\alpha\leqslant 2$，$\alpha<n$ 时满足平衡原理. 在经典位势论中，平衡问题（即对经典位势如何确定上述的测度 μ）与扫除问题、狄利克雷问题被列为位势理论的三大基本问题.

平衡问题（equilibrium problem） 见"平衡原理".

弱平衡原理（weak principle of equilibrium） 见"平衡原理".

弱平衡问题的解（solution of weak equilibrium problem） 见"平衡原理".

平衡测度（equilibrium measure） 与弱平衡问题的解紧密关联的一个测度. 若核 K 满足弱平衡原理，当 F 为紧集且 $E_K(F)>0$ 时，则由关于 F 的弱平衡问题的解 μ 得到的 $\lambda=\mu/E_K(F)$称为 F 的平衡测度. 在一定条件下也可利用内、外容量来定义波莱尔集 A 的内、外平衡测度，且当二者相等时，称之为 A 的平衡测度. 平衡测度的位势 U_K^{λ} 称为平衡位势. 在 $\mathsf{R}^n(n\geqslant 3)$中，紧集 F 关于牛顿核的平衡位势 U_2^{λ} 在 $\mathsf{R}^n\backslash F$ 的无界成分上就是以 1 为边界值的广义狄利克雷外问题（参见"α 容量"）的解；对于上述 λ，由于 $I_K(\lambda)=\lambda(\Omega)=C_K(F)$，$U_K^{\lambda}$ 在 F 上近乎处处等于 1，有的文献把 λ 称为容量分布，而把 μ 称为平衡测度；也有仅对满足平衡原理的核 K 定义平衡测度的.

容量分布（capacity mass-distribution） 见"平衡测度".

平衡位势（equilibrium potential） 见"平衡测度".

α 容量（α-capacity） 由 α-核确定的一种绍凯容量. 对紧集 F，令 $W_\alpha(F)=\inf\{I_\alpha(\mu)\mid\mu\geqslant 0,\mu(\mathsf{R}^n)=1,\text{supp }\mu\subset F\}$，其中 $I_\alpha(\mu)$表示测度 μ 的 α 能量，则$C_\alpha(F)=1/W_\alpha(F)$称为 F 的 α 容量. 相应的内、外容量记为 $\underline{C}_\alpha$、$\overline{C}_\alpha$，称为 α 内、外容量. 容易看到，$C_\alpha(F)$就是 F 关于 α 核的 K 容量. 另一方面，支集含于 F 中的正测度全体关于浑收敛拓扑为紧，其中必有正测度 λ 使 $I_\alpha(\lambda)=W_\alpha(F)$，这个 λ 就是平衡测度. 当 $C_\alpha(F)>0$ 时，λ 可以看成下列三种等价的变分问题的惟一解：

1. $\lambda(\mathsf{R}^n)=\max\{\gamma(\mathsf{R}^n)\mid\gamma\geqslant 0,V(\gamma)=1,\text{supp }\gamma\subset F\}$，其中 $V(\gamma)=\sup\{U_\alpha^{\gamma}(x)\mid x\in\text{supp }\gamma\}$.

2. $V(\lambda)=\min\{V(\gamma)\mid\gamma\geqslant 0,\text{supp }\gamma\subset F,\gamma(\mathsf{R}^n)=C_\alpha(F)\}$.

3. $I_\alpha(\lambda)-2\lambda(\mathsf{R}^n)=\min\{I_\alpha(\gamma)-2\gamma(\mathsf{R}^n)\mid\gamma\geqslant 0,\text{supp }\gamma\subset F\}$.

α 内容量（α-inner capacity） 见"α 容量".

α 外容量（α-outer capacity） 见"α 容量".

维纳容量（Wiener capacity） 特殊的 α 容量. 所谓维纳容量，是指 $\mathsf{R}^n(n\geqslant 3)$中的 α 容量当 $\alpha=2$ 的情形，即 2 容量 $C_2(F)=1/W_2(F)$，其中 F 为任意紧集. 平面的维纳容量参见"对数容量". 维纳（Wiener，N.）于 1924 年在 R^3 中考虑紧域 F 的余集之无界分支上以 1 为边界值的广义狄利克雷外问题的解 u，并用曲面积分

$$-\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$$

的值定义为 F 的容量. 这里 S 为包含 F 作其内部的闭曲面，$\frac{\partial}{\partial n}$是沿 S 的外法向导数.

倒容量（inverse capacity） 关于 Ω 上的一般核 K，定义在 2^{Ω} 上的一个集函数；特别当 K 为 α 核时，一个集的倒容量等于 α 容量的倒数. 具体地，对一般核 K，令 $W_K(F)=\inf\{I_K(\mu)\mid\mu\geqslant 0,\mu(\Omega)=1,S(\mu)\subset F\}$. 当用它的倒数定义容量有困难时，常直接研究 $W_K(F)$本身，并称之为倒容量. 在一般情况下，它不是绍凯容量. 这时，对空集$\varnothing$，$W(\varnothing)=+\infty$；对 $E\subset\Omega$，定义内倒容量

$$W_i(E)=\inf\{W(F)\mid F\text{ 为包含于 }E\text{ 的紧集}\}$$

和外倒容量

$$W_e(E)=\sup\{W_i(G)\mid G\text{ 为包含 }E\text{ 的开集}\};$$

并把 $W_e(E)=+\infty$与 $W_i(E)=+\infty$的集分别称为

零外倒容集与零内倒容集(参见“零(外)容集”,“近乎处处”,“K 近乎处处”).

零外倒容集(set of outer inverse capacity zero) 见“倒容量”.

零内倒容集(set of inner inverse capacity zero) 见“倒容量”.

牛顿容量(Newton capacity) 特殊的容量. 所谓牛顿容量,就是利用牛顿位势 U_2^μ,对 R^3 的有界波莱尔集 E 定义的容量 $N(E)$:

$$N(E)=\inf\{\mu(\mathsf{R}^3)\,|\,U_2^\mu(x)\leqslant 1,\mu\geqslant 0,S(\mu)\subset E\}.$$

当 E 为紧集时,牛顿容量与维纳容量一致. 现常把 $\mathsf{R}^n(n\geqslant 3)$ 中的 2 容量 $C_2(F)$ 都称为牛顿容量. 这是 1932 年,瓦莱・普桑(Vallée-Poussin,C. de la)采用与维纳(Wiener,N.)不同的方法定义的.

对数容量(logarithmic capacity) 由对数核确定的一种容量. 在 R^2 中,关于对数核考虑紧集 F 的倒容量 $W_l(F)$,当限制 F 包含于单位圆 B 内时,若 $W_l(F)>0$,则把 $1/W_l(F)$ 称为 F 的维纳容量. 对一般紧集 F,$W_l(F)$ 可能取 0 值或负值,要做类似的处理不方便,故定义

$$C_l(F)=\exp[-W_l(F)]$$

为 F 的对数容量. 对 $F\subset B$,两种容量值相差甚大,但两种零容集等价,都是全不连通的勒贝格零集. 值得注意的是,包含于区间$[0,1]$的康托尔三分集是勒贝格零集,但具有正的对数容量. 当 $C_l(F)>0$ 时,对 $\mathsf{R}^2\backslash F$ 的无界分支上以无穷远点为极的格林函数 $g(z,\infty)$,极限

$$\lim_{z\to\infty}[g(z,\infty)-\log|z|]$$

存在,称为鲁宾常数,它正好等于 $W_l(F)$.

鲁宾常数(Rubin constant) 见“对数容量”.

***C* 绝对连续测度**(C-absolutely continuous measure) 一种重要的测度. 设 μ 是 R^n 上的测度,若对 R^n 上的任何 α 零容的紧集 F,都有 $\mu(F)=0$,则称 μ 为 R^n 上的 C 绝对连续测度. α 能量有限的测度必为 C 绝对连续测度,但存在 C 绝对连续而能量为无限的测度. 若两个 C 绝对连续的正测度 μ,γ 满足 $U_\alpha^\mu=U_\alpha^\gamma$ 在 $\operatorname{supp}\mu\cup\operatorname{supp}\gamma$ 似乎处处成立,则 $\mu=\gamma$,即对于 C 绝对连续的正测度族,惟一性原理成立.

容量压缩原理(contraction principle of capacity) 位势论中容量的一个性质. 设 $E\subset\mathsf{R}^n$,若 $f:E\to\mathsf{R}^n$ 满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\quad(\forall x,y\in E),$$

则 $C_\alpha[f(E)]\leqslant C_\alpha(E)(n\geqslant 3)$,以及 $C_l[f(E)]\leqslant C_l(E)(n=2)$. 这一性质称为容量压缩原理,它与超限直径的概念都在一定意义下描绘了容量的距离性质.

超限直径(transfinite diameter) 如下定义的一个和点与点之间的距离有关的集函数. 对 R^2 的紧集 F(无限集),关于对数核 $K(x)=-\log|x|$,当 $m\to\infty$时,

$$B_m(F)=\frac{1}{m(m-1)}\inf_{x^1,\cdots,x^m\in F}\sum_{i<j}K(x^i-x^j)$$

单调增加,把 $\exp[-B_m(F)]$的极限 $d(F)$称为 F 的超限直径,那么 $d(F)=C_l(F)$,它还等于 F 的切比雪夫常数(参见“共形映射”或“多项式逼近”等). 在 R^n 中,把 K 换成正规化的 α 核 $K_\alpha(x)$,称相应定义的 $1/B_m(F)$的极限 $D_\alpha(F)$为 α 阶广义超限直径,那么 $D_\alpha(F)=C_\alpha(F)$. 超限直径由费克特(Fekete,M.)于 1923 年引入,被用于研究共形映射. 波利亚(Pólya,G.)和赛格(Szegö,G.)就 R^2 与 R^3 的一些特殊集合算出 d 与 D_α 的值,从而也求得它们的容量.

广义超限直径(generalized transfinite diameter) 见“超限直径”.

极集(polar set) 一种充分“稀薄”的可去集(在某种意义下可忽略不计的集合),是零容集概念的推广. 在 R^n 中考虑对数核($n=2$)或牛顿核($n\geqslant 3$),若存在不恒为$+\infty$的、在 $E(E\subset\mathsf{R}^n)$的每一点取值为$+\infty$的位势 $U^\mu(\mu\geqslant 0)$,则称 E 为极集. 它是一个零容的 G_δ 型集的子集. 单点集为极集;极集的子集、交、可列并以及在共形变换下的像集仍为极集. R^2 中的极集是全不连通的勒贝格零测集;R^n 的区域 D 的相对闭子集 E 若为极集,则 $D\backslash E$ 仍为区域. 又若 E 的每一点都存在邻域 ω 及 ω 上的上调和函数 $f>0$,使得扫除函数 $\hat{R}_f^{E\cap\omega}=0$,则称 E 为局部极集(参见“扫除函数”). 极集必为局部极集. 上述定义可搬到 $\mathscr{E}$ 空间,而在格林空间中,局部极集与极集等价. 这两个概念为布雷洛(Brélot,M. E.)所引进,在一般位势论或公理系统中都有重要意义.

局部极集(locally polar set) 见“极集”.

下调和延拓(subharmonic extension) 使函数保持下调和性的扩张. 以下两种情形有意义:

1. 在 R^n 中,若极集 E 为开集 ω 的闭子集,u 为 $\omega\backslash E$ 上定义的下调和函数且在 ω 上局部上有界,那么 u 在 ω 上有惟一的下调和延拓 $\bar{u}$,即 $\bar{u}$ 在 ω 上为下调和且在 $\omega\backslash E$ 上等于 u,

$$\bar{u}(x)=\limsup_{y\to x}u(y).$$

2. 阿南达姆(Anandam,V.)研究了在一个紧集外为下调和的函数 u,把在 R^n 上为下调和且在一个闭球外取 u 的值的函数(或加上一个位势 U^{ε_x}的负常数倍,其中 ε_x 为狄喇克测度)称为 u 的下调和延拓.

α 极集(α-polar set) 里斯位势论中的一种充

分“稀薄”的可去集. 若存在不恒为$+\infty$的位势U_α^μ($\mu\geqslant 0$, $0<\alpha<2$),它在E上点点取值为$+\infty$而在$x\notin E$取有限值,则称E为α极集. 这里采用的是兰德柯夫(Landkof, N. S.)的定义. 根据埃文斯定理,E为α极集当且仅当E为α零容的G_δ集. α极集的子集若非G_δ集,则它必为非α极集.

埃文斯定理(Evans theorem)　描述零容集与位势的关系的论断. 其推广形式分如下三种情形叙述:

1. 若E是$\mathrm{R}^n(n\geqslant 3)$的$G_\delta$集且牛顿容量为零,则存在$\mu\geqslant 0$,使$U_2^\mu$在$E$上且仅在$E$上取$+\infty$值并有$\mu(\mathrm{R}^n\backslash E)=0$(从而$U_2^\mu$在$\mathrm{R}^n\backslash\overline{E}$内调和).

2. 若E是R^2的零容紧集,则有相应的对数位势U_l^μ满足1中条件.

3. 若在$\mathrm{R}^n(n\geqslant 2)$考虑$\alpha$容量为零的$G_\delta$集$E$,仍存在仅在$E$上取$+\infty$值的$U_\alpha^\mu$,但$\mu(\mathrm{R}^n\backslash E)=0$未必成立,当$E$为紧集时则成立.

上述位势常称为埃文斯位势. 由于埃文斯(Evans, G. C.)与塞尔贝格(Selberg, A.)同时于1935年独立地就E是紧集的情形给出结论1,因此,上述定理亦称为埃文斯-塞尔贝格定理.

埃文斯-塞尔贝格定理(Evans-Selberg theorem)　即“埃文斯定理”.

埃文斯位势(Evans potential)　见“埃文斯定理”.

扫除(balayage)　位势论的一个基本概念. 称核K满足扫除原理,是指对任意紧集F及满足$U_K^\mu\not\equiv+\infty$的正测度μ,扫除问题有解,即存在正测度μ'(或记为$\beta_F\mu$)满足:

$$\operatorname{supp}\mu'\subset F,\quad U_K^{\mu'}(x)\leqslant U_K^\mu(x)$$

处处成立且其中等号在F上K近乎处处成立. 这样的$\mu'=\beta_F\mu$称为把μ扫到F的扫除测度;$U_K^{\mu'}$称为扫除位势;求解μ'的过程称为扫除. 格林核、α核(当$0<\alpha\leqslant 2$, $\alpha<n$时)满足扫除原理,下面谈及α扫除均指这样的α核的扫除;当$2<\alpha<n$时关于α核的测度扫除一般无解,但可用广义函数另做处理(参见“扫除测度”). 扫除问题是经典位势论三大基本问题之一.

扫除问题(balayage problem)　见“扫除”.

扫除位势(balayaged potential)　见“扫除”.

扫除原理(balayage principle)　见“扫除”.

扫除测度(balayaged measure)　一种与扫除问题紧密联系的测度. 所谓扫除测度,通常指用扫除问题的解来定义的某个测度,其中到紧集F的扫除要求$\operatorname{supp}\mu'\subset F$(参见“扫除”). 到一般波莱尔集$E$的扫除见“到波莱尔集的$\alpha$扫除”. 但是,在格林空间,不用上法而通过扫除函数来定义到任何集e的扫除测度. 这样定义的扫除测度未必集中在e,但当e为闭集时为真(参见“格林空间的扫除”).

简化函数(reduced function)　在一个子集上不小于一个给定函数的一族函数的下确界. 设Φ是一族从Ω到$[0,+\infty]$的下半连续的函数u所组成的凸锥(必要时设$+\infty\in\Phi$),f为$E(E\subset\Omega)$到$[0,+\infty]$的函数,令$\mathrm{R}_f^E(x)=\inf\{u(x)\mid u\in\Phi$且$u|_E\geqslant f\}$(对空集$\varnothing$,令$\mathrm{R}_f^\varnothing=0$),称之为$f$到$E$的简化函数. 简化函数和扫除函数的概念是布雷洛(Brélot, M. E.)引进的,它们是研究瘦、极集、细拓扑、扫除的有力工具.

扫除函数(balayaged function)　用于表示位势论中扫除特征的函数. 把一个函数φ的下半连续化记为$\hat{\varphi}$,即

$$\hat{\varphi}(x)=\varliminf_{y\to x}\varphi(y),$$

那么对简化函数R_f^E,称$\hat{R}_f^E$为f到E的扫除函数. 特别地,当Ω为格林空间,Φ取作非负超调和函数全体,f非负上调和,则$\hat{R}_f^E$仍为非负上调和且在$\Omega\backslash\overline{E}$内调和,称之为$f$的上调和扫除,它和$f$的对应测度的格林扫除可一致化(参见“格林空间扫除”).

格林空间扫除(balayage in Green space)　扫除问题在格林空间的具体结论. 在格林空间Ω,对任何闭集F,关于格林核G的扫除(简称格林扫除)问题有解. 更一般地,对Ω的子集e,非负上调和函数f的扫除函数$\hat{R}_f^e$仍为非负上调和,且在e上似乎处处等于f,在$\bar{e}$的余集调和且$\hat{R}_f^e\leqslant f$在Ω成立;正测度μ的位势$u=U_G^\mu$的扫除函数$\hat{R}_u^e$必是另一个正测度(记为b_μ^e)的位势. 布雷洛(Brélot, M. E.)把b_μ^e称为μ到e的扫除测度. 当e为闭集时,b_μ^e就是格林扫除问题的解,因b_μ^e集中在e的基$B_e=\{x\mid e$在x不瘦$\}\subset\bar{e}$(关于“不瘦”,参见“瘦性”). 此外,e是极集当且仅当对任意上调和函数$f>0$有$\hat{R}_f^e=0$;上调和函数$f\geqslant 0$到一个开集ω的余集的扫除函数在ω上就是以f为边值的广义狄利克雷问题的解;对非极集的紧集e,$\hat{R}_1^e$在e上似乎处处等于1,在一定意义下给出高斯平衡问题的解. 当$\Omega=\mathrm{R}^n(n\geqslant 3)$时,牛顿核就是格林核,关于两种核的扫除一致;在$\mathrm{R}^2$的有界区域$\Omega$上,也可把格林扫除测度看成关于对数核的扫除测度.

嘉当扫除定理(Cartan balayage theorem)　用泛函分析的方法解决扫除问题的一个重要结论. 对α能量有限的正测度μ,α扫除有明显的几何意义. 由于α核满足能量原理,因而α能量有限的测度全体$\mathscr{E}_\alpha$以$I_\alpha(\lambda,\mu)$为内积构成实的准希尔伯特空间,其中正测度全体$\mathscr{E}_\alpha^+$及支集包含于紧集F的正测度全体$\mathscr{E}_\alpha^+(F)$都是$\mathscr{E}_\alpha$的完备凸子锥. 于是,$\mu\in\mathscr{E}_\alpha^+$在$\mathscr{E}_\alpha^+(F)$上的正交投影存在且惟一. 推广的嘉当扫除

定理指出,这个投影就是 μ 到 F 的 α 扫除测度.当限制 $\alpha=2$ 时,就得到原始的嘉当扫除定理.

到波莱尔集的 α 扫除(α-balayage onto Borel set) 位势论的一个概念.所谓到波莱尔集的 α 扫除,就是寻求一个集中在该波莱尔集的关于 α 核的扫除测度.对 α 容量有限的任意波莱尔集 E,正测度 μ 的 α 扫除测度 $\mu'=\beta_E\mu$ 存在,它是测度网 $(\beta_F\mu)_{\{F\}}$ (F 为 E 的紧子集,$\{F\}$ 以包含关系为序构成定向集)的浑极限且有如下特征:μ' 是 E 上似乎处处满足 $U_\alpha^\lambda(x)\geqslant U_\alpha^\mu(x)$ 的位势族 $\{U_\alpha^\lambda(x)\}$ 的下确界函数.

α 格林测度(α-Green measure) 一种特殊的测度.狄喇克测度 ε_x 到波莱尔集 E 的 α 扫除测度 $\beta_E\varepsilon_x$ 称为 E 的 α 格林测度.对任意正测度 μ,

$$\beta_E\mu=\int_{\operatorname{supp}\mu}\beta_E\varepsilon_x\mathrm{d}\mu(x).$$

2 格林测度简称格林测度.

格林测度(Green measure) 见"α 格林测度".

α 正则点(α-regular point) 位势论的一个概念.$\overline{E}$ 中关于波莱尔集 E 满足 $\beta_E\varepsilon_{x_0}=\varepsilon_{x_0}$ 的点 x_0 称为 E 的 α 正则点.不满足上述条件的点称为 E 的 α 非正则点.2(非)正则点常称为(非)正则点.E 的内点必为 E 的 α 正则点,故 α 非正则点必为边界点.E 的 α 非正则点全体 E_1 可能包含 E,甚至 $C_\alpha(E_1)$ 与 $C_\alpha(E)$ 之比可任意大.但凯洛格引理指出,$E\cap E_1$ 必为 α 零容集.应该注意,α 正则点与一个开集 ω 的 α 正则边界点是不同概念,后者指的是 $\mathsf{R}^n\backslash\omega$ 的 α 正则点且常与 α 调和函数($0<\alpha<2$)或调和函数的广义狄利克雷问题相关联.不过,$\mathsf{R}^n\backslash\omega$ 的 2 正则点与 $\partial\omega$ 的 2 正则点一致.

正则点(regular point) 见"α 正则点".

2 正则点(2 regular point) 见"α 正则点".

非正则点(irregular point) 见"α 正则点".

维纳判别法(Wiener criterion) 边界点为 α 非正则点的判别准则.维纳判别法如下:波莱尔集 E 的边界点 x_0 为 E 的 α 非正则点的充分必要条件是,对于 $q\in(0,1)$ 及 $E_k=E\cap\{x\,|\,q^{k+1}\leqslant|x-x_0|<q^k\}$,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_\alpha(E_k)}{q^{k(n-\alpha)}}<+\infty,$$

其中 C_α 表示 α 容量.又,这里 E_k 也可改为

$$E^{(k)}=E\cap\{x\,|\,|x-x_0|<q^k\};$$

也可把级数式改为积分式

$$\int_0^1\frac{C_\alpha(\rho)}{\rho^{n-\alpha+1}}\mathrm{d}\rho<+\infty,$$

其中 $C_\alpha(\rho)=C_\alpha(E\cap\{x\,|\,|x-x_0|<\rho\})$.

α 格林函数(α-Green function) 经典的格林函数在里斯位势论中的对应物.对开集 D 中的点 y,用 ε_y' 表示狄喇克测度 ε_y 到 $\mathsf{R}^n\backslash D$ 的 α 扫除测度,那么

$$G^{(\alpha)}(x,y)=U_\alpha^{\varepsilon_y}(x)-U_\alpha^{\varepsilon_y'}(x)$$

称为以 y 为极、D 的 α 格林函数.2 格林函数就是格林函数(参见"格林函数").$G^{(\alpha)}$ 具有如下性质:

1. 在 D 的、包含 y 的连通分支 D_1 中 $G^{(\alpha)}>0$,在 $\mathsf{R}^n\backslash D_1$ 上 $G^{(\alpha)}$ 似乎处处为零.

2. 在 $D\backslash\{y\}$ 内,$G^{(\alpha)}$ 作为 x 的函数为 α 调和且在 y 的邻域内与 α 核具有相同的奇性.

3. 对称性,即 $G^{(\alpha)}(x,y)=G^{(\alpha)}(y,x)$.

调和测度(harmonic measure) 分布在区域(或开集)的边界上,且与该区域(或开集)上的调和函数密切关联的一种测度.对 $\mathsf{R}^n(n\geqslant3)$ 的任意区域 D,狄喇克测度 $\varepsilon_y(y\in D)$ 到 ∂D 的格林扫除 ω_y 看成 ∂D 上的测度,就称为关于 y 的调和测度.对波莱尔集 $E\subset\partial D$,$\omega_y(E)=\omega(y,E;D)$ 看做 y 的函数在 D 内调和,取值于$[0,1]$;当有 $y_0\in D$ 使 $\omega_{y_0}(E)=0$,则 $\omega(y,E;D)\equiv0$,此时称 E 为调和测度零集.同时,

$$1-\omega(y,E;D)\geqslant\omega(y,\partial D\backslash E;D),$$

当 D 有界时等号成立;当 D 无界时,定义

$$\omega(y,\infty;\ D)=1-\omega(y,\partial D;D)$$

并称之为无穷远点∞关于 y 的调和测度(值).特别地,当 $D=\{x\,|\,|x|>\rho>0\}$时,

$$D(y,\infty;D)=1-\left(\frac{|y|}{\rho}\right)^{2-n}>0.$$

关于一个开集 D 的调和测度可类似地定义.另外,对 R^2 的有界区域 D,可考虑有界区域 $\Omega(\Omega\supset\overline{D})$ 上的格林扫除,同法可定义调和测度;而当 D 无界时,可用有界区域组成的单调增的穷尽列(参见"理想边界的调和测度")所对应的调和测度列的浑极限来定义,并仍具有与上述类似的性质.平面的无穷远点的调和测度(值)或者为 0,或者为 1,视 ∂D 为正容集或零容集而定(参见"理想边界的调和测度").调和测度与广义狄利克雷问题密切相关(参见"广义狄利克雷问题"),在更一般的空间上也可建立这一概念.

调和测度零集(null set of harmonic measure) 见"调和测度".

细拓扑(fine topology) 由给定的下半连续函数族确定的、比原来拓扑细的一种拓扑.在非空集合 Ω 上赋予拓扑 $\mathscr{T}$,设 Φ 是一族从 $(\Omega,\mathscr{T})$ 到 $[0,+\infty]$ 的下半连续函数组成的凸锥(设 $+\infty\in\Phi$),把形如

$$\{x\in\Omega\,|\,f(x)>\lambda\}\quad(f\in\Phi,\lambda\geqslant0)$$

的集全体记为 S,那么 $S\cup\mathscr{T}$ 所生成的拓扑 $\mathscr{T}_0$ 是使 Φ 中每个函数都连续的最粗拓扑,称之为(相对于 Φ 与 $\mathscr{T}$ 的)细拓扑.细拓扑下的开集、闭集、闭包、极限等分别称为细开集、细闭集、细闭包、细极限等.在格林空间中,若不另作申明,则总认定 Φ 是非

负超调和函数全体. 一般地,谈及细与瘦的概念时,都假定有了确定的 Φ 与 $\mathscr{T}$.

细开集(finely open set) 见"细拓扑".

细闭集(finely closed set) 见"细拓扑".

细闭包(finely closed set) 见"细拓扑".

细极限(finely limit) 见"细拓扑".

α **细拓扑**(α-fine topology) 使每个 α 上调和函数都连续的最粗拓扑. 在 R^n 上,取 Φ 为非负 α 上调和函数($0<\alpha\leqslant 2,\alpha<n$)全体及 $+\infty$ 时所得的 $\mathscr{T}_0$(参见"细拓扑")称为 α 细拓扑. 它比欧氏拓扑细且当 $\alpha<\alpha'$ 时,α 细拓扑严格细于 α' 细拓扑. α 细拓扑下的开集、闭集、极限、瘦等概念分别称为 α 细开集、α 细闭集、α 细极限、α 瘦等.

α **细开集**(α-finely open set) 见"α 细拓扑".

α **细闭集**(α-finely closed set) 见"α 细拓扑".

α **细极限**(α-fine limit) 见"α 细拓扑".

α **瘦**(α-thinness) 见"α 细拓扑".

瘦性(thinness) 描述一个点集在某一点的邻域充分"稀薄"的一个概念. 在拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$中,取定一族从$(\Omega,\mathscr{T})$到$(0,+\infty)$的下半连续函数组成的凸锥 Φ,Ω 的子集 E 称为在 $x_0\notin E$ 瘦,指的是 $x_0\notin\overline{E}$($\mathscr{T}$ 闭包,下同),或 $x_0\in\overline{E}$ 但存在 $u\in\Phi$,使得

$$\lim_{x\to x_0}\inf u(x)>u(x_0),$$

其中 $x\in E$. 进一步,称 E 在 $x_0(x_0\in E)$瘦,指的是 $E\setminus\{x_0\}$在 x_0 瘦且 E 在 x_0 弱瘦. 称 E 在任一点 x_0 弱瘦,当且仅当对 $f\equiv 1$ 关于 Φ 的扫除函数 $\hat{R}_1^e$,有

$$\inf\{\hat{R}_1^{E\cap\sigma}(x_0)\mid\sigma\text{ 为 }x_0\text{ 的邻域}\}<1.$$

若 $\Omega\setminus E$ 在 E 的每一点都瘦,则称 E 为肥集. 嘉当定理指出,E 是细开集当且当 E 是肥集. 因此,也可把肥集全体定义作细拓扑 $\mathscr{T}_0$. 集 E 的非正则点可定义作"E 在该点瘦". 特别地,在 R^n 中,x_0 为 E 的 α 非正则点当且仅当 E 在 x_0 为 α 瘦. 维纳判别法实即瘦性的判别法.

肥集(fat set) 见"瘦性".

弱瘦(weak thinness) 见"瘦性".

强瘦(strong thinness) 条件比瘦性更强的、描述点集在某一点的邻域"稀薄"程度的概念. 类似于弱瘦,若

$$\inf\{R_1^{\sigma\cap E}(x_0)\mid\sigma\text{ 为 }x_0\text{ 的邻域}\}=0,$$

则称 E 在 $x_0(x_0\notin E)$强瘦. 值得注意的是,强瘦仅考虑 $x_0\notin E$,弱瘦则不论 $x_0\in E$ 与否. 显然,强瘦必弱瘦,强瘦必瘦,反之未必. 这些概念都是布雷洛(Brélot,M. E.)等人引进的,常用于研究函数的边界性态(参见"瘦性").

半极集(semi-polar set) 一种可去集,其"稀薄"程度不超过极集. 在拓扑空间$(\Omega,\mathscr{T})$中,若集 E 可表示为在 Ω 的每一点都弱瘦的集之可列并,则称 E 为半极集. 布雷洛下包络定理指出,对 Φ(参见"瘦性")中的元素列$\{u_i\}$,集合

$$\{x\mid\lim_{y\to x}\inf(\inf_i u_i(y))<\inf_i u_i(x)\}$$

为半极集. 半极集是布雷洛(Brélot,M. E.)为了在一般空间中推广极集的概念而引进的,汉森(Hansen,W.)等人对它有深入研究. 在格林空间中,瘦与弱瘦等价;E 为极集当且仅当 E 在 Ω 的每一点瘦,故极集必为半极集,且反过来也对;一个开集的非正则边界点全体为极集;集合 $B_E=\{x\mid E$ 在 x 不瘦$\}$称为集 E 的基,一个正测度 μ 到集 E 的格林扫除 μ' 的质量必集中在 B_E 上.

集合的基(base of a set) 见"半极集".

半瘦(semi-thinness) 描述集合在某一点的邻域"稀薄"程度的一个概念. 设 Ω 为格林空间且 $\Omega\subset\mathsf{R}^n$,对 $x_0\in\Omega$,令

$$E_k=\{x\mid t^{k+1}<|x-x_0|\leqslant t^k\}.$$

称集 E 在 x_0 半瘦指的是 $n\to\infty$时,

$$\lim R_1^{E\cap E_n}(x_0)=0$$

对每个 $t\in(0,1)$成立. 对于 $\Omega\subset\mathsf{R}^2$,这个条件等价于 $E\cap E_n$ 的外容量趋于零. 把 $\Omega\setminus E$ 在 E 的每一点都半瘦的集 E 定义为半细开集,就得到半细拓扑. 半细拓扑下的极限称为半细极限.

半细极限(semi-fine limit) 见"半瘦"或"细边界值".

细边界值(fine boundary value) 函数在细拓扑意义下的边界值. 一般地,若 x 从 D 趋于 $x_0(x_0\in\partial D)$时有 $f(x)\to\alpha$,则称 α 为 f 在 x_0 的边界值;当此极限不存在时,限制 x 沿 D 的子集趋于 x_0,则可能有极限. 特别地,当 $D\cup\partial D$ 上有细拓扑时,若限制 x 在 x_0 的一个细邻域趋于 x_0 时有 $f(x)\to\beta$,则称 f 在 x_0 有细边界值 β. α-细、半细边界值等可类似定义.

半细边界值(simi-fine boundary value) 见"细边界值".

非切向边界值(nontangential boundary value) 区域上的函数当限制自变量以某种特殊方式趋近于边界点时的极限. 设 $D\subset\mathsf{R}^n(n\geqslant 2)$是一个李普希茨区域,即 D 为有界域且满足条件:对每点 $Q\in\partial D$,对应一个局部坐标系(X,y),$X\in\mathsf{R}^{n-1}$,$y\in\mathsf{R}^1$,及一个邻域 N 和函数 $b(X)$,使得:

1. $|b(X)-b(X')|\leqslant k|X-X'|$($k$ 为常数).
2. $N\cap D=N\cap\{(X,y)\mid y\geqslant b(X)\}$.
3. $N\cap\partial D=N\cap\{(X,y)\mid y=b(X)\}$.

设 f 是 D 上定义的函数,如果当 x 沿着任何一个以 $x_0\in\partial D$ 为顶点的内锥 Γ(即存在一个以 x_0 为顶点的锥 Γ' 使得 $\overline{\Gamma}\setminus\{x_0\}\subset\Gamma'\subset D$)趋于 x_0 时,$f(x)$

有同一个极限值，就称 f 在 x_0 有非切向边界值（或角极限）.

角极限（angular limit）　见"非切向边界值".

李普希茨区域（Lipschitz domain）　见"非切向边界值".

法图-杜布定理（Fatou-Doob theorem）　关于细边界值存在性的定理. 经典的法图定理断言：$\mathbb{R}^n$ 的球内的正调和函数在边界上几乎处处有非切向边界值. 杜布（Doob, J. L.）将它推广为，关于格林区域 D 附加其马丁边界 Δ（参见"马丁空间"）所得的紧空间上的细拓扑，D 内的上调和函数 $u>0$ 和调和函数 $h>0$ 的商 u/h 在 Δ 上除一个 μ_h 零测集外处处有细边界值，其中 μ_h 是 h 在马丁积分表示式中对应的测度（参见"马丁积分表现"）. 作为特例，在李普希茨区域内的上调和函数 $u>0$ 在 ∂D 上除一个调和测度零集外处处有细边界值.

亨特-惠登定理（Hunt-Wheeden theorem）　函数在某点的非切向边界值与半细边界值之间的关系的定理. 该定理断言：李普希茨区域上定义的任何函数若在 $x_0\in\partial D$ 有非切向边界值，则在 x_0 有与它相等的半细边界值，反之不然；但若正调和函数在 x_0 有半细边界值，则在 x_0 有相等的非切向边界值.

经典狄利克雷问题（classical Dirichlet problem）　亦称第一边值问题，经典位势论中三大基本问题之一. 即已知 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 内的区域 D（其边界 ∂D 为紧）及在 ∂D 上连续的实函数 f，求以 f 为边界值的 D 内调和函数 u. 这也称第一边值问题，当 D 有界时称为内部问题. D 无界时称为外部问题，这时为保证惟一性且使在 $\mathbb{R}^2$ 上利用反演，在 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 3)$ 时利用开尔文变换（参见"开尔文变换"）使内、外部问题能够互相转化，需要限制 u 在 ∞ 为正则，即极限

$$\lim_{x\to\infty}u(x)$$

存在. 且当 $n=2$ 时此极限为有限，当 $n\geqslant 3$ 时此极限为零. 自 18 世纪起，大批杰出数学家为该问题的求解做了巨大努力（参见"位势论"）. 至 20 世纪初，人们才认识到，对一般区域未必能求解. 使这一经典问题恒能求解的区域称为狄利克雷域，其特征是每个边界点都正则. 杜布（Doob, J. L.）把经典问题翻译成概率语言并做了深入研究（参见"概率与位势论"部分）.

第一边值问题（first boundary value problem）即"经典狄利克雷问题".

狄利克雷域（Dirichlet region）　见"经典狄利克雷问题".

正则边界点（regular boundary point）　一类边界点. 所谓正则边界点，是指 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 的一个开集 ω 的边界点 x_0，使得以 $\partial\omega$ 上每个具有紧支集的连续函数 f 为边界值的广义狄利克雷问题的解在 x_0 的边界值与 $f(x_0)$ 一致. 这等价于 $\mathbb{R}^n\backslash\omega$（或 $\partial\omega$）在 x_0 不瘦. 当 $n\geqslant 3$ 时，这等价于 x_0 为 $\mathbb{R}^n\backslash\omega$（或 $\partial\omega$）的 2 正则点（参见"α 正则点"），故可采用维纳判别法（当 $n=2$ 时，用对数容量代替 C_α 的类似判别法）. 常用的充分必要判别法还有：

1. 在 x_0 存在闸函数，即存在 x_0 的开邻域 N 及 $N\cap\omega$ 内的上调和函数 $w>0$，使得

$$\lim_{x\to x_0} w(x) > 0.$$

2. 对 1. 中 $N\cap\omega$ 的格林函数 G，有

$$\lim_{x\to x_0} G(x,y) = 0.$$

另外，当 $n\geqslant 3$ 时，简单实用的充分判别法是所谓庞加莱锥条件，即存在以 x_0 为顶点的圆锥体在 x_0 的某邻域与 ω 不相交.

闸函数（barrier）　见"正则边界点".

庞加莱锥条件（Poincaré cone condition）　利用区域的外锥来判断正则边界点的充分条件. 见"正则边界点".

勒贝格刺（Lebesgue spine）　非狄利克雷域的著名例子. 在 $\mathbb{R}^3$ 的直角坐标系下，XY 平面上的曲线

$$y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\quad(x>0)$$

绕 x 轴旋转的曲面所包围的闭区域 F 称为勒贝格刺，它在原点 O 瘦. 由此可得到一个与球同胚且边界曲面除 O 点外充分光滑的区域 D，使得

$$D\cap F=B\backslash F,$$

其中 B 为单位球. 可证 D 不是狄利克雷域. 勒贝格（Lebesgue, H. L.）于 1913 年给出了如上具有历史意义的反例，它促使人们进而考虑广义狄利克雷问题.

广义狄利克雷问题（generalized Dirichlet problem）　经典狄利克雷问题通过适当放松边界值要求进行的推广. 该问题是：已知 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$ 的区域 D（∂D 为紧）及从 ∂D 到 $[-\infty,+\infty]$ 的函数 f，求 D 内调和的函数 u，使对每个正则边界点 y，有

$$\liminf_{\partial D\ni\xi\to y} f(\xi)\leqslant\liminf_{D\ni x\to y}u(x)\leqslant\limsup_{D\ni x\to y}u(x)\leqslant\limsup_{\partial D\ni\xi\to y}f(\xi),$$

且当 D 无界时，u 在 ∞ 为正则（若不要求内外部问题互相转化，可只要求 u 在 ∞ 有有限极限）. 更一般地，可考虑 D 为一般开集的情形.

由佩龙（Perron, O.）于 1923 年提出，经布雷洛（Brélot, M. E.）改进的下述方法被公认是解这个问题的最有效工具. 下面以 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 3)$ 为例叙述，对 $\mathbb{R}^2$ 的内部问题也适用. 若边值函数为 f，当 D 无界时，令 $\partial D^*=\partial D\cup\{\infty\}$ 并补充定义 $f(\infty)=0$；当 D 有界时，令 $\partial D^*=\partial D$. D 内一个超调和函数 v 称为（f

的)上函数,指的是当 D 内 x 趋于任一 $y\in\partial D^*$ 时,恒有 $\liminf v(x)\geqslant f(y)$. 令 $\overline{H}_f(x)=\inf\{v(x)\mid v$ 为上函数$\}$;又记 $\underline{H}_f=-\overline{H}_{-f}$,那么 $\underline{H}_f\leqslant\overline{H}_f$;$\underline{H}_f$ 与 $\overline{H}_f$ 分别称为关于 f 的下解与上解. 当 $\underline{H}_f$ 与 $\overline{H}_f$ 相等且只取有限值时,广义狄利克雷问题有解,即 f 是可解的. f 可解的充分必要条件是对每个 $x\in D$,f 关于调和测度 $\omega_x=\omega(x,\cdot;D)$(参见"调和测度")可积分,这时

$$H_f(x)=\overline{H}_f(x)=\underline{H}_f(x)=\int f\mathrm{d}\omega_x$$

就是所要求的惟一解,称为 PWB 解或 PB 解,以纪念佩龙、维纳(Wiener,N.)及布雷洛的工作. 特别地,当 f 有限连续时必可解,看做泛函的对应测度,ω_x 由这样的 f 全体所确定并可由此给予定义. $y\in\partial D$ 为正则边界点的充分必要条件是,对每个连续(有限)的 f,有

$$\lim_{x\to y}H_f(x)=f(y).$$

上述方法在格林空间、马丁空间及更一般空间(参见"公理化位势论")也适用. 另外,在一定条件下,也可类似地考虑关于 α 调和函数的广义狄利克雷问题.

上函数(upper function) 见"广义狄利克雷问题".

下函数(lower function) 见"广义狄利克雷问题".

上解(upper solution) 见"广义狄利克雷问题".

下解(lower solution) 见"广义狄利克雷问题".

PWB 解(PWB solution) 见"广义狄利克雷问题".

PB 解(PB solution) 即"PWB 解".

狄利克雷积分(Dirichlet integral) 用以给出狄利克雷问题解的特征的一个积分. 有两种定义:

1. 从 R^n 的区域 G 到$[-\infty,+\infty]$的函数 f 当其梯度 $\operatorname{grad}f$ 几乎处处存在时,称

$$D[f]=\int|\operatorname{grad}f|^2\mathrm{d}x$$

为 f 的狄利克雷积分.

2. 对 R^2 上的复值解析函数,常把它的实部的狄利克雷积分称为其本身的狄利克雷积分.

在黎曼曲面上也有类似情形.

狄利克雷原理(Dirichlet principle) 利用狄利克雷积分给出的狄利克雷问题解的一个特征. 设 $\mathscr{D}$ 为 R^n 的有界区域 G 内连续可微且狄利克雷积分有限的实函数全体. 在 $\mathscr{D}$ 上定义内积:

$$(f_1,f_2)=\int(\operatorname{grad}f_1,\operatorname{grad}f_2)\mathrm{d}x$$

$$=\int\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\mathrm{d}x,$$

则依等价关系:"$\sim$"($f_1\sim f_2\Leftrightarrow D[f_1-f_2]=0$)得到的商空间 $\mathscr{D}_0$ 是准希尔伯特空间. 狄利克雷原理断言:若 $f\in\mathscr{D}$ 且有界并可连续地延拓到 $\overline{G}$,则在 $H=\{u\in\mathscr{D}\mid u$ 在 G 内调和$\}$中,经典的狄利克雷问题的解 H_f 使

$$\|u-f\|=D[u-f]$$

达到极小,它就是 f 在子空间 H_0(H 关于 $\mathscr{D}$ 中的等价关系的商空间)上的正交投影. 该原理的古典形式称,在 ∂G 充分光滑时,与上述 f(只要求分块连续可微)同性质同边界值的诸函数中,存在使狄利克雷积分达到极小者. 自 19 世纪 50 年代狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)、黎曼(Riemann,(G. F.)B.)提出该原理之后的半个多世纪,包括希尔伯特(Hilbert,D.)、外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))在内的大批数学家为该理论的充实付出了巨大努力. 20 世纪 50 年代,戴尼(Deny,J.)用广义函数论的方法把研究深入一步;布雷洛(Brélot,M. E.)把上述结果推广到 $\mathscr{E}$ 空间的区域上去.

BLD 函数(BLD-functions) 一类重要函数. 所谓 BLD 函数,是指准希尔伯特空间 $\mathscr{D}_0$(参见"狄利克雷原理")的完备化空间中的元素,这种元素全体称为 BLD 族. 这是布雷洛(Brélot,M. E.)倡议的,以纪念在 1906 年引入 BL 类函数的列维(Levi,B.)和戴尼(Deny,J.),后者在 1950 年应用广义函数论给出了进一步明确这个空间特点的完备化定理:BLD 实际上是由下述 BLD 函数 f 所组成:f 在 G 内似乎处处有限且 $\mathscr{D}_0$ 中有子列似乎处处收敛于 f. 这种 f 必几乎处处有梯度且 $D[f]<+\infty$. 若 f 是有界区域 G_1($G_1\supset\overline{G}$)内的 BLD 函数,则在 G 上 H_f 存在,且除附加常数外 H_f 是惟一使 $\|u-f\|$ 达到极小的 BLD 函数,也是惟一满足下面条件的、在 D 内调和的函数:它可以延拓成 G_1 上的 BLD 函数 f_1 且使得在 $G_1\backslash G$ 上 $f_1=f$.

BLD 族(BLD-family) 见"BLD 函数".

BL 函数(BL-functions) 一类重要函数. 所谓 BL 函数,是指从 R^n 的区域 G 到$[-\infty,+\infty]$的一类函数,其中每个函数 f 满足:

1. 在几乎所有平行于坐标轴 OX_i($i=1,2,\cdots,n$)的直线上,$f(x)$是 x 的分量 x_i 的绝对连续函数.

2. 在 G 上,$D[f]<+\infty$.

又在 G 上,BL 关于 $\|f\|=\sqrt{D[f]}$ 成半范空间,当 G 有界时,BLD 可看成 BL 的子集. 若 $G=\mathrm{R}^n$,令

$$\mathrm{BL}_0=\left\{f\in\mathrm{BL}\;\middle|\;\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^{n-1}}\int_{|x|=r}f(x)\mathrm{d}\sigma(x)=0\right\}.$$

对有界区域 G 也可相应定义 BL_0. BL_0 关于 $\|\cdot\|$

成赋范空间. BL_0 函数给出了广义函数的牛顿位势的一个直观描述.

BL_0 函数(BL_0-function)　见“BL 函数”.

广义函数核(kernel distribution)　一般位势的核这一概念的推广形式. 对从 $\mathbb{R}^n$ 到 $[-\infty,+\infty]$ 的函数 f,若存在正整数 m,使

$$\int |f(x)|(1+|x|^2)^{-m}\mathrm{d}x<+\infty,$$

则称 f 为缓增函数,把缓增函数全体记为 $\mathscr{S}^*$. 当广义函数 k 的傅里叶变换(参见《泛函分析》中的《广义函数》部分)$\hat{k}\geqslant 0$ 为函数且 $\hat{k}$ 与 $1/\hat{k}$ 都是缓增函数时,称 k 为广义函数核. 例如,正规化的 α 核 $k_\alpha=A(n,\alpha)|x|^{\alpha-n}$(其中 $1<\alpha<n$,$A(n,\alpha)$ 为正规化因子)是广义函数核,这时 $\hat{k}_\alpha=|x|^{-\alpha}\in\mathscr{S}^*$.

广义函数的位势(potential of distribution)　一般位势在广义函数情形下的推广. 关于广义函数核 k,

$$M=\{T\in\mathscr{S}^*\,|\,\hat{T}\text{ 为函数且 }T\text{ 的能量 }\|T\|^2=\int\hat{k}|\hat{T}|^2\mathrm{d}x<+\infty\}$$

关于内积

$$(T_1,T_2)=\int\hat{k}\hat{T}_1(x)\hat{T}_2(x)\mathrm{d}x$$

成为希尔伯特空间. 若 $T\in M$,则 $\hat{k}\hat{T}\in\mathscr{S}^*$,因此可确定满足 $\hat{u}=\hat{k}\hat{T}$ 的广义函数 $u=U^T$,称之为 T 的(以 k 为广义函数核)位势. 特别当 T 的支集为紧时,有 $U^T=k*T$,这与 T 为测度时的形式一致;当 $T\geqslant 0$ 时,U^T 为函数. 利用投影算子,可对广义函数的位势讨论扫除、平衡问题及容量等. 以正规化的 α 核 k_α 为例,上述 M 就是 α 能量有限的(带符号)测度全体 $\mathscr{E}_\alpha$ 以 $I_\alpha(\mu,\nu)$ 为内积的准希尔伯特空间的完备化. M 中那些支集包含在紧集 $K(K\subset\mathbb{R}^n)$ 的广义函数全体 M_K 是 M 的子希尔伯特空间,$T\in M$ 到 M_K 的投影 T' 满足 $U^{T'}(x)=U^T(x)$ 在 K 的内部 K^0 几乎处处成立. 称此 $T'=P_KT$ 为 T 到 K 的扫除. 另外,对满足 $U^T(x)\equiv 1$ 在 K^0 成立的 $\Gamma\in M$,其扫除 $\Gamma'=P_K\Gamma$ 是在 $M_K=\{T_1\}$ 中使 $\|T_1-\Gamma\|$ 达到极小的惟一解,称 Γ' 为 K 上的平衡分布,$\|\Gamma'\|$ 为 K 的谱测度. 当 $0<\alpha\leqslant 2$ 时,它们分别与把 k_α 看成一般核时的平衡测度及 α 容量一致.

广义函数的牛顿位势(Newton potential of distribution)　一类广义函数的位势. 以 k_2 为广义函数核时 $T\in M_2$ 的位势 U^T 称为广义函数的牛顿位势. 它是 $\mathbb{R}^n$ 上的 BL_0 函数且

$$\|T\|^2=\frac{1}{4\pi}\int|\mathrm{grad}\,U^T(x)|^2\mathrm{d}x$$

(关于 $\|T\|$,见“广义函数的位势”);反之,任一 BL_0 函数几乎处处等于某个牛顿位势 U^T. 双层位势可视为 U^T 的特殊情形.

抽象边界(abstract boundary)　由不属于指定的拓扑空间 Ω 的点组成的集合,是 Ω 在延拓后的拓扑空间内的边界. 具体地,在非空集合 Ω 上赋予拓扑 $\mathscr{T}$,设 I 是非空指标集,若对每个 $i\in I$,对应着一个由开集组成的滤基(参见“一般拓扑学”部分)$\mathscr{B}_i$,则在 $\Omega\cup I$ 上存在满足下述条件的拓扑 $\mathscr{T}_1$:

1. $\mathscr{T}_1$ 在 Ω 的诱导拓扑为 $\mathscr{T}$.

2. 对任意 $i\in I$,Ω 与 i 的邻域的交全体构成由 $\mathscr{B}_i$ 生成的滤子.

于是关于 $\mathscr{T}_1$,I 是 Ω 的边界,称之为 Ω 的抽象边界. 这样的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 中有最细者,它使得 Ω 为开集,在 I 上的诱导拓扑是离散的且 $\mathscr{B}_i$ 中的集与 i 之并全体构成 i 的邻域基. 把使 Ω 成为开集的诸拓扑 $\{\mathscr{T}_1\}$ 中最粗者记为 $\mathscr{T}_m$,若 $(\Omega,\mathscr{T})$ 为豪斯多夫空间,则 $(\Omega\cup I,\mathscr{T}_m)$ 也是豪斯多夫空间的充分必要条件为:

1. $\forall i\in I,\forall x\in\Omega$,$x$ 在 $(\Omega,\mathscr{T})$ 中有一个邻域 U 与 $\mathscr{B}_i$ 的某个成员 V 不相交.

2. $\forall i,j\in I(i\neq j)$,存在 $U\in\mathscr{B}_i,V\in\mathscr{B}_j$,使得 U 与 V 不相交.

极小调和函数(minimal harmonic function)　不计一个正的常数因子时比别的同类函数都小的非负非零调和函数. 设 Ω 为拓扑空间,一族由 Ω 到 $[0,+\infty)$ 的连续函数 u 组成的凸锥 $\mathscr{U}$ 和一族由 Ω 到 $[0,+\infty]$ 的下半连续函数 p 组成的凸锥 $\mathscr{P}$ 当满足下面两条件时分别称为抽象调和锥和位势锥:

1. $u\in\mathscr{U},p\in\mathscr{P}$ 且 $u\leqslant p$ 蕴涵 $u=0$.

2. $v\in\Sigma,u\in\mathscr{U}$ 蕴涵 $\inf\{u(x),v(x)\}\in\Sigma$,其中 $\Sigma=\mathscr{U}+\mathscr{P}=\{u+p\,|\,u\in\mathscr{U},p\in\mathscr{P}\}$. 格林空间上的非负调和函数全体和非 $+\infty$ 的格林位势全体分别是 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{P}$ 的特例.

$\mathscr{U}$ 中元素 $h(h\neq 0)$ 称为极小调和函数,指的是对任意 $u\in\mathscr{U}$,$u\leqslant h$ 蕴涵存在非负常数 α 使 $u=\alpha h$. $h\neq 0$ 为极小调和当且仅当 $\bar{h}=\{\alpha h\,|\,\alpha\geqslant 0\}$ 为凸锥 $\mathscr{U}$ 的极端母线. 若规定 h_1 等价于 h_2 当且仅当存在函数 $\alpha>0$ 使 $h_1=\alpha h_2$,则可把 $\bar{h}$ 看成 h 的等价类. 极小调和函数的概念是马丁(Martin, R. S.)于 1941 年引进的,布雷洛(Brélot, M. E.)等人在抽象空间上加以发展. 目前关于抽象锥的研究已发展成为专门的 H 锥理论.

抽象调和锥(abstract harmonic cone)　见“极小调和函数”.

抽象位势锥(abstract potential cone)　见“极小调和函数”.

极小瘦(minimal thinness)　点集在抽象边界点的邻域“稀薄”程度的一种描述,瘦性概念的推广.

在考虑抽象调和锥时，Ω 的子集 E 称为关于极小调和函数 $h(h\neq 0)$ 为瘦，指的是关于凸锥 Σ，h 到 E 的简化函数 $R_f^E\neq h$. 集族 $\{\Omega\backslash E \mid E$ 关于 h 瘦$\}$ 构成一个滤子 $\mathscr{F}_h$；令 $\mathscr{F}_{\bar{h}}=\mathscr{F}_h$，它是类 $\bar{h}$（参见"极小调和函数"）中所有的极小调和函数（$\neq 0$）所对应的共同滤子. 关于 $\{\mathscr{F}_{\bar{h}}\}$，$\bar{h}$ 全体 m 作为 Ω 的抽象边界称为极小边界，它是极小细拓扑（参见"极小细拓扑"）下的边界. 布雷洛（Brélot，M. E.）还考虑了更一般的极小瘦与极小边界.

极小边界（minimal boundary） 见"极小瘦".

极小细拓扑（minimal fine topology） Ω 上的细拓扑在 Ω 与抽象边界的并集上的一种延拓. 在 Ω 上相对于 $\Phi=\Sigma\cup\{+\infty\}$（参见"极小瘦"）的细拓扑记为 $\mathscr{T}_0$，那么 $\mathscr{F}_h$ 中的集都是 $\mathscr{T}_0$ 开集. 在 $\Omega\cup m$ 中关于滤子族 $\{\mathscr{F}_{\bar{h}}\}$ 产生的，使 m 成为抽象边界、Ω 为开集的诸拓扑中最粗者记为 $\mathscr{T}_m$，称为极小细拓扑. 关于 $\mathscr{T}_m$，从 Ω 内到边界点 $\bar{h}$ 的上、下极限与关于滤子 $\mathscr{F}_{\bar{h}}$ 的上、下极限一致.

康斯坦丁斯库-柯尼定理（Constantinescu-Cornea theorem） 统一处理拓扑空间各种常用的紧致化的一个定理. 该定理指出，若 Ω 为非紧的局部紧的豪斯多夫空间，Ψ 是一族从 Ω 到 $[-\infty,+\infty]$ 的连续函数，则存在惟一（至多相差一个同胚）的紧空间 $\hat{\Omega}$ 满足：

1. Ω 在 $\hat{\Omega}$ 中稠密且为开集.
2. Ψ 中每个函数能延拓成 $\hat{\Omega}$ 上的连续函数 $\hat{f}$.
3. $\hat{f}$ 全体能分辨 $\Delta=\hat{\Omega}\backslash\Omega$ 的点. Δ 称为 Ω 的理想边界.

$\hat{\Omega}$ 也可看成 Ω 关于如下的一致结构的完备化空间，它是使 Ψ 中每个函数都一致连续且相应的一致拓扑与 Ω 原有拓扑相容的最粗的一致结构. 本定理概括了常用的紧致化定理，提供了据函数族的性质来引入边界且保证原空间附加边界后成为紧空间的理论根据.

适当选取上述的函数族 Ψ，可得位势论常用的如下几种紧致化：

1. 亚历山德罗夫单点紧致化，这时 Ψ 为空集.
2. 斯通-切赫紧致化，这时 Ψ 为从 Ω 到 $[-\infty,+\infty]$ 的连续函数全体.
3. 斯托伊洛夫紧致化，取 Ψ 为如下从 Ω 到 $(-\infty,+\infty)$ 的连续函数 f 组成：在 Ω 中有紧子集 K_f，使得 $\Omega\backslash K_f$ 是一些区域的并集且在每个区域上 f 取常数值.
4. 罗伊登紧致化，这时 Ω 为 $\mathscr{E}$-空间，Ψ 是从 Ω 到 $(-\infty,+\infty)$ 的、连续的 BLD 函数全体.
5. 仓特善紧致化，Ω 为 $\mathscr{E}$ 空间，Ψ 是上一族函数中这样的 f 全体：Ω 有闭子集 F_f，使得 f 在 $\Omega\backslash F_f$ 内调和且在那些于 F_f 上取值等于 f 的 BLD 函数的狄利克雷积分中，f 达到极小.
6. 马丁紧致化，这是位势论中重要的紧致化（参见"马丁空间"）.

在各种紧致化下得到的理想边界仍冠以同样名字，如亚历山德罗夫（理想）边界等.

理想边界（ideal boundary） 见"康斯坦丁斯库-柯尼定理".

斯通-切赫紧致化（Stone Čech compactification） 见"康斯坦丁斯库-柯尼定理".

斯托伊洛夫紧致化（Stoilow compactification） 见"康斯坦丁斯库-柯尼定理".

罗伊登紧致化（Royden compactification） 见"康斯坦丁斯库-柯尼定理".

仓特善紧致化（Kuramochi compactification） 见"康斯坦丁斯库-柯尼定理".

马丁紧致化（Martin compactification） 见"康斯坦丁斯库-柯尼定理"和"马丁空间".

马丁空间（Martin space） 位势论中的一类重要空间. 格林空间 Ω 相对于函数族 $\{K_y(x)\mid y\in\Omega\}$ 的紧致化记为 $\hat{\Omega}$，并称 $\hat{\Omega}$ 为马丁空间，其中

$$K_y(x)=K(x,y)=\frac{G(x,y)}{G(x,y_0)},$$

$y_0\in\Omega$ 任意取定. $\Delta=\hat{\Omega}\backslash\Omega$ 称为马丁边界，每个函数 $K_y(x)$ 在 $\hat{\Omega}$ 有连续延拓且能分辨 Δ；$\hat{\Omega}$ 可度量化. R^n 的一般区域的欧氏边界与 Δ 全然不同，但当 Ω 是球或其他较为正则的域（如李普希茨域）时二者一致. 对 R^2 的单连通格林区域，Δ 等同于卡拉西奥多里（Carathéodory，C.）的分歧边界. 对马丁边界同样可考虑狄利克雷问题；可把 Ω 上的细拓扑延拓成 $\Omega\cup\Delta_1$（参见"马丁积分表现"）上的极小细拓扑并可讨论函数的边界值问题（参见"法图-杜布定理"）；马丁边界可翻译成概率语言并在随机过程论中得到应用和推广. 该空间是马丁（Martin，R. S.）于 1941 年引进的.

马丁边界（Martin boundary） 见"马丁空间".

马丁积分表现（Martin integral representation） 球上非负调和函数的泊松积分表示在一般区域上的推广. 在马丁空间 $\hat{\Omega}$ 中，对于 Ω 上的极小正调和函数 u，必存在惟一的 $X\in\Delta$（定义见"康斯坦丁斯库-柯尼定理"）使

$$u(y)\equiv u(y_0)K(X,y)$$

（参见"马丁空间"），称这样的 X 为 Δ 的极小点；极小点全体 Δ_1 是 G_δ 集. 马丁积分表现定理断言：对任一非负调和函数 u，必存在惟一的、集中在 Δ_1 上的拉东测度 $\mu\geqslant 0$，使得

$$u(y)=\int K(X,y)\mathrm{d}\mu(X)\quad(y\in\Omega).$$

上式右端也是双层位势的推广，当 Ω 为 R^n 中的球

时，

$$K(X,y)=\frac{\partial G(X,y)}{\partial n_X}.$$

上述定理促使绍凯(Choquet, G.)对紧凸集作出了出色的研究，又反过来简化了马丁(Martin, R. S.)的证明.

广义马丁边界(generalized Martin boundaries) 马丁紧致化的推广形式的理想边界. 它有许多种，例如，用某个二阶椭圆型方程在 Ω 的格林函数 $G'(x,y)$ 代替调和方程的 $G(x,y)$(参见"马丁空间")，就得到与该方程某族极小正解相关联的马丁边界 Δ'(称为椭圆马丁边界)及极小点全体 Δ_1'，并可研究 $\Omega\cup\Delta'$ 上的位势论性质以及方程的解空间结构；Δ' 与 Δ 及其他理想边界的关系等是常见课题. 特别地，对方程 $Lu=Pu$ ($P\geqslant 0$, L 是拉普拉斯算子)，把 Δ_1' 的基数称为椭圆维数，记为 $\dim P$. 中井三留(Nakai, M.)等日本学者在具有一个孤立边界点的平面区域上对 $\dim P$ 的值域与密度 P 的关系做了深入研究；另外，对非椭圆方程也可考虑广义马丁边界.

椭圆马丁边界(elliptic Martin boundary) 见"广义马丁边界".

椭圆维数(elliptic dimensions) 见"广义马丁边界".

绍凯表现定理(Choquet representation theorem) 对应于马丁积分表现的一个著名的泛函分析定理. 其要点是：在一个局部凸的豪斯多夫拓扑线性空间 Ω 中，若凸锥 C 的底(即 C 与一个不经过原点的闭超平面之交) B 为紧且可度量化，则 B 中每个元素 y 必是某个集中在 B 的极端点集上的概率测度 μ 的重心，即对 Ω 上任何连续的线性形式 l，有

$$l(y)=\int l(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

进一步，若凸锥 C 关于其自身的次序成为格，则上述表达式惟一. 这个定理及有关的研究被誉为 20 世纪中叶分析学上伟大发现之一.

绍凯边界(Choquet boundary) 正则边界点集的一种推广. 设 E 为紧拓扑空间，Σ 是从 E 到 $(-\infty,+\infty]$ 的下半连续函数的全体，E 的点 y 称为 Σ 极值点，指的是对 E 上的任何概率测度 μ，不等式

$$\int f(x)\mathrm{d}\mu(x)\leqslant f(y)$$

对 Σ 中任何元素 f 成立蕴涵 μ 为狄喇克测度 ε_y. Σ 极值点全体称为 E(相对于 Σ)的绍凯边界. E 中若存在紧子集 E_1，使 Σ 中每个元素 f 在 E_1 达到最小值且在同类集合中 E_1 为最小，则称 E_1 为 E 的希洛夫边界. 特别地，当 D 是格林空间 Ω 的相对紧开集，Σ 是在 D 内调和且在 $\overline{D}$ 上有限连续的函数全体时，$\overline{D}$ 相对于 Σ 的绍凯边界正好是 D 的正则边界点全体，而它的闭包就是 $\overline{D}$ 的希洛夫边界. 这两种边界与 Ω 的紧子集的稳定边界点也有密切关联.

Σ 极值点(Σ-extreme point) 见"绍凯边界".

希洛夫边界(Silov boundary) 见"绍凯边界".

多重调和函数(polyharmonic function) 一类重要的函数. 满足 $\Delta^k u=0$ 的、实的可微函数 u 称为多重调和函数，这里 $k\geqslant 2$，Δ 是拉普拉斯算子. 特别当 $k=2$ 时，即满足 $\Delta\Delta u=0$ 的函数 u 称为双调和函数. 对于平面区域 G 内的双调和函数 u，有如下古尔萨(Goursat, É.-J.-B.)的表示形式：

$$u(z)=\mathrm{Re}(\bar{z}f(z)+g(z)),$$

这里 $f(z)$, $g(z)$ 是 G 内的全纯函数.

双调和函数(biharmonic function) 见"多重调和函数".

位势论与函数论

外映射半径(outer mapping radius) 复平面上的某个圆盘的半径. 设 E 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的有界连续统，D_∞ 是开集 $\mathbb{C}\backslash E$ 中那个无界的分支，若共形映射 $w=w(z)$ 将 D_∞ 映成 $\{w\,|\,|w|>R\}$ 且在 ∞ 点的邻域有展开式

$$w=w(z)=z+a_0+a_1/z+\cdots,$$

则称 $R=R(E)$ 为 E 的外映射半径. 可以证明，$R(E)$ 等于 E 的对数容量 $C_l(E)$. 设 D ($D\subset\mathbb{C}$) 是单连通区域，且其内部含有原点 O. 若共形映射 $w=\varphi(z)$ 将 D 映成 $\{w\,|\,|w|<R_0\}$，并使 $\varphi(0)=0$, $|\varphi'(0)|=1$，则称 $R_0=R_0(D)$ 为 D 关于 0 的内映射半径. 利用平衡分布的极值性质可证明，当 D 有界时，$R_0(D)\leqslant R(\overline{D})$，其中等号当且仅当 D 是以原点为中心的开圆；进一步，若把这样的 D 的外部关于单位圆的反演区域记为 D^*，则 $R_0(D)\cdot R_0(D^*)\leqslant 1$，等号仅当 D 是单位圆内部时成立. 若 $R_0(D^*)>R_0(D)$，则 $R_0(D)<1$.

内映射半径(inner mapping radins) 见"外映射半径".

寇勃1/4 圆定理的推广(extension of Koebe's 1/4-disc theorem) 一个著名定理的推广. 主要结果是：

1. 设 $w=f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 是定义在单位圆盘 Δ_0 上的正则函数，记 $D_f=\{w\,|\,w=f(z), z\in\Delta_0\}$ 和 $E=\{r\,|\,r\geqslant 0$, 若 $|w|=r$ 则 $w\in D_f\}$，则 E 的勒贝格测度 $mE\geqslant 1/4$，等号成立当且仅当 $w=f_\alpha(z)=z/(1+ze^{i\alpha})^2$. 该映射将单位圆映上 w 平面去掉半直线 $L_{-\alpha}$: $w=\rho e^{-i\alpha}$ ($1/4\leqslant\rho\leqslant+\infty$) 后所得的区域.

2. 若通过凸区域 D 的任一边界点都可做一个半径为 ρ 的圆盘包含 D，则 D 称为是 ρ 阶的. 将满

足下面条件的定义在 Δ_0 上的共形映射 f 的全体记为 $\mathscr{F}$：设 f 满足 $f(0)=0,|f'(0)|=1$ 且 $w=f(z)$ 所产生的区域 D_f^ρ 是 ρ 阶凸区域. 张鸣镛指出，

$$T_\rho = \sup_{f\in\mathscr{F}}\{r \mid 若\ |w|<r, 则\ w\in D_f^\rho\}$$

是方程

$$\sqrt{T_\rho(2\rho-T_\rho)}\arcsin\sqrt{\frac{T_\rho}{2\rho}}=\frac{\pi}{4}$$

$$(1\leqslant\rho<+\infty)$$

的正根，而 $T_\infty=\pi/4$. 极端的情形为：区域是以 $w=0$为对称中心，以两个半径为 ρ 的圆弧为边界（当 $\rho=+\infty$时退化为两平行线）的等边圆弧二角形的内部.

理想边界的调和测度(harmonic measure at the ideal boundary)　调和测度在开黎曼曲面上的推广. 设 R 是开黎曼曲面，$\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$是 R 的子曲面的一个穷尽列，即

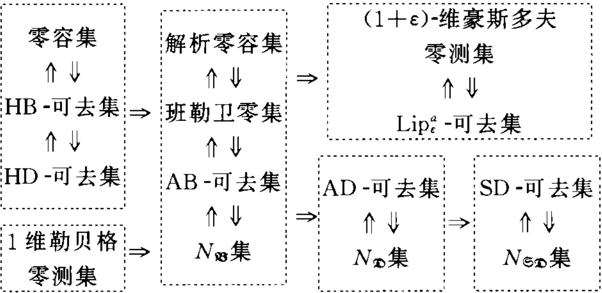
$$R_0\subset R_1\subset\cdots\subset R_n\rightarrow R,$$

其中 $\overline{R}_n$ 为紧集且 $\overline{R}_n\subset R_{n+1}$，$R_n$ 的边界 Γ_n 由有限条解析若尔当曲线组成. 设 $\omega_n(z)$是 Γ_n 关于 $R_n\backslash\overline{R}_0$ 的调和测度，使 $\omega_n(z)$在 Γ_n 上取值为 1，在 Γ_0 上取值为 0. 据极大值原理，在 $R_n\backslash\overline{R}_0$ 上有$\omega_{n+1}(z)<\omega_n(z)$，由此，据哈纳克原理，$\{\omega_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$在 $R\backslash\overline{R}_0$ 内的每个紧集上一致收敛. 记

$$\omega(z)=\lim_{n\to\infty}\omega_n(z),$$

则 $\omega(z)$称为 R 的理想边界的调和测度. 理想边界调和测度为零的黎曼曲面(包括紧黎曼曲面)为 O_G 类曲面，即在其上不存在格林函数的黎曼曲面.

函数论零集(function-theoretic null-set)　若干类集合的统称. 所谓函数论零集，是指在复函数论中使某个性质不成立的，或指关于某种函数族具有可延拓性的(紧致)点集. 常见的函数论零集有：零容集、调和零测集、解析零容集、班勒卫零集、豪斯多夫零测集、$N_{\mathscr{F}}$ 类零集、可去集等. 平面函数论零集有如下关系(其中"⇒"表示蕴涵，$0<\varepsilon<1$)：



关于表内符号及名词的意义，参见后续各条目.

解析容量(analytic capacity)　定义在复平面的紧子集族上的一个集函数，其值由一族有界解析函数的导数来确定. 设 F 为复平面 C 上的紧集，$\mathscr{A}$ 为 C$\backslash F$ 的非有界分支 D_∞上的有界复解析函数全体，称

$$\alpha(F)=\sup\{|f'(\infty)|\,|\,f\in\mathscr{A}\ 且\ |f|\leqslant 1\}$$

为 F 的解析容量. 若用 $C_l(F)$表示 F 的对数容量，则一般有 $\alpha(F)\leqslant C_l(F)$. 若将 f 在∞的邻域展开：

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots,$$

则

$$f'(\infty)=a_1=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma f(s)\mathrm{d}s,$$

其中 Γ 是分离 F 与∞的闭曲线. 又，解析容量为零的集称为解析零容集，又称班勒卫零集.

班勒卫零集(Painlevé null-set)　见"解析容量".

$N_{\mathscr{F}}$ 类零集(null set of class $N_{\mathscr{F}}$)　一类函数论零集. 用 $\mathscr{F}(\Omega)$表示定义在平面区域 Ω 上的特定的单值解析函数类. 设 E 是平面 C 内的紧集，$E^{\mathrm{C}}=$ C$\backslash E$，若对 E^{C} 的任一分支 Ω，

$$M_{\mathscr{F}}(z_0,\Omega)=\sup_{f\in\mathscr{F}(\Omega)}|f'(z_0)|=0\ (z_0\in\Omega),$$

则称 E 是 $N_{\mathscr{F}}$ 类零集. 常见的 $N_{\mathscr{F}}$ 集有 $N_{\mathfrak{B}}$，$N_{\mathfrak{D}}$ 和 $N_{\mathfrak{S}\mathfrak{D}}$等，这时 $\mathscr{F}(\Omega)$分别表示下面的函数族：

$\mathfrak{B}(\Omega)=\{f\,|\,f$ 在 Ω 上单值解析且 $|f(z)|\leqslant 1\}$；

$\mathfrak{D}(\Omega)=\{f\,|\,f$ 在 Ω 上单值解析且

$$\iint_\Omega|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\pi\};$$

$\mathfrak{S}\mathfrak{D}(\Omega)=\{f\,|\,f$ 是单叶函数且 $f\in\mathfrak{D}(\Omega)\}$.

这些点集的关系参见"函数论零集". 这些结果属于阿尔福斯(Ahlfors, L. V.)和博灵(Beurling, A.).

可去集(removable set)　关于某个函数族的具有可延拓性的一类函数论零集. 设 E 是黎曼曲面 R 上的全不连通闭集，若对 E 的任一子集 e 的任一邻域 U_e，$U_e\backslash e$ 上的任一 X 类函数(某特定函数类)总可保性质地延拓到 U_e 上，则称 E 为 X 可去集. X 常表示 HB，HD，AB，AD，SD 或 Lip_α^a 类函数，其中 Lip_α^a 类为满足 α 阶李普希茨条件的有界解析函数；其余含意为：H 调和，A 解析，S 单叶解析，B 有界，D 具有有限狄利克雷积分. 各类可去集的关系见"函数论零集".

可去集与黎曼曲面分类有密切联系. 用 O_X 表示其上不存在非常数单值 X 类函数的黎曼曲面. 对亏格有限情形，O_X 类曲面正好是闭黎曼曲面关于某 X 可去集的余集，其中 X 代表 HB，AB 或 AD. 对一般情形，O_{HB}类曲面上的点集是 HB 可去的当且仅当去掉该集后所得的曲面仍是 O_{HB}类. 阿尔福斯(Ahlfors, L. V.)、萨廖(Sario, L. R.)、中井三留(Nakai, M.)等人对黎曼曲面分类理论做了大量深刻研究.

调和延拓(harmonic continuation)　位势论中的一个概念.所谓调和延拓,是指把调和函数的定义域扩大的过程或所得的函数.设 u_1,u_2 分别为定义在区域 $D_1,D_2(\subset\mathbb{R}^n)$内的调和函数.调和延拓方式如下:

1. 若 $D_1\cap D_2\neq\varnothing$ 且在 $D_1\cap D_2$ 内 $u_1\equiv u_2$,则满足条件 $u(p)=u_1(p)(p\in D_1)$和 $u(p)=u_2(p)(p\in D_2)$的函数 $u(p)$是 $D=D_1\cup D_2$ 上的调和函数.

2. 若 $D_1\cap D_2=\varnothing$,但有 C^1 类曲面 S 为其公共边界,u_1 和 u_2 在 S 上有相等的边界值且有只是符号相反的法向导数,则满足条件 $u(p)=u_1(p)(p\in D_1\cup S)$和 $u(p)=u_2(p)(p\in D_2\cup S)$的函数 $u(p)$在 $D=D_1\cup S\cup D_2$ 上调和.

3. 设 $\hat{G}$ 是双倍型的黎曼曲面,即可表为 $\hat{G}=G\cup C\cup\widetilde{G}$,其中 C 由至多可数条解析曲线组成,而 $G\cap\widetilde{G}=\varnothing$,$G$ 与 $\widetilde{G}$ 互为沿 C 的对称曲面;设$u(p)$是定义在 G 上的调和函数,在 $G\cup C$ 上连续且在 C 上 $u=0$;只要在 $\widetilde{G}$ 上定义$u(p)=-u(\widetilde{p})$,$\widetilde{p}$ 为 p 关于 C 的对称点,$u(p)$即延拓成整个 $\hat{G}$ 上的调和函数.如果$f(p)=u(p)+\mathrm{i}v(p)$是 G 上的解析函数且$u(p)$满足上述条件,则只要在 $\widetilde{G}$ 上定义$f(p)=-u(\widetilde{p})+\mathrm{i}v(\widetilde{p})$,$\widetilde{p}$ 为 p 关于 C 的对称点,即可将 $f(p)$解析延拓到整个 $\hat{G}$ 上.

4. 特别地,对平面若尔当域 D 上的调和函数 $u(z)$,若 D 的边界存在某段解析曲线弧 C,使在其上 $u=0$ 或$\frac{\partial u}{\partial n}=0$,则 u 可越过 C 调和延拓到某个域上.

群上的位势论

群上的位势论(potential theory on group)　经典位势论的推广.采用群上随机过程所确定的测度作为位势核,应用现代分析方法给出相应的位势论原理.这些原理具有明确的概率意义.这部分均设 X 是一个局部紧阿贝尔群,简记为 LCA 群.

X 的对偶群记为 Γ.$C(X)$表示 X 上连续复值函数全体.$C_b(X)$,$C_0(X)$和 $C_c(X)$分别表示 $C(X)$中的有界函数、在无穷远点为零的函数以及具有紧支集的函数所成的子空间,各空间均赋予标准拓扑.$M(X)$,$M_b(X)$和 $M_c(X)$分别表示 X 上的拉东测度、有界拉东测度和有紧支集的拉东测度空间.ω_X 表示 X 上的哈尔测度,ε_x 表示在 $x\in X$ 的狄喇克测度.又,测度 $\mu\in M_b(X)$的傅里叶-斯蒂尔杰斯变换记为 $\widetilde{\mu}$,即

$$\widetilde{\mu}(\gamma)=\int\overline{\langle x,\gamma\rangle}\mathrm{d}\mu(x)\quad(\gamma\in\Gamma),$$

其中$\langle x,\gamma\rangle=\gamma(x)$.

浑拓扑(vague topology)　一种特殊拓扑.在 $M(X)$上用浑收敛定义的拓扑称为浑拓扑.$M(X)$中的测度网$(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$称为浑收敛于 $\mu\in M(X)$,记为 $\mu_\alpha\dot{\to}\mu$,指的是

$$\lim_\alpha\langle\mu_\alpha,f\rangle=\langle\mu,f\rangle$$

对任意 $f\in C_c(X)$成立(参见"强收敛").

伯努利拓扑(Bernoulli topology)　$M(X)$上的一种拓扑.记 $M_b^+(X)$为 $M_b(X)$的正元素全体所组成的子集,$M_b^+(X)$中测度网$(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$按伯努利拓扑收敛于 $\mu\in M_b^+(X)$的充分必要条件是 $\mu_\alpha\dot{\to}\mu$ 且

$$\lim_\alpha\mu_\alpha(X)=\mu(X).$$

卷积半群(convolution semigroup)　一种半群.设$(\mu_t)_{t>0}\subset M_b^+(X)$满足如下条件:

1. $\forall t>0,\mu_t(X)\leqslant1$.
2. $\forall t,s>0,\mu_t*\mu_s=\mu_{t+s}$.
3. $\mu_t\dot{\to}\varepsilon_0(t\to+0)$,

则称测度族$(\mu_t)_{t>0}$是 X 上的一个浑连续卷积半群.由关系式 $\widetilde{\mu}_t(\gamma)=\mathrm{e}^{-t\psi(\gamma)}(t>0,\gamma\in\Gamma)$可知,$X$ 上的卷积半群$(\mu_t)_{t>0}$和 Γ 上的连续、非负函数 ψ 之间建立了一对一的对应.称 $\psi(r)$和$(\mu_t)_{t>0}$是关联的.对每一个正数 λ,定义 X 上的正测度 ρ_λ:

$$\langle\rho_\lambda,f\rangle=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\langle\mu_t,f\rangle\mathrm{d}t\quad(f\in C_c(X)),$$

称测度族$(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$是卷积半群$(\mu_t)_{t>0}$的预解式(resolvent).$(\rho_\lambda)_{\lambda>0}$满足预解方程

$$\rho_\lambda-\rho_\mu=-(\lambda-\mu)\rho_\lambda*\rho_\mu.$$

迁移卷积半群(transient convolution semigroup)　浑积分存在的卷积半群.设$(\mu_t)_{t>0}$是卷积半群.若$(\mu_t)_{t>0}$的浑积分

$$\int_0^{+\infty}\mu_t\mathrm{d}t$$

存在,即对$\forall f\in C_c^+(X)$,均有

$$\int_0^{+\infty}\langle\mu_t,f\rangle\mathrm{d}t<+\infty,$$

则$(\mu_t)_{t>0}$称为 X 上的迁移卷积半群或非常返半群.这时有 $\mu_t\dot{\to}0(t\to+\infty)$.若$(\mu_t)_{t>0}$不是迁移的,则称它为 X 上的常返卷积半群.

常返卷积半群(recurrent convolution semigroup)　见"迁移卷积半群".

群上的位势核(potential kernel on group)　与随机过程紧密关联的一个正测度,其作用类似一般位势论中的核(函数).若$(\mu_t)_{t>0}$是一个迁移卷积半群,则称测度

$$\chi=\int_0^{+\infty}\mu_t\mathrm{d}t$$

是位势核.记 $D^+(\chi)=\{\sigma\mid\chi*\sigma\text{ 存在},\sigma\in M^+(X)\}$,称 $\chi*\sigma$ 为 $D^+(\chi)$中元素 σ 的 χ-位势.每一个位势

核 χ 满足扫除原理以及其他位势原理.

基本核(elementary kernel)　最重要的一类位势核. 每个位势核都是某个基本核列的浑极限. 设 $\mu \in M_b^+(X)$, $\mu(X) \leqslant 1$, 且级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$$

浑收敛, 这里 μ^n 表示 μ 的 n 重卷积, $\mu^0 = \varepsilon_0$, 则称

$$\chi = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$$

是由 μ 确定的基本核. 它是由 μ 确定的卷积半群 $(e^{-t}\exp(t\mu))_{t>0}$ 的位势核. 若 χ 是位势核, 则 $\forall \lambda > 0$, $\lambda\chi + \varepsilon_0$ 是由 $\lambda \cdot \rho_\lambda$ 确定的基本核, 即

$$\lambda\chi + \varepsilon_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\rho_\lambda)^n.$$

完全核(perfect kernel)　位势核的一种等价形式. 一个正测度 χ, 若存在满足下述四个条件的一个基本正测度网 $(\sigma_v)_{v \in V}$, V 是 X 的单位元 0 的一个紧邻域基, 则称 χ 是一个完全核:

1. $\sigma_v(X) \leqslant 1$.
2. $\sigma_v \in D^+(\chi)$, $\chi * \sigma_v \leqslant \chi$ 且 $\chi * \sigma \neq \chi$.
3. 在 v 的余集 v^c 上, $\chi * \sigma_v = \chi$.
4. $\chi * \sigma_v^n \dot{\to} 0 (n \to \infty)$.

每一个完全核都是位势核. 反之, 每一个位势核都是完全核.

χ 扫除测度(χ-balayaged measure)　一般位势论中扫除测度的推广. 设 χ 是一个正测度, $\mu \in D^+(\chi)$, G 是开集. 若 $\mu' \in D^+(\chi)$ 满足下述条件, 则称 μ' 是 μ 在 G 上的 χ 扫除测度:

1. μ' 的支集 $\operatorname{supp}\mu' \subset \overline{G}$.
2. $\chi * \mu' \leqslant \chi * \mu$.
3. $\chi * \mu'|_G = \chi * \mu|_G$.

μ 上调和测度(μ-superharmonic measure)　通常的上调和函数在群上位势论中的对应物. 若 $\xi \in D^+(\mu)$ 满足 $\mu * \xi \leqslant \xi (\mu * \xi = \xi)$, 则称 ξ 是 μ 上调和测度(μ 调和测度). 哈尔测度 ω_X 是 μ 上调和测度. 当且仅当 $\mu(X) = 1$ 时, ω_X 是 μ 调和测度.

μ 调和测度(μ-harmonic measure)　见"μ 上调和测度".

超过测度(excessive measure)　比位势核更一般的一类测度, 这类测度及其简化测度在研究位势核原理时起重要作用. 设 $(\mu_t)_{t>0}$ 是 X 上的卷积半群, ξ 是正测度. 若 $\forall t > 0$, ξ 是 μ_t-上调和的(μ_t 调和的), 则称 ξ 关于 $(\mu_t)_{t>0}$ 是超过测度(不变测度). X 上的哈尔测度 ω_X 是超过测度. 当且仅当 $\forall t > 0$, μ_t 是概率测度时, ω_X 是不变测度. 若 χ 是位势核, 则 $\forall \sigma \in D^+(\chi)$, σ 的 χ 位势 $\chi * \sigma$ 是超过测度. 又当且仅当 $\sigma = 0$ 时, $\chi * \sigma$ 是不变测度. 对于每一个超过测度 ξ, 有里斯分解式: $\xi = \chi * \sigma + \eta$, 这里 $\sigma \in D^+(\chi)$, η 是不变测度. 每一个超过测度是一个单调增加位势网的浑极限.

不变测度(invariant measure)　见"超过测度".

简化测度(reduced measure)　一般位势论中简化函数的类似物. 设 G 是开集, ξ 是超过测度, 那么测度 $R_\xi^G = \inf\{\mu \mid \mu$ 是超过测度且在 G 上 $\mu \geqslant \xi\}$ 称为 ξ 在 G 上的简化测度. R_ξ^G 也是超过测度, $R_\xi^G \leqslant \xi$ 且在 G 上 $R_\xi^G = \xi$. 它的里斯分解式 $R_\xi^G = \chi * \sigma + \eta$ 满足 $\operatorname{supp}\sigma \subset \overline{G}$. 若 G 是相对紧的开集, 则 R_ξ^G 是一个位势. 特别地, $R_{\omega_X}^G$ 是一个位势. 所以存在惟一的 $\sigma_G \in D^+(\chi)$, 使得 $R_{\omega_X}^G = \chi * \sigma_G$.

χ 容量(χ-capacity)　集合的一种度量. 对于相对紧的开集 G, 由 $R_{\omega_X}^G = \chi * \sigma_G$ 所确定的惟一测度记为 σ_G, 称

$$\operatorname{cap}(G) = \int \mathrm{d}\sigma_G$$

为 G 的 χ 容量.

群上的扫除原理(balayage principle on group)　一般位势论中的扫除原理的推广. 设 χ 是一个正测度, 若对任意 $\mu \in M_c^+(X)$ 和任意相对紧的开集 G, μ 在 G 上的 χ 扫除测度存在, 则称 χ 满足扫除原理. 若上述中去掉"相对紧"的限制, 则称 χ 对所有开集满足扫除原理.

群上的控制原理(domination principle on group)　一般位势论中的控制原理的推广. 对 $\forall f, g \in C_c^+(X)$, 若

$$\chi * f(x) \leqslant \chi * g(x) (x \in \operatorname{supp} f)$$
$$\Rightarrow \chi * f(x) \leqslant \chi * g(x) (x \in X),$$

则称 χ 满足控制原理. 对 $\forall f, g \in C_c^+(X)$, $\forall \varepsilon > 0$, 若

$$\chi * f(x) \leqslant \chi * g(x) + \varepsilon (x \in \operatorname{supp} f)$$
$$\Rightarrow \chi * f(x) \leqslant \chi * g(x) + \varepsilon (x \in X),$$

则称 χ 满足完全极大值原理.

群上的质量惟一性原理(unicity principle of mass on group)　一般位势论中的惟一性原理的推广. 对 $\forall \mu_1, \mu_2 \in D^+(\chi)$, 若 $\chi * \mu_1 = \chi * \mu_2 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$, 则称 χ 满足质量惟一性原理.

群上的正质量原理(principle of positivity of mass on group)　群上的位势核满足的基本原理之一. 对 $\forall \mu_1, \mu_2 \in D^+(\chi)$, 若

$$\chi * \mu_1 \leqslant \chi * \mu_2 \Rightarrow \mu_1(X) \leqslant \mu_2(X),$$

则称 χ 满足正质量原理.

群上的平衡原理(equilibrium principle on group)　平衡原理在群上的位势论中的对应物. 若对每一个相对紧的开集 G, 存在 $\lambda_G' \in D^+(\chi)$, 满足

下述条件：

1. $\mathrm{supp}\,\lambda_G' \subset \overline{G}$；

2. $\chi * \lambda_G' \leqslant \omega_X$；

3. 在 G 上 $\chi * \lambda_G' = \omega_X$；

则称 χ 满足平衡原理. λ_G' 称为 G 的 χ 平衡分布.

χ 平衡分布（χ-equilibrium distribution） 见"群上的平衡原理".

电容器原理（condenser principle） 群上的位势核满足的基本原理之一. 该原理断言：若 G_1, G_2 是一对开集，$\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = \varnothing$ 且 $\overline{G}_1$ 为紧集，则存在 $\mu_1, \mu_2 \in D^+(\chi)$，使得 $\xi = \chi * (\mu_1 - \mu_2)$ 满足：

1. $0 \leqslant \xi \leqslant \omega_X$.

2. 在 G_1 上 $\xi = \omega_X$.

3. 在 G_2 上，$\xi = 0$.

4. $\mathrm{supp}\,\mu_1 \subset \overline{G}_1$，$\mathrm{supp}\,\mu_2 \subset \overline{G}_2$.

列维测度（Levi measure） 在 $X \backslash \{0\}$ 上与 $(\mu_t)_{t>0}$ 相关联的一个正测度. 设 $(\mu_t)_{t>0}$ 是 X 上的卷积半群，则在 $X \backslash \{0\}$ 上的正测度网

$$\left(\frac{1}{t} \mu_t |_{X \backslash \{0\}} \right)_{t>0},$$

当 $t \to 0$ 时浑收敛于 $X \backslash \{0\}$ 上的一个正测度 μ. 称 μ 是关于 $(\mu_t)_{t>0}$ 的列维测度.

列维-辛钦公式（Levi-Khinchin formula） 描述群 X 与其对偶群关系的一个重要论断. X 的对偶群 Γ 上的一个复值函数 ψ 是一个具有对称列维测度的连续负定函数的充分必要条件是

$$\psi(\gamma) = C + \mathrm{i}l(\gamma) + g(\gamma) + \int_{X \backslash \{0\}} (1 - \mathrm{Re}\langle x, \gamma \rangle) \mathrm{d}\mu(x) \quad (\gamma \in \Gamma),$$

其中常数 $C \geqslant 0$，l 是 Γ 的连续实值同态，g 是 Γ 上非负连续二次型，μ 是 $X \backslash \{0\}$ 上的正对称测度且满足

$$\int_{X \backslash \{0\}} (1 - \mathrm{Re}\langle x, \gamma \rangle) \mathrm{d}\mu(x) < +\infty \quad (\gamma \in \Gamma).$$

并且，C, l, g, μ 由 ψ 惟一决定，即 $C = \psi(0)$，$l = \mathrm{Im}\,\psi$，μ 是关于 ψ 的列维测度，

$$g(\gamma) = \lim_{n \to \infty} \frac{\psi(n\gamma)}{n^2}.$$

上述方程称为列维-辛钦公式.

亨特核（Hunt kernel） 一种比位势核更一般的核. 一个正测度

$$\chi = \int_0^{+\infty} \mu_t \mathrm{d}t$$

若满足下面条件则称为亨特核：

1. $\mu_0 = \varepsilon_0$.

2. $\forall t, s > 0$，$\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$.

3. $\mu_t \dot{\to} \mu_s \ (t \to s)$.

亨特核也满足扫除原理以及推广的电容器原理等位势论原理.

公理化位势论

公理化位势论（axiomatic potential theory） 在抽象空间里通过设置公理的方法建立起来的位势理论. 公理化体系大致可分成三类. 第一类是调和空间论，第二类是狄氏型（又称狄利克雷形式），第三类是非线性公理体系. 相对第三类而言，第一、二类都属于线性公理体系. 由于位势论的大部分结果都可由其三个基本原理（即狄利克雷问题、极小值原理和收敛性质）导出，且为了适应偏微分方程和随机过程的需要，公理化位势论迅速地发展起来，它提供了统一处理问题的方法. 从 20 世纪 50 年代起，陶茨（Tautz, G.）、杜布（Doob, J. L.）和布雷洛（Brélot, M. E.）等人做了开创性的工作. 但由于他们处理问题的各自需要，其公理系统也因此互有差异. 20 世纪 70 年代初期，康斯坦丁斯库（Constantinescu, C.）和柯尼（Cornea, A.）在此基础上建立了一般的调和公理系统.

通常在一个局部紧的豪斯多夫空间上，给出一个函数簇，规定其满足若干公理（即所谓的调和公理），也就是规定了狄利克雷问题的可解性、极小值原理成立的可能性以及具有某种的收敛性质，这构成了调和空间. 调和函数、上（下）调和函数和位势的概念也自然而然地建立了. 应用经典位势论的典型方法，经典位势论中的主要概念，如扫除、细拓扑、容量、极集、瘦集、格林函数、能量、狄利克雷积分和一些特殊边界等，以及与它们相关的问题，都可以推广到调和空间上来并加以研究.

比较典型的调和空间有布雷洛空间和鲍尔空间. 前者是以经典位势论的研究对象拉普拉斯方程为模型的，因此，布雷洛空间上的位势论与经典理论最为接近，成果也最多. 二阶椭圆型偏微分方程均满足布雷洛公理系统，但热传导方程则不然，为此鲍尔（Bauer, H.）等人建立了鲍尔空间. 拉普拉斯方程不但为公理化位势论的形成提供了原始模型，而且指导着该领域里的大部分研究工作.

20 世纪 80 年代形成的扫除空间论和 H 锥理论是调和空间论的推广和发展.

第二类公理体系不同于第一类，它是从经典的狄利克雷原理和相互能量的定义出发建立起来的. 50 年代末由戴尼（Deny, J.）和博灵（Beurling, A.）提出了狄利克雷空间论，现已发展为狄氏型，主要研究定义在希尔伯特空间上的一个双线性泛函，在满足什么条件时可与马尔可夫过程建立对应关系. 70 年代，富山（Fukushima, M.）在正则的狄氏型上构造出强马尔可夫过程被认为是一个重大突破，20 世

纪90年代初，马志明等成功地解决了拟正则狄氏型的问题.该理论可应用于非相对量子力学、马尔可夫场、伪微分方程、反射扩散过程、无穷维随机分析、鞅论等领域的研究.

20世纪80年代以来，亚当斯(Adams,D.R.)、黑德波格(Hedberg,L.I.)、勒达拉(Lehtola,P.)、马梯尔(Martio,O.)、林德维斯特(Lindqvist,P.)等人对非线性及拟线性位势论研究作出巨大成绩并初步建立了非线性公理体系，其中勒达拉建立的非线性系统是布雷洛调和空间的直接对应.

函数簇(sheaf of functions) 亦称函数层，一类映射.对于拓扑空间$(X,\mathscr{T})$，定义在$\mathscr{T}$上且满足下面三个条件的映射$\mathscr{F}$称为X上的一个函数簇：

1. $\forall U\in\mathscr{T}$，$\mathscr{F}(U)$是U上的一个函数簇.
2. $\forall U,V\in\mathscr{T}$且$U\subset V$，若$f\in\mathscr{F}(V)$，则
$$f|_U\in\mathscr{F}(U).$$
3. 设$\{U_l\mid l\in I\}\subset\mathscr{T}$，$f$是定义在其并集$W$上的函数，若$\forall l\in I$，$f|_{U_l}\in\mathscr{F}(U_l)$，则$f\in\mathscr{F}(W)$.

函数层(sheaf of functions) 即“函数簇”.

超调和簇(hyperharmonic sheaf) 一类函数簇.设X是局部紧的豪斯多夫空间，$\mathscr{U}$是X上的一个函数簇，若对X的任何开集U，$\mathscr{U}(U)$是由U上的一些取值于$(-\infty,+\infty]$的下半连续函数组成的凸锥，则称$\mathscr{U}$是X上的一个超调和簇.

调和簇(harmonic sheaf) 一类函数簇.设X是局部紧的豪斯多夫空间，$\mathscr{H}$是X上的一个函数簇，若对X的任何开集U，$\mathscr{H}(U)$是$C(U)$的线性子空间，则称$\mathscr{H}$是X上的一个调和簇.若对每一$x\in X$，都存在开集U使$x\in U$及$h\in\mathscr{H}(U)$使$h(x)\neq 0$，则$\mathscr{H}$称为非退化的调和簇.

设$\mathscr{U}$是X上的超调和簇，对任何开集U，令
$$\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)=\mathscr{U}(U)\cap(-\mathscr{U}(U)),$$
则$\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$是$X$上的调和簇，称$\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$为与$\mathscr{U}$相关的调和簇.

与超调和簇相关的调和簇(harmonic sheaf associated with a hyperharmonic sheaf) 见“调和簇”.

非退化的调和簇(non-degenerate harmonic sheaf) 见“调和簇”.

MP集(MP-set) 使某种形式的极小值原理成立的开集.设X是局部紧的豪斯多夫空间，$\mathscr{U}$是X上的超调和簇，U是开集.若对$f\in\mathscr{U}(U)$，存在紧集K使得在$U\backslash K$上$f\geqslant 0$，并且$\forall\xi\in\partial U$，当$x\to\xi$时$\liminf f(x)\geqslant 0$，则在U上$f\geqslant 0$.那么称U为MP集.

可解集(resolutive set) 使其上$\mathscr{U}$-广义狄利克雷问题可解的MP集.设U是MP集，φ是从∂U到$[-\infty,+\infty]$的函数，把$\mathscr{U}(U)$中满足下面条件的u称为$\mathscr{U}$-上函数：u有下界，存在紧集K，使在$U\backslash K$上$u\geqslant 0$且对任何$\xi\in\partial U$，当$x\to\xi$时有$\lim\inf u(x)\geqslant\varphi(\xi)$.上函数全体记为$\overline{\mathscr{U}}_\varphi$.令$\underline{\mathscr{U}}_\varphi=-\overline{\mathscr{U}}_{-\varphi}$，其中元素称为$\mathscr{U}$下函数.又记$\overline{H}_\varphi=\inf\overline{\mathscr{U}}_\varphi$，$\underline{H}_\varphi=\sup\underline{\mathscr{U}}_\varphi$.如$\overline{H}_\varphi=\underline{H}_\varphi$且属于$\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)$($\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$是与$\mathscr{U}$相关的调和簇，以下同此规定)，那么称$\varphi$(在$U$上相对于$\mathscr{U}$)可解，这时记$H_\varphi=\overline{H}_\varphi=\underline{H}_\varphi$，并称之为$\mathscr{U}$-广义狄利克雷问题的解.如果任何$\varphi\in C_c(\partial U)$($\partial U$上具有紧支集的连续的实函数全体)都是可解的，则$U$称为$\mathscr{U}$可解集，简称可解集.

$\mathscr{U}$可解集($\mathscr{U}$-resolutive set) 见“可解集”.

$\mathscr{U}$广义狄利克雷问题($\mathscr{U}$-generalized Dirichlet problem) 一般位势论中狄利克雷问题的对应物.见“可解集”.

$\mathscr{U}$广义狄利克雷问题的解(solution for $\mathscr{U}$-generalized Dirichlet problem) 见“可解集”.

$\mathscr{H}$扫除($\mathscr{H}$-sweeping) 与X上的调和簇$\mathscr{H}$相关联的一个测度族.设V是局部紧的豪斯多夫空间X的一个开子集，∂V上的测度族$\omega=(\omega_x)_{x\in V}$称为$V$上的一个扫除.若扫除$\omega$满足下述三个条件，则称扫除$\omega$是一个$\mathscr{H}$扫除：

1. V是相对紧的.
2. 对于任何$f\in C(\partial V)$，ωf是V上的一个$\mathscr{H}$函数(即$\omega f\in\mathscr{H}(V)$).此处
$$\omega f(x)=\int^* f\mathrm{d}\omega_x\ (x\in V),$$
其中$\int^*$表示上积分.
3. 对于$\overline{V}$的任意开邻域上的任何一个$\mathscr{H}$函数h，有$\omega h|_V=h|_V$.

$\mathscr{U}$调和测度($\mathscr{U}$-harmonic measure) 与超调和簇$\mathscr{U}$相关联、由可解性确定的一个正线性泛函.设U是一个可解集，则每一$\varphi\in C_c(\partial U)$都对应着一个$H_\varphi\in\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)$.对每一$x\in U$，映射$\varphi\to H_\varphi(x)$是$C_c(\partial U)$上的一个正线性泛函，因此，$\partial U$上存在惟一的正测度$\mu_x$，使对$\forall\varphi\in C_c(\partial U)$，都有
$$H_\varphi(x)=\int\varphi\mathrm{d}\mu_x=\mu_x\varphi,$$
μ_x称为U的在点x(关于$\mathscr{U}$)的调和测度.于是，对∂U上的任一实函数f，可定义U上的函数μf：
$$(\mu f)(x)=\int^* f\mathrm{d}\mu_x,$$
其中$\int^*$表示上积分.

正则集(regular set) 经典的狄利克雷域的推广(参见“经典狄利克雷问题”).设$\mathscr{H}$是局部紧豪斯多夫空间X上的调和簇(以下同此假设).X的一个相对紧且边界不空的开子集V称为(相对于$\mathscr{H}$

的)正则集或 $\mathscr{H}$ 正则集,如果 ∂V 上的每一连续实函数 f 都可惟一地延拓为 $\overline{V}$ 上的连续函数 $\bar{f}$,使 $\bar{f}|_V\in\mathscr{H}(V)$ 且当 $f\geqslant0$ 时 $\bar{f}\geqslant0$. 把 $\mathscr{H}(V)$ 当做 V 上的调和函数全体,那么正则集也就是在新条件下使经典的狄利克雷问题总是可解的开集. 设 V 是正则集,$f\in C_c(\partial V)=(C(\partial V))$,对每一 $x\in V$,映射 $f\to\bar{f}(x)$ 是 $C_c(\partial V)$ 上的正线性泛函,因此,∂V 上存在惟一的正测度 ω_x,使

$$\bar{f}(x)=\int f\mathrm{d}\omega_x=\omega_x f\quad(\forall f\in C(\partial V)).$$

ω_x 也称为 V 的在点 x(关于 $\mathscr{H}$)的调和测度或 $\mathscr{H}$ 调和测度. 设 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 是由 $\mathscr{H}$ 产生的超调和簇,则 $\mathscr{H}$ 正好是与 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 相关的调和簇 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}_{\mathscr{H}}}$. 如果 V 是相对于 $\mathscr{H}$ 的正则集,则 V 是相对于 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 的可解集,并且在 V 上,$\overline{H}_f=\underline{H}_f=H_f=\bar{f}$,而 ω_x 就是 V 的在点 x 的关于 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 的调和测度.

一个区域如果是正则集,就称为正则区域.

$\mathscr{H}$ 正则集($\mathscr{H}$-regular set) 见“正则集”.

$\mathscr{H}$ 调和测度($\mathscr{H}$-harmonic measure) 见“正则集”.

正则区域(regular domain) 见“正则集”.

局部超调和函数(locally hyperharmonic function) 在每一点的某个邻域上有超调和性的函数. 设 U 是一个开集,u 是 U 上的取值于 $(-\infty,+\infty]$ 的下半连续函数. 如果对每一 $x\in U$,存在 x 的开邻域 $V_x\subset U$,使得对任何满足 $\overline{V}\subset V_x$ 的正则区域 V,在 V 上恒有 $\omega_y u\leqslant u(y)$(ω_y 是 V 的 $\mathscr{U}$ 调和测度,参见“$\mathscr{U}$ 调和测度”),那么 u 称为 U 上的(相对于 $\mathscr{H}$ 的)局部超调和函数. 记 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 为 U 上的局部超调和函数全体,则 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 是 X 上的超调和簇,称为由 $\mathscr{H}$ 产生的超调和簇. 并且,$\mathscr{H}$ 就是与 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 相关的调和簇.

由调和簇产生的超调和簇(hyperharmonic sheaf generated by a harmonic sheaf) 见“局部超调和函数”.

收敛性质(convergence property) 位势论中的一个概念. 所谓收敛性质,是指在一定条件下单调增加的调和函数列的极限函数仍然调和. 鲍尔(Bauer,H.)、杜布(Doob,J. L.)和布雷洛(Brélot,M. E.)分别在他们的公理模型中假设 X 上的调和簇 $\mathscr{H}$ 具有:

1. 鲍尔收敛性质:设 U 是开集,$\{u_n\}\subset\mathscr{H}(U)$ 是单调增加列,若极限函数

$$u=\lim_{n\to\infty}u_n$$

局部有界,则 $u\in\mathscr{H}(U)$.

2. 杜布收敛性质:设 U 是开集,$\{u_n\}\subset\mathscr{H}(U)$ 是单调增加列,若极限函数

$$u=\lim_{n\to\infty}u_n$$

在 U 的一个稠密子集里有限,则 $u\in\mathscr{H}(U)$.

3. 布雷洛收敛性质:设 U 是区域,$\{u_n\}\subset\mathscr{H}(U)$ 是单调增加列,若极限函数

$$u=\lim_{n\to\infty}u_n$$

在 U 中某一点有限,则 $u\in\mathscr{H}(U)$.

显然,具有杜布收敛性质或布雷洛收敛性质的 $\mathscr{H}$ 必具有鲍尔收敛性质,反之不然. 如果 X 是局部连通的,那么具有布雷洛收敛性质者必具有杜布收敛性质,反之不然.

调和公理(harmonic axioms) 用于定义调和空间的基本公设. 设 $\mathscr{U}$ 是局部紧豪斯多夫空间 X 上的超调和簇. 调和公理系统包含四个公理:正值性公理、可解性公理、完备性公理和收敛性公理,详见相应各条目.

正值性公理(axiom of positivity) 调和公理之一. 任意 $x\in X$,存在开集 $U\ni x$ 及 $h\in\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)$,使得 $h(x)>0$,即 $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 是非退化的.

可解性公理(axiom of resolutivity) 调和公理之一. 相对于 $\mathscr{U}$ 的可解集全体构成 X 的一个拓扑基.

完备性公理(axiom of completeness) 调和公理之一. 对任何开集 U,若 u 是 U 上定义的取值于 $(-\infty,+\infty]$ 的下半连续函数,且对任何满足 $\overline{V}\subset U$ 的相对紧的可解集 V,在 V 上恒有 $\mu_y u\leqslant u(y)$(μ_y 是 V 的 $\mathscr{U}$ 调和测度(参见“$\mathscr{U}$ 调和测度”),那么

$$u\in\mathscr{U}(U).$$

收敛性公理(axiom of convergence) 调和公理之一. $\mathscr{H}_{\mathscr{U}}$ 具有鲍尔收敛性质.

调和空间(harmonic space) 一种有序偶. 所谓调和空间,是指由一个局部紧的豪斯多夫空间 X 和 X 上的一个满足调和公理的超调和簇 $\mathscr{U}$ 组成的有序偶 $\langle X,\mathscr{U}\rangle$. 在调和空间的开集 $U(U\subset X)$ 上,$u\in\mathscr{U}(U)$ 称为超调和函数,$u\in-\mathscr{U}(U)$ 称为亚调和函数,$h\in\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)$($\mathscr{H}_{\mathscr{U}}(U)=\mathscr{U}(U)\cap[-\mathscr{U}(U)]$)称为调和函数.

调和空间论(theory of harmonic space) 在调和空间上建立的公理位势论.

调和空间里的超调和函数(hyperharmonic function in harmonic space) 见“调和空间”.

调和空间里的亚调和函数(hypoharmonic function in harmonic space) 见“调和空间”.

调和空间里的调和函数(harmonic function in harmonic space) 见“调和空间”.

调和空间里的上调和函数(superharmonic function in harmonic space) 一类与调和函数直接关联的超调和函数. 设 U 是调和空间 $\langle X,\mathscr{U}\rangle$ 里的

开集，$u\in\mathscr{U}(U)$. 如果在任何满足 $\overline{V}\subset U$ 的相对紧的可解集 V 上，$\mu_y u$（μ_y 是 V 的调和测度）是调和函数，则称 u 是 U 里的上调和函数. 若 $-v$ 是 U 里的上调和函数，则称 v 为 U 里的下调和函数. 这是里斯(Riesz,F.)于 1925 年在经典位势论中引进的相应概念的推广.

调和空间里的下调和函数(subharmonic function in harmonic space)　见"调和空间里的上调和函数".

调和空间里的位势(potential in harmonic space)　格林位势在调和空间的推广. 设 U 是调和空间 $\langle X,\mathscr{U}\rangle$ 里的开集，p 是 U 里的非负上调和函数，若 p 在 U 里的最大调和下属是 0（即 $h\in\mathscr{H}(U)$ 且 $h\leqslant p$ 蕴涵 $h\leqslant 0$），那么 p 称为 U 上的位势.

***S* 调和空间**(S-harmonic space)　以平面上对数位势论为原型的一类调和空间. 一个调和空间 $\langle X,\mathscr{U}\rangle$ 称为 S 调和空间（或 P 调和空间）指的是，对每一点 $x\in X$，存在 X 上的一个非负上调和函数 s（相应地，一个位势 p），使得 $s(x)>0$（相应地，$p(x)>0$）. P 调和空间必为 S 调和空间，但反之未必成立. 例如，$X=\mathrm{R}^n(n\geqslant 2)$，取经典的超调和函数族为 $\mathscr{U}$ 时，$\langle X,\mathscr{U}\rangle$ 是 S 调和空间，当 $n\geqslant 3$ 时且为 P 调和空间，而当 $n=2$ 时，不是 P 调和空间.

***P* 调和空间**(P-harmonic space)　见"S 调和空间".

调和空间里的里斯分解(Riesz decomposition in harmonic space)　一般位势论中里斯分解定理的对应物. 在调和空间 $\langle X,\mathscr{U}\rangle$ 里的开集 U 上，一个上调和函数 u 如有下调和下属，则可惟一地分解为 $u=p+h$，其中 p 是位势，h 是调和函数且为 u 的最大调和下属.

布雷洛空间(Brélot space)　特殊的调和空间. 所谓布雷洛空间，是指由一个无孤立点、局部连通且局部紧的豪斯多夫空间 X 与 X 上的调和簇 $\mathscr{H}$ 组成的序偶 $\langle X,\mathscr{H}\rangle$，其中 $\mathscr{H}$ 满足如下公理：

1. 正则区域全体构成 X 的一个拓扑基.

2. $\mathscr{H}$ 具有布雷洛收敛性质.

设 $\langle X,\mathscr{H}\rangle$ 是布雷洛空间，则 X 上的由 $\mathscr{H}$ 产生的超调和簇 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 满足调和公理，即 $\langle X,\mathscr{U}_{\mathscr{H}}\rangle$ 是调和空间. 因此，布雷洛空间是调和空间. 特别地，布雷洛空间是鲍尔空间，但反之不然. 布雷洛空间的一个典型例子是，在 n 维欧氏空间 R^n 的任一开集 U 上，取 $\mathscr{H}(U)$ 为 U 上的满足拉普拉斯方程

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=0$$

的二次连续可微的函数 f 全体，那么 $\mathscr{H}$ 是 R^n 上的一个调和簇，$\langle\mathrm{R}^n,\mathscr{H}\rangle$ 是布雷洛空间. 事实上，布雷洛空间就是以拉普拉斯方程为原始模型建立起来的，因此布雷洛空间上的位势论与经典位势论最为接近.

鲍尔空间(Bauer space)　一类特殊的调和空间. 所谓鲍尔空间，是指由局部紧豪斯多夫空间 X 与 X 上的调和簇 $\mathscr{H}$ 组成的序偶，其中 $\mathscr{H}$ 满足如下公理：

1. $\mathscr{H}$ 满足正值性公理.

2. X 有强正则基（X 的一个由正则集构成的拓扑基称为强正则基，如果该基的任意两个元素之交仍为正则集）.

3. $\mathscr{H}$ 具有鲍尔收敛性质.

若 $\langle X,\mathscr{H}\rangle$ 是鲍尔空间，则 X 上由 $\mathscr{H}$ 产生的超调和簇 $\mathscr{U}_{\mathscr{H}}$ 满足调和公理，即 $\langle X,\mathscr{U}_{\mathscr{H}}\rangle$ 是调和空间. 因此，鲍尔空间是调和空间. 此外，布雷洛空间是鲍尔空间，但反之未必成立. 由热传导方程可构造一个典型的例子. 在 $n+1$ 维欧氏空间 R^{n+1} 的开集 U 上，取 $\mathscr{H}(U)$ 为 U 上满足热传导方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

的二次连续可微函数 f 全体，那么 $\mathscr{H}$ 是 R^{n+1} 上的调和簇，$\langle\mathrm{R}^{n+1},\mathscr{H}\rangle$ 是鲍尔空间，但不是布雷洛空间.

狄利克雷空间论(theory of Dirichlet space)　受 BLD 函数组成的希尔伯特空间论的启发，在狄利克雷空间上建立的一种公理位势论. 设 X 是局部紧的豪斯多夫空间，ξ 为 X 上一个处处稠密的正拉东测度（对任意非空开集 G，$\xi(G)>0$）. 若 X 上局部 ξ 可积的复值函数 u 组成的希尔伯特空间 $D=D(X,\xi)$ 满足下述三条公理，则称 $D(X,\xi)$ 是狄利克雷空间：

1. 对任意紧集 K，存在实数 $A(K)>0$，使得

$$\int_K|u|\mathrm{d}\xi\leqslant A(K)\|u\|.$$

2. $C_c(X)\cap D(X,\xi)$ 在 $C_c(X)$ 及 $D(X,\xi)$ 中稠密.

3. 对复平面上任一正常的压缩映射 T 和任一 $u\in D(X,\xi)$，有 $T_u\in D$ 且 $\|T_u\|\leqslant\|u\|$.

若对于 $u\in D(X,\xi)$，存在拉东测度 μ，使得

$$(u,\varphi)=\int_X\bar{\varphi}\mathrm{d}\mu\quad(\varphi\in C_C(X)\cap D(X,\xi)),$$

则称 u 为 μ 的位势. 在狄利克雷空间论中，也有相应的扫除原理、平衡原理和电容器原理等.

狄利克雷空间(Dirichlet space)　见"狄利克雷空间论".

狄氏型理论(theory of Dirichlet form)　公理化位势论的一种形式，狄利克雷空间论的进一步发展. 见"公理化位势论"和"概率位势论". 狭义的狄氏型是指定义在如下希尔伯特空间 $L^2(Y,\mu)$ 的一个稠

密子空间 $D(E)$上的、满足一定条件的双线性泛函 E,即$(Y,\mathscr{T})$是一个可测空间,μ 是$(Y,\mathscr{T})$上 σ 有限测度,Y 上定义的、关于 μ 平方可积的数值函数(等价类)全体关于

$$\int fg\mathrm{d}\mu$$

为内积构成的希尔伯特空间记为 $L^2(Y,\mu)$.

狄氏型(Dirichlet form) 亦称狄利克雷形式,见“狄氏型理论”.

狄利克雷形式(Dirichlet form) 即“狄氏型”.

扫除空间(balayage space) 调和空间的一个推广形式.在具有可数基的拓扑空间 X 上,一族非负下半连续函数构成的凸锥 $\mathscr{W}$ 满足下面四条公理时,称$(X,\mathscr{W})$为一个扫除空间:

1. $\mathscr{W}$ 中任何单调增加列的极限函数仍属于 $\mathscr{W}$.

2. 对 $\mathscr{W}$ 的任何子集 $\mathscr{V}$,其下确界函数 $g=\inf\mathscr{V}$关于 $\mathscr{W}$ 细拓扑的下半连续正则化仍属于 $\mathscr{W}$(参见“细拓扑”和“扫除函数”),这个性质称为下定向公理.

3. 若 $u,f,g\in\mathscr{W}$ 使得 $u\leqslant f+g$,则存在 $v,w\in\mathscr{W}$ 使得 $u=v+w,v\leqslant f$ 且 $w\leqslant g$,这个性质称为自然分解公理.

4. 存在一个由 X 上的连续函数构成的、满足一定条件的函数锥 $\mathscr{P}$,使得 $\mathscr{W}$ 中的每个函数都可表示为 $\mathscr{P}$ 中某个单调增加列的极限.$\mathscr{P}$ 中的元素称为连续位势.

下定向公理(lowerly directed axiom) 见“扫除空间”.

自然分解公理(natural decomposition axiom) 见“扫除空间”.

扫除空间中的函数锥(function cone in balayage space) 连续的牛顿位势全体构成的凸锥的类似物.

扫除空间的连续位势(continuous potential in balayage space) 连续的牛顿位势的类似物.见“扫除空间”.

扫除空间论(theory of balayage space) 建立在扫除空间上的公理位势论,是调和空间论的一个推广形式.在空间具有可数基的情况下,该理论概括了不含于调和空间论的里斯位势论和离散位势论.该理论由波利特诺(Bliedtner,J.)与汉森(Hansen,W.)建立,其特色是采用扫除理论统一处理了分析与概率位势论.

离散位势论(discrete potential theory) 位势论的一个组成部分.所谓离散位势论,是指在一个赋予离散拓扑的可数集上建立扫除空间时,对应于伪泊松半群(参见《数学辞海》第四卷的有关条目).

***H* 锥**(*H*-cones) 抽象调和锥(参见“极小调和函数”)的推广.在一个由抽象元素构成的集 S 中引入加法、数乘及一个次序关系,使其满足下列条件,则称 S 是一个 H 锥:

1. S 关于加法成为一个可交换半群并有一个零元.

2. 加法与数乘满足分配律.

3. S 中的元都大于或等于 0,关于与非负数的数乘及加法保持次序,还满足自然分解公理及关于求上、下确界的若干运算规律.

***H* 锥理论**(theory of *H*-cones) 研究 H 锥的位势论性质的理论.调和空间位势论的一种发展形式;由波波克(Boboc,N.),布什(Buchar,Gh)和柯尼(Cornea,A.)等人从“次序”与“凸性”出发建立的一种线性公理系统.

非线性位势论(non-linear potential theory) 关联于某个从 R^N 到 R^N 的非线性微分算子的位势理论.通常考虑与下面拟线性微分方程 $\nabla\cdot(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=0$ 相关联的理论,故亦称拟线性位势论.这是 20 世纪 80 年代才发展起来的理论,与拟共形映射有密切联系.相应的非线性公理体系也已初步建立(参见“公理化位势论”和“非线性调和空间”).

拟线性位势论(quasi-linear potential theory) 见“非线性位势论”及“非线性调和空间”.

非线性公理位势论(non-linear axiomatic potential theory) 见“非线性调和空间”.

非线性调和空间(non-linear harmonic space) 非线性公理位势论的一种形式,布雷洛调和空间的类似物.设 X 是局部紧的、局部连通的豪斯多夫空间,$\mathscr{H}$ 是 X 上的由连续函数组成的一个簇,V 是 X 的一个相对紧开集,称 V 是正则集,若满足下面两条件:

1. 狄利克雷原则:对每个 $f\in C(\partial V)$,存在惟一的 $h\in\mathscr{H}(V)\cap C(\overline{V})$,使得 $h|_{\partial V}=h$,记 h 为 H_f.

2. 比较原则:对每个 $f,g\in C(\partial V)$,条件 $f\leqslant g$ 蕴涵 $H_f\leqslant H_g$ 在 V 上成立.

若$(X,\mathscr{H})$满足下面三公理,则称之为一个非线性调和空间:

1. 若 $h\in\mathscr{H}(V)$且 $\alpha\in R$,则 $h+\alpha,\alpha h\in\mathscr{H}(V)$.

2. 若$\{u_i\}$是 $\mathscr{H}(V)$中的单调增加列,V 是 X 的一个区域,则当

$$u=\lim_{i\to\infty}u_i$$

在某一点 $x_0\in V$ 取有限值时,$u\in\mathscr{H}(V)$.

3. 对 X 的每一个开集 U 及每一个紧集 $K\subset U$,存在一个正则集 V,使得 $K\subset V\subset U$.

若要研究更深入的性质,有的非线性公理系统

还包含如下的：

4. $\mathscr{H}(V)$能分辨 V 中的点.

值得注意的是，布雷洛空间并不是本类非线性调和空间的特殊情形.

位势论与概率论

概率位势论(probability potential theory) 研究位势论与概率论的内在联系的新数学分支. 20 世纪四五十年代，杜布(Doob, J. L.)、角谷静夫等人发现了经典位势论与布朗运动的深刻联系，1954 年，杜布的论文“半鞅与次调和函数”被公认为是开创了概率与位势联系的研究的新篇章. 20 世纪 50 年代中期以后，亨特(Hunt, G. A.)等人进一步把它推广到相当一般的马尔可夫过程，给出更具普遍意义的“位势”的定义. 从此，位势论的许多概念、性质获得了明确的概率意义，而分析工具的引入大大促进了概率论的深入发展且又反过来影响位势论. 上鞅与上调和函数的对应，它们的单调列的极限及里斯分解等性质的极端相似性揭示了鞅论与位势论的内在联系；马丁边界被翻译成概率的语言并用于研究马氏过程；由于调和空间引入了次马氏半群和马氏过程，概率方法进入了公理化位势论；C^{∞} 黎曼流形上由于麦金(Mckean, H. P.)等人用随机微分方程建立扩散过程而提供了用概率方法研究流形上位势论的一种方法；由博灵(Beurling, A.)和戴尼(Deny, J.)开创，富山、马志明等人发展的狄氏型是研究概率与位势结合的一种重要形式；波利特诺(Bliedtner, J.)和汉森(Hansen, W.)建立的扫除空间论，则用扫除作为工具将分析与概率位势论统一起来. 总之，近几十年来，位势与概率的联系作为一个独特的专题已经并且正在得到深入研究.

布朗运动的位势论(potential theory for Brownian motion) 研究经典位势论的概率对应的基本模型. 从历史的角度看，布朗运动与经典位势的联系是概率与位势之间关系的最初发现. 设 $\mathscr{B}^n$ 为 n 维欧氏空间 $\mathrm{R}^n(n\geqslant 1)$ 的波莱尔域，$\{X(t)\}(t\in[0,+\infty))$ 为 R^n 上的布朗运动，$p(t,x,y)$ 为 $X(t)$ 的转移密度. 对 $B\in\mathscr{B}^n$，当存在 $t>0$ 使 $X(t)\in B$ 时，令 τ_B 为这样的 t 的下确界，否则令 $\tau_B=+\infty$；记 $T_B=\tau_{B^c}$，$B^c=\mathrm{R}^n\setminus B$；又当 $\tau_B<+\infty$时，记 $L_B=\sup\{t>0 \mid X(t)\in B\}$；当 $\tau_B=+\infty$时，令 $L_B=0$. 分别称 τ_B，T_B 和 L_B 为 $X(t)$对 B 的首中时间、首出时间和退出时间；而 $h_B(x,\cdot)=P_x(\tau_B<+\infty, X(\tau_B)\in\cdot)$ 和 $q_B^t(x,\cdot)=P_x(\tau_B>t, X(t)\in\cdot)$分别称为从 x 出发的布朗运动对 B 的首中分布和禁止分布. 若对每个 $x\in\mathrm{R}^n$，都有 $P_x(\tau_B<+\infty)=1$(或 0)，则称 B 为常返集(或相应地，非常返集). 那么经典位势论中的基本概念和性质可作如下描述：

1. x 为 B 的正则点(或非正则点)当且仅当 $P_x(\tau_B=0)=1$(相应地，$=0$)，其直观意义是从 x 出发的布朗粒子能(相应地，不能)立刻击中 B. B 是极集的充分必要条件是 $P_x(\tau_B<+\infty)\equiv 0$，即从任何 x 出发的布朗粒子击中 B 的概率为零.

2. 对 $\mathrm{R}^n(n\geqslant 2)$的非空开集 D，从 $x\in D$ 出发的布朗运动对 D^c 的击中分布 $H_D(x,\cdot)=h_{D^c}(x,\cdot)$恰给出 ∂D 上关于 x 的调和测度. 这时关于在 ∂D 上定义的有界且本性连续(即除一个调和测度零集外连续)的函数 φ，广义狄利克雷问题的解

$$H_{\varphi}(x)=\int\varphi(y)H_D(x,\mathrm{d}y)=E_x(\varphi(X(T_D)))\quad(T_D<+\infty),$$

它在 φ 于该处连续的正则边界点 y(即 $y\in\partial D$ 且为 D^c 的正则点)处以 $\varphi(y)$为边界值. 另外，当 $n\geqslant 3$ 且 D 无界时，若事先不限制解在∞处的正则性，则解不惟一，但每个有界解必可表示为

$$E_x[\varphi(X(T_D)),T_D<+\infty]+CP_X(T_D=+\infty)\quad(C\text{ 为常数}).$$

3. R^n 的非空开集 D，若在 D 上存在格林函数，则称 D 为格林集，当 $n\geqslant 3$ 时，任何开集为格林集；$n=1,2$ 时，D 为格林集当且仅当 D^c 为非极集. D 的格林函数可表示为

$$G(x,y)=\int_0^{+\infty}\{p(t,x,y)-E_x[p(t-T_D,X(T_D),y);T_D<t]\}\mathrm{d}t,$$

而

$$U_G^{\mu}(x)=\int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\quad(\mu\geqslant 0)$$

就是 D 上格林位势.

4. 当 $n\geqslant 3$ 时，

$$\int_0^{+\infty}C_n p(t,x,y)\mathrm{d}t$$

即为牛顿核$|x-y|^{2-n}$，其中常数

$$C_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)};$$

当 $n=2$ 时，

$$\pi\int_0^{+\infty}[p(t,x,y)-p(t,x_0,y_0)]\mathrm{d}t,$$

即为对数核$-\ln|x-y|$，其中 x_0,y_0 为满足$|x_0-y_0|=1$ 的固定点. 从而得到用转移密度表示的牛顿位势与对数位势.

5. 设 f 是从非空开集 D 到$[0,+\infty]$的函数，在 D 的任一支集上不恒为$+\infty$，若对 $t>0$ 及$x\in D$，恒有

$$f(x) \geqslant \int f(y) q_{D^c}^t(x, \mathrm{d}y),$$

且当 $t \downarrow 0$ 时积分式收敛于 $f(x)$,则称 f 是 D 上的超过函数,那么 $f \geqslant 0$ 在 D 内为上调和当且仅当 f 为超过函数.

6. 与上述相似,可通过转移密度、击中分布、禁止分布等布朗运动的概念来描述里斯分解、平衡问题、能量、容量、扫除、瘦等位势论的基本概念及其性质,使得经典位势的概念都被赋予相应的概率意义.例如,狄喇克测度 ε_x 到 $B \in \mathscr{B}^n (n \geqslant 3)$ 的扫除测度(又称格林扫除)即为 B 的击中分布 $h_B(x, \cdot)$;对格林集 D 内的相对紧的波莱尔集 B,任意正测度 μ 到 B 的扫除测度 μ' 存在,μ' 集中在 B 的基(即 B 的正则点全体)且 $U_G^{\mu'}(x) \equiv P_x(\tau_B < T_D)$;上式也是一个波莱尔集 B 的扫除测度存在的充分条件.

马氏过程位势论(potential theory for Markov processes) 概率位势论的一个重要模式,布朗运动相应研究的推广.设 $\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in T = [0, +\infty)\}$ 为以 $(E_\partial, \mathscr{B}_\partial)$ 为状态空间的亨特过程,其中 E_∂ 为局部紧可分度量空间 E 的单点紧致化,$\mathscr{B}_\partial$ 为 E 的波莱尔域 $\mathscr{B}$ 与单点 $\{\partial\}$ 生成的 σ 域.记 $\{P_t\}$ 为相应的马尔可夫转移半群.设 $f \geqslant 0$ 为 E 上定义的 $\mathscr{B}$ 可测函数,对 $\alpha \geqslant 0$,定义

$$U^\alpha f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} P_t f \mathrm{d}t = E_x \left\{ \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} f(X_t) \mathrm{d}t \right\}$$

为 α 阶位势(当 $\alpha = 0$ 时常记为 Uf,称为位势),称 U^α 为 α 阶位势核.若对 $t \in T$ 恒有 $f \geqslant \mathrm{e}^{(-\alpha t)} P_t f$ 且当 $t \downarrow 0$ 时,$\lim \mathrm{e}^{-\alpha t} P_t f = f$,则称 f 是 α 超过函数,$\alpha = 0$ 时称为超过函数.超过函数类是位势论中非负上调和函数类的深刻推广.对于超过函数 f 和任意 $\beta > 0$,存在非负有界的 $\mathscr{B}$ 可测函数列 $\{g_n\}$,使得 $U^\beta g_n \uparrow f$;若设马氏半群 $\{P_t\}$ 为非常返时,这一结论对 $\beta = 0$ 也成立.据此,许多有关超过函数的问题都可化成关于 β 阶位势的相应问题来处理.

类似于布朗运动,一般马氏过程也可定义首中时间、退出时间、首中分布、正则点、极集等概念并进而讨论扫除、平衡问题等位势论的概念与性质.也有从概率的立场出发研究狄利克雷问题与马丁积分表示的工作.特别关于马氏链的位势论,不论过程常返与否,都有较深刻的研究.

一般地,从鞅论的观点出发可以定义位势,并建立起"鞅"与"调和"这两个不同领域概念的密切联系,得到本质上一致的结论.以连续时间 $T = [0, +\infty)$ 为例.记 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间,$(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ 为一族上升的 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域,则关于 $(\mathscr{F}_t)$ 的(上、下)鞅与(上、下)调和函数有许多类似的性质.如上鞅全体构成凸锥且关于下包络运算 $\inf\{X_t, Y_t\}$ 封闭;对上鞅 $\{X_t\}$,$m(t) = EX_t$ 为 t 的递减函数且 $\{X_t\}$ 成为鞅的充分必要条件是 $m(t) =$ 常数;若 $\{X_t\}$ 为下鞅,$f(r)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增加的凸函数且存在 $t_0 \in T$ 使 $E(|f(X_{t_0})|) < +\infty$ 时,$\{f(X_t) | t \in [0, t_0] \cap T\}$ 也是下鞅.当 $\{X_t\}$ 为鞅时,不必要求 $f(r)$ 单调,而有同样的结论.特别地,对于鞅 $\{X_t\}$,$X_t^+ = \sup\{X_t, 0\}$ 也是下鞅;对鞅 $\{X_t\}$,$\{|X_t|\}$ 为下鞅.又,一个几乎所有轨道为右连续的上鞅 $\{X_t\}$ 当满足

$$\lim_{t \to \infty} EX_t = 0$$

时称为位势,那么当 $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ 右连续时,对几乎所有轨道为右连续的上鞅 $\{X_t\}$,

$$\lim_{t \to \infty} EX_t > -\infty$$

的充分必要条件是存在鞅 $\{Y_t\}$ 和位势 $\{Z_t\}$,使得 $X_t = Y_t + Z_t$.与位势论相似,这种表示称为里斯分解,这种分解是惟一的.另外,若 $\{B(t) | t \in T\}$ 为 R^n 上从 x 出发的布朗运动,u 为 R^n 上下有界的上调和函数,当 $u(x) < +\infty$ 时,过程 $\{u[B(t)], t \in T\}$ 为上鞅.

如果在具有可数基的调和空间 X 上存在严格正的位势且 $f \equiv 1$ 为上调和函数,则可以构造一个次马氏半群使其相应的超过函数等同于非负上调和函数,且由这个半群可构造一个具有连续轨道的强马氏过程.据此,调和空间的位势论和与亨特过程相关联的位势论二者便通过主要概念之间的对应而联系在一起.康斯坦丁斯库(Constantinescu, C.)、柯尼(Cornea, A.)、汉森(Hansen, W.)、鲍尔(Bauer, H.)、泰勒(Taylor, J. C.)和迈耶(Meyer, P. A.)等人对调和空间的马氏过程理论做了许多工作,他们中有人还把许多结果推广到扫除空间和 H 锥理论上去.

撰 稿 叶仰明 吴春章 吴炯圻 邱曙熙 张 询 林 勇 高琪仁 龚显宗

审 阅 卫念祖 高琪仁

凸 分 析

凸分析(Convex analysis) 研究凸集和凸函数的数学分支. 其主要目的在于利用集合和函数的凸性来处理各种分析问题,特别是极值问题,包括有限维的数学规划问题和无限维的变分学问题. 其主要工具是凸集分离定理、次微分理论和对偶理论.

凸集的概念可以追溯到公元前3世纪的古希腊时代. 当时,阿基米德(Archimedes)已定义凸弧为所有连结其上的点的弦都在同一边的平面曲线. 但是系统研究凸集理论是以19世纪末、20世纪初,德国数学家闵科夫斯基(Minkowski,H.)的工作为标志的. 闵科夫斯基对凸集的研究兴趣起源于他对"数的几何"问题(例如,一个平面集中至少有多少个坐标为整数的点)的研究. 因此,他提出了用来刻画一点到一个凸集距离——而今天称为闵科夫斯基函数的概念,它尤其包括范数、半范数等凸函数作为特例. 在他去世后的1911年发表的著作中,他对 $\mathbb{R}^3$ 中的闭凸集证明了凸集支撑定理. 以后,卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)等又进一步对凸集理论深入研究,尤其是在1911年提出 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集可用 $n+1$ 个点来表示的卡拉西奥多里定理.

凸函数概念的系统应用可从柯西(Cauchy,A.-L.)算起. 今天,人们熟知的柯西不等式、几何平均不大于算术平均等,都起源于柯西利用函数的凸性来证明不等式的研究. 系统的凸性不等式研究是延森(Jensen,J. L. W. V.)的工作,他在1906年发表了这方面的专著. 用作凸函数定义的不等式,通常称为延森不等式.

对早期的凸性理论做出重要贡献的还有黑利(Helly,E.). 他在1917年证明而在1923年发表的黑利定理指出,如果 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸集族的任何 $n+1$ 个集有非空交,那么整个族也有非空交. 他甚至还在1921年,比哈恩(Hahn,H.)和巴拿赫(Banach,S.)更早地证明了哈恩-巴拿赫定理;这一涉及凸函数的线性泛函的延拓定理是与凸集支撑定理或凸集分离定理等价的.

20世纪50年代,既由于数学规划、对策论、数理经济学、最优控制等应用数学学科发展的需要,也由于泛函分析、变分学、位势论等基础数学学科发展的需要,凸性的研究变得越来越重要. 1951年,芬切尔(Fenchel,W.)在美国普林斯顿大学印发了讲义《凸锥、凸集和凸函数》,对凸集、凸锥和凸函数理论做了系统总结和发展. 特别是把变分学中经典的勒让德变换的概念推广成为今天称为勒让德-芬切尔变换或共轭函数的概念,提出上图、指示函数等运用方便的新概念. 这些目前在凸分析中都成了基本概念. 以后,克利(Klee,V. L.)又在一系列论文中对凸集理论做了深入的剖析. 绍凯(Choquet,G.)则发展了1940年提出的克莱因-米尔曼定理(紧凸集是其端点集的闭凸包),而建立了今天的所谓紧凸集和凸锥的绍凯积分表示理论. 1911年提出的布劳威尔不动点定理,也在这一时期被发展成为紧凸集中的连续映射的各种不动点定理. 其中的代表是角谷静夫1941年提出的紧凸集中的闭集值映射的不动点定理和樊𰋀(Ky Fan)从1952年起提出的一系列极小极大不等式.

凸分析真正被认为是相对独立的数学分支,则是由于莫罗(Moreau,J. J.)和洛卡费勒(Rockafellar,R. T.)的工作. 1967年莫罗的讲义《凸泛函》和1969年洛卡费勒的专著《凸分析》被认为是凸分析的奠基著作. 尤其是其中关于凸函数的次微分理论和对偶理论是使凸分析真正成为分析学科的一部分的标志. 莫罗的讲义是在一般的局部凸拓扑线性空间的框架中叙述的,而洛卡费勒则更强调数学规划理论中的应用,把凸分析局限在有限维空间中. 以后又陆续出版了艾克兰德(Ekeland,I.)和特曼(Teman,R.)的《凸分析和变分问题》(1974)等旨在针对变分学、最优控制等应用的巴拿赫空间上的凸分析著作.

20世纪70年代以后,凸分析又进一步发展为非凸分析、非光滑分析、集值分析等. 许多凸分析的基本定理被推广到非凸集和非凸函数情形. 其中最引人注目的是洛卡费勒的学生克拉克(Clarke,F. H.)于1975年提出的关于局部李普希茨函数的广义梯度理论. 1994年起,国际上出版了第一本《凸分析杂志》. 按照该杂志的发刊词所说,广义的凸分析理论,应包括凸分析的各种推广,尤其是包括非光滑分析、集值分析等.

非凸分析(nonconvex analysis) 试图把凸分析的基本理论和方法推广到非凸集和非凸函数情形的数学分支. 这个名称目前已不常用,而代之为非光滑分析、集值分析等(参见"凸分析").

非光滑分析(nonsmooth analysis) 凸分析的发展. 凸分析的次微分理论使得人们能够对非光滑凸函数推广微分法来处理极值问题. 非光滑分析就致力于更一般的广义微分法,来处理非光滑函数的极值问题. 这方面目前最成功的是克拉克(Clarke,

F. H.)对局部李普希茨函数提出的广义梯度理论.他在 1983 年出版的《最优化和非光滑分析》一书已成为这方面的经典著作(参见“凸分析”).

集值分析(set-valued analysis) 以集值映射为研究对象的数学分析.点对应集合的集值映射是很早就出现的数学概念.但长期来虽有少量研究,却常被人认为不很重要.20 世纪 50 年代以后,由于数理经济学、数学规划理论等的发展,使集值映射概念在其中起本质作用.例如,需求映射、供给映射等作为价格的函数都不是单值的;数学规划问题解的稳定性问题,也涉及解集合(一般的数学规划问题的解没有惟一性)作为参数的集值映射的连续性.凸分析中出现的导数概念的推广——次微分映射也不是单值映射,而是集值映射.这样,就逐渐形成集值分析这个新的分支.1990 年,奥邦(Aubin, J. P.)和弗朗科斯卡(Frankowska, H.)出版了《集值分析》一书,初步总结了集值分析的已有成果.1994 年,国际上出版了《集值分析杂志》(参见“凸分析”).

凸 集

凸集(convex set) 实线性空间中的一类子集.设 X 为实线性空间,$K\subset X$.如果对于任何 $x_1,x_2\in K$和任何 $\lambda\in[0,1]$,有

$$(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\in K,$$

那么 K 称为 X 中的凸集.其几何意义是 K 中的任何两点的连结线段都在 K 中(参见本卷《泛函分析》同名条).

任意多个凸集 $K_i(i\in I)$的交集 $\bigcap_{i\in I}K_i$ 仍然是凸集.有限多个凸集 $K_i(i=1,2,\cdots,n)$的线性组合

$$\begin{aligned}&\lambda_1K_1+\lambda_2K_2+\cdots+\lambda_nK_n\\&=\{x\in X\,|\,x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n,\\&\quad x_i\in K_i,i=1,2,\cdots,n\}\end{aligned}$$

也是凸集.如果 $X=\mathrm{R}^n$或是更一般的巴拿赫空间、拓扑线性空间,那么凸集 K 的内部和闭包也是凸集.在局部凸空间中,每一闭凸集一定是一族闭半空间的交.

线段(line segment) 实线性空间中的概念.设 x_1,x_2 为实线性空间 X 中的两点.集合

$$[x_1,x_2]=\{x\in X\,|\,x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,\lambda\in[0,1]\}$$

称为连结 x_1,x_2 两点的(闭)线段.把 λ 所属区间[0,1]换为开区间(0,1)、半开半闭区间(0,1]等,类似地也可定义开线段、半开半闭线段等.这些都是通常解析几何中的概念的一般化.如果把 $\lambda\in[0,1]$换为 $\lambda\in(-\infty,+\infty)$,那么对应的集合称为连结 x_1,x_2 两点的直线.如果把 $\lambda\in[0,1]$换为 $\lambda\in[0,+\infty)$,那么对应的集合称为连结 x_1,x_2 两点、以 x_1 为起点的射线.

直线(straight line) 见“线段”.

射线(ray, halfline) 见“线段”.

凸包(convex hull) 由实线性空间中的集合所生成的凸集.设 S 为实线性空间 X 中的集合.那么包含 S 的最小凸集称为 S 的凸包.它是所有包含 S 的凸集的全体的交集,也是 S 中的元素的凸组合的全体.S 的凸包通常记为 $\mathrm{co}\,S$(参见本卷《泛函分析》同名条).

仿射集(affine set) 亦称仿射流形、线性流形、仿射簇.实线性空间中的一类子集.设 X 是实线性空间,$A\subset X$.若对于任何 $x_1,x_2\in A$ 和任何 $\lambda\in\mathrm{R}$,有 $(1-\lambda)x_1+\lambda x_2\in A$,即连结 A 中任何两点的直线仍在 A 中,则 A 称为 X 中的仿射集.

仿射集一定是 X 的线性子空间的平移,即 A 是 X 的仿射集的充分必要条件是存在 X 的线性子空间 X_1 和 $a\in X$,使得

$$A=X_1+a=\{x\in X\,|\,x=a+x_1,x_1\in X_1\}.$$

X_1 的维数也就称为 A 的维数.还可指出

$$X_1=A-a=\{x\in X\,|\,x=x_1-x_2,x_1,x_2\in A\}.$$

仿射包(affine hull) 由实线性空间中的集合所生成的仿射集.设 A 为实线性空间 X 中的集合.那么包含 A 的最小仿射集称为 A 的仿射包.它是所有包含 A 的仿射集的全体的交集,也是 A 中的元素的不断用直线连结后的元素全体.A 的仿射包通常记为 $\mathrm{aff}\,A$.可以指出,$\mathrm{aff}\,A$ 中的每一元素 x 都可表示为

$$x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_ix_i,$$

其中

$$x_i\in A,\lambda_i\in\mathrm{R}\ (i=1,2,\cdots,k),\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1.$$

$\mathrm{aff}\,A$ 的维数常称为 A 的维数.

凸组合(convex combination) 一类特殊的线性组合.设 X 为实线性空间.$x_0,x_1,\cdots,x_n\in X$,$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geqslant0$,$\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$.那么 $\lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$ 就称为 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的凸组合.这些点的凸组合全体形成以这些点(不一定全部)为顶点的凸多面体.如果 $x_1-x_0,\cdots,x_n-x_0$ 线性无关,即它们不在同一个 $n-1$ 维仿射集中,那么它们的凸组合全体称为以这些点为顶点的 n 维单纯形.

凸多面体(convex polyhedron) 一类常见而又重要的多面体.它是有限点集的凸包.由定义,凸多面体的维数(参见“仿射包”)总是有限维的.凸多面体有有限个面,他们都是较低维数的凸多面体.凸多面体的棱是指它的一维面,顶点则指零维面.在三维欧氏空间中有五类正凸多面体:正四面体、正方体、正八面体、正十二面体与正二十面体.关于三维凸多

面体的著名定理有欧拉定理，它表明顶点数 v，棱数 e 和面数 f 之间的关系：$v-e+f=2$. 对于一般的 n 维凸多面体 P，设 $0\leqslant k\leqslant n-1$，并令 $f_k(P)$ 为 P 的 k 维面的个数，那么有一般的欧拉关系式：

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f_k(P)=1+(-1)^{n-1}.$$

凸多胞体(convex polycope)　即"凸多面体".

单纯形(simplex)　线段、三角形、四面体的一般化. n 维单纯形定义为不在同一个 $n-1$ 维仿射集上的$n+1$个点的凸包. 单纯形也是组合拓扑学、代数拓扑学的基本概念. 利用绍凯积分表示理论，也可定义无限维的单纯形，它是每一点都有惟一积分表示的局部凸空间中的紧凸集.

代数内部(algebraic interior)　亦称核心. 实线性空间中的集合的代数意义下的内部. 设 A 为实线性空间 X 中的集合. A 的代数内部是指这样的点 $a\in A$ 的全体：对于任何 $h\in X$，总存在 $\varepsilon>0$，使得当 $\lambda\in[0,\varepsilon]$时，$a+\lambda h\in A$. A 的代数内部或核心常记为 $\mathrm{cor}(A)$. 代数内部的概念在叙述凸集分离定理时起着重要作用. 如果 $A=\mathrm{cor}(A)$，那么 A 称为代数开集. 以代数开集作为开集来定义 X 的拓扑，使 X 成为拓扑空间，但是这种拓扑在 X 的维数大于 1 时与 X 的线性结构不协调. 对于拓扑线性空间中的凸集，其代数内部与拓扑内部一致.

核心(core)　即"代数内部".

代数开集(algebraic open set)　见"代数内部".

代数闭包(algebraic closure)　实线性空间中的集合的代数意义下的闭包. 设 A 为实线性空间 X 中的集合. A 的代数闭包是指这样的点 $b\in X$ 的全体：存在 $h\in X$，对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $\lambda\in[0,\varepsilon]$，使得 $b+\lambda h\in A$. A 的代数闭包常记为 $\mathrm{acl}(A)$. 如果 $A=\mathrm{acl}(A)$，那么 A 称为代数闭集. 它也是 X 在以代数开集为开集的拓扑意义下的闭集，即代数闭集的余集必定是代数开集；反之亦然. 代数闭包的概念在叙述凸集分离定理时也起重要作用.

有的文献定义代数闭包时，要求对于任何 $\lambda\in(0,\varepsilon)$都有 $b+\lambda h\in A$. 这时代数闭集就不再是代数开集的余集. 但当 A 是多于一点的凸集时，由这两种定义得到的代数闭包是相同的.

代数闭集(algebraic closed set)　见"代数闭包".

代数边界(algebraic boundary)　实线性空间中的集合的代数意义下的边界. 它是集合的代数闭包去掉其代数内部后所形成的集合. 也就是说，它是当实线性空间 X 以代数开集为开集时的拓扑意义下的边界.

相对代数内部(relative algebraic interior)　亦称内在核心. 实线性空间中集合在相对意义下的代数内部. 设 A 为实线性空间 X 中的集合，A 相对其仿射包的代数内部称为 A 的相对代数内部，记为 $\mathrm{icr}(A)$. 因为集合的仿射包是原空间的线性子空间的平移，经平移后，原来的集合就可看做线性子空间的集合，从而可谈及其代数内部. 代数内部为空的集合其相对代数内部可以非空. 例如，平面上的直线其代数内部是空的，但其相对代数内部非空. 相对代数内部的概念在凸集分离定理的叙述中也起重要作用. 任何有限维空间中的凸集的相对代数内部总是非空的. 而无限维空间中总存在相对代数内部为空的非空凸集.

内在核心(intrinsic core)　即"相对代数内部".

相对内部(relative interior)　拓扑线性空间中的集合在相对意义下的内部. 设 A 是拓扑线性空间 X 的子集，A 相对其闭仿射包的内部称为 A 的相对内部. 这个概念在拓扑线性空间理论中不太用，但是在凸集分离定理的叙述中，它起重要作用.

超平面(hyperplane)　一类重要的仿射集. 设 X 是实线性空间. X'是 X 的代数对偶，即 X 上的线性函数全体. $a'\in X'$且非零，$\alpha\in\mathbf{R}$. 那么集合

$$H=\{x\in X\,|\,\langle a',x\rangle=\alpha\}$$

称为 X 中的超平面，这里$\langle a',x\rangle$为 a'在 x 上的取值. a'有时称为 H 的法向量. 它们都是初等解析几何中类似概念的推广. 超平面 H 把空间 X 分为两个半空间：

$$H_-^o=\{x\in X\,|\,\langle a',x\rangle<\alpha\},$$
$$H_+^o=\{x\in X\,|\,\langle a',x\rangle>\alpha\}$$

为由 H 确定的两个代数开半空间；

$$H_-^c=\{x\in X\,|\,\langle a',x\rangle\leqslant\alpha\},$$
$$H_+^c=\{x\in X\,|\,\langle a',x\rangle\geqslant\alpha\}$$

为由 H 确定的两个代数闭半空间；如果 $X=\mathbf{R}^n$，那么 H 是 $n-1$ 维仿射集. 如果 X 是拓扑线性空间，那么 H 或者是闭的，或者在 X 中稠密，并且 H 闭当且仅当 a'连续. 一个拓扑线性空间 X 中不一定有闭超平面，尤其是不一定有包含给定的 X 的仿射集的超平面. 但是局部凸空间有所述性质.

半空间(half space)　见"超平面".

支撑超平面(supporting hyperplane)　过集合的一点并使整个集合在其一侧的超平面. 这个概念是闵科夫斯基(Minkowski, H.)首先提出的. 设 A 是实线性空间 X 的集合，$a\in A$. 如果超平面

$$H=\{x\in X\,|\,\langle a',x\rangle=\alpha\}$$

对于任何 $y\in A$ 满足$\langle a',y\rangle\geqslant\langle a',a\rangle=\alpha$，那么 H 称为 A 的支撑超平面. a 也称为 H 的支撑点. 相对代数内部非空的凸集的代数边界点都可成为支撑该凸

集的超平面的支撑点.

在 X 是拓扑线性空间时,通常要求支撑超平面是闭的.这时,内部非空的凸集的边界点都可成为支撑该凸集的闭超平面的支撑点.对于巴拿赫空间的闭凸集 A,毕晓普-费尔泼斯定理断言:A 的支撑点在 A 的边界中稠密.

毕晓普-费尔泼斯定理(Bishop-Phelps theorem) 见"支撑超平面".

超平面的支撑点(supporting point of hyperplane) 见"支撑超平面".

凸集分离定理(separation theorem of convex sets) 凸集理论的最基本的定理.它是指在很弱的条件下,两个不相交的凸集总可用超平面分离.设 A,B 为实线性空间 X 中的两个非空子集.

$$H=\{x\in X\,|\,\langle a',x\rangle=\alpha\}$$

为 X 中的一个超平面.如果对于任何 $x\in A$ 和 $y\in B$,有

$$\langle a',x\rangle\leqslant\alpha\leqslant\langle a',y\rangle,$$

那么称超平面 H 分离 A 和 B;如果不等号中有一个是严格的,那么称 H 严格分离 A 和 B;如果存在 $\varepsilon>0$,使得任何 $x\in A$ 和 $y\in B$ 满足

$$\langle a',x\rangle\leqslant\langle a',y\rangle-\varepsilon,$$

那么称 H 强分离 A 和 B.基本的凸集分离定理如下:如果 $A-B$ 凸,其相对代数内部 $\mathrm{icr}(A-B)$ 非空,且不包含原点,那么 A 和 B 可用超平面分离;如果同时还有其代数闭包 $\mathrm{acl}(A-B)$ 不包含原点,那么 A 和 B 可用超平面强分离.注意到有限维空间中的凸集的相对内部总非空,由此可得,R^n 中的两个不相交的凸集总可用超平面分离.

在拓扑线性空间 X 中讨论凸集分离定理,常要求所用的超平面是闭的.这时基本的凸集分离定理为:如果 $A-B$ 凸,其内部 $\mathrm{Int}(A-B)$ 非空,且不包含原点,那么 A 和 B 可用闭超平面分离;如果同时还有 $A-B$ 的闭包 $\mathrm{cl}(A-B)$ 不包含原点,那么 A 和 B 可用闭超平面强分离.因为一般的拓扑线性空间中可能根本不存在闭超平面,所以有内部非空的凸集的存在也是闭超平面存在的充分必要条件,其中必要性由超平面形成的开半空间是内部非空的凸集而得.当 X 是局部凸空间(包括巴拿赫空间),即它具有零的凸邻域基时,上述内部可改为相对内部,且在后半部分可不要求 $A-B$ 的内部或相对内部非空.一种常用的形式如下:设 A 是局部凸空间 X 中的闭凸集,B 是 X 中的紧凸集.如果 A 和 B 不相交,那么它们可用闭超平面强分离.

凸集分离定理有很多等价定理,其中最著名的是哈恩-巴拿赫定理.它是凸分析的基础,也在基础数学与应用数学的许多领域中起着重要作用.这一定理有很直观的形象:平面上的两个不相交的凸集可用直线把它们分离,但是其一般情形的证明必须用选择公理或其等价定理(佐恩引理、超限归纳法等).定理的雏形是20世纪初由闵科夫斯基(Minkowski,H.)提出的(参见本卷《泛函分析》中的相关条目).

凸集支撑定理(support theorem of convex sets) 凸集分离定理的一种表达形式.即相对代数内部非空的凸集的每一代数边界点上都存在支撑该凸集的超平面(参见"支撑超平面").

锥(cone) 一类实线性空间中的集合.实线性空间中以原点为起点的射线所构成的集合称为锥.设 C 为实线性空间 X 中的一个集合.那么 C 是锥当且仅当对于任何 $x\in C$ 和 $\lambda\geqslant0$(有的文献中要求 $\lambda>0$),有 $\lambda x\in C$.

集合生成的锥(cone generated by a set) 实线性空间中,由某个集合生成的锥.设 A 为实线性空间 X 中的一个集合,A 中所有的点与原点相连所得的射线形成的集合称为由 A 生成的锥.设 A 为实线性空间 X 中的一个集合.那么 A 所生成的锥即 $\bigcup_{\lambda\geqslant0}\lambda A$(有的文献中要求 $\lambda>0$).

凸锥(convex cone) 一类特殊的凸集.实线性空间中既是凸集又是锥的集合称为凸锥.凸锥 C 满足 $C+C\subset C$.对于 X 中的任何子集 A,由它生成的凸锥是其元素的所有正线性组合的全体.而当 A 是凸集时,由 A 生成的凸锥就是 $\bigcup_{\lambda>0}\lambda A$.如果凸锥 C 满足 $C\cap(-C)=\{0\}$,那么经常用它来定义实线性空间中的半序关系.对于 $x,y\in X$,定义 $x\geqslant y$ 为 $y\in x+C$.则 $\geqslant$ 满足:

1. $x\geqslant x$.
2. $x\geqslant y,y\geqslant x\Rightarrow x=y$.
3. $x\geqslant y,y\geqslant z\Rightarrow x\geqslant z$.

集合生成的凸锥(convex cone generated by a set) 实线性空间中的集合的凸包所生成的锥.设 A 为实线性空间 X 中的一个集合.那么 A 所生成的凸锥即其元素的正(有的文献中只要求非负)线性组合全体.它也是包含 A 的凸锥全体的交集.

端点(extreme point) 凸集中的特殊点,它使该凸集去掉它后仍是凸集.设 A 为实线性空间 X 中的凸集.$a\in A$ 是 A 的端点的充分必要条件:如果存在 $x_1,x_2\in A$,使得 $a=(x_1+x_2)/2$,那么 $x_1=x_2=a$.局部凸空间中的紧凸集一定是其端点集的闭凸包(克列因-米尔曼定理).当空间是有限维时,上述结果中闭凸包可改为凸包(闵科夫斯基定理).这一结果也就是说,紧凸集中的每一点都可用关于端点的凸组合来表示."无限"凸组合可用关于概率测度的积分来表示.由此就引起绍凯积分表示定理:局部凸空间中的紧凸集中的每一点都可通过在端点集上定

义一概率测度，使得该点有积分表示.

端点概念可以推广为一般的端子集. 例如，对于凸锥可定义端射线为该凸锥去掉它后仍是凸锥. 绍凯积分表示定理可推广到凸锥情形. 这时绍凯积分表示理论就与函数类的积分表示理论紧密联系起来.

端点在线性规划理论中也起重要作用. 每一线性规划的解一定在它的可行集的端点上达到. 因此，只需比较目标函数在端点上的值就可求得规划的解. 这正是单纯形方法的基本思想(参见本卷《泛函分析》中的“端点定理”).

克列因-米尔曼定理(Krein-Milman theorem) 见“端点”.

端子集(extremal subset) 凸集的特殊凸子集. 如果凸集中的开线段与它相交，那么相应的闭线段就完全落在该子集中. 如果该凸集是凸多面体，那么端子集也称为凸多面体的面. 端子集有这样的性质：在原凸集中去掉该端子集后，其余集仍然是凸集. 有上述性质的凸子集(即原凸集去掉它后仍凸)称为半端子集. 半端子集可以不是端子集. 例如，闭三角形去掉半条闭边仍是凸集. 从而半条闭边是半端子集，但它不是端子集. 然而，半端点与端点是一致的. 对于凸锥来说，半端射线与端射线也是一致的.

半端子集(semi extremal subset) 见“端子集”.

暴露点(exposed point) 凸集的特殊端点. 凸集在该点有只与它交在该点的支撑超平面. 类似地也可定义暴露集、暴露直线、暴露射线等. 暴露点一定是端点. 在凸多面体情形，端点也一定是暴露点. 但一般情况下反之不然. 例如，把一个半圆与一个以半圆直径为边的正方形相连形成一个凸集，那么半圆的直径端点是端点，但不是暴露点. 对于局部凸空间中的紧凸集，暴露点集在端点集中稠密，从而紧凸集也是它的暴露点集的闭凸包(斯特拉斯维茨定理).

暴露点的概念在巴拿赫空间几何中具有重要作用.

斯特拉斯维茨定理(Straszewicz theorem) 见“暴露点”.

极集(polar set) 实线性空间中的集合按一定意义在对偶空间中的对应集合. 设 X 为一实巴拿赫空间，X^* 为其对偶空间. 集合 $A\subset X$ 的极集是指

$$A^\circ=\{x^*\in X^*\mid\forall x\in A,\langle x^*,x\rangle\leqslant 1\}.$$

类似地也可定义 X^* 中的集合相对于 X 的极集. X 的闭单位球的极集就是 X^* 的闭单位球. 一般情况下，如果 A 是以原点为内点的有界闭凸集，那么它的闵科夫斯基函数是：

$$p_A(x)=\inf\{\alpha>0\mid x\in\alpha A\}=\sup_{x^*\in A^\circ}\langle x^*,x\rangle.$$

A°的闵科夫斯基函数

$$p_{A^\circ}(x^*)=\inf\{\alpha>0\mid x^*\in\alpha A^\circ\}=\sup_{x\in A}\langle x^*,x\rangle.$$

对于 X 的任何集合 A，它的双极集 $A^{\circ\circ}=(A^\circ)^\circ$是 A 与原点的并集的弱闭凸包(巴拿赫双极定理).

极集的概念也可以对一般的对偶系(即一对在其上定义了双线性函数的线性空间)来提出. 这时，可通过极集来对对偶系的两个线性空间定义各种所谓极化拓扑(参见本卷《泛函分析》中的相关条目).

对偶锥(dual cone) 亦称极锥，锥的极集. 如果 C 是 X 中的凸锥，那么它的对偶锥就是

$$C^*=\{x^*\in X^*\mid\forall x\in C,\langle x^*,x\rangle\leqslant 0\}.$$

由于 C 是锥，即对于任何 $\lambda>0$，$\lambda C=C$，把上式中的 0 换为 1，将得到同样的 C^*. 因此，对偶锥就是锥的极集. 有时对偶锥也称为负极锥. 相应地也可定义正极锥. 实线性空间的理论常可推广到凸锥的情形，即通常的向量的线性组合概念可换为正线性组合概念. 这时，对偶锥就起着对偶空间的作用.

极锥(polar cone) 即“对偶锥”.

回收方向(direction of recession) 实线性空间的集合中的射线所定义的方向. 设 A 为实线性空间 X 的集合. 若 $h\in X$ 且存在 $x\in A$，使得对于任何 $\lambda\geqslant 0$，有 $x+\lambda h\in A$，那么 h 称为 A 的回收方向.

回收锥(recession cone) 一种有关实线性空间中集合的特殊的锥. 设 A 是实线性空间 X 中的集合，A 的所有回收方向组成的集合称为 A 的回收锥. 闭集的回收锥有时称为渐近锥. 当集合为凸集时，其回收锥为凸锥. 当集合为包含原点的闭凸集 A 时，其回收锥即 $\bigcap_{\lambda\geqslant 0}\lambda A$. 有时也对任意集合 A，称如上定义的集合为其回收锥.

巴拿赫空间的非空闭凸集有界的充分必要条件为其回收锥只包含原点. 因此，经常利用回收锥来证明一个闭凸集的有界性.

渐近锥(asymptotic cone) 见“回收锥”.

闸锥(barrier cone) 实线性空间的集合的极集所生成的锥. 设 A 为巴拿赫空间 X 的集合，X^* 为 X 的对偶. 那么 A 的闸锥可表示为

$$P(A^\circ)=\{x^*\in X^*\mid\forall x\in A,\langle x^*,x\rangle<+\infty\}.$$

因此，闸锥就是 A 的支撑函数的有效域. 当集合是包含原点的闭凸集时，闸锥就是回收锥的对偶锥. 反之，如果回收锥的内部非空，那么它也是闸锥的对偶锥.

切锥(tangent cone) 一种有关实线性空间中的集合的特殊的锥. 它定义为实线性空间的集合中的一点上的切方向的全体. 有限维空间中的光滑曲线、曲面以至更一般的光滑流形中的一点处的切方向的全体是可以通过微分法明确定义的. 但巴拿赫

空间中的任意集合中的一点的切方向的全体则需要专门定义：

1. 当该集合是凸集时，切锥较容易定义：设 K 是巴拿赫空间 X 中的凸集，$x\in \mathrm{cl}K$，那么 K 在 x 的切锥可定义为

$$T_K(x)=\mathrm{cl}\bigcup_{\lambda>0}\frac{K-x}{\lambda},$$

其中 cl 表示闭包；当 x 在 K 的内部时，$T_K(x)$ 为全空间 X；当 x 在 K 的边界上时，$T_K(x)$ 不但包含与 K 的边界相切的方向，也包括所有指向 K 的内部的方向；尤其是当 K 在 x 附近的边界光滑时，$T_K(x)$ 是闭半空间.

2. 当 K 是任意集合时，切锥的定义很多，并且各有各的用处，常用的有以下几种：

1) 相依锥. 这种锥是布里冈(Bouligand, G. L.)在 20 世纪 30 年代为研究几何问题而提出的，后来在非线性规划研究中又被重新提出，目前在非线性规划的文献中所说的切锥通常就指这种锥，其定义如下(以下 $d_K(y)$ 表示 y 到 K 的距离 $\inf\limits_{z\in K}\|y-z\|$)：

$$T_K(x)=\left\{h\in X\mid \liminf_{t\to 0^+}\frac{d_K(x+th)}{t}=0\right\}.$$

这是一个闭锥.

2) 邻接锥. 亦称中间锥、可导锥、杜勃维茨基-米柳金锥、尤尔塞斯科锥. 其定义如下：

$$T_K^b(x)=\left\{h\in X\mid \lim_{t\to 0^+}\frac{d_K(x+th)}{t}=0\right\}.$$

3) 克拉克切锥. 亦称围邻锥. 它是克拉克(Clarke, F. H.)在研究局部李普希茨函数的广义梯度理论时提出的. 其定义如下：

$$C_K(x)=\left\{h\in X\mid \lim_{t\to 0^+,x'\to_K x}\frac{d_K(x'+th)}{t}=0\right\},$$

其中 $\to_K$ 表示在 K 中的收敛性. 这是一个闭凸锥.

这几种锥依次一个比一个小. 但当 K 是凸集时，它们都与原来定义的切锥重合.

这些切锥也可以用序列极限来定义如下：

$$h\in T_K(x)\Leftrightarrow \exists\, t_n\to 0^+,\exists\, h_n\to h,\ \forall n, x+t_nh_n\in K;$$

$$h\in T_K^b(x)\Leftrightarrow \forall t_n\to 0^+,\exists\, h_n\to h,\ \forall n, x+t_nh_n\in K;$$

$$h\in C_K(x)\Leftrightarrow \forall x_n\to_K x,\forall t_n\to 0^+,\ \exists\, h_n\to h,\forall n, x_n+t_nh_n\in K,$$

其中 $\forall n$ 都理解为对于充分大的 n. 这样，引进记号 $T_{QRS}(K,x)$ 来表示满足

$$Q(x_n\to_K x), R(t_n\to 0^+), S(h_n\to h,)\quad \forall n, x_n+t_nh_n\in K$$

的 h 全体，其中 $Q,S\in\{\forall,\exists,\cdot\}$，$\cdot$ 表示 $x_n\equiv x$，$R\in\{\forall,\exists\}$，那么有

$$T_K(x)=T_{\cdot\exists\exists}(K,x),\quad T_K^b(x)=T_{\cdot\forall\exists}(K,x),$$
$$C_K(x)=T_{\forall\forall\exists}(K,x).$$

对 Q,R,S 取各种不同的值及不同的次序，由此可定义出几十种切锥. 其中最大的是 $T_{\exists\exists\exists}(K,x)$，它称为共依锥，也是布里冈在 30 年代引进的；最小的是 $T_{\forall\forall\forall}(K,x)$，它称为超切锥，这是个开凸锥，当它非空时，恰好是 $C_K(x)$ 的内部；$T_{\cdot\forall\forall}(K,x)$ 有时也有应用，它称为内部锥，也称杜勃维茨基-米柳金锥.

正如在经典分析中，导数概念和切方向的概念是紧密联系在一起的，在非光滑分析中，各种广义导数概念就可通过各种切锥来定义. 此外，还有若干种切锥的概念不能包括在上述一般定义中.

相依锥(contingent cone)　见“切锥”.

邻接锥(adjacent cone)　见“切锥”.

中间锥(intermediate cone)　即“邻接锥”.

可导锥(derivable cone)　即“邻接锥”.

杜勃维茨基-米柳金锥(Dubovitskij-Miljutin cone)　见“切锥”.

尤尔塞斯科锥(Uresescu cone)　见“切锥”.

克拉克切锥(Clarke tangent cone)　见“切锥”.

回邻锥(circatangent cone)　即“克拉克切锥”.

共依锥(paratingent cone)　见“切锥”.

超切锥(hypertangent cone)　见“切锥”.

法锥(normal cone)　切锥的对偶锥. 在集合 K 是凸集时，K 在 $x\in\mathrm{cl}K$ 处的法锥就是

$$N_K(x)=T_K(x)^*=\{x^*\in X^*\mid\forall x'\in K,\langle x^*,x'-x\rangle\leqslant 0\},$$

特别当 K 是超平面时，$N_K(x)$ 中只包含超平面惟一的法向量；当 K 非凸时，K 在 $x\in\mathrm{cl}K$ 处的法锥通常指克拉克锥的对偶锥. 法锥可表示为点 x 到 K 的距离函数 d_K 的广义梯度，即 $N_K(x)=\partial d_K(x)$.

卡拉西奥多里定理(Carathéodory theorem)　有限维凸集的表示定理. 该定理断言，n 维空间中的凸集中的每一点都可用该集合的不超过 $n+1$ 个点的凸组合来表示.

绍凯积分表示理论(Choquet theory of integral representation)　基于凸集和凸锥理论的积分表示理论. 在紧凸集情形，绍凯积分表示定理是克列因-米尔曼定理的推广. 它断言，对于局部凸空间中的紧凸集 K 中的任何 $x\in K$，都存在 K 的端点集 ext$K$ 上的概率测度 μ_x，使得对于任何 $x^*\in X^*$，有

$$\langle x^*,x\rangle=\int_{\mathrm{ext}K}\langle x^*,y\rangle\mathrm{d}\mu_x(y).$$

当 K 是有限维时，它恰好归结为紧凸集中的每一点都是其端点的凸组合(闵科夫斯基定理). 这一定理可推广到凸锥情形. 该凸锥要求可用紧凸集生成，或者说，它的基是紧凸集. 于是这样的凸锥中的每一点都可用端射线锥的基上关于概率测度的积分来表

示.许多经典的积分表示定理可归结为这一定理的特例.例如,关于正定函数的积分表示的博赫纳定理就可用绍凯理论来证明.

黑利定理(Helly theorem)　有关凸集族是否有非空交的判定定理.设 $K_i(i\in I)$为 R^n 中的一个紧凸集族.黑利定理断言,如果其中每 $n+1$ 个 K_i 有非空交,那么整个族也有非空交.这一定理在判定凸函数的不等式组是否有解时很有用.

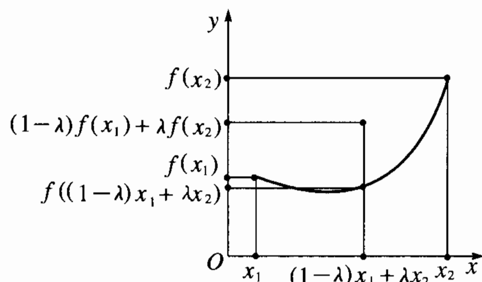
闵科夫斯基定理(Minkowski theorem)　有限维紧凸集(尤其是凸多面体)的表示定理.它断言,n 维紧凸集中的每一点都可用不超过 $n+1$ 个端点的凸组合来表示.它是卡拉西奥多里定理对于紧凸集的精确化.在有些文献中,也把凸集分离定理称为闵科夫斯基定理.

凸　函　数

凸函数(convex function)　一类定义在实线性空间上的函数.通常凸函数是通过所谓凸性不等式来定义的.设 f 是定义在实线性空间 X 的凸集 K 上的实值函数.如果对于任何 $x_1,x_2\in K$ 和任何 $\lambda\in[0,1]$,总有

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\leqslant(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2),$$

那么 f 就称为 K 上的凸函数.在实轴上的凸函数概念最早由延森(Jensen,J. L. W. V.)于 1906 年引



进.单变量凸函数的几何意义为:对于函数图象上的任何两点,在该两点之间的图象都位于连结这两点的线段之下(如上图).

如果上述不等式中当 $x_1\neq x_2$ 时总有严格不等号成立,那么 f 就称为 K 上的严格凸函数.如果 $-f$ 是 K 上的凸函数,那么 f 就称为 K 上的凹函数.类似地也可定义严格凹函数.

凸集 K 上的凸函数 f 的上图

$$\operatorname{epi} f=\{(x,\alpha)\in X\times\mathsf{R}\mid x\in K,f(x)\leqslant\alpha\}$$

总是图象空间 $X\times\mathsf{R}$ 中的凸集;反之亦然.因此,凸函数就可定义为上图是凸集的函数.不仅如此,这个定义还可用来定义取扩充实值的凸函数.设 f 为定义在实线性空间 X 上、在 $\mathsf{R}\cup\{\pm\infty\}$中取值的函数.那么 f 称为 X 上的凸函数是指其上图 $\operatorname{epi}f$ 为 $X\times\mathsf{R}$ 中的凸集.

$$\operatorname{dom} f=\{x\in X\mid f(x)<+\infty\}$$

称为 f 的有效域.在 X 中的凸集 K 上定义的凸函数就是有效域为 K 的凸函数.有效域非空、且不取 $-\infty$的凸函数称为正常凸函数.

有限个凸函数的正线性组合也是凸函数.凸函数族$\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$的上包络

$$f(x)=\sup_{\alpha\in A}f_\alpha(x)$$

也是凸函数.如果 f_1 和 f_2 都是 X 上的凸函数,那么如下定义的下确界卷积

$$f(x)=\inf_{x=x_1+x_2}(f_1(x_1)+f_2(x_2))$$

也是凸函数.

定义在实直线中的开区间(a,b)上的凸函数 f 有许多很好的性质:对于固定的 $y\in(a,b)$,当 $x\neq y$ 时,

$$x\mapsto\frac{f(y)-f(x)}{(y-x)}$$

总是 x 的不减函数.由此直接可导出,f 在(a,b)的每一点 x 上存在左、右导数 $f'_-(x)$和 $f'_+(x)$,从而 f 在(a,b)上连续.对于任何 $x_1,x_2\in(a,b)$,$x_1<x_2$,下列不等式成立:

$$f'_-(x_1)\leqslant f'_+(x_1)\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f'_-(x_2)\leqslant f'_+(x_2).$$

它也是有左、右导数的函数为凸函数的充分条件.尤其是,如果 f 可导,那么 f 为凸函数的充分必要条件为 f'不减;如果 f 二次可导,那么 f 为凸函数的充分必要条件为 $f''\geqslant0$(因而,次调和函数也常被看做凸函数的推广.这里次调和函数是指满足 $\Delta u\geqslant0$ 的多元函数,其中 Δ 是拉普拉斯算子).由此立即可以断定,$x^a(a\geqslant1)$,e^x,$\log(1/x)$等都是凸函数.对于一般的线性空间上的凸函数 f,因为它等价于在 f 的有效域中的每一线段上是凸函数,上述这些性质都可有一定的推广.例如,f 在有效域的每一开线段中有相应的左、右方向导数,且有某种单调性.

有限维空间上正常凸函数一定在其有效域的内部连续.一般情况下,拓扑线性空间上的凸函数在有效域的内部连续等价于它在某点附近上有界或上半连续.对于赋范线性空间,这时还能断定它在其有效域的内部为局部李普希茨函数.对于巴拿赫空间(或更一般的桶形空间)上的正常凸函数,在有效域的内部连续等价于该函数处处下半连续.此外,局部凸空间(包括赋范线性空间、有限维空间)上的下半连续正常凸函数必定是连续仿射函数族的上包络.

严格凸函数(strictly convex function)　见"凸函数".

凹函数(concave function)　见"凸函数".

严格凹函数(strictly concave function) 见"凸函数".

正常凸函数(proper convex function) 见"凸函数".

凸函数的有效域(effective domain of convex function) 见"凸函数".

拟凸函数(quasiconvex function) 凸函数的推广. 设 f 是定义在实线性空间 X 的凸集 K 上的实值函数. 如果对于任何 $x_1, x_2 \in K$ 和任何 $\lambda \in [0,1]$, 总有

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant \max\{f(x_1), f(x_2)\},$$

那么 f 就称为 K 上的拟凸函数. 如果上述不等式是严格的, 那么 f 就称为 K 上的严格拟凸函数. 如果 $-f$ 是拟凸的, 或严格拟凸的, 那么 f 就称为拟凹函数, 或严格拟凹函数. f 拟凸的充分必要条件为对于任何实数 α, 水平集 $\{x \in X \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ 是凸集.

拟凸函数保留了许多凸函数的性质. 例如, 拟凸函数的局部极小值一定是整体最小值.

严格拟凸函数(strictly quasiconvex function) 见"拟凸函数".

拟凹函数(quasiconcave function) 见"拟凸函数".

严格拟凹函数(strictly quasiconcave function) 见"拟凸函数".

仿射函数(affine function) 特殊的凸函数. 既是凸函数, 又是凹函数的函数称为仿射函数. 它必定是线性函数与常数之和. 在有限维空间上, 仿射函数就是一次函数. 仿射函数的重要性在于局部凸空间(包括赋范线性空间、有限维空间)上的下半连续凸函数一定是连续仿射函数族的上包络.

闵科夫斯基函数(Minkowski function) 取非负值的次线性函数. 这是一类非常重要的凸函数. 一般的闵科夫斯基函数允许取 $+\infty$. 不取 $+\infty$ 的闵科夫斯基函数又称度规函数. 度规函数常与以原点为(代数)内点的凸集联系在一起. 设 A 是以原点为代数内点的实线性空间 X 中的凸集. 那么如下定义的函数 p_A 是 X 上的度规函数:

$$p_A(x) = \inf\{\alpha \mid x \in \alpha A\}.$$

这样, A 满足

$$\{x \in X \mid p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X \mid p_A(x)) \leqslant 1\}.$$

当 X 为拓扑线性空间, 且 A 以原点为内点时, 上式左端为 A 的内部, 而上式右端为 A 的闭包. 反之, 由连续的度规函数出发, 也可定义相应原凸集.

度规函数(gauge function) 见"闵科夫斯基函数".

可加函数(additive function) 一类实线性空间上的实值函数, 它是指实线性空间上满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

的实值函数 f. 拓扑线性空间上的连续可加函数必定是线性函数.

在数学的其他领域中, 可加函数又称"加性函数". 其定义也不一样. 例如, 在测度论中, 测度就是一种加性集合函数. 其含义为两个不相交的可测集的并集的测度等于这两个可测集的测度和.

次可加函数(subadditive function) 可加函数的推广. 它是实线性空间上满足

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$$

的实值函数.

正齐次函数(positive homogeneous function) 实线性空间中的一类实值函数. 它是指满足如下条件的函数 f: 对于任何 $\lambda > 0$,

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

由定义可见, 最一般的正齐次函数可以只定义在一个锥上.

次线性函数(sublinear function) 一类重要的凸函数. 正齐次且是次可加的函数称为次线性函数. 局部凸空间(包括赋范线性空间、有限维空间)上的下半连续次线性函数一定是连续线性函数族的上包络. 如果 $-f$ 是次线性函数, 那么 f 称为上线性函数.

上线性函数(superlinear function) 见"次线性函数".

凸性不等式(convexity inequality) 凸函数满足的不等式. 设 f 为实线性空间 X 的凸集 K 上的凸函数, 即对于任何 $x_1, x_2 \in K$ 和任何 $\lambda > 0$, f 满足

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

逐次应用这一不等式, 可以得到: 对于任何 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$, 和任何 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, 有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

这个不等式即凸性不等式, 也常称为延森不等式. 当 $f(x) = \mathrm{e}^x$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1/n$, 并且令 $a_1 = \mathrm{e}^{x_1}$, $a_2 = \mathrm{e}^{x_2}$, $\cdots$, $a_n = \mathrm{e}^{x_n}$, 上式变为"几何平均不大于算术平均"不等式:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

延森不等式的积分形式在应用上极为重要. 设 μ 是 σ 代数 X 上的正测度, $\mu(X) = 1$, φ 关于 μ 可积, f 是凸函数, 则有延森不等式

$$f\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu\right\} \leqslant \int_X f(\varphi) \mathrm{d}\mu.$$

许多著名的不等式都是延森不等式的特例.

延森不等式(Jensen inequality) 见"凸性不等式".

哈恩-巴拿赫定理(Hahn-Banach theorem) 线

性函数的延拓定理.哈恩-巴拿赫定理是线性泛函分析的基本定理,但它实际上与凸集分离定理等价,因而也可看做凸集分离定理的解析形式.一般的哈恩-巴拿赫定理可以这样来叙述:设 X 为实线性空间,X_1 为它的线性子空间,f 为定义在 X 上的正常凸函数,φ_1 为定义在 X_1 上的线性函数.如果对于任何 $x\in X_1$,总有 $\varphi_1(x)\leqslant f(x)$,且原点是集合 $\mathrm{dom} f-X_1$ 的代数内点,其中 $\mathrm{dom} f$ 是 f 的有效域,那么存在 X 上的线性函数 φ,使得在 X_1 上 φ 与 φ_1 恒等,而对于任何 $x\in X$,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)$.

一般泛函分析教科书中的 X 常取为赋范线性空间,f 则取为空间的范数.这样,哈恩-巴拿赫定理就变为线性泛函的保持范数不变的可延拓定理(参见本卷《泛函分析》中的"哈恩-巴拿赫延拓定理").

指示函数(indicator function) 指示集合的函数.设 K 为集合 X 的子集.那么 K 的指示函数 δ_K 为在 K 中取零值,而在 K 以外取 $+\infty$ 的扩充实值函数.通常 X 为拓扑线性空间.这时,δ_K 为凸函数当且仅当 K 为凸集;δ_K 下半连续当且仅当 K 为闭集.

指示函数在约束极值问题中可看做理想的罚函数.考虑如下的约束极值问题:$\min f(x)\ (x\in K)$,其中 f 是定义在 X 上的扩充实值函数.那么这个问题也可表达为无约束极值问题的形式:

$$\min\{f(x)+\delta_K(x)\}\quad (x\in X).$$

K 的指示函数 δ_K 的共轭函数就是 K 的支撑函数 σ_K.

支撑函数(support function) 与集合的支撑超平面相联系的函数.设 K 为实线性空间 X 中的集合.那么 K 的支撑函数定义为 X 的对偶空间 X' 上的函数

$$\sigma_K(x')=\sup_{x\in K}\langle x',x\rangle.$$

如果 X 是拓扑线性空间,X' 是它的拓扑对偶,即所有连续线性函数的全体,那么任何集合 K 的支撑函数总是 X' 上的下半连续凸函数.当 $\sigma_K(x')\neq+\infty$ 时,X 中的超平面

$$H=\{x\in X\,|\,\langle x',x\rangle=\sigma_K(x')\}$$

必定是 K 的闭凸包的支撑超平面.

有相同支撑函数的两个集合一定有相同的闭凸包.同时,每个对偶空间上的下半连续正常凸函数也可用来定义一个闭凸集.这样,闭凸集的支撑函数与对偶空间上的下半连续凸函数之间是可以一一对应的,并且集合之间的关系也可用支撑函数来刻画.有不少特殊的闭凸集类就是用对偶空间上的下半连续凸函数来确定的.例如,连续凸函数的次微分就以该函数的单边方向导数为支撑函数.

共轭函数(conjugate function) 亦称对偶函数、极化函数.函数的某种对偶变换.设 f 为实线性空间 X 上的扩充实值函数.X^* 为 X 的某个对偶空间,即由 X 上的一些线性函数所构成的实空间.那么 f 的共轭函数 f^* 是 X^* 上的扩充实值函数,它定义为

$$f^*(x^*)=\sup_{x\in X}\{\langle x^*,x\rangle-f(x)\}.$$

通常,这里的 X 为实巴拿赫空间或更简单的有限维空间 R^n,而 X^* 为 X 的对偶空间,或相应的 R^n.这时,共轭函数总是下半连续凸函数.f 的二次共轭函数则定义为

$$f^{**}(x)=\sup_{x^*\in X^*}\{\langle x^*,x\rangle-f^*(x^*)\}.$$

它也总是下半连续函数.芬切尔-莫罗定理断言,$f=f^{**}$ 当且仅当 f 是下半连续凸函数.这同时也肯定了:每个下半连续凸函数总是仿射函数族的上包络.共轭函数的概念在研究极值问题的对偶理论中起着本质作用.

19 世纪,法国数学家勒让德(Legendre,A.-M.)首先在力学中引进类似的概念,那是把速度变为动量的变换.对于力学方程来说,这就使得拉格朗日方程变为哈密顿方程.今天,人们就称这样的变换为勒让德变换.勒让德变换的概念实际上出现得比对偶空间或共轭空间的概念还要早.应该说,后一概念的起源之一就是勒让德变换.20 世纪 50 年代,芬切尔(Fenchel,W.)又把勒让德变换进一步抽象为共轭函数的概念.因此,今天人们又把函数到其共轭函数的变换称为勒让德-芬切尔变换.

对偶函数(dual function) 即"共轭函数".

极化函数(polarity function) 即"共轭函数".

二次共轭函数(second conjugate function) 见"共轭函数".

勒让德-芬切尔变换(Legendre-Fenchel transformation) 见"共轭函数".

芬切尔-莫罗定理(Fenchel-Moreau theorem) 见"共轭函数".

扬-芬切尔不等式(Young-Fenchel inequality) 函数及其共轭函数之间的不等式.根据共轭函数的定义,f 及其共轭函数 f^* 应该满足 $f(x)+f^*(x^*)\geqslant\langle x^*,x\rangle$.该不等式就称为扬-芬切尔不等式.对于单变量函数 $f(x)=|x|^p/p\,(p>1)$,其共轭函数为

$$f^*(x^*)=\frac{|x^*|^q}{q}\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right).$$

对这两个函数的相应不等式就是经典的扬不等式.一般的不等式是芬切尔(Fenchel,W.)提出共轭函数概念时作为当然的结果而形成的.

上图(epigraph) 函数图象及其上方所形成的集合.设 f 为定义在集合 X 上的扩充实值函数,f 的上图记为 $\mathrm{epi}\, f$,定义为

$$\mathrm{epi}\, f=\{(x,\alpha)\in X\times\mathsf{R}\,|\,f(x)\leqslant\alpha\}.$$

通常 X 为拓扑线性空间. epi f 为凸集当且仅当 f 是凸函数;它可作为凸函数的定义,从而在凸函数理论中起着重要作用. epi f 为闭集当且仅当 f 下半连续. 因此,下半连续凸函数也常称为闭凸函数. 以一个函数的上图的凸包或闭凸包作为上图的函数,称为原来的函数的凸化或函数的闭凸化. 这在极值问题的讨论中是很有用的.

闭凸函数(closed convex function)　即"下半连续凸函数". 见"上图".

函数的凸化(convexification of functions)　见"上图".

函数的闭凸化(closed convexification of functions)　见"上图".

下确界卷积(infimum convolution)　两个函数间的某种运算. 设 f_1, f_2 为实线性空间 X 上的两个扩充实值函数. 它们的下确界卷积记为 $f_1 \square f_2$,定义为

$$(f_1 \square f_2)(x) = \inf_{y \in X}\{f_1(y) + f_2(x-y)\}.$$

如果 f_1, f_2 都是凸函数,那么 $f_1 \square f_2$ 也一定是凸函数. 引进下确界卷积的主要动因是因为对于勒让德-芬切尔变换有下列等式:

$$(f_1 \square f_2)^* = f_1^* + f_2^*.$$

对偶理论(duality theory)　凸分析的重要组成部分. 对偶理论可从下列数学规划问题的讨论中知其一般:

$$\begin{cases} \min f(x), \\ g_i(x) \leqslant 0 \ (i = 1,2,\cdots,p), \\ h_j(x) = 0 \ (j = 1,2,\cdots,q), \end{cases}$$

这里 f, g_i, h_j 是定义在任意集合上的任意函数. 对于这样的极值问题,可以引进所谓拉格朗日函数:

$$L(x;\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{p}\lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{q}\mu_j h_j(x),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 为非负实数; $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_q$ 为实数. 那么不难指出,原问题等价于下列关于变量 x 的极值问题

$$\min \sup_{\lambda,\mu} L(x;\lambda,\mu).$$

它的对偶问题定义为对于变量 $(\lambda,\mu) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p; \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_q)$ 的极值问题

$$\max \inf_{x} L(x;\lambda,\mu).$$

一般地,这两个问题中的最优值不一定相等,即通常只有

$$\inf_x \sup_{\lambda,\mu} L(x;\lambda,\mu) \geqslant \sup_{\lambda,\mu} \inf_x L(x;\lambda,\mu).$$

如果这两个值相等,那么对偶问题的解就称为原问题的拉格朗日乘子. 用这个来源于条件极值问题研究的术语是因为这里的拉格朗日乘子 $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ 使得原问题的解必定也是下列无约束极值问题的解:

$$\min L(x;\bar{\lambda},\bar{\mu}),$$

并且当其解 $\bar{x}$ 还满足

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \ (i = 1,2,\cdots,p)$$

时,它也一定是原问题的解. 因此,拉格朗日乘子的存在性就成为这类数学规划问题研究中的重要方面.

如果 X 是实线性空间, $f, g_i (i = 1,2,\cdots,p)$ 都是 X 上的实值凸函数, $h_j (j = 1,2,\cdots,p)$ 都是 X 上的仿射函数,那么原问题就成为在一个凸集上求凸函数的最小值问题. 这时,如果存在 $\hat{x} \in X$, 满足下列斯莱特条件:

$$g_i(\hat{x}) < 0 \ (i = 1,2,\cdots,p),$$

那么原问题的拉格朗日乘子存在. 这就是著名的库恩-塔克尔定理的本质内容. 而上述讨论也是对偶理论的研究出发点,即由此出发可寻求更一般的成对的极值问题的理论框架.

当 f, g_i 等都是仿射函数时,原问题就变成线性规划问题. 其对偶问题也是线性规划问题,并且对偶问题的对偶问题又变为原线性规划问题. 这时拉格朗日乘子的概念也与对偶问题的解一致. 由此就能导出经典的线性规划的对偶理论. 一般的对偶理论是这种线性规划对偶理论的一般化. 其更一般的形式是利用共轭函数的概念来提出的,参见"芬切尔问题". 在极值问题(包括数学规划问题和变分学问题)中以前只有个别的对偶定理,例如,一个变分问题常有一个与它相对应的对偶(共轭)问题. 系统的对偶理论最早出现在线性规划理论中,后来在进一步的研究中才发现对偶理论中起关键作用的是函数与集合的凸性.

拉格朗日函数(Lagrange function)　见"对偶理论". 在其他数学分支中,拉格朗日函数可能还有别的含义. 例如,变分学中也有拉格朗日函数,其含义与这里不同.

拉格朗日乘子(Lagrange multiplier)　见"对偶理论". 这是数学分析中同一名词的推广.

斯莱特条件(Slater condition)　见"对偶理论".

芬切尔问题(Fenchel problem)　一对用函数及其共轭函数来表达的极值问题. 设 X 和 Y 为两个巴拿赫空间, X^* 和 Y^* 分别为它们的共轭空间. A 是 X 到 Y 的连续线性算子; A^* 是 A 的共轭算子,它是 Y^* 到 X^* 的连续线性算子. f 是 X 上的扩充实值函数, g 是 Y 上的扩充实值函数. 芬切尔问题的原问题为 X 上的极值问题:

$$\min\{f(x) + g(Ax)\},$$

其对偶问题为 Y^* 上的极值问题:

$$\max\{-f^*(-A^*y^*) - g^*(y^*)\},$$

其中 f^* 和 g^* 分别是 f 和 g 的共轭函数. 如果 f 和 g 都是下半连续凸函数,那么对偶问题的对偶问题

又变为原问题.当 f 是线性函数,g 是有限维空间的正锥(第一卦限)上的指示函数,那么芬切尔问题就变为一对互为对偶的线性规划问题.一般的数学规划问题的对偶性讨论(参见“对偶理论”)以及许多变分学问题也都可纳入芬切尔问题的形式.对于芬切尔问题也可定义拉格朗日乘子,它是当两个极值问题的最优值相等时的对偶问题的解.

利用凸集分离定理可以得到一系列有关芬切尔问题的解和拉格朗日乘子的存在定理.例如,如果 f 和 g 都是下半连续凸函数,且 Y 的原点为 $\mathrm{dom}\, g - \mathrm{im}\, A$ 的内点(它在凸数学规划情形,相当于斯莱特条件),其中 $\mathrm{dom}\, g$ 是 g 的有效域,$\mathrm{im}\, A$ 为 A 的值域,那么原问题的拉格朗日乘子存在.

次微分(subdifferential)　导数概念的一种推广.设 X 为实巴拿赫空间(在更一般的情形,X 可以是任意局部凸空间),X^* 为它的共轭空间.f 为定义在 X 上的扩充实值函数.如果对于 $x \in X$,存在 $x^* \in X^*$,使得对于任何 $y \in X$,满足

$$f(y) - f(x) \geqslant \langle x^*, x \rangle,$$

那么 x^* 称为 f 在 x 处的次导数或次梯度.这样的次梯度全体就称为 f 在 x 处的次微分,记为 $\partial f(x)$.如果这个 X^* 的子集非空,那么称 f 在 x 处次可微.显然,f 在 x 处达到总体最小值当且仅当 $0 \in \partial f(x)$.

次微分的定义虽然是对任意函数提出的,但是这个概念主要对于凸函数才有意义.在单变量函数情形,导数的几何意义是函数图象上对应点的切线的斜率;而次导数的几何意义是函数上图在对应点的支撑直线(一维支撑超平面)的斜率.因为凸函数的上图是凸集,其支撑超平面的存在性又有凸集支撑定理来保证,所以凸函数的次可微性比较容易讨论.

如果 f 是凸函数,且在 x 处(有限)连续,那么 f 一定在 x 处次可微,它在 x 处的次微分为

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \mid \forall h \in X, \\ \langle x^*, h \rangle \leqslant f'(x; h)\},$$

其中

$$f'(x;h) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

为 f 在 x 处的沿方向为 $h \in X$ 的单边方向导数,即 $\partial f(x)$ 为以 $f'(x; \cdot)$ 为支撑函数的 w^* 闭凸集.由此可见,f 在 x 处的次微分为单点集当且仅当 f 在 x 处可微.同时,由于凸函数 f 在 x 处连续等价于在 x 附近为局部李普希茨函数,w^* 闭的次微分集合一定是有界的,因此由布尔巴基-阿劳格鲁定理,$\partial f(x)$ 是 w^* 紧凸集.

次微分与共轭函数的关系极为密切.事实上,∂f 与 f 的共轭函数 f^* 之间有如下关系:

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \mid f(x) + f^*(x^*) = \langle x^*, x \rangle\}.$$

由于当 f 是下半连续凸函数时,有 $f = f^{**}$(芬切尔-莫罗定理),把 X 看做 X^* 的共轭空间,就有下列对称关系:

$$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(x).$$

次微分映射 ∂f 是由 X 到 X^* 的取 w^* 闭凸值的集值映射,且对于 X 的强拓扑和 X^* 的 w^* 拓扑是上半连续的.上式还表明,如果 f 是下半连续凸函数,那么 f 的次微分映射 ∂f 与共轭函数 f^* 的次微分映射 ∂f^* 互为逆映射.同时,由次微分的定义,对于任何 $x_1, x_2 \in X$,$x_1^* \in \partial f(x_1)$,$x_2^* \in \partial f(x_2)$,有 $\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0$,即它是单调映射.

次梯度(subgradient)　见“次微分”.

次导数(subderivative)　见“次微分”.

次可微(subdifferentiable)　见“次微分”.

莫罗-洛卡费勒定理(Moreau-Rockafellar theorem)　次微分运算的基本定理.设 f 和 g 为巴拿赫空间上的两个扩充实值函数.由次微分的定义,对于任何 $x \in X$,有

$$\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x).$$

莫罗-洛卡费勒定理指出:如果 f 和 g 都是正常凸函数,且存在 $x \in X$,使得 f 在 x 处有限,g 在 x 处连续,那么上式的逆也成立,即

$$\partial f(x) + \partial g(x) = \partial(f+g)(x).$$

后来又有人指出,如果 f 和 g 都是下半连续正常凸函数,且原点是 $\mathrm{dom}\, f - \mathrm{dom}\, g$ 的内点,那么上式成立.

莫罗-洛卡费勒定理是凸分析的标志之一.它实际上与凸集分离定理是等价的.它的典型应用之一如下:考虑下列凸规划问题:$\min f(x)(x \in K)$,其中 f 是 X 上的正常凸函数,K 是闭凸集.由于这一问题等价于 $\min\{f(x) + \delta_K(x)\}$,其中 δ_K 为 K 的指示函数,故 $\bar{x}$ 是问题解的充分必要条件为 $0 \in \partial(f+\delta_K)(\bar{x})$.如果对于特殊的 f 和 K 可应用莫罗-洛卡费勒定理,这一条件的右端就可展开.例如,在通常的数学规划情形,

$$K = \{x \in X \mid g_1(x) \leqslant 0, \cdots, g_p(x) \leqslant 0; \\ h_1(x) = 0, \cdots, h_q(x) = 0\},$$

其中 $g_1, g_2, \cdots, g_p$ 为连续凸函数,$h_1, h_2, \cdots, h_q$ 为连续仿射函数,那么由此就可导出库恩-塔克尔定理的次微分形式.

库恩-塔克尔定理(Kuhn-Tucker theorem)　数学规划的基本定理.它本质上是凸数学规划的拉格朗日乘子的存在定理(参见“对偶理论”).一般的数学规划著作中的对于光滑函数的库恩-塔克尔定理,其实是利用原规划在局部有解的必要条件等价于一个由函数导数形成的线性规划的解,再由此而导出的.例如对于对偶理论中的连续凸数学规划的库恩-

塔克尔定理的次微分形式为：当斯莱特条件满足时，$\bar{x}$ 为问题的解的充分必要条件为：存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p\geqslant 0$ 和实数 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_q$，使得：

$$0\in\partial f(\bar{x})+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\partial g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{q}\mu_j\partial h_j(\bar{x}),$$

$$\lambda_i g_i(\bar{x})=0\ (i=1,2,\cdots,p).$$

局部李普希茨函数(locally Lipschitz function) 一类局部一致连续函数. 设 f 为巴拿赫空间 X 的开集 $\Omega\subset X$ 上的实值函数. 如果对于 $x\in\Omega$，存在 δ，$c_x>0$，使得对于任何满足 $\|x_1-x\|<\delta$ 和 $\|x_2-x\|<\delta$ 的 $x_1,x_2\in\Omega$，有下列不等式成立：

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant c_x\|x_1-x_2\|,$$

那么就称 f 在 x 附近为李普希茨函数. 如果 f 对于任何 $x\in\Omega$ 都在其附近为李普希茨函数，那么 f 就称为是 Ω 上的局部李普希茨函数. 连续可微函数和连续凸函数都是局部李普希茨函数. 因此，这是比上述二者更广的函数类. Ω 上的局部李普希茨函数全体构成一个实线性空间，并且任何局部李普希茨函数族的上、下包络也是局部李普希茨函数. 此外，有限维空间上的局部李普希茨函数是几乎处处可微的.

局部李普希茨函数是克拉克的广义梯度理论的主要研究对象.

广义梯度(generalized gradient) 梯度或导数概念的一种推广. 这是克拉克(Clarke, F. H.)对于局部李普希茨函数类提出的概念，由此形成的理论目前已成为非光滑分析中最成熟的一部分，并且有广泛的应用. 设 f 为巴拿赫空间 X 的开集 Ω 上的局部李普希茨函数，$x\in\Omega$.

$$\partial f(x)=\{x^*\in X^*\mid\forall h\in X,\langle x^*,h\rangle\leqslant f^\circ(x;h)\}$$

就称为 f 在 x 处的广义梯度，其中

$$f^\circ(x;h)=\limsup_{y\to x,t\to 0^+}\frac{f(y+th)-f(y)}{t}$$

称为克拉克广义方向导数. 当 f 为连续凸函数时，广义梯度就是次微分. 因此，广义梯度是次微分的推广. 类似于次微分映射，广义梯度映射是从 Ω 到 X^* 的取 w^* 闭凸值的对于 X 的强拓扑和 X^* 的 w^* 拓扑上半连续的集值映射.

当 X 为有限维时，由于局部李普希茨函数几乎处处可微，广义梯度也可由每一点附近的梯度的聚点的闭凸包来定义.

克拉克广义方向导数(Clarke generalized directional derivative) 见“广义梯度”.

集值映射(set-valued map) 点对应集合的映射. 设 X 和 Y 为两个任意集合. F 称为 X 到 Y 的集值映射，是指对于任何 $x\in X$，$F(x)\subset Y$ 是 Y 的一个子集(可能是空集). X 的子集

$$\mathrm{dom}\,F=\{x\in X\mid F(x)\neq\varnothing\}$$

称为 F 的(集值映射的)有效域. $X\times Y$ 的子集

$$\mathrm{graph}\,F=\{(x,y)\in X\times Y\mid y\in F(x)\}$$

称为 F 的(集值映射的)图象.

如果令 $Z=2^Y$ 为 Y 的所有子集所组成的集合，那么 X 到 Y 的集值映射 F 也可看做 X 到 Z 的普通单值映射. 因此，曾有人认为集值映射与单值映射没有本质区别. 但是随着数学规划理论、数理经济学等学科的发展，集值映射越来越显示出其特殊的重要性. 目前已初步形成专门研究集值映射的数学分析学科：集值分析(参见本卷《泛函分析》同名条).

集值映射的有效域(effective domain of set-valued maps) 见“集值映射”.

集值映射的图象(graph of set-valued maps) 见“集值映射”.

集值映射的半连续性(semi-continuity of a set-valued map) 单值映射的连续性的推广. 设 X 和 Y 为两个拓扑空间. F 为 X 到 Y 的集值映射. F 称为在 $x\in X$ 处上半连续，是指对于 $F(x)$ 的任何邻域 $U_{F(x)}\subset Y$，存在 x 的邻域 $U_x\subset X$，使得对于任何 $x'\in U_x$，有 $F(x')\subset U_{F(x)}$. F 称为在 $x\in X$ 处下半连续，是指对于 $y\in F(x)$ 的任何邻域 $U_y\subset Y$，存在 x 的邻域 $U_x\subset X$，使得对于任何 $x'\in U_x$，有 $F(x')\cap U_y\neq\varnothing$. 这两种连续性在 F 为单值情形都归结为通常的连续性，但是在集值情形有本质区别. 它们相互间互不包含. 一般地，上半连续性比下半连续性更常见些. 例如，在凸分析、非光滑分析等学科中所遇到的次微分、广义梯度等都是上半连续的集值映射.

集值映射的导数(derivative of set-valued maps) 导数对集值映射的推广. 历史上有过各种各样的推广，目前，被广泛接受的推广是奥邦(Aubin, J. P.)提出的用切锥来定义的推广；或者说，大部分推广都可纳入用切锥来定义的形式. 设 X 和 Y 为两个巴拿赫空间，F 是从 X 到 Y 的集值映射. 那么 F 对于其(集值映射的)图象上的点 $(x,y)\in\mathrm{graph}\,F$ 处的导数也是一个从 X 到 Y 的集值映射，其图象为 F 的图象 $\mathrm{graph}\,F$ 在 (x,y) 处的某一种切锥. 因此，有多少种切锥的定义，就有多少种集值映射的导数定义，它们各有各的用处，用得较多的切锥是相依锥和克拉克锥(参见“切锥”).

撰　稿　史树中　李宗元　杨家新　梅家骝
审　阅　郑维行

非　标　准　分　析

非标准分析(nonstandard analysis)　使用非标准模型研究各种数学问题的新的数学理论.1961年,美国数学家鲁宾孙(Robinson,A.)在荷兰皇家科学院院报上发表了题为“非标准分析”的论文,这篇论文标志着非标准分析的诞生.在这篇论文之后,人们把实数域及其上的各种关系称为分析的标准模型.在分析的标准模型中,或者说在实数域上展开的分析学称为标准分析.把实数域及其上的关系的扩大称为分析的非标准模型.在分析的非标准模型中,实数域R的真扩张称为超实数域,记为*R.在非标准模型中,或者说在超实数域*R上展开的分析学称为非标准分析.非标准分析是标准分析的真扩张,即标准分析中的每个函数的性质,每个关系,每个定理等,只要能在谓词演算中严格陈述,它们在非标准分析中仍然成立.反之亦然,这就是所谓的转换原理.同时,非标准分析中还增加了一些新的概念和结果.

非标准分析与标准分析不同之处在于超实数域*R内包含无限小的非零数(即其绝对值比任何正实数都小的非零数)及无限大的数(即其绝对值比任何正实数都大的数).使用无限小的数及无限大的数可以更加直观、更加简明地重新建立分析学的各个基本概念,例如导数、微分、积分等.这正像微积分的创始者莱布尼茨(Leibniz,G.W.)所期望的那样.从而解决了300年来莱布尼茨、欧拉(Euler,L.)等人一直想解决而未解决、后来长期引起争论的一个古老而且深刻的数学问题.不久,人们很快地认识到鲁宾孙的方法不仅可以用来重建微积分,而且也是各种数学研究的强有力的工具.1966年,伯恩施坦(Bernstein,A.R.)及鲁宾孙利用这种方法首先证明了希尔伯特空间内的多项式紧算子具有非平凡的不变子空间,为停滞30多年的不变子空间问题的研究增添了新的活力.1975年,劳勃(Loeb,P.)发现了一类以内集为支集的内容丰富的测度空间,现在称为劳勃测度空间,已被广泛地应用于测度论、概率论、随机分析、控制论、数理经济等方面的研究之中.1977年,安德森(Anderson,A.)利用超有限的劳勃测度构造了布朗运动.1981年,泊金斯(Perkins,E.)利用安德森构造的布朗运动解决了与布朗局部时间有关的某些长期悬而未决的问题.此外,利用非标准方法,在巴拿赫空间、拓扑空间、广义函数、代数数论、微分方程、数学物理等领域也获得了许多新的结果.现在人们不只把使用非标准模型的分析学研究,而且把所有使用非标准模型的数学研究统称为非标准分析.

第一个关于分析的非标准模型的存在的证明,即鲁宾孙给出的证明是基于数理逻辑的紧致性定理(每个有限子集协调的句子集是协调的).这个证明对于熟悉数理逻辑的人是容易的,但对于不熟悉数理逻辑的人来说是困难的.现在大多数作者利用超幂构造来建立非标准模型.这样做一方面可以尽量少地使用大多数人不熟悉的数理逻辑知识;另一方面,这样建立的非标准模型具有某种构造性,适合于大多数人的口味.这种方法由鲁宾孙提出,经过泽康(Zakon,E.)、戴维斯(Davis,M.D.)及林德斯诺姆(Lindstrom,T.)等人的改进及发展,已被大多数人所采用.另外,1977年,美国数学家纳尔逊(Nelson,E.)提出了一种称为内集合论的公理方法来表述鲁宾孙的非标准分析,这种方法当前主要由法国的非标准分析学派所使用.

近40年来,关于非标准分析的研究大致可以分为两个方面:一是非标准模型本身的研究;二是用非标准方法解决标准的数学问题.关于非标准模型本身的研究,首先是要提供一种构造非标准模型的统一的方法,这个问题通常是用标准全域及非标准全域的办法来完成的.人们可以通过不断添加幂集的办法来构造一个标准全域,它可以包括人们要研究的各种数学对象,然后再构造这个标准全域的非标准全域.标准全域中的各种数学对象在非标准全域中的像就是可供利用的一个自然的非标准模型;其次是要提供性质较好的非标准模型.因为非标准分析在拓扑学和测度论等方面的应用,常常要求非标准模型具有较好的性质.例如要求非标准模型具有某种饱和性或概括性.绝大多数非标准分析方面的研究论文是应用非标准方法来解决标准的数学问题,这些问题包括未解决或者已解决的问题.用非标准方法重新解答已解决的问题常常不仅可以给出比标准定义更好的非标准特征及比标准证明更好的非标准证明,而且更重要的是它可以把不同的方法统一起来,特别是提供了把有限数学中的结论和方法应用到无限数学中的可能性.利用这种方法在许多方面尤其是在测度论和泛函分析等方面已经取得了很大的成就.

1966年,第一本关于非标准分析的专著《非标准分析》(鲁宾孙著,有中译本)出版.在这本书中,作者建立了一种特殊的非标准模型——扩大,而后论述了非标准模型在微积分、拓扑、实分析、广义函数、

函数论、泛函分析、李群、弹性力学及流体动力学等方面的应用. 在这本书的序言中引述了当代著名数学家哥德尔(Gödel, K.)对非标准分析的看法:"人们有充分的理由相信,以这种或那种形式表示的非标准分析,将成为未来的分析学."1977 年,出版了戴维斯的《应用非标准分析》(有中译本),这是作者在柯朗数学研究所和哥伦比亚大学给大学生及研究生讲授非标准分析的讲稿的基础上写成的. 本书序言中的一段话对非标准分析的意义说得很精彩:"非标准分析的诞生对历史也是一次巨大的嘲弄. 数理逻辑的方法是由于在分析中要求绝对的严格而发展起来的(至少部分地是这样),然而也正是数理逻辑为曾经声名狼籍的无限小方法提供了正名的基础. 事实上,人们对非标准方法所表现的热情是与这种正名给予人们的喜悦心情密切相关的,而这种热情正是由于这些方法有数学的简明、优美、巧妙的性质以及它们具有深远影响的应用的缘故."

标准分析(standard analysis) 见"非标准分析".

无限小理论(the theory of infinitesimals) 即"非标准分析". 非标准分析与标准分析的根本区别在于非标准分析中有无限小的非零数及无限大的数,即使在拓扑空间的非标准模型中也有"无限小的邻域"——单子. 凡在标准分析中使用无限小变量的概念,例如导数、微分、积分等,在非标准分析中都可以使用无限小的数来更加直观地陈述. 因而有人建议使用"无限小理论"的名称代替"非标准分析".

内集合论(internal set theory) 阐述非标准分析的一种公理方法. 它的公理系统从通常的 ZFC 公理系统出发,再加上一个新的一元谓词"标准的"及转换原理、理想化原理、标准化原理这三条公理构成. 谓词"标准的"指称标准数学中,即通常数学中的具体对象. 内集合论中的一个公式称为内的,如果它不包含新的谓词"标准的",即它是 ZFC 中的一个公式,否则,这个公式就称为外的. 例如,"x 是标准的"是一个最简单的外公式. 设 $A(x,t_1,\cdots,t_k)$ 是一个内公式,$x,t_1,\cdots,t_k$ 是自由变元,而且再无其他自由变元,则公式

$$\forall^{st}t_1\cdots\forall^{st}t_k(\forall^{st}xA(x,t_1,\cdots,t_k)\rightarrow\forall xA(x,t_1,\cdots,t_k)) \quad (T)$$

称为转换原理,其中量词 $\forall^{st}x$ 表示"$\forall x$(x 是标准的)$\rightarrow$". 设 $B(x,y)$ 是一个内公式,x,y 是自由变元,可能还有其他自由变元,则公式

$$\forall^{st\,fin}z\exists x\forall y\in zB(x,y)\leftrightarrow\exists x\forall^{st}yB(x,y) \quad (I)$$

称为理想化原理,其中量词$\forall^{st\,fin}x$ 表示"$\forall^{st}x$(x 是有限的)$\rightarrow$". 设 $C(z)$ 是一个公式,它是内的或者是外的,z 是自由变元,可能还有其他自由变元,则公式

$$\forall^{st}x\exists^{st}y\forall^{st}z(z\in y\leftrightarrow z\in x\wedge C(z)) \quad (S)$$

称为标准化原理,其中量词$\exists^{st}y$ 表示"$\exists y$(y 是标准的)$\wedge$".

转换原理(T)表示通常数学中的命题在内集合论中也成立. 反之,显然也是对的. 这正是非标准分析中的转换原理. 理想化原理(I)表示任何一个共点的内二元关系在内集合论中可全满足,这正是非标准分析中的饱和性. 标准化原理(S)是 ZFC 中的分离公理的补充,它表示对于任何一个标准集合 x,存在一个标准子集 y,y 的标准元正好是 x 中满足 C 的标准元.

内集合论的公理,即 ZFC 的公理加上(T),(S),(I),正好是非准分析的饱和模型中内集的基本性质. 这也正是内集合论名称的由来. 若令 $B(x,y)$ 表示实数集合上的二元关系:$x<y$,并且 $x,y>0$,则(I)的左端显然为真,即对任意标准的有限实数集 z,存在一个小于 z 中每个实数 y 的实数 x. 由(I)其右端也为真,即存在一个大于零的实数 x,对所有大于零的标准实数 y,有 $x<y$. 换句话说,x 是一个大于零的无限小. 类似地,若令 $B(x,y)$ 表示实数集合上的关系:$x>y$,并且 $x,y>0$,则由(I)可推出存在正无限大. 有了非零无限小及无限大,在内集合论中就可展开非标准分析了. 这个方法已被法国非标准分析学派采用,并且在常微分方程的奇异摄动方面取得了很好的成果.

非标准全域

超实数域的超幂构造(the ultrapower construction of the hyperreal number field) 建立超实数域的一种方法,这种方法建立在自由超滤子概念的基础之上. 设 $\mathscr{U}$ 是由自然数集合 $\mathsf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ 的一些子集构成的集族,满足:

1. 空集$\varnothing\notin\mathscr{U}$,$\mathsf{N}\in\mathscr{U}$;
2. 若 $A,B\in\mathscr{U}$,则 $A\cap B\in\mathscr{U}$;
3. 若 $A\in\mathscr{U}$,并且 $A\subset B\subset\mathsf{N}$,则 $B\in\mathscr{U}$;
4. 若 $A\subset\mathsf{N}$,则 $A\in\mathscr{U}$ 或者 $A^c=\mathsf{N}\backslash A\in\mathscr{U}$,二者必居其一;
5. $\bigcap_{A\in\mathscr{U}}A=\varnothing$;

则 $\mathscr{U}$ 称为 N 上的一个自由超滤子. 满足前三条的子集族称为 N 上的滤子. 例如,$\mathscr{F}=\{A\subset\mathsf{N}\mid\mathsf{N}\backslash A$ 是有限集$\}$是滤子(称为有限余滤子或弗雷歇滤子). 按以下步骤逐步扩张 $\mathscr{F}$ 可得到一个自由超滤子:若 A 是 N 的任一无限子集,并且 $A,A^c\notin\mathscr{F}$,则可任取其中一个加入 $\mathscr{F}$,并按滤子要求扩张 $\mathscr{F}$. 自由超滤子的存在性可由选择公理或佐恩引理严格证明.

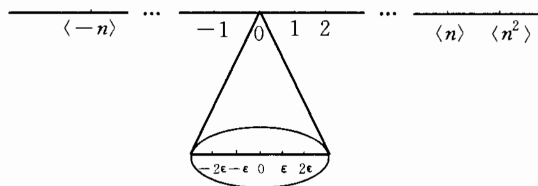
设 R^{N} 是所有实数序列的集合,即 $\mathsf{R}^{\mathsf{N}}=\{\{a_n\}\mid$

$\{a_n\}:\mathrm{N}\to\mathrm{R}\}$. 在 R^{N} 上定义等价关系：$\{a_n\}\sim\{b_n\}$ 当且仅当 $\{n\in\mathrm{N}|a_n=b_n\}\in\mathscr{U}$. 这个等价关系简单地写成：$a_n=b_n$, a.e. 读为几乎所有的 $a_n=b_n$. 令 $^*\mathrm{R}=\mathrm{R}^{\mathrm{N}}/\sim$. $^*\mathrm{R}$ 中的元素是 R^{N} 中元素在上述等价关系下的等价类. 序列 $\{a_n\}$ 所在的等价类记为 $\langle a_n\rangle$，即 $\langle a_n\rangle=\{\{b_n\}|\{b_n\}\sim\{a_n\}\}$. 在 $^*\mathrm{R}$ 中，定义加、乘、序如下：$\langle a_n\rangle+\langle b_n\rangle=\langle a_n+b_n\rangle$, $\langle a_n\rangle\cdot\langle b_n\rangle=\langle a_n\cdot b_n\rangle$, $\langle a_n\rangle<\langle b_n\rangle$ 当且仅当 $a_n<b_n$, a.e.，则 $^*\mathrm{R}$ 是有序域. 在自然嵌入 $e:\mathrm{R}\to{}^*\mathrm{R}$, $e(r)=\langle r,r,\cdots\rangle$ 之下，$^*\mathrm{R}$ 是 R 的有序域扩张. $^*\mathrm{R}$ 称为超实数域，$^*\mathrm{R}$ 的元素称为超实数. 例如

$$\varepsilon_1=\left\langle\frac{1}{n+1}\right\rangle=\left\langle 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\rangle,$$

$$\varepsilon_2=\left\langle-\frac{1}{(n+1)^2}\right\rangle=\left\langle-1,-\frac{1}{2^2},-\frac{1}{3^2},\cdots\right\rangle$$

都是超实数. 由序的定义，对每个正实数 a，有 $|\varepsilon_1|<a$, $|\varepsilon_2|<a$，这种超实数称为无限小（数）. $\omega_1=\langle n\rangle$, $\omega_2=\langle -n^2\rangle$ 也是超实数. 由序的定义，对于每个实数 a，有 $|x|>a$，这种超实数称为无限大（数）. 非无限大的超实数称为有限（超实）数（包括无限小）. 每个有限数 x 可以惟一地写成 $x=x^\circ+\varepsilon$，其中 $x^\circ\in\mathrm{R}$，称为 x 的标准部分，也记为 $\mathrm{st}(x)$，即 $\mathrm{st}(x)=x^\circ$，ε 是无限小. 一般地，对任意 $x,y\in{}^*\mathrm{R}$，若 $x-y$ 是无限小，则说 x 无限接近 y，记为 $x\approx y$. 对于每个 $a\in\mathrm{R}$，集合 $M(a)=\{x\in{}^*\mathrm{R}|x\approx a\}$ 称为 a 的单子. 超实数域的几何示意如下图. 这种用实数序列（R 的幂集的



元素）及超滤子来构造超实数的方法，称为超实数域的超幂构造. 由于超实数是实数序列的等价类，因此实数的很多性质可以自然地推广到超实数. 但是，$^*\mathrm{R}$ 的子集有些可以表示成实数子集的序列，另一些则不能，前者具有实数集合的许多性质，而后者则没有.

设 $A\subset{}^*\mathrm{R}$，若存在一列 $A_n\subset\mathrm{R}$，使得 $\langle x_n\rangle\in A$ 当且仅当 $x_n\in A_n$, a.e.（即 $\{n\in\mathrm{N}|x_n\in A_n\}\in\mathscr{U}$），则称 A 为 $^*\mathrm{R}$ 的内子集或内集，并记为 $A=\langle A_n\rangle$. 否则称为 $^*\mathrm{R}$ 的外子集或外集. 例如，设

$$\varepsilon_1=\left\langle\frac{1}{n+1}\right\rangle,\varepsilon_2=\left\langle\frac{1}{(n+1)^2}\right\rangle,$$

则 $^*\mathrm{R}$ 中的开区间 $(\varepsilon_2,\varepsilon_1)$ 是内集，因为

$$(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=\{x\in{}^*\mathrm{R}|\varepsilon_2<x<\varepsilon_1\}$$
$$=\left\langle\left(\frac{1}{(n+1)^2},\frac{1}{n+1}\right)\right\rangle,$$

其中

$$\left(\frac{1}{(n+1)^2},\frac{1}{n+1}\right)$$

是 R 的子集. 更一般地，$^*\mathrm{R}$ 中的任意开区间、闭区间、半开半闭区间都是内集.

实数集的一些重要性质，譬如说 R 的有界非空子集有确界，即实数的完备性原理，对于超实数的内集也成立.

超实数的外集不能表示成实数集合的序列，其性质与实数集差别较大. 最简单的超实数的外集有：每个单子 $M(a)$，有限超自然数集 N，无限超自然数集 $^*\mathrm{N}\backslash\mathrm{N}$，有限超实数集 $G(0)=\{x\in{}^*\mathrm{R}|\exists\, a\in\mathrm{R}$ 使 $|x|<a\}$，无限超实数集 $^*\mathrm{R}\backslash G(0)$. 证明它们是外集的方法是证明它们不具有内集的某种性质. 例如 $M(a)$, N, $G(0)$ 在 $^*\mathrm{R}$ 中有上界但无上确界，$^*\mathrm{N}\backslash\mathrm{N}$ 在 $^*\mathrm{R}$ 中有下界但无下确界，故为外集. 若 $A\subset\mathrm{R}$，则由

$$^*A=\langle A\rangle=\langle A,A,\cdots\rangle$$

定义的 $^*\mathrm{R}$ 的内子集称为超实数的标准内子集. 例如 $^*\varnothing$, $^*\mathrm{N}$, $^*\mathrm{Z}$, $^*\mathrm{Q}$, $^*\mathrm{R}$ 以及区间 $^*(x,y)$, $^*[x,y]$（其中 $x,y\in\mathrm{R}$ 且 $x<y$）都是 $^*\mathrm{R}$ 的标准内子集. 当 $A\subset\mathrm{R}$ 为有限集时，$^*A=A$；但当 A 为无限集时，$A\subsetneq{}^*A$，$^*A$ 的元素比 A 的元素要多的多，例如，$\omega=\langle n\rangle=\langle 0,1,2,\cdots\rangle$, $\omega^2=\langle n^2\rangle$ 等是 $^*\mathrm{N}$ 的元素，而不属于 N.

超实数（hyperreal number）　见“超实数域的超幂构造”.

标准全域（standard universe）　亦称超结构，是一个包括力十分强的标准模型. 设 S 是一个集合，令 $V_0(S)=S$, $V_{n+1}(S)=V_n(S)\cup\mathscr{P}(V_n(S))$ $(n\in\mathrm{N})$，其中 $\mathscr{P}(V_n(S))$ 是 $V_n(S)$ 的幂集，则

$$U=V(S)=\bigcup_{n\in\mathrm{N}}V_n(S)$$

称为以 S 为个体集的超结构或标准全域. S 的每个元素称为 $V(S)$ 的一个个体，并假设这些个体不含元素，而 $V(S)\backslash S$ 的每个元素称为 $V(S)$ 的集元. 个体及集元统称为实体（有些文献把集元称为实体）. 超结构的表达力是非常强的，它包含了与 S 有关的各种数学概念和关系. 例如，若实数域 $\mathrm{R}\subset S$，则对于任意 $x,y\in\mathrm{R}$，有序对

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}\in V_2(S).$$

对于 R 上的序关系 $\leqslant$ 来说，因为 $\leqslant\subset\mathrm{R}\times\mathrm{R}$，所以 $\leqslant\in V_3(S)$. 对任一实函数 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 来说，因为 $f\subset\mathrm{R}\times\mathrm{R}$，所以 $f\in V_3(S)$. 连续函数空间 $C[0,1]=\{f|f:[0,1]\to\mathrm{R}, f$ 连续$\}\in V_4(S)$. 若复数域 $\mathrm{C}\subset S$，则希尔伯特空间

$$l^2=\left\{\{a_1,a_2,a_3,\cdots,\}\;\middle|\;\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2<+\infty\right\}\in V_4(S).$$

超结构（superstructure）　即“标准全域”.

非标准全域（nonstandard universe）　标准全

域的非标准模型. 它是另一个超结构的子集. 设 $U=V(S)$ 是一个以 S 为个体集的标准全域,I 为指标集(I 可取自然数集或更大的集合),$\mathscr{U}$ 为 I 上的一个自由超滤子,S^I 是 I 到 S 的一切函数(I-序列)之集,即 $S^I=\{\{a_i\}|a_i\in S\}$,其中 $\{a_i\}$ 表示 I 到 S 的一个函数 $f:I\to S, f(i)=a_i(i\in I)$. 在 S^I 上定义等价关系:$\{a_i\}\sim\{b_i\}$ 当且仅当 $\{i\in I|a_i=b_i\}\in\mathscr{U}$. 这个等价关系简单地写成 $a_i=b_i$, a.e.. 令 $^*S=S^I/\sim$,以 $^*S$ 为个体集的超结构记为 $V(^*S)$.

标准全域 $U=V(S)$ 的非标准全域 $^*U=^*V(S)$ 是 $V(^*S)$ 的一个子集,它的元素按如下方式归纳地选自 $V(^*S)$. 设 $\{A_i\}$ 是 $V(S)$ 中元素的一个 I 序列,若存在一个 $p\in\mathbf{N}$,使得 $A_i\in V_p(S)(i\in I)$,则称序列 $\{A_i\}$ 是有界的. 若序列 $\{A_i\}$ 是有界的,则存在一个最小的 $j\in\mathbf{N}$,使得 $\{i|A_i\in V_j(S)\}\in\mathscr{U}$,这个 j 称为序列 $\{A_i\}$ 的秩. 对于每个有界序列 $\{A_i\}$,可以按秩归纳地选取一个元素 $A\in V(^*S)$,并记 $A=\langle A_i\rangle$:若 $\{A_i\}$ 的秩为 0,令 $A=\langle A_i\rangle$,即 $^*S$ 中的一个元素. 假设对于秩小于 j 的每个序列 $\{B_i\}$ 已经定义了对应的元素 $\langle B_i\rangle$,并且 $\{A_i\}$ 的秩为 j,则定义 $\langle A_i\rangle=\{\langle B_i\rangle|\{B_i\}$ 的秩小于 j,并且 $B_i\in A_i$, a.e.$\}$. 这样就完成了非标准全域 $^*U=^*V(S)$ 的定义. $^*V(S)$ 中的元素称为内的,$V(^*S)\setminus{}^*V(S)$ 中的元素称为外的. 由上述定义,$^*S$ 中的元素都是内的,因而没有外的个体. 上述构造非标准全域的方法称为超幂构造.

非标准全域也可用公理方法建立如下. 设 $V(S)$ 和 $V(^*S)$ 分别是以 S 和 $^*S$ 为个体集的两个超结构,嵌入映射 $^*:V(S)\to V(^*S)$ 满足如下两条公理:

扩张原理. $^*S$ 是 S 的真扩张,即 $S\subsetneq{}^*S$,并且对于每个 $a\in S$,有 $^*a=a$.

转换原理. 标准全域的语言 $L(V(S))$ 中的句子 φ 在 $V(S)$ 中为真,当且仅当它的 *-转换 $^*\varphi$ 在 $V(^*S)$ 中为真. $^*\varphi$ 是把 φ 中出现的常元符号 a 全部换成它的 *-像的符号 $^*a$ 得到的句子. 若 $A\in V(S)\setminus S$,则 $^*A$ 称为标准集合,$V(^*S)$ 中的元素是内的,当且仅当它是某个标准集合的元素. 所有内的元素构成的集合记为 $^*V(S)$,它就是标准全域 $V(S)$ 对应的非标准全域.

转换原理(transfer principle) 亦称莱布尼茨原理,联系分析的标准模型与非标准模型的纽带. 简单地说,转换原理是说形式语言中相同的断言在标准模型和非标准模型中或者同真或者同假. 在分析的(初等或高阶的)非标准模型的定义中,要求在标准模型中的句子在扩张后的非标准模型中也成立;反之,由于后者是前者的扩张,因而这种句子在局限于标准模型时也成立. 人们把这个性质称为转换原理. 在用超幂构造的非标准全域中,可以证明转换原理成立. 在非标准全域的公理定义中,第二条正是转换原理. 在莱布尼茨(Leibniz,G. W.)发现微积分的时候,他曾经假定存在一个数系,它与通常的实数系具有相同的性质,但它包含非零的无限小. 莱布尼茨的说法显然包含一个矛盾,即通常的实数系至少不具备莱布尼茨所期望的那种扩大的数系的一条性质,即在实数系中没有非零的无限小. 鲁宾孙(Robinson,A)的重大功绩之一就是使用现代逻辑意义上的形式语言解决了上述矛盾. 莱布尼茨的说法被重新解释为:存在实数系的一个扩张,它包含非零无限小元素,而且它与实数系具有相同的性质,只要这些性质能够在特定的形式语言中被表达. 实际上,非零无限小这个性质是不能如此表达的.

莱布尼茨原理(Leibniz principle) 即"转换原理".

*映射(*-map) 联系标准全域和非标准全域的映射. 在非标准全域定义中的映射 $^*:U\to{}^*U$ 可以扩张到 U 的可定义子集上去. 设 A 是 U 的可定义子集,即 $A=\{r\in U|\models\alpha(r)\}$,其中 $\alpha(r)$ 是 U 的语言中的一个公式,$\models\alpha(r)$ 表示 $\alpha(r)$ 在 U 中是真的. 则定义 $^*A=\{r\in{}^*U|{}^*\models{}^*\alpha(r)\}$,其中 $^*\alpha(r)$ 是 $\alpha(r)$ 的 * 转换,即把 $\alpha(r)$ 中出现的常元符号 a 全部换成它的 * 像的符号 $^*a$ 得到的公式. $^*\models{}^*\alpha(r)$ 表示 $^*\alpha(r)$ 在 $^*U$ 中是真的. 这个扩张之后的映射称为 * 映射. 特别地,$^*(U)={}^*U$. * 映射又称为自然扩张映射. 在 * 映射下,A 的像 $^*A$ 称为 A 的 * 像或 A 的自然扩张. * 映射具有如下性质:

1. $^*(A\cup B)={}^*A\cup{}^*B$.
2. $^*(A\cap B)={}^*A\cap{}^*B$.
3. $^*(A\setminus B)={}^*A\setminus{}^*B$.
4. $^*(x,y)=(^*x,{}^*y)$,其中 (x,y) 是 x,y 的有序对.
5. $^*(f(c))={}^*f(^*c)$.

自然扩张(natural extension) 见"*映射".

自然扩张映射(natural extension mapping) 见"*映射".

内集(internal set) 本身是非标准全域的元素的集合. 由非标准全域的定义,以 S 为个体集的标准全域 $U=V(S)$ 的非标准全域 $^*U={}^*V(S)$ 是 $V(^*S)$ 的一个子集,即 $^*U\subset V(^*S)$. 若 B 是一个集合,并且 B 属于 $^*U$,则 B 称为内集. 若 B 属于 $V(^*S)$ 而不属于 $^*U$,则 B 称为外集. 更一般地,凡属于 $^*U$ 的元素称为内实体,属于 $V(^*S)$ 而不属于 $^*U$ 的元素称为外实体. 由非标准全域的超幂构造可知,$^*U$ 中的一个实体是内的当且仅当它可以表示为标准全域 U 中的一个有界序列 $\langle A_i\rangle$. 特别地,若 $B={}^*A$,而 $A\in U$,则 B 称为标准实体.

外集(external set) 见"内集".

标准实体(standard entity) 见"内集".

内实体(internal entity) 见"内集".

外实体(external entity) 见"内集".

超有限集(hyperfinite set) 亦称*有限集.类似于有限集的内集.内集 A 称为超有限的,是指存在一个内的一一对应 $f:\{1,2,\cdots,H\}\to A$,其中 $H\in {}^*\mathsf{N}$,H 称为 A 的内基数,记为 $|A|$ 或$^{\#}(A)$.在超幂构造的非标准全域中,内集 $A=\langle A_i\rangle$ 是超有限的当且仅当几乎所有的(a.e.)A_i 是有限的.若非标准全域$^*U$ 是扩大,则对于 U 中任一集合 A,存在超有限集 F,使得 $A\subset F\subset {}^*A$.

*有限集(*-finite set) 即"超有限集".

内基数(internal cardinality) 见"超有限集".

内定义原理(internal definition principle) 亦称内性定理.是用可定义性判别内性的一个重要定理.$^*U$ 的子集 B 是可定义的,当且仅当在$^*U$ 的语言中有一个公式 $\alpha(x)$,使得 $B=\{b\in {}^*U\mid {}^*\models\alpha(b)\}$,其中$^*\models\alpha(b)$表示 $\alpha(b)$在$^*U$ 中是真的.设 A 是非标准全域$^*U$ 中的一个子集,则 A 是内集当且仅当它是一个内集的可定义子集.例如,$A=\{\kappa\in {}^*\mathsf{N}\mid 1\leqslant\kappa\leqslant m, m\in {}^*\mathsf{N}\}$是内集,因它是内集$^*\mathsf{N}$ 的可定义子集.

内性定理(internality theorem) 即"内定义原理".

内函数定理(internal function theorem) 用可定义性判别函数内性的一个重要定理.设 f 映 A 到 B 中,其中 A,B 都是非标准全域$^*U$ 的内子集.若 f 可用$^*U$ 的语言$^*L$ 中的一个项 $\mu(x)$来表示,即对于每个 $a\in A$,有 $f(a)=|\mu(a)|_*$,其中 $|\mu(a)|_*$ 是闭项 $\mu(a)$在$^*U$ 中的值,则 f 是内函数.内函数定理是内定义原理的推论.

标准定义原理(standard definition principle) 用可定义性判别标准集的一个定理.设 B 是非标准全域$^*U$ 中的一个集合,则 B 是标准集当且仅当它是一个标准集的"标准"可定义子集,即集合 B 是标准的,当且仅当它可以描述为 $\{x\mid x\in {}^*A$ 并且 $P(x)\}$,其中 $P(x)$是一个只包括标准常元的谓词.

上溢原理(overflow principle) 关于由超自然数构成的内集合的性质的一个重要定理.设 A 是超自然数集$^*\mathsf{N}$ 的内子集,若大于某个标准自然数 n_0 的所有标准自然数都属于 A,则存在一个无限大自然数 H,使得小于 H 的所有无限大自然数也属于 A.由上溢原理很容易说明,标准自然数之集 N 不是$^*\mathsf{N}$ 的内子集.

下溢原理(underflow principle) 上溢原理的对偶.它断言,若 A 是超自然数集$^*\mathsf{N}$ 的内子集,H 是一个无限大自然数,且小于 H 的所有无限大自然数都属于 A,则存在一个标准自然数 n_0,使得大于 n_0 的所有标准自然数也属于 A.由下溢原理易知,无限大自然数之集$^*\mathsf{N}\setminus\mathsf{N}$ 是$^*\mathsf{N}$ 的外子集.

鲁宾孙序列引理(Robinson sequential lemma) 亦称无限小延伸定理.关于内序列的性质的一个重要定理.设$\{a_n\}_{n\in {}^*\mathsf{N}}$是超实数域$^*R$ 的一个内序列,并且其下标是标准自然数的项都是无限小,则存在一个无限大自然数 ν,其下标小于 ν 的项均为无限小.

无限小延伸定理(infinitesimal prolongation theorem) 即"鲁宾孙序列引理".

惯性原理(permanence principle) 上溢原理、下溢原理及鲁宾孙序列引理的统称.惯性原理有时也称为柯西原理.

柯西原理(Cauchy principle) 即"惯性原理".

共点关系(concurrent relation) 一种特殊的二元关系.设 R 是标准全域 U 中的一个二元关系,若对 R 的定义域中的任意有限个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,在 R 的值域中总存在一个元素 b,有$(a_i,b)\in R(i=1,2,\cdots,n)$,则称 R 是一个共点关系.换句话说,共点关系是有限可满足的二元关系.例如,自然数集上的序关系及集合的包括关系均是共点关系.

扩大(enlargement) 一种特殊的非标准模型.若标准全域 U 中的每个共点关系 R 在非标准全域$^*U$中可全满足,即在非标准全域$^*U$ 中存在一个元素 b,使得$({}^*a,b)\in {}^*R$ 对每个 $a\in \mathrm{dom}R$ 成立,则称$^*U$ 是 U 的一个扩大.当$^*U$ 是 U 的扩大时,映射 $^*:U\to {}^*U$ 也称为扩大.

共点定理(concurrence theorem) 关于标准全域的扩大的存在性定理.该定理断言:标准全域 U 的扩大$^*U$ 是存在的.

饱和的非标准全域(saturated nonstandard universe) 一种特殊的非标准全域.设 κ 是一个无限基数,$A_j\in {}^*U\setminus {}^*S$.若集族$\{A_j\}_{j\in J}$具有有限交性质,并且 J 的基数小于 κ,则$\bigcap\{A_j\}_{j\in J}\neq\varnothing$,就称$^*U$ 是 κ 饱和的非标准全域.当 $\kappa>\mathrm{card}U$ 时,κ 饱和的非标准全域称为多饱和的.

多饱和的非标准全域(polysaturated nonstandard universe) 见"饱和的非标准全域".

概括的非标准全域(comprehensive nonstandard universe) 一种特殊的非标准全域.设 A,B 是标准全域 U 中的两个集合,若每个函数 $f:A\to {}^*B$有内扩张 $g:{}^*A\to {}^*B$(即 g 是 f 的扩张,并且 $g\in {}^*U$),则称$^*U$ 是概括的;若在上述定义中,A,B 都是实数集 R 的子集,则称$^*U$ 是弱概括的;若在上述定义中 A 是自然数集合 N,则称$^*U$ 是序列概括的或可数概括的.

弱概括的非标准全域(weak comprehensive nonstandard universe)　见“概括的非标准全域”.

序列概括的非标准全域(sequentially comprehensive nonstandard universe)　见“概括的非标准全域”.

可数概括的非标准全域(countably comprehensive nonstandard universe)　即“序列概括的非标准全域”.

分析的标准模型(standsrd model of analysis)　亦称经典分析模型. 通常的分析模型,指实数集 R 及其上的各种关系,或者说是以实数集为个体集的标准全域V(R).

经典分析模型(model of classical analysis)　即“分析的标准模型”.

分析的非标准模型(nonstandard model of analysis)　初等的非标准分析模型及高阶的非标准分析模型的统称. 设U是一个标准全域,若其个体集S包括实数域 R,则相应的非标准全域$^*U$就是一个最常用的分析的非标准模型.

***B* 模型**(B-model)　亦称 B 扩大,一种特殊的非标准模型. 设 K 是一个句子集合,T 是在 K 中出现的一切常项所成的集合,T_0 是 T 中一切共点关系的常项所成的集合,B 是 T_0 的一个子集,K 的一个模型 M 如果能使 B 中的每个共点关系常项全满足,即对于 B 中每个元素 b,存在一个常项 a 能使$(g,a)\in b$ 在 M 中都成立,其中 g 遍历 b 的定义域,则称 M 是 K 的一个 B 模型或者 B 扩大.

***B* 扩大**(B-enlargements)　即“B 模型”.

初等的非标准分析模型(elementary nonstandard model of analysis)　实数域上的一阶结构的非标准模型. 设 R 是实数域,结构 M 是实数域 R 上的一阶结构,即 M 是 R 上的一切 $n(n=0,1,2,\cdots)$ 元关系构成的集合. K 为一切在 M 中成立的句子的集合. 令 $B=\{q\}$,其中 q 指称 R 中的顺序关系,则称 K 的任何一个 B 模型为一个初等的非标准模型.

高阶的非标准分析模型(higher order nonstandard model of analysis)　实数域上的高阶结构的非标准模型. 设 R 是实数域,M 是实数域 R 上的丰满的高阶结构,即 M 是 R 上的一切 τ 型关系构成的集合. K 为一切在 M 中成立的句子的集合. 令 $B=\{q\}$,其中 q 指称 R 中的顺序关系,则称 K 的任何一个 B 模型为一个高阶的非标准分析模型. 上述分析的非标准模型,B 模型,初等的及高阶的非标准模型等概念都是非标准分析创始人鲁宾孙(Robinson,A.)于 20 世纪 60 年代初引进的.

κ次扩大的定向极限(direct limit of κ-successive enlargement)　模型逐次扩大的极限过程. 设 κ 是无限基数,归纳定义 X 的 κ 次扩大的定向极限如下:令 $X^0=X$ 是原超结构,令 $i_0^1:X^0\to X^1$ 是 X^0 的扩大. 若 λ 是一个基数,$\lambda\leqslant\kappa$,并且当 $\alpha<\beta<\gamma<\lambda$ 时,扩大 $i_\alpha^\gamma:X^\alpha\to X^\gamma$ 已定义且满足复合等式 $i_\alpha^\gamma=i_\beta^\gamma\circ i_\alpha^\beta$. 分两种情形归纳如下:

1. 若 $\lambda=\gamma+1$,令 $i_\gamma^{\gamma+1}:X^\gamma\to X^{\gamma+1}$是 X^γ 的扩大并定义 $i_\alpha^\lambda=i_\gamma^{\gamma+1}\circ i_\alpha^\gamma,\alpha<\gamma$.

2. 若 λ 是一个极限序数,首先取个体集 X_0^λ 等价于并$\bigcup[X_0^\alpha|\alpha<\lambda]$,即令

$$X_0^\lambda=\bigcup[X_0^\alpha|\alpha<\lambda]/\sim$$

$$(x\sim y \text{ 当且仅当 } i_\alpha^\beta(x)=y).$$

其次,归纳定义 i_α^λ(按超结构的层次)

$$i_\alpha^\lambda(A)=\{i_\beta^\lambda(x)\,|\,x\in i_\alpha^\beta(A)\}/\sim.$$

集合 $A\in X^\kappa$ 是 α 标准的,若 $A=i_\alpha^\kappa(B),B\in X^\alpha$,即 A 是第 α 个扩大中的元素的*-像;集合 $A\in X^\kappa$ 是 α 内的,若 A 是某个 α 标准集的元素. 术语“标准的”及“内的”指“0 -标准”的与“0 -内的”.

多扩大(polyenlargement)　一种特殊的非标准模型. 超结构扩张$^*:X\to Y$ 是多扩大,如果它是 κ 次扩大的定向极限,其中 κ 是一个正则基数,满足 $\kappa>\text{card}(X)$.

多扩大的饱和性(saturation property of polyenlargements)　关于多扩大具有饱和性的一个命题. 设$^*:X\to Y$ 是一个多扩大,设 $\mathscr{F}$ 是一个内集 Y 的一些内子集构成的族,它具有有限交性质并且 $\text{card}(\mathscr{F})\leqslant\text{card}(X)$,则$\bigcap(F\,|\,F\in\mathscr{F})\neq\varnothing$,即$^*X$ 是 card(X)饱和的.

多扩大的概括性(comprehension property of polyenlargements)　关于多扩大具有概括性的一个命题. 设$^*:X\to Y$ 是一个多扩大,设 $f\in Y$ 是一个外函数并且假定 f 的定义域满足

$$\text{card}(\text{dom}(f))\leqslant\text{card}(X),$$

设 D 与 R 是内集,且 $D\supset\text{dom}(f)$,$R\supset\text{rag}(f)$,则 f 有内扩张 $F:D\to R$,使得对每个 $x\in\text{dom}(f)$,$F(x)=f(x)$,即$^*X$ 是概括的.

亨森引理(Henson lemma)　关于模型同构的一个引理. 该引理断言:对于每个其常量及关系个数少于 $\text{card}^+(X)$($\text{card}^+(X)$是 card(X)的后继基数)的一阶语言 L,若 A 与 B 是 L 的初等价结构,它的定义域与关系是多扩大$^*X$ 的内实体,并且 $\text{card}(A)=\text{card}(B)$,则 A 与 B 是同构的.

非标准微积分

非标准微积分(nonstandard calculus)　在分析的非标准模型中展开的微积分. 实数域 R 及其上的各种关系构成的数学结构称为分析的标准模型. 在这个模型中展开的微积分,即在实数域 R 上展开的

微积分称为标准微积分. 超实数域*R 及其上的各种关系构成的数学结构称为分析的非标准模型. 在这个模型中展开的微积分,即在超实数域*R 上展开的微积分称为非标准微积分或无限小微积分.

分析的非标准模型与分析的标准模型有密切的联系. 首先,分析的非标准模型是标准模型的真扩张,标准模型中的一切关系都可以自然地扩张到非标准模型中. 特别地,超实数域*R 是实数域 R 的真扩张;其次,在标准模型中成立的任何一个可形式化的命题 ψ,其相应的命题$^*\psi$(即把 ψ 中出现的每个常量的符号换成其相应的自然扩张的符号)在非标准模型中也成立,反之亦然. 例如命题

$$(\forall x,y\in \mathrm{R})(\exists z\in \mathrm{R})\ (x+y=z)$$

在标准模型中成立,故其相应的命题在非标准模型中也成立,即

$$(\forall x,y\in {}^*\mathrm{R})(\exists z\in {}^*\mathrm{R})\ (x+y=z),$$

这就是所谓的转换原理. 这个原理就是莱布尼茨(Leibinz,G. W.)所说的"用于有限实数的法则也适用于无限实数,并且倒过来也对"这个原理的精确化. 这个精确化澄清了持续三百多年的关于微积分基础方面的一个重大的引起长期争论的含糊不清的问题,这正是鲁宾孙(Robinson,A.)的重大功绩之一. 由转换原理可知,作为分析的非标准模型的基础的超实数域与实数域在一定的范围内具有完全相同的性质. 那么超实数域*R 与实数域 R 有些什么不同呢?首先,因为*R 含有无限大的数,所以它是非阿基米德的;其次,*R 不是完备的,而 R 是完备的. 这些不同之点是否与转换原理相矛盾呢? 所谓 R 是阿基米德的,就是下述命题成立:

$$(\forall x\in \mathrm{R})(\exists n\in \mathrm{N})\ (x<n),$$

其中 N 是自然数的集合. 人们说*R 不是阿基米德的,就是说,上述命题对*R 不成立,即

$$(\exists x\in {}^*\mathrm{R})(\forall n\in \mathrm{N})\ (n\leqslant x),$$

这只要取 x 等于正无限大即可. 但这个事实并不与转换原理矛盾,转换原理保证命题

$$(\forall x\in {}^*\mathrm{R})(\exists n\in {}^*\mathrm{N})\ (x<n)$$

在*R 中仍然成立,即对每个超实数,一定存在一个比它大的超自然数. 关于非完备性的情况类似.

非标准微积分的特点在于人们可以自由地使用无限小的数与无限大的数来陈述概念和进行推理. 这样既保证了有限情形与无限情形的统一,又保证了数学上的严格性,使概念的数学定义更加接近它的直观含义,使数学推理更加简明自然. 下面以函数连续性的非标准特征及导数与积分的非标准特征来说明非标准微积分的特点.

由转换原理可知,在标准模型中的每一个函数 f:R→R 在非标准模型中有一个像$^*f$:*R→*R,并且$^*f$ 是 f 的一个扩张. 注意在不致混淆的情况下,通常人们总是把$^*f$ 也写成 f. 所谓一个函数是连续的,其直观的意义是当自变量无限接近时,其函数值也无限接近,即若 $x\approx a$ 时,有 $f(x)\approx f(a)$,则说 $f(x)$在点 a 连续. 但在标准微积分中,这个概念的叙述不可能是如此直截了当的,而是"$\forall\varepsilon\in \mathrm{R}^+,\exists\delta\in \mathrm{R}^+,\forall x\in \mathrm{R},|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon$". 可以证明,这两种说法是等价的.

类似地,人们可以给出导数与积分的非标准特征. 所谓一个函数是可导的,就是当自变量无限接近时,其差商有限且无限接近,即当 $x\approx a,x\neq a,y\approx a,y\neq a$,时,有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\approx\frac{f(y)-f(a)}{y-a}.$$

容易证明,这些差商的标准部分就是函数在点 a 的标准意义下的导数,即

$$f'(a)={}^\circ\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right),\ x\approx a,\ x\neq a.$$

所谓一个函数的积分就是无限求和,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x={}^\circ\left(\sum_{k=1}^{\lambda}f(x_k)\Delta x_k\right),$$

其中 $a,b\in \mathrm{R},\lambda\in {}^*\mathrm{N}\backslash\mathrm{N},a=x_0,x_1=a+(b-a)/\lambda,\cdots,x_n=b$ 是$^*[a,b]$的一个分割,$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$.

由上述过程可以看出,利用分析的非标准模型,人们不仅可以对无限接近这个直观概念提供一个更好的严格的数学表达,而且可以把无限问题有限化,把连续问题离散化.

非标准微积分的思想及其基本内容均由非标准分析的创始人鲁宾孙(Robinson,A.)于 20 世纪 60 年代初提出. 1966 年出版的第一本非标准分析专著《非标准分析》(鲁宾孙著)专门有一章叙述非标准微积分. 1976 年出版了可供大学生使用的非标准微积分教材《初等微积分》(开斯勒(Keisler,H. J.)著),这本教材先后在美国威斯康辛大学及其他大学试用过,得到了好评. 同年出版了配合上述教材的教师用书《无限小微积分基础》(开斯勒著). 1979 年出版了更加通俗易懂的供大学生使用的非标准微积分教材《无限小微积分》(亨内(Henle,J. M.)及克莱因伯尔格(Kleinberg,E. M.)著). 此后出版的非标分析专著中都有少量关于非标准微积分的论述.

无限小微积分(infinitesimal calculus) 即"非标准微积分".

超实数公理(axioms for hyperreal numbers) 指超实数域公理化定义中的公理系统. 若三元组(R,*R,$*$)满足如下四条公理,则 R 称为实数域,*R称为超实数域,$*$ 称为自然扩张映射:

公理 A:R 是一个完备的有序域;

公理 B:*R 是 R 的真的有序域扩张;

公理 C:(函数公理)对于每个 n 元实函数 f,存

在一个对应的 n 元超实函数 $^*f$，$^*f$ 称为 f 的自然扩张. *R 的域运算是 R 的域运算的自然扩张；

公理 D：(解公理) 如果两组公式有相同的实数解，则它们有相同的超实数解. 例如，实数的平方根函数由下述规则定义：$\sqrt{x}=y$ 当且仅当 $\{y^2=x, 0\leqslant y\}$. 由解公理，其自然扩张 $^*\sqrt{\ }$ 由同样的规则所定义，只是 x 和 y 取超实数而已. 解公理实际上就是转换原理.

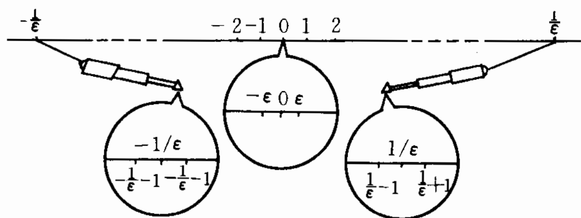
由上述四条公理定义的超实数域可以有任意大的基数，因而不是惟一确定的. 这与实数域是惟一的完备有序域不同. 为了确定起见，需要另一个公理：

公理 E：(饱和公理) 设 S 是由等式和不等式构成的集合，其基数小于 R 的基数. 这些等式和不等式只涉及实函数、超实数和变元，若 S 的每个有限子集有超实数解，则 S 有超实数解.

满足上述公理 A 到公理 E 并且 *R 的基数是第一个非可数的不可达基数时，(R，*R，$*$) 在精确到同构的意义下是惟一确定的. 上述公理系统及定理是开斯勒(Keisler，H. J.)于 1976 年给出的.

超实数域(hyperreal number field)　实数域 R 在分析的非标准模型中的自然扩张，记为 *R. 超实数域与实数域一个重要区别是：尽管实数域与超实数域都有各种不同的建立办法，但精确到序同构，实数域是惟一的，而超实数域不是惟一的. 容易证明，在 κ 饱和的非标准全域中的无限内集至少具有基数 κ，因而在这个模型中，*R 至少具有基数 κ. 由于在拓扑学的研究中，需要任意大基数的非标准全域，因而不能固定 *R 的基数. 但是，如果只是研究非标准微积分，任何一个超实数域即可.

超实数轴(hyperreal axis)　即超实数直线. 在标准情况下，直线上的点可与实数一一对应，并认为所有实数由小而大可以从左至右排在直线上，这样的直线称为实数轴. 类似地，也可以假设直线上的点与超实数一一对应，并认为所有超实数由小而大可以从左至右排在直线上，这样的直线称为超实数轴，见下图. 在通常实数轴上，可以标出一部分整数及某些小数. 若要标出很小的数及很大的数，那就需要把图形放大或缩小. 同样的道理，为了看到无限小的数或无限大的数，需要借助无限小显微镜及无限大望

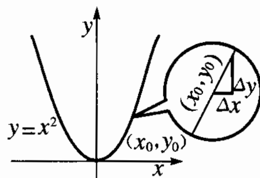


远镜. 在图上，中间的圆面是对应 0 的无限小显微镜，人们看到了无限小 $-\varepsilon$ 及 ε，为了看到无限小 ε，人们需要放大倍数为 $1/|\varepsilon|$ 倍的无限小显微镜. 图上两侧的圆面是分别对应无限大数 $-1/\varepsilon$ 及 $1/\varepsilon$ 的无限大望远镜.

无限小显微镜(infinitesimal microscopes)　一种映射. 它把超实轴上或超平面上的一无限小部分映为实轴上或实平面上的一部分，用来观察超实轴上或超平面上的无限小部分的几何结构. 以平面为例，设 (a,b) 是超平面上一点，δ 是一个正无限小，对着 (a,b) 的 δ 无限小显微镜是一个映射 m：

$$m(a+\delta x, b+\delta y)=(x,y)\ (x^2+y^2\leqslant 4).$$

m 把 (a,b) 映为 $(0,0)$，把中心在 (a,b)，半径为 2δ 的圆面映为中心在原点、半径为 2 的圆面，放大倍数为 $1/\delta$，但保持方向不变. 例如，若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的导数为 S，则对着 $(x_0, f(x_0))$ 的无限小显微镜如右图. $f'(x_0)=S$ 当且仅当在对着 $(x_0, f(x_0))$ 的任意无限小显微镜中，曲线 $y=f(x)$ 的像是斜率为 S 的直线.



无限大望远镜(infinite telescopes)　一种映射. 它把超实轴或超平面上无限远处的一部分映为实轴上或实平面上一部分. 以平面为例，设 (a,b) 是超实平面上无限远处的一点，即 a^2+b^2 是无限大，对着 (a,b) 的无限大望远镜是一个映射 t：$t(a+x, b+y)=(x,y)$. t 把 (a,b) 映为 $(0,0)$，把中心在 (a,b)、半径为 2 的圆面映为中心在原点、半径为 2 的圆面，即保持距离又保持方向，见“超实数轴”的图.

函数公理(function axiom)　见“超实数公理”.

解公理(solution axiom)　见“超实数公理”. 它是转换原理的初等形式.

饱和公理(saturation axiom)　见“超实数公理”.

部分实数解(partial real solution)　实数解集的子集. 设 T 是一组公式，其变元为 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n$. 实数构成的 k 元组 $(c_1, c_2, \cdots, c_k)$ 称为 T 的部分实数解，如果它可以扩展为 T 的实数解 $(c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots, c_n)$.

部分超实数解(partial hyperreal solution)　超实数解集的子集. 设 T 是一组公式，其变元为 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n$. 超实数构成的 k 元组 $(c_1, c_2, \cdots, c_k)$ 称为 T 的部分超实数解，如果它可以扩展为 T 的超实数解 $(c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots, c_n)$.

部分解定理(partial solution theorem)　解公理的一个推论. 该推论断言：设 S 是一组公式，其变元为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$. T 也是一组公式，其变元为 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n$. 则下述命题等价：

1. S 的每个实数解是 T 的部分实数解.

2. S 的每个实数解是 T 的部分超实数解.

3. S 的每个超实数解是 T 的部分超实数解.

标准实数(standard real numbers) 即通常的实数. 设 R 是实数域, *R 是超实数域, 则 R⊂*R. R 中的元素称为标准实数. *R 中的其他元素称为非标准实数.

非标准实数(nonstandard real numbers) 见"标准实数".

无限小(infinitesimal) 亦称无穷小, 指其绝对值小于任何正实数的数. 设 $x\in{}^*$R, 若对每个正实数 r, $|x|<r$, 则称 x 是无限小. 若存在实数 r, 有 $|x|<r$, 则称 x 是有限数. 若对每个实数 r, $|x|>r$, 则称 x 是无限大. 显然, x 是无限大当且仅当 x^{-1} 是无限小.

无穷小(infinitesimal) 即"无限小".

无限大(infinite) 亦称无穷大. 见"无限小".

无穷大(infinite) 即"无限大".

无限接近(infinitely close) 设 $x,y\in{}^*$R, 若 $x-y$ 是无限小, 则称 x 与 y 无限接近, 记为 $x\approx y$. 更一般地, 设 X 是豪斯多夫拓扑空间, $^*X$ 是 X 在 *-映射下的像. p,q 是 $^*X$ 中的两个点. 若 p 与 q 属于同一个单子, 则称 p 与 q 无限接近, 记为 $p\approx q$.

单子(monad) 亦称晕. 相互无限接近的点的集合. 设 $x\in$R, 集合 $M(x)=\{y\in{}^*\text{R}\,|\,x\approx y\}$ 称为 x 所在的单子. 任意两个单子或者相等或者不交. 单子 $M(0)$ 是一切无限小之集. 容易证明单子 $M(0)$ 是 $^*R$ 的子环, 是银河 $G(0)$ 的理想, 即无限小的和、差、积仍然是无限小, 有限数与无限小的乘积是无限小. 更一般地, 设 (X,τ) 是一个拓扑空间, a 是 X 的一个元素, a 的单子是 $^*X$ 的一个子集 $M(a)=\bigcap\{{}^*O\,|\,a\in O, O\in\tau\}$. 这个概念是鲁宾孙(Robinson, A.)研究非标准拓扑时提出的, 后来由卢森伯尔格(Luxemburg, W. A. J.)扩张到任意的集族. 设 $\mathscr{A}$ 是标准全域中的任一个集族, 则 $\mu(\mathscr{A})=\bigcap\{{}^*A\,|\,A\in\mathscr{A}\}$ 与 $\gamma(\mathscr{A})=\bigcup\{{}^*A\,|\,A\in\mathscr{A}\}$ 分别称为 $\mathscr{A}$ 的交单子与并单子.

晕(halo) 即"单子".

银河(galaxy) 相互距离为有限的点构成的集合. 设 *R 是超实数域, $a\in{}^*$R, *R 中与 a 距离为有限的点构成的集合称为 a 所在的银河, 记为 Gal(a) 或 $G(a)$. 若 X 是度量空间, 则在 $^*X$ 中也可类似地定义银河概念. 任意两个银河或者相等或者不交. 银河 $G(0)$ 是有限超实数之集. 容易证明, 银河 $G(0)$ 是 *R 的子环, 即有限超实数的和、差、积仍然是有限超实数.

标准部分公理(standard part axiom) 关于有限超实数与标准实数之间关系的一个公理. 该公理断言: 超实数域 *R 中每个有限数无限接近于惟一的实数.

标准部分定理(standard part theorem) 关于有限超实数与实数的关系的一个定理. 该定理断言: 设 x 是任意一个有限超实数, 则存在惟一的实数 r, 使得 x 与 r 无限接近, 记为 $r=\text{st}(x)$ 或 $r={}^\circ x$. r 称为 x 的标准部分.

标准部分(standard part) 亦称影. 见"标准部分定理". 设 x,y 是任意两个有限超实数, 则它们的标准部分之间有下列关系:

1. $\text{st}(x+y)=\text{st}(x)+\text{st}(y)$.

2. $\text{st}(x-y)=\text{st}(x)-\text{st}(y)$.

3. $\text{st}(xy)=\text{st}(x)\text{st}(y)$.

以上三条说明标准部分函数是环 $G(0)$ 到实数域上的同态.

4. 若 $\text{st}(y)\neq 0$, 则 $\text{st}(x/y)=\text{st}(x)/\text{st}(y)$.

5. 若 $y=\sqrt[n]{x}$, 则 $\text{st}(y)=\sqrt[n]{\text{st}(x)}$.

6. 若 $x\leqslant y$, 则 $\text{st}(x)\leqslant\text{st}(y)$.

影(shadow) 即"标准部分".

标准部分映射(standard part map) 有限超实数集到实数集的一个映射. 设 Fin(*R)是一切有限超实数集, 则映射 st: Fin(*R)→R, $\text{st}(y)=x$, 当且仅当 $x\approx y$, 称为标准部分映射. x 称为 y 的标准部分. 这个概念可推广到一般拓扑空间. 设 X 是拓扑空间, $^*X$ 是 X 的自然扩张, ns($^*X$)是 $^*X$ 中的一切近标准点集, 则映射 st: ns($^*X$)→X, $\text{st}(y)=x$, 当且仅当 $x\approx y$, 即 y 属于 x 的单子, 称为标准部分映射.

超实数存在定理(existence theorem for hyperreal numbers) 关于超实数存在的一个定理. 该定理断言: 设 R 是实数域, 则存在 R 的有序域扩张 *R 及 * 映射, 满足超实数公理 A 到公理 D.

超实数域的惟一性定理(uniqueness theorem for hyperreal number field) 关于超实数域惟一性的定理. 该定理断言: 满足超实数公理 A 到公理 E, 并且 *R 的基数是第一个非可数的不可达基数时, (R, *R, *)在精确到同构的意义下是惟一的.

超结构的初等部分(elementary part of superstructure) 超结构的个体集及个体集上的一切 n $(n=1,2,\cdots)$ 元关系构成的子集合. 设 V(R)是以 R 为个体集的超结构, 其子集

$$\text{R}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{P}(\text{R}^n)$$

称为超结构 $V(R)$ 的初等部分, 其中 $\mathscr{P}(\text{R}^n)$ 是 R^n 的幂集.

***映射的初等部分**(elementary part of *-map) *映射在超结构的初等部分上的局限. *映射是 *: V(R)→$^*V$(R). *映射的初等部分是:

$^*J: \mathsf{R} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}(\mathsf{R}^n) \to {}^*V(\mathsf{R}), {}^*J(x) = {}^*x.$

初等扩张原理(elementary extension principle) 转换原理在*映射的初等部分的局限. 转换原理就是: $V(\mathsf{R})$中的句子φ在$V(\mathsf{R})$中为真, 当且仅当$^*\varphi$在$^*V(\mathsf{R})$中为真. 初等扩张原理断言: $V(\mathsf{R})$的初等部分中的句子, 即R的一阶谓词中的句子在R中为真, 当且仅当$^*\varphi$在$^*\mathsf{R}$中为真. 超结构的初等部分、*映射的初等部分及初等扩张原理是开斯勒(Keisler, H. J.)于1976年在《无穷小分析基础》一书中提出的.

扩张定理(extension theorem) 超实数域到超结构的扩张定理. 该定理断言: 设$(\mathsf{R}, {}^*\mathsf{R}, *)$满足超实数公理A到公理D, 则存在超结构嵌入$*: V(\mathsf{R}) \to V({}^*\mathsf{R})$, 满足转换原理并且前面的$*$映射是后面的$*$映射的初等部分.

饱和的超结构嵌入(saturated superstructure embedding) 具有饱和性的超结构嵌入. 一个超结构嵌入$*: V(\mathsf{R}) \to V({}^*\mathsf{R})$称为是饱和的, 若其基数小于$^*\mathsf{R}$的基数的由内集构成的族$X$的每个有限子集有非空交, 则$X$有非空交.

超结构嵌入存在定理(existence theorem for superstructure embeddings) 关于超结构嵌入存在性的定理. 该定理断言: 存在满足转换原理的超结构嵌入$*: V(\mathsf{R}) \to V({}^*\mathsf{R})$.

超结构嵌入惟一性定理(uniqueness theorem for superstructure embeddings) 关于超结构嵌入惟一性的定理. 该定理断言: 在精确到同构的意义下, 存在惟一的超结构嵌入$*: V(\mathsf{R}) \to V({}^*\mathsf{R})$, 使得:

1. $*$满足转换原理.
2. $*$是饱和的.
3. $^*\mathsf{R}$与所有内集的族的基数均为第一个非可数的不可达基数.

序列有界的非标准特征(the nonstandard characterization of bounded sequences) 用序列元素的有限性刻画序列的有界性. 实数序列$\{a_n\}$有界, 当且仅当其自然扩张$^*\{a_n\}$的每个元素有限.

序列的极限点的非标准特征(the nonstandard characterization of the limit points of sequences) 用序列的无限远处的项刻画序列的极限点. 设$\{a_n\}$是实数序列, a是它的极限点当且仅当存在无限大自然数n, 有$a \approx a_n$.

序列收敛的非标准特征(the nonstandard characterzation of the convergence of a sequence) 用序列的无限远处的项刻画序列的极限. 实数序列$\{a_n\}$以a为极限当且仅当对于每个无限大的下标n, $a_n \approx a$. 在这个命题中, 人们用到了两个序列: 一个是通常的实数序列$\{a_n\}_{n \in \mathsf{N}}$; 另一个是这个序列在非标准全域$^*U$中的*像$\{a_n\}_{n \in {}^*\mathsf{N}}$, 通常也简记为$\{a_n\}$.

二重序列收敛的非标准特征(the nonstandard characterization of the convergence of double sequences) 用二重序列的无限远处的项刻画它的极限. 二重实数序列$\{a_{nm}\}$收敛到a的充分必要条件是对所有无限大自然数n, m, 有$a_{nm} \approx a$.

函数在一点处有界的非标准特征(the nonstandardcharacterization of the boundedness of a function at a point) 用函数在一个点的单子内的有限性刻画它在该点某邻域内的有界性. 实函数$f(x)$在x_0有界(即$f(x)$在x_0的某邻域内有界), 当且仅当其自然扩张$^*f(x)$在x_0的单子内有限.

极限的非标准特征(the nonstandard characterization of limit) 用无限接近刻画函数的极限. 设$f(x)$是实函数, 则

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

当且仅当$x \approx a$, 并且$x \neq a$时, $^*f(x) \approx l$.

级数收敛的非标准特征(the nonstandard characterization of series convergence) 用无限接近刻画级数的收敛性. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收敛到S, 当且仅当对任意正无限大整数H, 有$S \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_H$. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x\, a_n$$

收敛, 当且仅当对于所有正无限大整数$H, K, H \leqslant K$, 有$a_H + \cdots + a_K \approx 0$.

连续的非标准特征(the nonstandard characterization of continuity) 用无限接近刻画函数的连续性. 函数$f: \mathsf{R} \to \mathsf{R}$在点$a \in \mathsf{R}$连续, 当且仅当对每个$x \approx a$, 有$^*f(x) \approx f(a)$.

一致连续的非标准特征(the nonstandard charcterization of uniform continuity) 用无限接近刻画函数的一致连续性. 函数$f: \mathsf{R} \to \mathsf{R}$在集合$A$上是一致连续的, 当且仅当$x, x' \in {}^*A, x \approx x'$时, $^*f(x) \approx {}^*f(x')$.

超实中间值定理(hyperreal intermediate value theorem) 超实连续函数(连续函数的自然扩张)仍具有中值性. 该定理断言: 设函数f在区间I上连续, $x, y \in {}^*I, x < y$, 并且对任意的$u \in {}^*\mathsf{R}$, 只要u在$f(x)$和$f(y)$之间, 则存在$z \in {}^*[x, y]$, 有$f(z) = u$.

超实最值定理(hyperreal extreme value theorem) 超实连续函数仍具有最值性. 该定理断言: 设函数f在区间I上连续, $x, y \in {}^*I, x < y$, 则在超实数闭区间$[x, y]$上f有最大值和最小值, 即存在$z_1, z_2 \in {}^*I, x \leqslant z_1 \leqslant y, x \leqslant z_2 \leqslant y$, 对任意$u \in [x, y]$有

$f(z_1)\geqslant f(u)$，$f(z_2)\leqslant f(u)$. 超实中间值定理及超实最值定理是开斯勒(Keisler，H. J.)在他的《无限小微积分基础》一书中使用的名称. 从内容来看，称为超实连续函数或连续函数的自然扩张的中间值定理及最值定理较为切题. 为了查阅文献方便起见，这里仍保持原名称.

S 连续(S-continuity)　超实数域上的函数的一种连续性. 函数 $f:{}^*\mathrm{R}\to{}^*\mathrm{R}$ 在点 $q\in{}^*\mathrm{R}$ 是 S 连续的，当且仅当对于每个 $p\in{}^*\mathrm{R}$，若 $p\approx q$，则 $f(p)\approx f(q)$. 若 f 在每个点 $q\in A$ 上 S 连续，则称 f 在 A 上 S 连续. 应用 S 连续的概念，可把连续性及一致连续性的特征简述如下：函数 f 在 A 上是连续的，当且仅当 ${}^*f$ 在 A 上 S 连续；函数 f 在 A 上是一致连续的，当且仅当 ${}^*f$ 在 ${}^*A$ 上 S 连续. S 连续的概念可以推广到超度量空间(即度量空间的自然扩张)，设 X,T 是两个度量空间，$f:{}^*X\to{}^*T$，$q\in{}^*X$. 对于每个 $p\in{}^*X$，若 $p\approx q$，则 $f(p)\approx f(q)$，那么称 f 在点 q 是 S 连续的. 这个概念是鲁宾孙(Robinson，A.)在他的专著《非标准分析》中引进的，后来戴维斯(Davis，M. D.)在他的《应用非标准分析》中也用到了这个概念，但他把它称为微连续.

微连续(microcontinuity)　见"S 连续".

*连续(*-continuity)　超实数域上的函数的另一种连续性. 函数 $f:{}^*\mathrm{R}\to{}^*\mathrm{R}$ 在点 $q\in{}^*\mathrm{R}$ 是*连续的，当且仅当对于任意给定的正超实数 ε，存在一个正超实数 δ，使得当 $|p-q|<\delta$，$p\in{}^*\mathrm{R}$ 时，有

$$|f(p)-f(q)|<\varepsilon.$$

显然，如果 f 在 R 上连续，则 ${}^*f$ 在 ${}^*\mathrm{R}$ 上*连续. 但 S 连续与*连续不可比较. 例如，函数 $f(x)=x^2$ 在 ${}^*\mathrm{R}$ 上*连续，但不是 S 连续的. 而函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0),\\ \eta & (x>0),\end{cases}$$

其中 η 是一个正无限小超实数，在 $x=0$ 是 S 连续的，但不是*连续的.

$\varepsilon\delta$ 连续($\varepsilon\delta$-continuity)　超度量空间中的一种连续性. 设函数 $f:{}^*X\to{}^*T$，其中 X,T 是度量空间，${}^*X,{}^*T$ 分别是 X,T 的自然扩张. 若对任意实数 $\varepsilon>0$，存在实数 $\delta>0$，使得对所有 $p\in{}^*X$，只要 $\rho(p,q)<\delta$ 就有 $\rho(f(p),f(q))<\varepsilon$，则称函数 f 在 q 是 $\varepsilon\delta$ 连续的. 如果 f 在 q 处是 $\varepsilon\delta$ 连续的，则 f 在 q 处是 S 连续的. 但其逆不成立. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\approx 0),\\ 1 & (\text{其他})\end{cases}$$

是 S 连续的，但非 $\varepsilon\delta$ 连续. 即 S 连续一般不蕴涵 $\varepsilon\delta$ 连续，但对于内函数来说，S 连续蕴涵 $\varepsilon\delta$ 连续.

可微函数的非标准特征(the nonstandard characterization of differentiable function)　用差商的无限接近刻画函数的导数. 函数 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 在点 $a\in\mathrm{R}$ 有导数 $f'(a)$，当且仅当

$$\frac{{}^*f(x)-{}^*f(a)}{x-a}\approx f'(a).$$

对所有 $x\approx a$，$x\neq a$ 成立.

无限小增量定理(infinitesimal increment theorem)　超可微函数的增量定理. 该定理断言：设 $y=f(x)$ 是实函数，$f'(x)$ 存在并且 Δx 是非零无限小，则 $\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x=\mathrm{d}y+\varepsilon\Delta x$，其中 ε 是某个无限小. 注意，此处与标准分析中不同的是，这里的 ε 是一个无限小的数，而在标准分析中，ε 是一个无限小变量.

超实中值定理(hyperreal mean value theorem)　超可微函数的中值定理. 该定理断言：设实函数 f 在区间 I 的内部可微，$x,y\in{}^*I$，$x<y$，则存在 $z\in{}^*\mathrm{R}$，$x<z<y$，有

$$f'(z)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

可积函数的非标准特征(the nonstandard characterization of integrable function)　用无限求和刻画函数的积分. 函数 $f:[a,b]\to\mathrm{R}$ 在 $[a,b]$ 上存在定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

当且仅当

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{i=1}^{\lambda}{}^*f(x_i)(x_i-x_{i-1})$$

对区间 ${}^*[a,b]$ 上的每个无限细分(即 $x_{i-1}\approx x_i$)成立，其中 λ 是无限大自然数.

无限和定理(infinite sum theorem)　连续函数与其原函数关系的定理. 设：

1. $h(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的实连续函数；
2. $B(u,w)$ 是实函数，具有可加性质：
$$B(u,w)=B(u,v)+B(v,w)$$
$$(u<v<w,u,v,w\in[a,b])；$$
3. 对 ${}^*[a,b]$ 的任意无限小子区间 $[x,x+\Delta x]$，
$$\frac{B(x,x+\Delta x)}{\Delta x}\approx h(x)；$$

则 $B(a,b)=\int_a^b h(x)\mathrm{d}x$.

非正常积分的非标准特征(the nonstandard characterization of improper integrals)　用无限接近刻画无界实函数及无限区间上实函数的积分的收敛性. 即：

1. 设函数 f 在半开区间 $[a,b)$ 上连续，非正常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to b}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是存在常数 L，对任意的 $u<b$，$u\approx b$，有 $\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\approx L$. 非正常积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to b}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$$
发散到$+\infty$的充分必要条件是对任意的
$$u<b,\ u\approx b,\ \int_a^u f(x)\mathrm{d}x$$
是正无限大数.

2.设函数f在$(a,+\infty)$上连续,非正常积分
$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$$
收敛的充分必要条件是存在常数L,对任意正无限大H,
$$\int_a^H f(x)\mathrm{d}x \approx L.$$
非正常积分
$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$$
发散到$+\infty$的充分必要条件是对任意无限大H,
$$\int_a^H f(x)\mathrm{d}x$$
是正无限大.

超实向量(hyperreal vectors) 分量为超实数的向量.设$a_1,a_2,\cdots,a_n\in{}^*\mathrm{R}$,则向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为超实向量.

无限小向量(infinitesimal vectors) 长度为无限小的超实数向量.超实数向量A称为无限小向量、有限向量或无限大向量,如果它的长度$|A|$分别是无限小、有限的或无限大.

无限大向量(infinite vectors) 见"无限小向量".

非标准拓扑

非标准拓扑(nonstandard topology) 在非标准全域中展开的拓扑学.正像使用无限小数和无限大数可使微积分的基本概念更加直观,推理更加简明一样,在非标准全域中展开拓扑学,使用单子及饱和性可使拓扑学的基本概念更加直观,推理更加简明.设(X,τ)是一个拓扑空间,其中X是任一非空集合,τ是X上的拓扑(τ是X的一些子集构成的族,空集和全集X属于τ,并且τ对有限交和任意并封闭).设空间X及实数集合R都是标准全域$V(S)$的个体集S的子集.并设相应的非标准全域${}^*V(S)$是多饱和的,即基数不超过标准全域$V(S)$的基数并且具有有限交性质的内集族的全交非空.更确切地说,若$A_j\in{}^*V(S)$,$\{A_j\}_{j\in J}$具有有限交性质,并且J的基数$\leqslant\mathrm{card}\,V(S)$,则$\bigcap\{A_j\}_{j\in J}\neq\varnothing$.此时,$X$在${}^*V(S)$中的自然扩张${}^*X$是$X$的一个合适的非标准模型.设$a\in X$,则${}^*X$的子集
$$M(a)=\bigcap\{{}^*O\,|\,a\in O\text{ 并且 }O\in\tau\}$$
称为a的单子.若$x\in M(a)$,则称x近于a或近标准于a.所有近标准点的集合记为
$$\mathrm{ns}({}^*X)=\{x\in{}^*X\,|\,\exists\, a\in X, x\in M(a)\}.$$
用单子可以成功地描述"邻近"这个概念.由开集的定义可知,一个集合是开集当且仅当它的每一个点是它的内点(点a为集合A的内点,当且仅当A是a的一个邻域,即存在$O\in\tau$,使得$a\in O\subset A$),这反映了开集是包含它的每一个点的"邻近"所有点的集合.使用单子概念,可以更直观地说成:集合A是开集当且仅当${}^*A$中的每个标准点的单子包括在${}^*A$中,即设$A\subset X$,A是开集当且仅当$\forall a\in A$,$M(a)\subset{}^*A$.事实上,若A是开集并且$a\in A$,则由单子的定义,$M(a)\subset{}^*A$.反之,若A不是开集,则存在$a\in A$,a不是A的内点,即a的每个开邻域O与A的余集的交非空:$O\cap A^c\neq\varnothing$.显然集族
$$\{{}^*O\cap{}^*A^c\,|\,a\in O, O\in\tau\}$$
具有有限交性质.由多饱和性.
$$\bigcap\{{}^*O\cap{}^*A^c\,|\,a\in O, O\in\tau\}\neq\varnothing.$$
这个集合中的任一元素属于$M(a)$,但不属于${}^*A$.

再如函数的连续性,它的直观意义是把邻近的点映为邻近的点.标准的定义如下:设$(X,\mathscr{T})$,$(Y,\mathscr{U})$是两个拓扑空间,$f:X\to Y$,f在点a连续,当且仅当对任意的$U\in\mathscr{U}(f(a))$($f(a)$的邻域系),存在$T\in\mathscr{T}(a)$(a的邻域系),使得$f(T)\subset U$.这类似于用ε-δ来描述实连续函数.使用单子及饱和性可直接陈述为:f在点a连续,当且仅当${}^*f(M(a))\subset M(f(a))$,即把单子映到单子内.非标准方法在研究拓扑空间的紧性方面有更大的优点.可以证明,拓扑空间X是紧的当且仅当${}^*X$的所有点是近标准点.这就把开集覆盖的性质转化为点集的性质.利用这个性质,很容易证明与紧性有关的定理,例如,吉洪诺夫定理——紧空间的乘积仍是紧空间.

开集的非标准特征(the nonstandard characterization of open sets) 用单子刻画开集.设A是拓扑空间X的一个子集,则A是开集,当且仅当对每个$a\in A$,其单子$M(a)\subset{}^*A$.

闭集的非标准特征(the nonstandard characterization of closed sets) 用无限接近刻画闭集.设A是拓扑空间X的一个子集,则A是闭集,当且仅当$a\in X$无限接近于某个$x\in{}^*A$时,有$a\in A$.

闭包的非标准特征(the nonstandard characterization of closure) 用单子刻画闭包.设A是拓扑空间X的一个子集,点a属于A的闭包$\overline{A}$当且仅当a的单子$M(a)$与${}^*A$的交非空.

聚点的非标准特征(the nonstandard characterization of accumulation points) 用单子刻画聚点.设A是拓扑空间X内的一个子集,则x是A的聚点,当且仅当x的单子$M(x)$至少包含一个点$z\in{}^*A\backslash\{x\}$.

网收敛的非标准特征(the nonstandard characterization of net convergence) 用单子刻画网收敛. 拓扑空间 X 中的网 $\{S_n|n\in J\}$(定向集 J 到拓扑空间 X 的映射)收敛到 a,当且仅当对每个 $b\in {}^*J\backslash J$ 有 $f(b)\in M(a)$,其中 $M(a)$ 是 a 的单子.

网的聚点的非标准特征(the nonstandard characterization of cluster points of nets) 用单子刻画网的聚点. 设 $\{S_n|n\in J\}$ 是拓扑空间 X 中的一个网(定向集 J 到拓扑空间 X 内的映射),则 a 是网 $\{S_n|n\in J\}$ 的聚点的充分必要条件是,对某个 $n\in {}^*J\backslash J$,有 $f(n)\in M(a)$,其中 $M(a)$ 是 a 的单子.

边界的非标准特征(the nonstandard characterization of boundary) 用单子刻画边界点. 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集,点 a 属于 A 的边界,当且仅当 a 的单子 $M(a)$ 和 ${}^*A$ 及 ${}^*(X\backslash A)={}^*X\backslash {}^*A$ 都有公共点.

紧集的非标准特征(the nonstandard characterization of compact sets) 用无限接近刻画紧集. 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集,则 A 是紧集,当且仅当 ${}^*A$ 的每个点无限接近于 A 的某个点.

紧空间的非标准特征(the nonstandard characterization of compact spaces) 用近标准点刻画拓扑空间的紧性. 拓扑空间 X 是紧的,当且仅当 ${}^*X$ 的所有点是近标准点,即 ${}^*X$ 的每一点无限接近于 X 的某个点.

豪斯多夫空间的非标准特征(the nonstandard characterization of Hausdorff spaces) 用单子刻画豪斯多夫空间. 拓扑空间 X 是豪斯多夫空间,当且仅当不同点的单子不交.

正则空间的非标准特征(the nonstandard characterization of regular spaces) 用单子刻画拓扑空间的正则性. 拓扑空间 (X,τ) 是正则的充分必要条件是,X 中的每一闭集 S 和 $X\backslash S$ 中的每一点 a 有 $M(S)\cap M(a)=\varnothing$,其中 $M(a)$ 是 a 的单子,

$$M(S)=\bigcap\{{}^*A\in\tau|S\subset A\}.$$

正规空间的非标准特征(the nonstandard characterization of normal spaces) 用单子刻画拓扑空间的正规性. 拓扑空间 (X,τ) 是正规的充分必要条件是,X 中的任意两个不相交的闭集 S_1,S_2 的单子不交,即 $M(S_1)\cap M(S_2)=\varnothing$,其中

$$M(S_i)=\bigcap\{{}^*A|A\in\tau,S_i\subset A\}.$$

乘积拓扑的非标准特征(the nonstandard characterization of the product topology) 用无限接近刻画乘积拓扑. 设 X 是 $X_i(i\in I)$ 的乘积拓扑空间,$f\in X,g\in {}^*X$,则 $g\approx f$ 当且仅当对每个 $i\in I$,有 $g(i)\approx f(i)$,即乘积空间中两个点无限接近,当且仅当它们的各坐标无限接近. 利用紧性及乘积拓扑的非标准特征,很容易证明吉洪诺夫定理——紧空间的乘积仍是紧空间.

Q 拓扑(Q-topology) 超拓扑空间(即拓扑空间的自然扩张)中的一种拓扑. 设 (X,τ) 是一个拓扑空间. ${}^*X$ 的内开子集(即 ${}^*\tau$ 的元素)构成 ${}^*X$ 的一个拓扑基,这个基对应的拓扑称为 ${}^*X$ 的 Q 拓扑. 相应的拓扑概念都冠以字母 Q. 例如,Q 开集,Q 内部,Q 边界,Q 连续等. 一般地,${}^*X$ 的内开集不构成 ${}^*X$ 的拓扑,因为可能有些内开集的并不是内集. 例如,一个单子内的所有内开集的并是这个单子,但单子一般不是内集. 可是 ${}^*X$ 和空集都是内开集,并且任意两个内开集的交仍是内开集,即 ${}^*X$ 的内开子集构成 ${}^*X$ 的一个拓扑基.

S 拓扑(S-topology) 超度量空间(即度量空间的自然扩张)中的一种拓扑. 设 T 是度量空间,其度量为 ρ. 设 $p\in {}^*T, r\in \mathsf{R}^+$(正实数集合),则集合 $S(p,r)=\{q\in {}^*T|\rho(p,q)<r\}$ 称为一个 S 球. 容易证明,两个 S 球的交中的任一点都是这个交之中的另一个 S 球的中心. 于是诸 S 球构成一个拓扑基,其相应的拓扑称为 ${}^*T$ 的 S 拓扑. 相应的拓扑概念均冠以字母 S. 例如,S 开集,S 内部,S 边界,S 极限,S 连续等. 因为度量空间是拓扑空间,所以超度量空间中还有超拓扑空间中的 Q 拓扑. 一般地,Q 拓扑比 S 拓扑更精细. 事实上,${}^*T$ 中的 Q 拓扑可以看成以 ${}^*T$ 中的开球的集为基的拓扑. 设 D 是 ${}^*T$ 中的一个内开集,则对于每个点 $p\in D$,存在一个以 p 为中心,$r\in {}^*\mathsf{R}^+$(超正实数集合)为半径的开球 B,使 $B\subset D$,而 D 就是所有这种开球的并. 因为每个 S 球可以看成一些开球的并,所以每个 S 开集是 Q 开集.

S 极限(S-limit) 在 S 拓扑下的极限. 设函数 $f(x)$ 定义在 D 上,$D\subset T$,取值在 S 中,T,S 均是度量空间,p 是 D 的 S 闭包中的一个点,称 ${}^*S$ 中的点 s 是当 x 趋于 p 时 $f(x)$ 的 S 极限,如果对每一个标准实数 $\varepsilon>0$,存在一个标准实数 $\delta>0$,使得 $D\backslash\{p\}$ 中所有的点 q,若 $\rho(p,q)<\delta$,则 $\rho(f(q),s)<\varepsilon$.

近标准点(near standard points) 指与标准点无限接近的点. 设 (X,τ) 是一个拓扑空间,${}^*X$ 是 X 在 * 映射下的像,p 是 ${}^*X$ 中的一个点,若存在 X 中的点 q,使得 p 无限接近 q,则称 p 是近标准点. 否则,p 称为遥远点.

遥远点(remote points) 见"近标准点".

遥远性定理(remoteness theorem) 关于遥远点存在性的一个定理. 该定理断言:设 $\{p_n|n\in {}^*\mathsf{N}\}$ 为 ${}^*X$ 中的一个内点列,$r>0$ 为实数,若对于一切 $j\neq k(j,k\in\mathsf{N}^+)$,$\rho(p_j,p_k)\geq r$,则存在某个 $n\in {}^*\mathsf{N}$,p_n 是遥远点. 简单地说,带有限下标的项之间距离大于某个正实数的内序列之中必有遥远点.

度量空间中柯西列的非标准特征(nonstandard characterization of Cauchy sequences of metric spaces) 用无限接近刻画度量空间中的柯西列.度量空间中的点列$\{S_n\}$是柯西列当且仅当对任意的ν, $\mu\in {}^*\mathrm{N}\backslash\mathrm{N}$,有$S_\nu\approx S_\mu$,即度量空间中的一个点列是柯西列当且仅当它的带无限下标的项相互无限接近.

度量空间的完备性的非标准特征(nonstandard characterization of completeness of metric spaces) 用非近标准点刻画度量空间的完备性.度量空间X是完备的当且仅当${}^*X$的每个非近标准点与X隔离,即对于${}^*X$的每个非近标准点p,存在正实数r,使得$\rho(p,X)\geqslant r$.

度量空间中有界集的非标准特征(nonstandard characterization of bounded subsets of metric spaces) 用有限性刻画有界性.度量空间X的子集B是有界的当且仅当${}^*B$的每个元素是有限的($p\in {}^*X$是有限点当且仅当存在$q\in X$,使得$\rho(p,q)$是有限的).由紧集及有界集的非标准特征,容易看出,在度量空间中紧集是有界的.

等度连续的非标准特征(nonstandard characterization of equicontinuity) 用S连续刻画等度连续.设X,T是两个度量空间,$f_n:X\to T$,函数列$\{f_n\}$在X上是等度连续的,当且仅当对于每个$n\in {}^*\mathrm{N}$, f_n在${}^*X$上S连续.

逼近定理(approximation theorem) 用内函数逼近连续函数的一个定理.该定理断言:设X和T均为度量空间,X是紧的.$f:{}^*X\to {}^*T$是S连续的内函数,并且对于一切$p\in X$,$f(p)$是近标准的,若令$F(p)=\mathrm{st}(f(p))(p\in X)$,则$F$在$X$上连续,而且对于每个$p\in {}^*X$,${}^*F(p)\approx f(p)$.

非标准测度论

非标准测度论(nonstandard measure theory) 建立在非标准全域上的测度理论.非标准测度论的发展可分为三个阶段:

第一阶段是20世纪60年代,鲁宾孙(Robinson, A.)给出了实数集合勒贝格可测的非标准特征:实数集合A是勒贝格可测的,当且仅当存在*闭集$F\subset {}^*\mathrm{R}$及*开集$G\subset {}^*\mathrm{R}$,使得$F\subset {}^*A\subset G$,并且${}^*m(F)\approx {}^*m(G)$.此时,$m(A)={}^\circ({}^*m(G))$.勒贝格积分可以表示为一个超有限求和的标准部分:设$f:[0,1]\to\mathrm{R}$是勒贝格可测的,$f(x)\leqslant k\ (x\in[0,1])$.令$-k=y_0<y_1<\cdots<y_H=k$是${}^*(-k,k)$的一个超有限分划,$y_i\approx y_{i+1}(i=0,1,2,\cdots,H-1)$,则

$$\int f\mathrm{d}m={}^\circ\Big(\sum_{i=1}^{H}y_i\ {}^*m\{x\,|\,y_{i-1}\leqslant {}^*f(x)<y_i\}\Big).$$

第二阶段是20世纪70年代前半期,瓦特伯尔格(Wattenberg, F.)及伯恩施坦(Bernstein, A. R.)用一种特殊的计数测度来表示勒贝格测度.设X是标准全域中的任一集合,S是${}^*X$的一个超有限子集,对于${}^*X$的每个内子集A,定义

$$\nu_s(A)=\frac{|A\cap S|}{|S|},$$

其中$|S|$是S的内基数.显然,ν_s是${}^*X$的内子集上的一个内的可加概率测度,其标准部分${}^\circ\nu_s$是${}^*X$的内子集上的一个标准的有限可加概率测度.可以证明,存在一个$S\subset {}^*[0,1]$,使得对每个勒贝格可测集$B\subset[0,1]$,有

$$m(B)={}^\circ\nu_s({}^*B)={}^\circ(|{}^*B\cap S|/|S|).$$

S称为勒贝格样板.

第三阶段是20世纪70年代后期,劳勃(Loeb, P.)应用$\aleph_1$饱和性提出的一类以内集为支集的测度空间理论——劳勃测度.现在已广泛地应用于测度扩张、测度表示、随机分析、量子场论等许多领域.

内的有限可加测度空间(internal finitely additive measure spaces) 以内集为支集的有限可加测度空间.设Y是内集,$\mathscr{A}$是Y的内子集构成的族,$\mathscr{A}$是内集并且是一个代数,同时$\nu:\mathscr{A}\to {}^*\mathrm{R}^+$是有限可加的内映射,则$\mathbf{Y}=(Y,\mathscr{A},\nu)$称为内的有限可加测度空间.

劳勃测度空间(Loeb measure spaces) 一类以内集为支集的测度空间.设$\mathbf{Y}=(Y,\mathscr{A},\nu)$是内的有限可加测度空间.定义${}^\circ\nu:\mathscr{A}\to\mathrm{R}^+$,${}^\circ\nu(A)={}^\circ(\nu(A))$.容易证明,存在${}^\circ\nu$到$\sigma(\mathscr{A})$(由$\mathscr{A}$产生的$\sigma$代数)的惟一的$\sigma$可加扩张$\lambda$,满足

$$\lambda(B)=\inf\{{}^*\nu(A)\,|\,B\subset A,A\in\mathscr{A}\}.$$

设$L(\mathscr{A})$是$\sigma(\mathscr{A})$关于测度λ的完备化,$L(\nu)$是λ到$L(\mathscr{A})$的扩张,则测度空间$L(\mathbf{Y})=(Y,L(\mathscr{A}),L(\nu))$称为由$\mathbf{Y}$产生的劳勃测度空间,$L(\mathscr{A})$称为劳勃$\sigma$代数,$L(\mathscr{A})$中的集合称为劳勃可测的,$L(\nu)$称为劳勃测度.

劳勃测度(Loeb measures) 见"劳勃测度空间".

内逼近定理(internal approximation theorem) 描述劳勃可测集与内可测集关系的一个定理.该定理断言:设$L(\mathbf{Y})=(Y,L(\mathscr{A}),L(\nu))$是由$\mathbf{Y}=(Y,\mathscr{A},\nu)$产生的劳勃测度空间,$B\subset Y$,则$B$是劳勃可测的充分必要条件是存在一个集合$A\in\mathscr{A}$,使得$L(\nu)(A\triangle B)=0$,其中$A\triangle B$是$A$与$B$的对称差.

超有限劳勃空间(hyperfinite Loeb spaces) 应用广泛的一类劳勃测度空间.其空间的支集是超有限内集的劳勃空间.设Y是超有限内集,$\mathscr{A}$是Y的所有内子集之集,$\delta:Y\to {}^*(0,1)$,并且满足

$$\sum_{y\in Y}\delta(y)=1,\ \nu(A)=\sum_{y\in A}\delta(y)\ (A\in\mathscr{A}),$$

则 $\mathbf{Y}=(Y,\mathscr{A},\nu)$ 是一个内的有限可加测度空间，其对应的劳勃测度空间 $L(\mathbf{Y})$ 称为超有限劳勃空间.

超有限计数空间(hyperfinite counting spaces) 其测度为计数测度的超有限劳勃空间. 若在超有限劳勃空间中(参见"超有限劳勃空间")，令 $\delta(y)=1/|Y|$，其中 $|Y|$ 是 Y 中元素个数(即 Y 的内基数)，则称 $\nu(A)=|A|/|Y|$ 为计数测度，其相应的劳勃空间称为超有限计数空间.

劳勃提升定理(Loeb lifting theorem) 描述外函数与内函数关系的一个定理. 该定理断言：设 $f:Y\to\mathbb{R}$，则 f 是劳勃可测的充分必要条件是它与某个内的 $\mathscr{A}$ 可测函数 $F:Y\to{}^*\mathbb{R}$ 几乎处处相等. 函数 F 称为函数 f 的一个提升.

劳勃积分定理(Loeb integration theorem) 描述可测函数的积分与它的提升的积分关系的定理. 该定理断言：设 $f:Y\to\mathbb{R}$ 是一个劳勃有界可测函数，F 是 f 的一个有界提升，则

$$\int f\mathrm{d}\nu_L = {}^\circ\!\int F\mathrm{d}\nu.$$

***S* 测度**(S-measure) 超实数集 ${}^*\mathbb{R}$ 中的一种测度. 设 D 为 ${}^*\mathbb{R}$ 内的一个点集，它可以是内的或外的，假定存在 $\mathbb{R}$ 中的可测集 B，有 $D\subset{}^*B$. 定义 D 的外 S 测度 $\mathrm{Som}(D)$ 为一切包含 D 的标准开集的测度的下确界，D 的内 S 测度 $\mathrm{Sim}(D)$ 为包含于 D 内的一切标准闭集的测度的上确界. 显然，$\mathrm{Sim}(D)\leqslant\mathrm{Som}(D)$. 若有 $\mathrm{Sim}(D)=\mathrm{Som}(D)$，则称 D 是 S 可测，并且称此共同值为 D 的 S 测度，用 $\mathrm{Sm}(D)$ 记之. 易证，若 $B\subset\mathbb{R}$，则 ${}^*B$ 是 S 可测的当且仅当 B 是勒贝格可测的，而且其值相等. S 测度是鲁宾孙(Robinson, A.)于 20 世纪 60 年代初引入的. 这是在劳勃测度出现之前的非标准测度论中的主要概念.

非标准泛函分析

非标准泛函分析(nonstandard functional analysis) 建立在非标准全域上的泛函分析. 非标准分析一出现，就在泛函分析方面取得了巨大的成就. 1961 年非标准分析出现，1966 年，伯恩施坦(Bernstein, A. R.)与鲁宾孙(Robinson, A.)用非标准方法解决了一个长期悬而未决的不变子空间问题. 20 世纪 30 年代，冯·诺伊曼(von Neumann, J.)证明了希尔伯特空间上的紧算子具有非平凡的不变子空间. 于是，非紧算子是否具有不变子空间的问题便提出来了，但是一直没有大的进展. 1966 年，伯恩施坦及鲁宾孙证明了：若 T 是希尔伯特空间 l^2 上的一个多项式紧算子，则 l^2 中存在非平凡的空间 E，有 $T(E)\subset E$.

非标准方法展现了一种十分美妙的思想，即用一个可以使用有限维线性代数的结果的空间从上面逼近一个无穷维空间. 有限维线性代数中的结果指的是不变性定理：设 E 是 m 维的有限维线性空间，T 是 E 上的一个线性算子，则存在一个链

$$\{0\}=E_0\subset E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_m=E,$$

其中 $\dim(E_i)=i$，而每个 E_i 对 T 是不变的. 从上面逼近 l^2 的空间是超有限空间. 设 $\mathscr{E}$ 是 l^2 的有限维子空间之集，$E_\nu\in{}^*\mathscr{E}$，$\nu\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$，$\dim(E_\nu)=\nu$. 应用转换原理于上述不变性定理，可得到一个内序列

$$\{0\}=E_0\subset E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_\nu,$$

$\dim(E_i)=i$，每个 E_i 对 ${}^*T$ 是不变的. 进一步可以证明 ${}^\circ E_j(j=0,1,2,\cdots,\nu)$ 是 l^2 的关于 T 不变的闭线性子空间，其中

$${}^\circ E_j=\{x\in l^2 \mid 存在\ y\in E_j, x\approx y\}.$$

最后，可证明上述 ${}^\circ E_j(j=0,1,2,\cdots,\nu)$ 之中至少有一个是非平凡的.

伯恩施坦-鲁宾孙定理(Bernstein-Robinson theorem) 关于不变子空间的一个定理. 该定理断言：设 T 是希尔伯特空间 l^2 上的一个多项式紧算子，则 l^2 中存在非 $\{0\}$、非 l^2 的一个闭线性子空间 E，有 $T(E)\subset E$. 20 世纪 30 年代，冯·诺伊曼(von Neumann, J.)证明了希尔伯特空间上的紧算子具有非平凡的不变子空间. 于是非紧算子是否具有不变子空间的问题便提出来了，但是一直没有大的进展. 1966 年，伯恩施坦(Bernstein, A. R.)及鲁宾孙(Robinson, A.)首先用非标准分析证明了上述结果. 所谓算子 T 是多项式紧的，指 T 是有界线性算子并且对某个多项式 $P(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_nx^n$ $(C_0,C_1,\cdots,C_n\in\mathbb{C})$，算子 $P(T)$ 是紧的.

广义函数的非标准实现(nonstandard realization of generalized functions) 把广义函数表示为具体的非标准分析中的函数. 众所周知，像 δ 函数这一类函数，在应用数学中是十分有用的，但在标准分析中却不能把它表示为一个具体的函数. 为此，施瓦兹(Schwarz, H. A.)等人建立了广义函数论，把每一个 δ 函数定义为满足一定条件的一个线性泛函，实现了这一类函数的严格定义. 在非标准分析中，δ 函数可以定义为一个通常的函数. 例如 $\sqrt{a/\pi}\mathrm{e}^{-ax^2}$，其中 a 是任意一个正无限大实数. 这些函数可以自然地进行加、减、乘、除等. 避免了在标准分析中甚至难以定义广义函数的乘法的困难，从而为广义函数的研究开辟了一条更好的道路.

撰　稿　冯汉桥　师东河　陈东立　张福泰
审　阅　李邦河　吴小亚　盛立人　康多寿

小　波　分　析

小波分析(wavelet analysis)　小波分析是近期蓬勃发展起来的新的数学分支.对数学以及其他应用学科,它都产生了深远的影响.小波分析的出现,促进了不同学科、不同领域的交流,带动了交叉学科的发展,这对科学的繁荣与发展是极其重要的.

20世纪80年代初,莫莱特(Morlet,J.)等人首次提出了"小波"的概念.小波分析的思想来源于数学中的考尔德伦-赞格蒙算子、物理中的相干态、工程中的子带编码等方面的理论.因此,小波分析的出现迎合了许多不同背景的科学家和工程学家的需要,引起大家的极大兴趣.作为一种相当简单的数学工具,小波分析广泛应用于信号分析、数值分析等领域.这些广泛的应用进一步激发了人们研究小波分析的兴趣.在这种情况下,小波分析得以迅速发展.

从根本上讲,小波分析主要研究函数的表示:将函数分解为"基本函数"之和."基本函数"是由小波经过平移和伸缩得到的,而小波具有很好的局部性和光滑性,因此,人们可以通过分解系数刻画函数,分析函数局部和整体的性质.在小波分析出现之前,人们用傅里叶基、哈尔基来分解函数.傅里叶基具有很好的光滑性,但是局部性很差;哈尔基局部性很好,但光滑性很差.而小波基可以弥补二者的不足,兼有它们的优点.傅里叶分析适用的范围,小波分析也都适用,因为小波基比傅里叶基有更优越的性质,所以小波分析的应用范围更广.在信号分析中,由于小波变换在时域和频域都有很好的局部性,因此在数据压缩与边缘检测方面,小波分析是一种非常有效的方法.

小波分析的发展方兴未艾,从事小波分析研究的人越来越多.随着研究的进一步深入,小波分析还将被更加广泛、更加深入地应用于理论数学、应用数学、信号处理、图象处理与分析、语音识别与合成、分形等领域.

可允许小波(admissible wavelet)　亦称连续小波或基小波,它是满足一定条件的定义在实直线上的函数,用它可以定义连续小波变换,进而通过重构公式来表示平方可积函数.设函数 $\psi(x)\in L^2(\mathrm{R})$.若 ψ 满足可允许条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}\mathrm{d}\xi<+\infty,$$

其中 $\hat{\psi}(\xi)$ 是 ψ 的傅里叶变换,即

$$\hat{\psi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x,$$

则称 $\psi(x)$ 为可允许小波,并称

$$C_\psi=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}\mathrm{d}\xi$$

为可允许常数.因为信号(一维)和图象(二维)都可用平方可积函数来表示,所以可允许小波在信号处理和图象处理中具有基本的重要性.

基小波(basic wavelet)　即"可允许小波".

可允许条件(admissibility condition)　见"可允许小波".

可允许常数(admissibility constant)　见"可允许小波".

连续小波变换(continuous wavelet transform)　由可允许小波决定的变换.对于一个可允许小波 $\psi(x)$,$L^2(\mathrm{R})$上的连续小波变换定义为

$$T^{wav}f(a,b)=|a|^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}t,$$

其中 $a,b\in\mathrm{R},a\neq 0,\bar{\psi}$ 代表 ψ 的复共轭,$f(x)\in L^2(\mathrm{R})$.这一概念是格拉斯曼(Grassmann,H.G.)和莫莱特(Morlet,J.)在1984年首先提出的.

连续小波变换的重构公式(resolution of the identity for continuous wavelet transform)　用连续小波表示函数的基本定理.一个函数 $f(x)\in L^2(\mathrm{R})$ 可以由它的连续小波变换重构出来.关于一个可允许小波 $\psi(x)$ 的连续小波变换重构公式为

$$f(x)=C_\psi^{-1}\iint T^{wav}f(a,b)\psi^{a,b}(x)\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2},$$

其中 $\psi^{a,b}(x)=|a|^{-1/2}\psi((x-b)/a)$.

有限带宽函数(bandlimited function)　一类特殊的函数.在频谱空间中所有满足 $|\xi|\leqslant C$ 的频率 ξ 的集合称为一个频带,频谱位于这个频带的函数就称为有限带宽函数.确切地说,设 $f(x)\in L^2(\mathrm{R})$,若 $f(x)$ 的傅里叶变换 $\hat{f}(\xi)$ 具有紧支集,即存在常数 $\Omega>0$,使当 $|\xi|>\Omega$ 时 $\hat{f}(\xi)=0$,则称 $f(x)$ 为有限带宽函数.

连续窗口傅里叶变换(continuous windowed Fourier transform)　亦称短时傅里叶变换,它是在傅里叶变换积分表达式的被积函数之中加上一个窗口函数而成的,通过重构公式它可以表示平方可积函数.给定一个窗口函数 $g(t)\in L^2(\mathrm{R})$,人们把关于窗口函数 $g(t)$ 的在 $L^2(\mathrm{R})$ 上的连续窗口傅里叶变换定义为

$$T^{wav}f(w,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\bar{g}(x-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xw}\mathrm{d}x,$$

其中 $w,t\in\mathrm{R},f(x)\in L^2(\mathrm{R})$.例如,取 g 为高斯函数

$g(t)=(2\pi)^{-1}e^{-t^2/4}$，$T^{wav}f$ 在点 (w,t) 的值反映了 f 在时间 t，频率 w 点的局部信息.

短时傅里叶变换（short-time Fourier transform） 即"连续窗口傅里叶变换".

连续窗口傅里叶变换的重构公式（resolution of the identity for continuous windowed Fourier transform） 连续窗口傅里叶变换的一个基本的定理. 一个函数 $f(x)\in L^2(\mathrm{R})$ 可以由它的连续窗口傅里叶变换重构出来. 对于一个窗口函数 $g(t)$ 的连续窗口傅里叶变换，重构公式为

$$f(x)=A_g\iint T^{wav}f(w,t)g^{w,t}(x)\mathrm{d}w\mathrm{d}t,$$

其中 $A_g=(2\pi\|g\|^2)^{-1}$，$g^{w,t}(x)=g(x-t)e^{ixw}$.

消失矩（waning moments） 刻画函数的一个概念. 函数 $f(x)$ 满足 k 阶消失矩条件是指：

$$\int x^l f(x)\mathrm{d}x=0\quad(l=0,1,\cdots,k-1).$$

赫尔德连续性（Hölder continuity） 刻画函数光滑程度的一个概念. 如果对函数 $f(x)$，存在常数 $C>0$，使对任意 $x,y\in\mathrm{R}$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant C|x-y|^\alpha,$$

那么称函数 $f(x)$ 是 $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ 次赫尔德连续的，并称 α 为赫尔德指数. 通过分布导数，可以把 α 推广到实数. 信号中的高斯白噪声光滑性很差，赫尔德指数为 $-1/2$.

正则性刻画（characterization of regularity） 一个函数的赫尔德指数反映了函数的正则性，即光滑性. 小波变换的一个重要性质就是可以刻画函数的正则性. 具体表述为：如果 $\psi(x)$ 是一个具有紧支集的小波，设 $f(x)\in L^2(\mathrm{R})$ 有界并且连续，那么当且仅当存在常数 $C>0$，使

$$|T^{wav}f(a,b)|\leqslant C|a|^{1/2+\alpha}$$

成立时，$f(x)$ 是 $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ 次赫尔德连续的.

局部赫尔德连续性（local Hölder continuity） 用于分析函数的局部连续性的一个概念. 如果对于函数 $f(x)$，存在常数 $C>0$，使对任意 $h\in\mathrm{R}$，有

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|\leqslant C|h|^\alpha,$$

那么称函数 $f(x)$ 在 x_0 点是局部 $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ 次赫尔德连续的.

局部正则性刻画（characterization of local regularity） 小波变换可以刻画函数的局部光滑性，这正是可利用小波变换检测奇异点的原因. 具体表述为：设 $\psi(x)$ 是一个具有紧支集的小波，T^{wav} 是由 ψ 决定的小波变换. $f(x)\in L^2(\mathrm{R})$ 有界并且连续. 若存在 $\varepsilon>0$ 和 $0<\alpha<1$ 以及常数 $C>0$，使

$$|T^{wav}f(a,b)|\leqslant C|a|^{1/2+\varepsilon},$$

$$|T^{wav}f(a,b+x_0)|\leqslant C|a|^{1/2}\left(|a|^\alpha+\frac{|b|^\alpha}{|\log|b||}\right),$$

则 $f(x)$ 在 x_0 点是 α 次赫尔德连续的.

香农取样定理（Shannon sample theorem） 连续变量函数 $f(x)$ 不能直接用计算机处理. 选取 $f(x)$ 在离散点的值 $f(x_n)$，这个过程称为取样. 香农取样定理是针对有限带宽函数的. 该定理断言：如果 $f(x)$ 是有限带宽函数，$\mathrm{supp}\,\hat{f}\subset[-\Omega,\Omega]\ (\Omega>0)$，则 $f(x)$ 可表示为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(n\frac{\pi}{\Omega}\right)\frac{\sin(\Omega x-n\pi)}{\Omega x-n\pi}.$$

如果取 $\Omega=\pi$，则

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\frac{\sin((x-n)\pi)}{(x-n)\pi}.$$

这时，函数可由整点的函数值完全决定.

时频局部化算子（band-timelimiting operator） 把时间和频率两个空间放在一起来考虑称为时-频相空间. 时频局部化算子是一种同时实现时间和频率的局部化的算子，即在相空间上局部化的算子. 时域局部化算子 Q_T 定义为

$$(Q_Tf)(x)=\begin{cases}f(x) & (|x|\leqslant T),\\ 0 & (|x|>T).\end{cases}$$

频域局部化算子 P_Ω 定义为

$$(\hat{P}_\Omega f)(\xi)=\begin{cases}\hat{f}(\xi) & (|\xi|\leqslant\Omega),\\ 0 & (|\xi|>\Omega).\end{cases}$$

相应的时频局部化过程可以用算子 $Q_TP_\Omega Q_T$ 来刻画，其表达式为

$$(Q_TP_\Omega Q_Tf)(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-T}^{T}\frac{\sin\Omega(x-y)}{\pi(x-y)}f(y)\mathrm{d}y & (|x|\leqslant T),\\ 0 & (|x|>T).\end{cases}$$

该时频局部化算子是紧算子，它的特征值和特征函数可以准确计算出来.

窗口傅里叶变换局部化算子（localization operator for windowed Fourier transform） 通过窗口傅里叶变换实现的一种时频局部化算子. 给定一个函数 $g(t)\in L^2(\mathrm{R})$，相应的窗口傅里叶变换局部化算子 L_S 定义为

$$L_S=\frac{1}{2\pi}\iint_S(\cdot,g^{w,t})g^{w,t}\mathrm{d}w\mathrm{d}t,$$

其中 $g^{w,t}(x)=g(x-t)e^{ixw}$，$(\cdot,\cdot)$ 是 $L^2(\mathrm{R})$ 中的内积，S 是 R^2 中的一个可测子集.

作为一种特殊情况，可以取 $g(t)$ 为高斯函数：$g_0(x)=\pi^{-1/4}\exp(-x^2/2)$，并取

$$S=S_R=\{(w,t)\,|\,w^2+t^2\leqslant R^2\}.$$

这时 $L_S=L_{S_R}$ 的特征值 $\lambda_n(R)$ 是不完全 Γ 函数

$$\lambda_n(R)=\frac{1}{n!}\int_0^{R^2/2}s^n e^{-s}\mathrm{d}s,$$

相应的特征函数是埃尔米特函数

$$\varphi_n(x)=(\sqrt{\pi}\,2^n n!)^{-1/2}\left(x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

它提供了另一种时频局部化的方法，在窄带雷达设计中经常被运用.

小波变换局部化算子(localization operator for wavelet transform) 通过连续小波变换实现的一种时频局部化算子. 给定一个可允许小波 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$，相应的小波变换局部化算子 L_S 定义为

$$L_S=C_\psi^{-1}\iint_S[(\cdot,\psi^{a,b})\psi^{a,b}]\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2},$$

其中$(\cdot,\cdot)$是 $L^2(\mathbf{R})$中的内积，而

$$\psi^{a,b}(x)=|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

S 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个可测子集.

人们可以取 $\psi(x)$，使它的傅里叶变换为

$$\hat{\psi}(\xi)=\begin{cases}2\xi\mathrm{e}^{-\xi} & (\xi\geqslant 0),\\ 0 & (\xi<0).\end{cases}$$

并取 $S=S_C=\{(a,b)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}\,|\,a^2+b^2+1\leqslant 2aC\}$，$C\geqslant 1$. 这时小波变换局部化算子可写为

$$L_C=L_{S_C}$$
$$=C_\psi^{-1}\iint_{S_C}[(\cdot,\psi_+^{a,b})\psi_+^{a,b}+(\cdot,\psi_-^{a,b})\psi_-^{a,b}]\frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2},$$

其中 $\psi_+=\psi$，$\hat{\psi}_-(\xi)=\hat{\psi}(-\xi)$. L_C 的特征值为

$$\lambda_n(C)=(n+1)\left(1-\frac{2}{C+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{2}{C+1}+\frac{1}{n+1}\right),$$

对应的两个特征函数 ψ_n^+，ψ_n^- 的傅里叶变换分别是

$$(\psi_n^+)^\wedge(\xi)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}\xi\mathrm{e}^{-\xi}L_n^2(2\xi) & (\xi\geqslant 0),\\ 0 & (\xi<0),\end{cases}$$

$$(\psi_n^-)^\wedge(\xi)=(\psi_n^+)^\wedge(-\xi).$$

其中 L_n^2 是拉盖尔多项式.

$$L_n^\alpha(x)=\sum_{m=0}^n(-1)^m\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(\alpha+m+1)}\frac{1}{m!}x^m.$$

人们可取实函数

$$\psi_n^e=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n^++\psi_n^-),$$

$$\psi_n^o=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\psi_n^+-\psi_n^-)$$

作特征函数.

小波变换局部化算子提供了又一种时频局部化的方法，它在宽带雷达设计中应用广泛.

框架(frame) 希尔伯特空间中具有某种性质的一组向量. 希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 的一组向量$(\varphi_j)_{j\in J}$，如果存在常数 $0<A,B<+\infty$，使对任意 $f\in\mathscr{H}$，满足

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{j\in J}|(f,\varphi_j)|^2\leqslant B\|f\|^2,$$

则称$(\varphi_j)_{j\in J}$为框架，并称常数 A 为$(\varphi_j)_{j\in J}$的下界，B 为$(\varphi_j)_{j\in J}$的上界.

紧框架(tight frame) 上下界相等的框架. 对于希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 的一组向量$(\varphi_j)_{j\in J}$，如果存在常数 $A>0$，使对任意 $f\in\mathscr{H}$，满足

$$\sum_{j\in J}|(f,\varphi_j)|^2=A\|f\|^2,$$

那么称$(\varphi_j)_{j\in J}$为紧框架.

框架算子(frame operator) 由框架决定的算子. 如果$(\varphi_j)_{j\in J}$是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 的框架，框架算子 $F:\mathscr{H}\to l^2(J)$定义为

$$(Ff)_j=(f,\varphi_j),$$

其中 $l^2(J)=\{c=(c_j)_{j\in J}\,|\,\sum_{j\in J}|c_j|^2<+\infty\}$.

对偶框架(dual frame) 由一个框架诱导出的另一种框架. 如果$(\varphi_j)_{j\in J}$是希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 的框架，F^*是框架算子 F 的共轭算子，有

$$A\mathrm{id}\leqslant F^*F\leqslant B\mathrm{id},$$

其中 id 表示恒等算子. 令 $\tilde{\varphi}_j=(F^*F)^{-1}\varphi_j$，称$(\tilde{\varphi}_j)_{j\in J}$是$(\varphi_j)_{j\in J}$的对偶框架. 这时对任意 $f\in\mathscr{H}$，有

$$f=\sum_{j\in J}(f,\varphi_j)\tilde{\varphi}_j=\sum_{j\in J}(f,\tilde{\varphi}_j)\varphi_j,$$

即可用对偶框架表示希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 中的元素.

离散小波变换(discrete wavelet transform) 由可允许小波决定的另一种变换. 对于一个可允许小波 $\psi(x)$，在 $L^2(\mathbf{R})$上的离散小波变换定义为

$$T_{m,n}^{wav}f=a_0^{-m/2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\bar{\psi}(a_0^{-m}t-nb_0)\mathrm{d}t,$$

其中 $m,n\in\mathbf{Z}$，$a_0>1$，$b_0>0$ 为常数，$f(x)\in L^2(\mathbf{R})$.

小波框架(wavelet frame) 由小波产生的框架. 设 $\psi(x)$为一个可允许小波，若

$$\{\psi_{m,n}(x)=a_0^{-m/2}\psi(a_0^{-m}x-nb_0)\,|\,m,n\in\mathbf{Z}\}$$

构成 $L^2(\mathbf{R})$的框架，即存在常数 $0<A,B<+\infty$，使对任意 $f(x)\in L^2(\mathbf{R})$，均有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}|(f,\psi_{m,n})|^2\leqslant B\|f\|^2,$$

则称$\{\psi_{m,n}\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$为小波框架.

对偶小波框架(dual wavelet frame) 一类特殊的对偶框架，互为对偶的两个框架均由小波产生. 假设 $\psi(x)$为可允许小波，使得$\{\psi_{m,n}\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$是小波框架. 若存在可允许小波 $\tilde{\psi}(x)$，使得$\{\tilde{\psi}_{m,n}\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$是$\{\psi_{m,n}\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$的对偶框架，则称$\{\tilde{\psi}_{m,n}\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$是$\{\psi_{m,n}\}_{m,n\in\mathbf{Z}}$的对偶小波框架，这时二者互为对偶小波框架. 此外，对 $f(x)\in L^2(\mathbf{R})$，有

$$f(x)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}(f,\psi_{m,n})\tilde{\psi}_{m,n}(x)$$

$$= \sum_{m,n\in Z}(f,\tilde{\psi}_{m,n})\psi_{m,n}(x).$$

值得注意的是，不是所有小波框架都存在对偶小波框架，对偶小波框架强调的是对偶框架由一个函数经过平移和伸缩得到.

离散窗口傅里叶变换(discrete windowed Fourier transform)　离散化的窗口傅里叶变换. 对于一个给定的函数 $g(t)\in L^2(\mathrm{R})$，在 $L^2(\mathrm{R})$上的离散窗口傅里叶变换定义为

$$T_{m,n}^{wav}f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g}(x-nt_0)\mathrm{e}^{-imw_0x}\mathrm{d}x,$$

其中 $m,n\in \mathrm{Z}, w_0>0, t_0>0$ 是常数，$f(x)\in L^2(\mathrm{R})$.

窗口傅里叶变换的框架(windowed Fourier transform frame)　由傅里叶变换产生的框架. 给定窗口函数 $g(x)\in L^2(\mathrm{R})$，如果

$$\{g_{m,n}(x) = \mathrm{e}^{-imw_0x}g(x-nt_0)\,|\,m,n\in \mathrm{Z}\}$$

构成 $L^2(\mathrm{R})$的框架，即存在 $0<A,B<+\infty$，使对任意 $f(x)\in L^2(\mathrm{R})$，满足

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{m,n\in \mathrm{Z}}|(f,g_{m,n})|^2 \leqslant B\|f\|^2,$$

则称$\{g_{m,n}\}_{m,n\in \mathrm{Z}}$为窗口傅里叶框架. 此时，一定有

$$w_0t_0 \leqslant 2\pi.$$

对偶窗口傅里叶框架(dual windowed Fourier transform frame)　窗口傅里叶框架的对偶框架. 给定窗口函数 $g(x)\in L^2(\mathrm{R})$，如果

$$\{g_{m,n}(x) = \mathrm{e}^{-imw_0x}g(x-nt_0)\,|\,m,n\in \mathrm{Z}\}$$

构成 $L^2(\mathrm{R})$的窗口傅里叶框架，则一定存在函数 $\tilde{g}(x)\in L^2(\mathrm{R})$，使$\{\tilde{g}_{m,n}\}_{m,n\in \mathrm{Z}}$构成$\{g_{m,n}\}_{m,n\in \mathrm{Z}}$的对偶框架，其中 $\tilde{g}=(F^*F)^{-1}g$. 称$\{\tilde{g}_{m,n}\}_{m,n\in \mathrm{Z}}$为$\{g_{m,n}\}_{m,n\in \mathrm{Z}}$的对偶窗口傅里叶框架. 与小波框架不同的是，所有窗口傅里叶框架都存在对偶框架.

小波函数(wavelet function)　亦称正交小波函数，一种特殊的平方可积函数. 用它可构成 $L^2(\mathrm{R})$空间的规范正交基. 假定 $\psi(x)\in L^2(\mathrm{R})$，如果

$$\{\psi_{m,n}(x) = 2^{-m/2}\psi(2^{-m}x-n)\,|\,m,n\in \mathrm{Z}\}$$

构成 $L^2(\mathrm{R})$的一组规范正交基，则称 $\psi(x)$为一个小波函数. 这时称$\{\psi_{m,n}\}_{m,n\in \mathrm{Z}}$为正交小波基.

正交小波(orthonormal wavelet)　见“小波函数”.

正交小波基(orthonormal wavelet basis)　见“小波函数”.

里斯基(Reisz basis)　希尔伯特空间中满足一定条件的线性无关的向量组. 对于希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 的一组向量$(e_j)_{j\in J}$，如果$(e_j)_{j\in J}$是线性无关的，并且存在常数 $0<A,B<+\infty$，使任意 $f\in\mathscr{H}$，满足

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{j\in J}|(f,e_j)|^2 \leqslant B\|f\|^2,$$

那么称$(e_j)_{j\in J}$为里斯基.

多分辨率分析(multiresolution analysis)　由马勒特(Mallat, S.)和迈耶(Meyer, Y.)于 1987 年引入的概念. 常用的小波函数可以通过多分辨率分析(简记 MRA)得到. $L^2(\mathrm{R})$中的一列闭子空间$\{V_j\}_{j\in \mathrm{Z}}$称为多分辨率分析，如果它满足以下五个条件：

1. $\cdots\subset V_2\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}\cdots$.
2. $\bigcap_{j\in \mathrm{Z}}V_j=\{0\}$，$\overline{\bigcup_{j\in \mathrm{Z}}V_j}=L^2(\mathrm{R})$.
3. $f(x)\in V_j \Leftrightarrow f(2^jx)\in V_0$.
4. $f(x)\in V_0 \Leftrightarrow$对任意 $k\in \mathrm{Z}$，$f(x-k)\in V_0$.
5. 存在函数 $\varphi\in V_0$，使得$\{\varphi(x-n)\,|\,n\in \mathrm{Z}\}$形成 V_0 的一组里斯基.

这里 φ 是$\{V_j\}_{j\in \mathrm{Z}}$的生成元，人们称之为尺度函数.

尺度函数(scaling function)　见“多分辨率分析”.

正交多分辨率分析(orthonormal multiresolution analysis)　能产生正交小波基的多分辨率分析. 设 φ 是多分辨率分析$\{V_j\}_{j\in \mathrm{Z}}$的尺度函数，如果$\{\varphi(x-n)\,|\,n\in \mathrm{Z}\}$形成 V_0 的一组规范正交基，则称$\{V_j\}_{j\in \mathrm{Z}}$为正交多分辨率分析，一般记为正交 MRA 或 OMRA.

双尺度差分方程(two-scale difference equation)　一类尺度函数所满足的方程. 正交多分辨率分析中的尺度函数满足方程

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in \mathrm{Z}}h_n\varphi(2x-n),$$

称此方程为双尺度差分方程.

面具(mask)　与尺度函数相关的重要概念. 设尺度函数 φ 满足双尺度差分方程

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in \mathrm{Z}}h_n\varphi(2x-n),$$

把 φ 的面具定义为

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in \mathrm{Z}}h_n\mathrm{e}^{-in\xi},$$

它有时也被称为符号函数. 其中$\{h_n\}$是面具系数，称为尺度序列，是一个低通滤波器.

正交多分辨率分析的小波函数(wavelet function in orthonormal multiresolution analysis)　通过正交多分辨率分析得到的小波函数. 设$\varphi(x)$是正交 MRA 的尺度函数，$\{h_n\}$是它的低通滤波器，由 $g_n=(-1)^nh_{-n+1}$给出它的高通滤波器，用它可以定义一个函数 ψ：

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{n\in \mathrm{Z}}g_n\varphi(2x-n),$$

这个函数是一个小波函数，称为正交多分辨率分析的小波函数. 它的傅里叶变换满足 $\hat{\psi}(\xi)=m_1(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2)$，其中

$$m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in \mathrm{Z}}g_n\mathrm{e}^{-in\xi}$$

是 ψ 的面具.

迈耶小波(Meyer wavelet) 一种特殊的小波函数. 它的尺度函数 φ 的傅里叶变换定义为

$$\hat{\varphi}(\xi)=\begin{cases}(2\pi)^{1/2} & (|\xi|\leqslant 2\pi/3),\\ (2\pi)^{-1/2}\cos\left[\dfrac{\pi}{2}v\left(\dfrac{3}{2\pi}|\xi|-1\right)\right] & (2\pi/3\leqslant|\xi|\leqslant 4\pi/3),\\ 0 & (\text{其他}),\end{cases}$$

其中 v 是光滑函数,且满足以下条件:

$$v(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0),\\ 1 & (x\geqslant 1),\end{cases}$$

$$v(x)+v(1-x)=1.$$

小波函数 $\psi(x)$ 的傅里叶变换为

$$\hat{\psi}(\xi)=\sqrt{2\pi}e^{i\xi/2}[\hat{\varphi}(\xi+2\pi)+\hat{\varphi}(\xi-2\pi)]\hat{\varphi}(\xi/2).$$

$\psi(x)$ 称为迈耶小波,它是无穷可微函数,比任意阶逆多项式衰减得快,并且傅里叶变换具有紧支集.

迈耶小波是迈耶(Meyer,Y.)于 1985 年构造的正交小波.

拜特-雷默瑞小波(Battle-Lemarié wavelets) 亦称正交样条小波,一种特殊的正交小波,它与由样条函数生成的多分辨率分析相关联. 设 φ 是 N 阶 B 样条函数,其傅里叶变换定义为

$$\hat{\varphi}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}e^{-ik\xi/2}\left(\sin\frac{\xi}{2}\Big/\frac{\xi}{2}\right)^{N+1},$$

其中

$$k=\begin{cases}0 & (N\text{ 为奇数}),\\ 1 & (N\text{ 为偶数}).\end{cases}$$

取尺度函数为 $\varphi^{\#}(x)$, $\varphi^{\#}$ 定义为

$$\hat{\varphi}^{\#}(\xi)=\hat{\varphi}(\xi)\left[2\pi\sum_{l\in Z}|\hat{\varphi}(\xi+2\pi l)|^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$\hat{\varphi}(x)$ 所对应的小波函数 $\psi(x)$ 称为拜特-雷默瑞小波,它是 $N-1$ 次可微的、指数衰减的正交小波.

劳顿条件(Lawton's condition) 判断尺度函数正交性的一个条件. 设 $m_0(\xi)$ 是形如

$$m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{N}h_n e^{-in\xi}$$

的三角多项式,定义 $(2N-1)\times(2N-1)$ 阶矩阵 $A=(A_{lk})$:

$$A_{lk}=\sum_{n=0}^{N}h_n\bar{h}_{k-2l+n}$$

$$(-N+1\leqslant l,k\leqslant N-1).$$

若 A 的特征值 1 是非退化的,则称 $m_0(\xi)$ 满足劳顿条件,它由劳顿(Lawton,W.)于 1990 年提出.

劳顿定理(Lawton's theorem) 判断尺度函数正交性的基本定理. 劳顿定理断言:若 $m_0(\xi)$ 是形如

$$m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{N}h_n e^{-in\xi}$$

的三角多项式,满足

$$|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1,\ m_0(0)=1.$$

定义 φ 为这样的函数,其傅里叶变换为

$$\hat{\varphi}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{\infty}m_0(2^{-j}\xi),$$

则 $\{\varphi(x-n)|n\in Z\}$ 是规范正交的当且仅当 $m_0(\xi)$ 满足劳顿条件.

科恩条件(Cohen's condition) 判定尺度函数正交性的一个条件. 对于一个紧集 K,如果 $|K|=2\pi$,且对任意 $\xi\in[-\pi,\pi]$ 都存在 $l\in Z$,使 $\xi+2\pi l\in K$,那么称 K 为与 $[-\pi,\pi]$ 是 2π-同余的. 对于 $m_0(\xi)\in C[-\pi,\pi]$,如果存在与 $[-\pi,\pi]$ 同余的紧集 K,K 以 O 为内点,以及常数 $C_0>0$,使得

$$\inf\{|m_0(2^{-j}\xi)|\,|j\geqslant 0,\xi\in K\}\geqslant C_0,$$

那么称 $m_0(\xi)$ 满足科恩条件. 这个条件是科恩(Cohen,A.)于 1990 年提出的.

科恩定理(Cohen's theorem) 判断尺度函数正交性的重要定理. 设 $m_0(\xi)$ 是三角多项式,满足

$$|m_0(\xi)|^2+|m_0(\xi+\pi)|^2=1,\ m_0(0)=1.$$

定义 φ 为这样的函数,其傅里叶变换为

$$\hat{\varphi}(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\prod_{j=1}^{\infty}m_0(2^{-j}\xi),$$

则 $\{\varphi(x-n)|n\in Z\}$ 是规范正交的当且仅当 $m_0(\xi)$ 满足科恩条件.

尺度序列的完全重构条件(perfect reconstruction condition for scaling sequence) 尺度序列的一种刻画条件,它能保证信号变换后的完全重构. 序列 $(h_n)_{n\in Z}$ 满足完全重构条件是指 $(h_n)_{n\in Z}$ 满足以下两个条件:

1. 正交条件: $\sum_{n\in Z}\bar{h}_{n+2k}h_n=\delta_{0,k}$.

2. 正规条件: $\sum_{n\in Z}h_n=\sqrt{2}$.

利用完全重构条件可以构造一组有限脉冲响应滤波器 $\{h_n\}$, $\{g_n\}$,其中 $g_n=(-1)^n h_{2N-n+1}$, N 为任意整数,一般取 $N=0$. $\{h_n\}$ 是低通滤波器, $\{g_n\}$ 是高通滤波器. 用它可以分解,并完全重构序列信号.

滤波器的消失矩(vanishing moments of filter) 刻画滤波器的一个概念. 一个序列 $\{h_n\}_{n\in Z}$ 满足 k 阶消失矩条件是指

$$\sum_{n\in Z}(-1)^n n^l h_n=0\ \ (l=0,1,\cdots,k-1).$$

阶梯形算法(cascade algorithm) 用于求解双尺度差分方程的逼近算法. 给定序列 $\{h_n\}_{n\in Z}$,可以利用阶梯算法求方程

$$\varphi(x)=\sum_{n\in Z}h_n\varphi(2x-n)$$

的解. 定义 $\varphi_j^0(x)$ 为简单函数,在 $[2^{-j}(n-1/2),2^{-j}(n+1/2))$ 上为常值, $n\in Z$; $\varphi_j^1(x)$ 是分段线性函数,在 $[2^{-j}n,2^{-j}(n+1))$ 上是线性的, $n\in Z$. 算法

如下：

1. 令 $\varphi_0^\varepsilon(n)=\delta_{0,n}(n\in\mathbf{Z};\varepsilon=0$ 或 $1)$，$\varphi_0^\varepsilon(x)$ 如上定义.

2. 计算 $\varphi_j^\varepsilon(2^{-j}n)(n\in\mathbf{Z})$：

$$\varphi_j^\varepsilon(2^{-j}n)=\sum_{l\in\mathbf{Z}}h_{n-2l}\varphi_{j-1}^\varepsilon(2^{-j}n).$$

3. 按上面定义在 $\varphi_j^\varepsilon(2^{-j}n)$ 中插值，得到 $\varphi_j^\varepsilon(x)$. 令 $j\to\infty$，可得

$$\varphi=\lim_{j\to\infty}\varphi_j^\varepsilon$$

为方程的解.

阶梯形算法可用于尺度函数和小波函数的构造.

马勒特算法（Mallat algorithm） 信号的分解与重构的一种标准算法. 马勒特（Mallat，S.）在图象分解和重构的塔式算法启发下，基于多分辨率分析的框架，于 1987 年提出了马勒特算法. 设 $\varphi(x)$ 是正交 MRA 的尺度函数，满足

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z}h_n\varphi(2x-n).$$

令 $g_n=(-1)^n h_{-n+1}$，对于信号 $c^0=\{c_n^0\}\in l^2(\mathbf{Z})$ 的分解公式为 $c^j=Hc^{j-1}$，$d^j=Gc^{j-1}$，$j=1,2,\cdots,L$. L 为分解的次数，其中

$$(Hc)_k=\sum_{n\in Z}h_{n-2k}c_n,$$

$$(Gc)_k=\sum_{n\in Z}g_{n-2k}c_n.$$

重构公式为 $c^{j-1}=H^*c^j+G^*d^j$，其中

$$(H^*a)_n=\sum_{k\in Z}h_{n-2k}a_k,$$

$$(G^*a)_n=\sum_{k\in Z}g_{n-2k}a_k$$

分别是 H,G 的对偶算子.

二维马勒特算法（Mallat algorithm in two dimension） 马勒特算法在二维图象的推广. 设 $c^0=\{c^0{}_{m,n}\}_{m,n\in Z}\in l^2(\mathbf{Z}^2)$，定义 H_x,H_y 和 G_x,G_y 为算子 H,G 对行和列分别作用，分解公式为

$$c^j=H_xH_yc^{j-1},\qquad d^{j1}=G_xH_yc^{j-1},$$

$$d^{j2}=H_xG_yc^{j-1},\qquad d^{j3}=G_xG_yc^{j-1},$$

$j=1,2,\cdots,L$. L 为分解次数. 合成公式为

$$c^{j-1}=H_y^*H_x^*c^j+H_y^*G_x^*d^{j1}+G_y^*H_x^*d^{j2}+G_y^*G_x^*d^{j3}.$$

二进小波（dyadic wavelet） 一类二进制伸缩的小波，经常用于奇异性检测. 对于 $\psi(x)\in L^2(\mathbf{R})$，如果它满足稳定性条件，即存在常数 $0<A$，$B<+\infty$，使得对几乎处处的 $w\in\mathbf{R}$，有

$$A\leqslant\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^jw)|^2\leqslant B,$$

那么称 $\psi(x)$ 为一个二进小波.

稳定性条件隐含着二进小波一定是小波.

稳定性条件（stability condition） 见“二进小波”.

二进小波变换（dyadic wavelet transform） 由二进制小波决定的变换. 设 $\psi(x)$ 是二进小波，令

$$\psi_{2^j}(x)=\frac{1}{2^j}\psi\left(\frac{x}{2^j}\right).$$

这时 $f(x)$ 在尺度 2^j 上的小波变换为

$$W_{2^j}f(x)=f*\psi_{2^j}(x),$$

则称函数序列

$$Wf=\{W_{2^j}f(x)\}_{j\in\mathbf{Z}}$$

为二进小波变换. 二进小波变换是连续小波变换半离散化的结果. 人们只是把尺度因子离散化，平移因子依然连续取值.

二进重构小波（dyadic reconstructing wavelet） 一类小波函数. 对于一个给定的小波，另一个具有某种特定性质的函数称为它的二进重构小波. 给定小波函数 $\psi(x)$，若函数 $\chi(x)$ 的傅里叶变换满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(2^jw)\hat{\chi}(2^jw)=1,$$

那么称 $\chi(x)$ 为 $\psi(x)$ 的重构小波函数.

二进小波变换重构公式（resolution of the identity for dyadic wavelet transform） 二进小波变换的基本性质. 关于一个二进小波 $\psi(x)$ 的二进小波变换重构公式为

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}W_{2^j}f*\chi_{2^j}(x),$$

其中 $\chi(x)$ 为 $\psi(x)$ 的重构小波函数.

任一信号 f 可以由它的连续小波变换 $T^{wav}f$ 的值完全确定. 如果人们希望从 $T^{wav}f(a,b)$ 在 $a_j=2^j(j\in\mathbf{Z})$ 离散点的值重建信号，就要对小波加更多的限制，这就是稳定性条件.

平滑算子（smoothing operator） 一类起光滑作用的算子. 给定一个二进小波 $\psi(x)$，取重构小波 $\chi(x)$，使得对于任意 w，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\hat{\psi}(2^jw)\hat{\chi}(2^jw)$$

是正数. 引进实函数 $\varphi(x)$，使其傅里叶变换满足

$$|\hat{\varphi}(w)|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\hat{\psi}(2^jw)\hat{\chi}(2^jw),$$

这时 2^j 尺度下的平滑算子定义为

$$S_{2^j}f(x)=f*\varphi_{2^j}(x),$$

其中 $\varphi_{2^j}(x)=\frac{1}{2^j}\varphi\left(\frac{x}{2^j}\right)$.

离散二进小波变换（discrete dyadic wavelet transform） 离散信号的二进小波变换. 如果 $\psi(x)\in L^2(\mathbf{R})$ 是二进小波，信号 $D=(d_n)_{n\in\mathbf{Z}}\in l^2$，则存在 $f(x)\in L^2(\mathbf{R})$，使得 $d_n=S_1f(n)$. 离散信号序列

$$\{S_{2^J}f(n),\{W_{2^j}f(n)\}_{1\leqslant j\leqslant J}\}$$

称为 D 的离散二进小波变换. 记号 W_{2^j} 与 S_{2^j} 可分别

参见“二进小波变换”与“平滑算子”.

双正交小波基(biorthonormal wavelet basis) 正交小波基概念的推广. 设 $\varphi,\tilde{\varphi}$ 分别为两个多分辨率分析的尺度函数,相应的面具分别为

$$m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z}h_n\mathrm{e}^{-in\xi},$$

$$\widetilde{m}_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z}\widetilde{h}_n\mathrm{e}^{-in\xi},$$

$$\overline{m}_0(\xi)\widetilde{m}_0(\xi)+\overline{m}_0(\xi+\pi)\widetilde{m}_0(\xi+\pi)=1.$$

定义两个小波函数 $\psi,\tilde{\psi}$,其傅里叶变换分别为

$$\hat{\psi}(\xi)=m_1(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2),$$

$$\hat{\tilde{\psi}}(\xi)=\widetilde{m}_1(\xi/2)\ \hat{\tilde{\varphi}}(\xi/2),$$

其中

$$m_1(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z}(-1)^n h_{-n+1}\mathrm{e}^{-in\xi},$$

$$\widetilde{m}_1(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z}(-1)^n\widetilde{h}_{-n+1}\mathrm{e}^{-in\xi}.$$

如果

$$\{\psi_{m,n}(x)=2^{-m/2}\psi(2^{-m}x-n)\}_{m,n\in Z},$$

$$\{\tilde{\psi}_{m,n}(x)=2^{-m/2}\tilde{\psi}(2^{-m}x-n)\}_{m,n\in Z}$$

都是 $L^2(\mathrm{R})$的里斯基,并且

$$(\psi_{m,n},\tilde{\psi}_{m',n'})=\delta_{m,m'}\delta_{n,n'},$$

则称$\{\psi_{m,n},\tilde{\psi}_{m,n}\}$构成了 $L^2(\mathrm{R})$的双正交小波基. 这时,称 $\psi,\tilde{\psi}$ 为双正交小波,$h_n,\widetilde{h}_n$ 为双正交尺度序列,$g_n,\widetilde{g}_n$ 为双正交小波序列. 此时,对任意 $f(x)\in L^2(\mathrm{R})$有

$$f(x)=\sum_{m,n\in Z}(f,\psi_{m,n})\tilde{\psi}_{m,n}(x)$$

$$=\sum_{m,n\in Z}(f,\tilde{\psi}_{m,n})\psi_{m,n}(x).$$

具有紧支撑的正交多分辨率分析小波(哈尔小波除外)缺乏对称性,不可能是对称的或反对称的,相应的滤波器不能保持线性相位. 为了克服正交小波的这一缺点,构造具有线性相位的有限长滤波器,而引入了双正交小波的概念. 双正交小波可同时具有紧支集和线性相位.

双正交小波(biorthonormal wavelets) 见“双正交小波基”.

双正交尺度序列(biorthonormal scaling sequences) 见“双正交小波基”.

双正交小波序列(biorthonormal wavelet sequences) 见“双正交小波基”.

双正交尺度序列的完全重构条件(perfect reconstruction condition for biorthonormal scaling sequences) 双正交尺度序列的刻画条件,它们能保证信号变换后的完全重构. 序列$(h_n)_{n\in Z}$,$(\widetilde{h}_n)_{n\in Z}$满足双正交小波的完全重构条件,是指

1. 正交条件: $\sum_{n\in Z}\overline{h}_{n+2k}\widetilde{h}_n=\delta_{0,k}$.

2. 正规条件: $\sum_{n\in Z}h_n=\sum_{n\in Z}\widetilde{h}_n=\sqrt{2}$.

利用完全重构条件可以构造一组双正交小波滤波器$\{h_n\}$,$\{g_n\}$,$\{\widetilde{h}_n\}$,$\{\widetilde{g}_n\}$,其中 $g_n=(-1)^n h_{-n+1}$,$\widetilde{g}_n=(-1)^n\widetilde{h}_{-n+1}$. 滤波器组$\{h_n\}$,$\{g_n\}$用来分解信号,滤波器组$\{\widetilde{h}_n\}$,$\{\widetilde{g}_n\}$用来合成信号. 在滤波器组的构造中,两个滤波器的长度可以不同;根据实际需要,可以要求一个滤波器有对称性或反对称性,保持线性相位,而另一个满足较高的消失矩条件,具有适当的光滑性.

小波包(wavelet packets) 正交小波的一种推广. 它提供了更多可供选择的正交基. 设 φ 是正交多分辨率分析的尺度函数,ψ 是一个小波函数,满足方程

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z}h_n\varphi(2x-n),$$

$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z}g_n\varphi(2x-n),$$

令 $\varphi_0=\varphi,\varphi_1=\psi$,定义

$$\varphi_{2k}(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z}h_n\varphi_k(2x-n),$$

$$\varphi_{2k+1}(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z}g_n\varphi_k(2x-n)$$

$$(k=1,2,\cdots),$$

函数序列$\{2^{m/2}\varphi_n(2^m x-k)\mid m,n\in \mathrm{Z}_+,k\in \mathrm{Z}\}$称为小波包,其中 n 称为频率参数,m 称为尺度参数,k 称为位置参数. 此序列中,适当地选取可以构成 $L^2(\mathrm{R})$的规范正交基. 在设定的花费函数下可以选出“最好”的基,这在很多应用中是非常重要的.

对信号进行小波分解,得到高频和低频信号,再一次做小波分解时,只是对低频信号进行分解. 为了细分信号,也应对高频信号进行小波分解,这就要引入小波包的概念. 这一概念是由科伊夫曼(Coifman,R. R.)和迈耶(Meyer,Y.)提出的.

***M* 进制小波**(M-band wavelet) 由二进制小波推广而得到的一类小波. 假设 $L^2(\mathrm{R})$中的一列闭子空间$\{V_j\}_{j\in Z}$满足下面五个条件,称 φ 是正交多分辨率分析$\{V_j\}_{j\in Z}$的尺度函数:

1. $\cdots\subset V_2\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}\subset\cdots$.

2. $\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\},\overline{\bigcup_{j\in Z}V_j}=L^2(\mathrm{R})$.

3. $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(M^j x)\in V_0$.

4. $f(x)\in V_0\Leftrightarrow$对任意 $k\in \mathrm{Z},f(x-k)\in V_0$.

5. 存在函数 $\varphi\in V_0$,使得$\{\varphi_n(x)=\varphi(x-n)\}(n\in \mathrm{Z})$形成 V_0 的一组规范正交基.

记 W_j 为 V_j 在 V_{j-1}中的正交补空间,即

$$V_{j-1}=V_j\oplus W_j.$$

对于函数系$\{\psi^s\}(1\leqslant s\leqslant M-1)$,如果$\{\psi^s(x-k)\mid 1\leqslant s\leqslant M-1,k\in \mathrm{Z}\}$构成 W_0 的一组规范正交基,那么称$\{\psi^s\}(1\leqslant s\leqslant M-1)$为 M 进制小波. 这里 φ 满足双尺度差分方程

$$\varphi(x)=\sum_{n\in Z}a_{0n}\varphi(Mx-n),$$

而 ψ^s 满足方程

$$\psi^s(x)=\sum_{n\in Z}a_{sn}\varphi(Mx-n).$$

称矩阵 $(a_{ij})_{0\leqslant i\leqslant M-1,j\in Z}$ 为小波矩阵，其中 (a_{0n}) 称为尺度序列，而对所有 $1\leqslant s\leqslant M-1$，称 (a_{sn}) 为小波序列.

从尺度函数和小波函数出发，可以构造两通道的滤波器组. 若希望得到多通道的滤波器组，就需要从多进制小波出发. M 进制小波可以使尺度函数和小波函数满足某种对称性，克服二进正交小波不能保持线性相位的缺点.

小波矩阵(wavelet matrix)　见“M 进制小波”.

尺度序列(scaling sequence)　见“M 进制小波”.

小波序列(wavelet sequence)　见“M 进制小波”.

多小波(multiwavelets)　小波函数的重要推广，它由多个函数组成. 设 $L^2(\mathrm{R})$ 中的一列闭子空间 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 满足下列条件，则称其中的 $\{\varphi^a\}(a=1,2,\cdots,L)$ 为正交多分辨率分析 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 的尺度函数系：

1. $\cdots\subset V_2\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}\subset\cdots$.

2. $\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\}$，$\overline{\bigcup_{j\in Z}V_j}=L^2(\mathrm{R})$.

3. $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(M^jx)\in V_0$.

4. $f(x)\in V_0\Leftrightarrow$ 对任意 $k\in Z$，$f(x-k)\in V_0$.

5. 存在函数 $\varphi^a(x)\in V_0(a=1,2,\cdots,L)$，使得 $\{\varphi^a_n(x)=\varphi^a(x-n)\,|\,a=1,2,\cdots,L,n\in Z\}$ 形成 V_0 的一组规范正交基.

记 W_j 为 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补空间，即

$$V_{j-1}=V_j\oplus W_j.$$

对于函数系 $\{\psi^s\}(1\leqslant s\leqslant L(M-1))$，如果 $\{\psi^s(x-k)\,|\,1\leqslant s\leqslant L(M-1),k\in Z\}$ 构成 W_0 的一组规范正交基，那么称 $\{\psi^s\}(1\leqslant s\leqslant L(M-1))$ 为多小波(或向量小波). $\Phi=(\varphi^1,\varphi^2,\cdots,\varphi^L)^T$ 满足双尺度差分方程

$$\Phi(x)=\sum_{n\in Z}P_n\Phi(Mx-n),$$

其中 P_n 是 $L\times L$ 的矩阵. $\Psi=(\psi^1,\psi^2,\cdots,\psi^{L(M-1)})^T$ 满足方程

$$\Psi(x)=\sum_{n\in Z}Q_n\Phi(Mx-n),$$

其中 Q_n 是 $L(M-1)\times L$ 的矩阵.

常用的小波函数从正交多分辨率分析中得到的，如果该多分辨率分析是由一个尺度函数生成的，就得到 M 进制小波(M 可以等于二)，而有时多分辨率分析是由两个或多个尺度函数生成的，这时得到的小波成为多小波. 设 M 为一个正整数. 人们可以要求有些尺度函数为严格对称，有些为严格反对称的，并且具有很好的局部性(指有紧支集，并且支集长度较短). 人们可以要求相应的滤波器保持线性相位，长度较短. 值得说明的是：此时滤波器系数不是数，而是矩阵，这给构造滤波器提供了一种新思路.

向量小波(vector wavelets)　即“多小波”.

多维小波(multi-dimensional wavelet)　高维空间的小波. 假设 $L^2(\mathrm{R}^n)$ 中的一列闭子空间 $\{V_j\}_{j\in Z}$，满足以下五个条件，则称其中函数 φ 为正交多分辨率分析 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 的尺度函数：

1. $\cdots\subset V_2\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset V_{-2}\subset\cdots$.

2. $\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\}$，$\overline{\bigcup_{j\in Z}V_j}=L^2(\mathrm{R}^n)$.

3. $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2^jx)\in V_0$.

4. $f(x)\in V_0\Leftrightarrow$ 对任意 $k\in Z^n$，$f(x-k)\in V_0$.

5. 存在函数 $\varphi\in V_0$，使得 $\{\varphi_l(x)=\varphi(x-l)\}(l\in Z^n)$ 形成 V_0 的一组规范正交基.

记 W_j 为 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补空间，即

$$V_{j-1}=V_j\oplus W_j.$$

对于函数系 $\{\psi^s\}(1\leqslant s\leqslant 2^n-1)$，如果 $\psi_s(x-k)\,|\,1\leqslant s\leqslant 2^n-1,k\in Z^n\}$ 构成 W_0 的一组规范正交基，那么称 $\{\psi^s\}(1\leqslant s\leqslant 2^n-1)$ 为多维小波.

用张量积的方法可以构造多维小波，但通常要构造的多维小波是指不可分离变量的，它可以提取多维号的信息，在实际应用中有重要意义.

局部三角变换(local trigonometric transform)　在处理语音信号中一类重要的变换. 函数系

$$\left\{\sqrt{2}\cos\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\middle|\, n=0,1,\cdots\right\}$$

形成 $L^2[0,1]$ 的规范正交基. 通过窗口函数的折摺变换可用它们构造 $L^2(\mathrm{R})$ 的正交基. 如果 $\mathrm{R}=\bigcup_k I_k$ 是一个区间分解，$I_k=[a_k,a_{k+1}]$，$b_k(t)$ 是一个细心构造的窗口函数，支在区间 $[a_k-\varepsilon_k,a_{k+1}+\varepsilon_{k+1}]$，使得

$$\psi_{n,k}(t)=\sqrt{\frac{2}{a_{k+1}-a_k}}b_k(t)\cos\left[\frac{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-a_k)}{a_{k+1}-a_k}\right]$$

$$(n,k\in Z)$$

形成 $L^2(\mathrm{R})$ 的规范正交基，那么这种基称为局部余弦基. 类似地可构造局部正弦基. 它们通称为局部三角基，信号按这种基展开称为局部三角变换. 对每个区间 I_k，还可往下分解，对应地可构造局部三角基包. 给定花费函数可实现自适应的最好基表示. 反变换即重构过程通过反折摺变换也很容易实现. 在处理音条信号、语音信号中局部三角变换有一定优势.

撰　稿　马瑞芹　王明辉　顾　青　彭立中

审　阅　顾　青

分　形　几　何

分形几何(fractal geometry)　亦称分形分析．是研究自然科学各个领域中出现的大量不规则几何形体的新兴科学，它在数学、物理、地质、材料、生命科学和工程技术等学科中有着广泛的应用．自20世纪80年代以来，分形几何的理论研究和实际应用迅速发展，优秀成果不断出现，使得它不仅成为数学科学的一个非常活跃的分支，而且更成为前沿科学——非线性科学的一个重要组成部分．

自然界出现的诸如云层的边界，山脉的轮廓，雪花，海岸线等"不规则"几何形体，难以用经典几何中的直线、光滑曲面来描述．同时，大量不同类型的不规则几何对象常常出现在自然科学的不同领域中，如数学中解决非线性问题时出现的奇怪吸引子，流体力学中的湍流，物理中临界现象与相变，化学中酶与蛋白质的构造，生物学中细胞的生长，工程技术中的信号处理、噪声分析……长期以来，人们试图将它们纳入经典几何框架中进行研究，但人们发现，由此导出的模型即使在近似的情形，无论在理论上还是在实验中，都难以处理所接触到的实际情形．另一方面，人们已注意到不规则图形往往能提供许多自然现象更好的描述．20世纪80年代初，由芒德布罗(Mandelbrot，B.)所创立的分形几何，提供了研究这类不规则几何对象的新思想、新概念、新方法和新技巧．近几年来，这一新兴学科在数学、物理、化学、地质、材料、生命科学、工程技术等诸学科中已得到广泛应用．同时，不同学科中提出的大量问题又激励了分形几何的深入发展．特别应当指出的是，分形几何的诞生与发展对整个科学的发展有极为重要的意义，诚如斯来辛格(Shlesinger，M. F.)于1986年所指出的："20世纪的后半期似乎是科学与数学变得更加专门化的时期，令人注目的是，在前一个十年，下述两项课题使上述趋势得以逆转：非线性动力学与分形．前者涉及运动的非线性确定方程的一般普适行为，而后者则是研究自相似或自仿射对象的几何以及该几何上的动力学．两者均已应用到一系列深刻的交叉学科的问题中．"

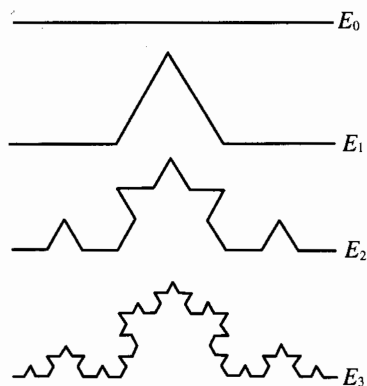
自20世纪80年代后期以来，分形几何及其相关领域取得了非常丰富的成果，特别是在自相似集性质的研究、自仿集的维数估计、2阶密度、自相似测度的傅里叶分析、分形的李普希茨等价、一些特殊集的分形结构、重分形测度分析以及测度的分形理论等方面，成果更为丰硕．

另一方面，分形物理也获得巨大进展，特别是研究在分形上(尤其是在分形晶格上)呈现的物理现象和物理性质、分形结构形成的物理机制(即探讨分形形成的物理起源)方面，成果卓著．例如：分形晶格上的磁相变和临界动力学(即临界点附近的非平衡统计问题)、反常动力学(晶格振动、无规行走、自旋波等)、紧束缚型哈密顿量的量子力学、各种系统的多重分形研究、广延耗散系统的自组织临界性等；后者则包括：各种计算机模型(扩散置限聚积模型(DLA)、介质电击模型(DBM)、解释分形生长的理论(不动点变换、分支生长、生长界面动力学(KPZ理论)、2维拉普拉斯生长映射的哈密顿动力学等)．

大数学家黎曼(Riemann，(G. F.)B.)早在19世纪就预言过："在很大尺度或很小尺度下，人们所遇到的几何学可能与普通的欧几里得几何有很大的不同"．在大尺度方面，爱因斯坦(Einstein，A.)的引力理论提供了弯曲的时空模型，在小尺度时，情况会如何？分形几何是否会部分地满足上述需求？科学家们期盼着分形几何能给出满意的答案．

分形分析(fractal analysis)　即"分形几何"．

科克曲线(Koch curve)　一种典型的分形曲线．设 E_0 为单位区间，以 E_0 的中间三分之一线段为底，向上作等边三角形，然后去掉该底(保留端点)．



由此得到的4条线段组成的图形记为 E_1；对 E_1 的每一边重复上述过程，所得到的折线多边形记为 E_2；应用同样的方式，从 E_{k-1} 得到 E_k．当 k 趋于无穷时，折线多边形序列 E_k 趋于一极限曲线 E，称为科克曲线．它是科克(Koch，H. von)于1904年构造出来的．科克曲线 E 具有如下性质：

1．曲线 E 具有"细结构"，亦即它包含对应任意小尺度下的细节，不管取多么小的尺度，60°的尖角仍然出现，只是边长相应减小(注意，用正多边形逼近圆时，相邻边夹角递增趋于180°)．这个事实表

明，曲线 E 的复杂性不随尺度的减小而消失.

2. 曲线 E 难于用经典的方法刻画，从整体上看，它既不是满足某些简单几何条件的点的轨迹，亦不能作为任一简单方程的解的集合；从局部上看，它不能通过切线来描述（事实上，曲线 E 上的点已没有经典意义下的切线）.

3. 曲线的"长度"为无穷大，而"面积"为零. 从而人们不能用通常的测度来量度它的"大小".

4. 曲线 E 具有局部与整体的对称：它由 4 个与 E 相似的部分组成，其相似因子为 1/4；而每部分由 4 个更小的但仍与 E 相似的、其相似因子为 $1/4^2$ 的部分组成……上述对称性亦称为自相似性.

5. 尽管 E 具有复杂的细结构，但它的定义非常直接，特别地，E 可以由简单的递归方式生成，而且，它的逐阶迭代 E_k 给出 E 的越来越好的近似.

性质 1，2，3 反映了科克曲线的"不规则性"，而性质 4，5 则给出了科克曲线某些"规则"的性质. 一般地，人们所讨论的分形集都具有前述的某些性质或是它们的变形.

自相似集（self-similar set） 一类具有自相似性的分形集合，是最重要的分形集类. 设 D 为 R^n 中的闭子集. 映射 $S: D \to D$ 称为 D 上的压缩映射，若存在 $c \in \mathsf{R}$，$0<c<1$，使得

$$|S(x)-S(y)| \leqslant c|x-y| \quad (x,y \in D).$$

当上述不等式中等号成立时，亦即

$$|S(x)-S(y)| = c|x-y|,$$

则 S 称为相似映射. 设 $\Phi=\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\}$ 为有限压缩族，即对于任意 j，$1 \leqslant j \leqslant m$，

$$|\varphi_j(x)-\varphi_j(y)| \leqslant c_j|x-y| \quad (x,y \in D, 0<c_j<1),$$

满足

$$F=\bigcup_{j=1}^{m}\varphi_j F \tag{1}$$

的非空紧集 F 称为压缩族 Φ 的不变集. 特别地，如果所有的 φ_j 均为相似压缩，则 F 称为自相似集. 它由具有各向同性的线性压缩族，即相似压缩族生成，其最重要的特征是它的局部与整体具有严格的相似. 自相似集在分形几何的研究中具有非常特殊的地位.

压缩映射（contracting mapping） 见"自相似集".

相似映射（similar mapping） 见"自相似集".

自仿集（affine set） 一类具有自仿性的集合. 对于沿不同方向有不同压缩系数的线性压缩族所产生的不变集称为自仿集. 具体地，若 $T: \mathsf{R}^d \to \mathsf{R}^d$ 是一个线性变换，b 是 R^d 中的一个向量，则

$$S(x)=T(x)+b \quad (x \in \mathsf{R}^d),$$

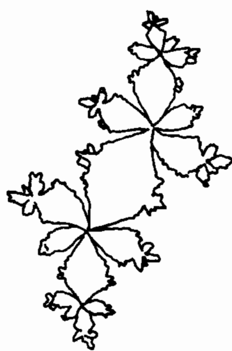
称为 R^d 上的一个仿射映射. 如果一个仿射映射还是压缩映射，则称 S 为 R^d 上的仿射压缩. 一个仿射压缩族 $\{S_i\}_{i=1}^m$ 的非空不变集称为自仿集.

自仿集可分解为若干部分，而每一部分通过一个仿射映射（即沿各个方向放大率不同的映射）与整体重合.

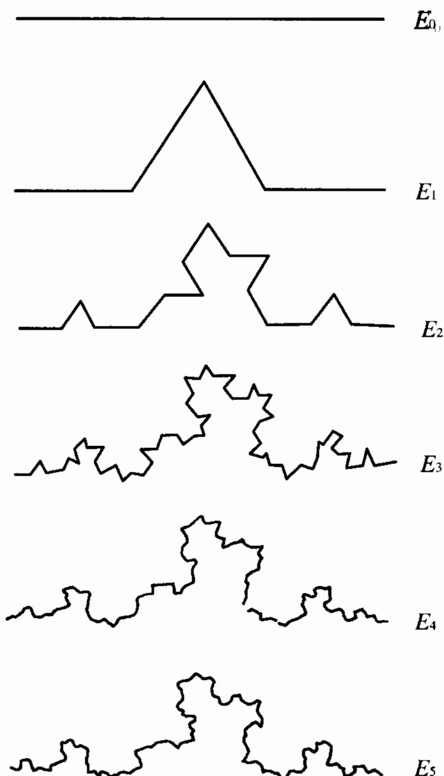
仿射映射（affine mapping） 见"自仿集".

仿射压缩（affine contracting） 见"自仿集".

准自相似集（pre-self-similar set） 一类具有准自相似性的集合. 一个集合的任意小的部分经过放大，再经光滑扭曲，可与该集的某一更大部分重合，则称为准自相似集. 例如，由 $f(z)=z^2+C$ 对适当的 C 产生的朱利亚集就是一个准自相似集，如图所示.



统计自相似集（statistics-selfsimilar set） 一类具有统计自相似性的集合. 统计自相似集在下述



意义下具有相似性：它的任意部分经放大后与整体具有相同的统计分布律.

在科克曲线生成的过程中，若每一尖角允许以相同的概率向上或向下生成，那么它的极限曲线仍然存在并具有细结构. 从如图所示上看，虽然似乎比科克曲线更"复杂"（实际上更接近自然界中的海岸

线)，但该集具有统计自相似性.

测度与维数

李普希茨映射(Lipschitz mapping)　两个测度空间之间的一种映射. 设(X_1,d_1)，(X_2,d_2)为两个度量空间，$E\subset X_1$，$f:E\to X_2$ 为由 E 到 X_2 的映射，如果存在正常数 $c>0$，$\alpha>0$，使得

$$d_2(f(x),f(y))\leqslant c(d_1(x,y))^\alpha \quad (x,y\in E),\tag{1}$$

则称 f 满足 α 阶赫尔德条件. 如果 $\alpha=1$，则 f 称为李普希茨映射，如果存在常数 $c'>0$，使得

$$c'd_1(x,y)\leqslant d_2(f(x),f(y))\leqslant cd_1(x,y)\quad (x,y\in E),$$

则 f 称为双李普希茨映射.

双李普希茨映射(double Lipschitz mapping)　见"李普希茨映射".

δ 覆盖(δ-cover)　度量空间(X,d)中的一种覆盖. 设 E 为 X 的子集，对于 $\delta>0$，X 的可列(或有限)子集族$\{U_i\}_{i\geqslant1}$称为 E 的一个 δ 覆盖，如果它满足下述二性质：任一 U_i 为直径$\{U_i\}$不超过 δ，即$|U_i|\leqslant\delta$；U_i 的并集$\bigcup\limits_{i\geqslant1}U_i$ 覆盖 E，即$\bigcup\limits_{i\geqslant1}U_i\supset E$.

豪斯多夫测度(Hausdorff measure)　分形几何中最重要的测度之一. 设(X,d)为度量空间，E 为 X 的子集，设 $s\geqslant0$，$\delta>0$，令

$$\mathscr{H}^s_\delta(E)=\inf\left\{\sum_{i\geqslant1}|U_i|^s \,\middle|\, \{U_i\}_{i\geqslant1}\text{ 为 } E \text{ 的 } \delta \text{ 覆盖}\right\},$$

这里的 inf 表示对 E 的所有的 δ 覆盖取下确界. 令

$$\mathscr{H}^s(E)=\lim_{\delta\to0}\mathscr{H}^s_\delta(E),$$

$\mathscr{H}^s(E)$称为 E 的 s 维豪斯多夫测度. 它的值可能为零、正有限或正无穷大. 如果 $0<\mathscr{H}^s(E)<+\infty$，则称 E 为 s 集.

豪斯多夫测度由豪斯多夫(Hausdorff, F.)于1919年引入. 在整数维的情形，它与勒贝格测度仅相差一个因子，而在非整数维情形，豪斯多夫测度与勒贝格测度有本质差别(它不是局部有限的，从而不是拉东测度)，但仍保留勒贝格测度的许多重要性质. 豪斯多夫测度的性质如下：

1. 设 $E\subset X_1$，$f:E\to X_2$ 满足 α 阶赫尔德条件，则对任意 $s\geqslant0$，有 $\mathscr{H}^{s/\alpha}(f(E))\leqslant c^{s/\alpha}\mathscr{H}^s(E)$. 因此，如果 f 为李普希茨映射，则 $\mathscr{H}^s(f(E))\leqslant c^s\mathscr{H}^s(E)$，如果 f 为双李普希茨映射，则
$$c'^s\mathscr{H}^s(E)\leqslant\mathscr{H}^s(f(E))\leqslant c^s\mathscr{H}^s(E).$$
特别地，R^d 中子集的豪斯多夫测度在平移及正交变换下不变.

2. 齐次性. 设 $E\subset\mathrm{R}^d$，令 $\lambda E=\{\lambda x;x\in E\}$，$\lambda>0$，则 $\mathscr{H}^s(\lambda E)=\lambda^s\mathscr{H}^s(E)$.

3. 设 $E\subset\mathrm{R}^d$，则 $\mathscr{H}^s(pV(E))\leqslant\mathscr{H}^s(E)$.

4. R^d 中任何子集的 n 维豪斯多夫测度与 n 维勒贝格测度相差一个仅与 n 有关的常数，即，若 E 是 R^n 中的波莱尔子集，则 $\mathscr{H}^n(E)=c_n\mathscr{L}^n(E)$，其中
$$c_n=n^{\frac{\pi}{2}}\Big/2^n\left(\frac{n}{2}\right)!$$
是直径为 1 的 n 维球的体积.

5. 临界性. 设 $0\leqslant s<t<\infty$，$E\subset X$，则

1) $\mathscr{H}^s(E)<\infty\Rightarrow\mathscr{H}^t(E)=0$.

2) $\mathscr{H}^t(E)>0\Rightarrow\mathscr{H}^s(E)=\infty$.

s 维豪斯多夫测度(s-dimensional Hausdorff measures)　见"豪斯多夫测度".

s 集(s-set)　见"豪斯多夫测度".

网(net)　空间 X 中的一种子集类. 设 $\mathscr{F}$ 为满足下述条件的 X 的子集类：对任意 $x\in X$ 以及对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A\in\mathscr{F}$，使得 $x\in A$ 且$|A|\leqslant\varepsilon$，则集类 $\mathscr{F}$ 称为 X 的一个网，记 X 的所有的网的集合为 $\mathscr{N}(X)$. X 的所有子集作成的网记为 $\mathscr{F}_0$.

网的 s 维豪斯多夫测度(s-dimensional Hausdorff measure of a net)　与网关联的豪斯多夫测度. 设 $\mathscr{F}\in\mathscr{N}(X)$，$E\subset X$，定义 E 关于 $\mathscr{F}$ 的 s 维豪斯多夫测度 $\mathscr{H}^s_{\mathscr{F}}(E)$为

$$\mathscr{H}^s_{\mathscr{F}}(E)=\lim_{\delta\to0}\inf\left\{\sum|U_i|^s\,\middle|\,\{U_i\}\text{ 为 } E \text{ 的 } \delta \text{ 覆盖}, U_i\in\mathscr{F}\right\}.$$

关于网的豪斯多夫维数定义为

$$\dim_{H,\mathscr{F}}E=\sup\{s\,|\,\mathscr{H}^s_{\mathscr{F}}(E)=\infty\}=\inf\{s\,|\,\mathscr{H}^s_{\mathscr{F}}(E)=0\},$$

并称为 E 关于网 $\mathscr{F}$ 的豪斯多夫维数.

网的等价(equivalence of the nets)　两个网之间的关系. 设 $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{F}_2\in\mathscr{N}(X)$，如果对任意 $E\subset X$，及任意 $s\geqslant0$，存在正常数 c_1，$c_2>0$，使得

$$c_1\mathscr{H}^s_{\mathscr{F}_1}(E)\leqslant\mathscr{H}^s_{\mathscr{F}_2}(E)\leqslant c_2\mathscr{H}^s_{\mathscr{F}_1}(E),$$

则称网 $\mathscr{F}_1$ 与网 $\mathscr{F}_2$ 等价，记为 $\mathscr{F}_1\simeq\mathscr{F}_2$. 如果

$$\mathscr{H}^s_{\mathscr{F}_1}(E)=\mathscr{H}^s_{\mathscr{F}_2}(E),$$

则称网 $\mathscr{F}_1$ 与网 $\mathscr{F}_2$ 强等价，记为 $\mathscr{F}_1\equiv\mathscr{F}_2$. 两个强等价网所导出的豪斯多夫测度相同，两个等价网导出的豪斯多夫维数相同.

网的强等价(strong equivalence of the nets)　见"网的等价".

$\mathscr{F}_0$ 的等价类(equivalent classes of $\mathscr{F}_0$)　空间 R^d 中一些集类的关系. 设 $X=\mathrm{R}^d$，令

$$\mathscr{F}_C,\ \mathscr{F}_O,\ \mathscr{F}_{CC},\ \mathscr{F}_{CB},\ \mathscr{F}_{OB}$$

分别表示 R^d 中的闭集类、开集类、闭凸集类、闭球类以及开球类. 那么

1. $\mathscr{F}_O\equiv\mathscr{F}_{CC}\equiv\mathscr{F}_C$.

2. $\mathscr{F}_O\simeq\mathscr{F}_{CB}\simeq\mathscr{F}_{OB}$.

5r 覆盖引理(5r-covering lemma) $\mathbb{R}^d$ 中闭球族的一种覆盖定理. 该引理断言:设 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中有界区域内的闭球族,则存在可列或有限个彼此不相交的子球族$\{B_i\}$,使得

$$\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B \subset \bigcup_i 5B_i,$$

其中 $5B_i$ 表示与 B_i 同心,半径为 B_i5 倍的球.

维塔利覆盖类(Vitali covering class) 空间 X 中的一种子集类. 设 $E\subset(X,d)$,$v=v(E)$为 X 的一个子集类. 如果对任意 $x\in E$ 以及任意 $\delta>0$,均存在 $U\in v$,使得 $x\in U$,且 $0<|U|\leqslant\delta$,则 v 称为 E 的一个维塔利覆盖类.

维塔利覆盖引理(Vitali covering lemma) $\mathbb{R}^d$ 中的一个覆盖定理. 该引理断言:设 E 为 $\mathbb{R}^d$ 的 $\mathscr{H}^s$ 可测子集,v 为 E 的有界闭子集成的维塔利类. 则可以从 v 中挑出(可列或有限)的不相交的集列$\{U_i\}$,使得或者$\sum|U_i|^s=\infty$,或者$\mathscr{H}^s(E\setminus\bigcup_i U_i)=0$. 如果 $\mathscr{H}^s(E)<\infty$,对任意 $\varepsilon>0$,可以要求上述集列满足

$$\mathscr{H}^s(E)\leqslant\sum_i|U_i|^s+\varepsilon.$$

有限测度子集定理(theorem of sets of finite measure) 分形几何的一个重要定理. 它有许多应用. 该定理断言:若 $E\subset\mathbb{R}^d$ 为闭集,$\mathscr{H}^s(E)=\infty$,则存在紧集 $F\subset E$,使得 $0<\mathscr{H}^s(F)<\infty$. 有限测度子集定理是由伯西柯维奇(Besicovitch, A. S.)于 1952 年获得的.

豪斯多夫维数(Hausdorff dimension) 分形几何中最重要的一种维数. 由豪斯多夫测度的定义可知,对于 $E\subset X$,存在 s 的一个临界值,使得$\mathscr{H}^s(E)$从无穷跳跃到零,此临界值称为集 E 的豪斯多夫维数,记为$\dim_H E$,其精确定义为

$$\begin{aligned}\dim_H E &= \sup\{s\,|\,\mathscr{H}^s(E)>0\}\\ &= \inf\{s\,|\,\mathscr{H}^s(E)=0\}.\end{aligned}$$

豪斯多夫维数由豪斯多夫(Hausdorff, F.)于 1919 年引入. 豪斯多夫维数的性质如下:

1. 临界性. 设 $E\subset X$. 若 $\mathscr{H}^s(E)<\infty$,则$\dim_H E\leqslant s$;若 $\mathscr{H}^s(E)>0$,则$\dim_H E\geqslant s$.

2. 单调性. 若 $E\subset F$,则 $\dim_H E\leqslant\dim_H F$.

3. σ 稳定性. 设$\{E_n\}_{n\geqslant1}$为一集列,则

$$\dim_H\bigcup_{i\geqslant1}E_n=\sup_{i\geqslant1}\{\dim_H E_n\}.$$

它的一个直接推论是任意可列集的豪斯多夫维数为零.

4. 设 $E\subset X_1$,$f:X_1\to X_2$ 为 α 阶赫尔德映射,则

$$\dim_H f(E)\leqslant\frac{1}{\alpha}\dim_H E.$$

因此,若 $E\subset X_1$,$f:X_1\to X_2$ 为李普希茨映射,则

$$\dim_H f(E)\leqslant\dim_H E.$$

特别地,若 f 为双李普希茨映射,则

$$\dim_H f(E)=\dim_H E.$$

因此,正交投影不增加集合的维数;等距映射、相似映射保持集合的维数不变.

覆盖原理(covering principle) 估计分形集的豪斯多夫维数最常用的方法. 它只要对一列特殊的覆盖类做估计,在具体问题中,经常出现"自然"的覆盖类. 该原理断言:设 $E\subset\mathbb{R}^d$,若$\{U_{k,n}\}_{n\geqslant1}$,$k\geqslant1$ 为 E 的一列 δ_k 覆盖,$\delta_k\to0$. 如果存在正常数列 c_k 使得对任意 k,$\sum_{n\geqslant1}|U_{k,n}|^s<c_k$ 且

$$\liminf_{k\to\infty} c_k<\infty,$$

此处 $\inf c_k$ 表示对固定 k 使前式成立的 c_k 的下确界,则$\mathscr{H}^s(E)<\infty$,从而 $\dim_H E\leqslant s$.

质量分布原理(principle of mass distribution) 估计豪斯多夫维数的一种常用的技巧. 分形集的豪斯多夫维数的下界的估计一般要比上界的估计困难得多,最常用的技巧是找一个由这个集合所支撑的分布"均匀"的测度,使得它在任何一个球上的质量被球的 s 维体积所控制,它由下面的质量分布原理所表述:设 $E\subset\mathbb{R}^d$ 上的正有限测度 μ 满足 s 阶赫尔德条件,即存在常数 $c>0$,$s\geqslant0$,$\delta>0$ 使得

$$\mu(U)\leqslant c|U|^s \tag{1}$$

对所有满足$|U|\leqslant\delta$ 的集 U 成立,则

$$\mathscr{H}^s(E)\geqslant\mu(E)/c,$$

并且$\dim_H E\geqslant s$.

质量分布原理由弗罗斯特曼(Frostman, O.)于 1935 年证明,也称为弗罗斯特曼引理.

比林斯利定理(Billingsley theorem) 质量分布原理的一种变形. 设 $p\geqslant2$ 为正整数,

$$I_{n,m}=[mp^{-n},(m+1)p^{-n}]$$

表示 n 阶 p 进区间,设 $x\in\mathbb{R}$,令 $I_n(x)$表示包含 x 的 n 阶 p 进区间. 设 $E\subset\mathbb{R}$,μ 是由 E 支撑的正有限波莱尔测度. 如果

$$E\subset\left\{x\,\Big|\,\lim_{n\to\infty}\frac{\log\mu(I_n(x))}{n\log p}=a\right\},$$

则$\dim_H E=\alpha$.

比林斯利定理是由比林斯利(Billingsley, P.)于 1962 年证明的一个更为普遍的结果的一个特殊情形,但它在许多情况下应用起来更为方便.

弗罗斯特曼引理(Frostman Lemma) 联系势论与分形几何的一个非常重要的结果. 设 E 为 $\mathbb{R}^d$ 中紧集. 若 $\mathscr{H}^\alpha(E)>0$,则存在由 E 支撑的 α 阶赫尔德正有界波莱尔测度. 弗罗斯特曼引理与质量分布原理一起通称为弗罗斯特曼引理,它给出了一个集合具有正有限 s 维豪斯多夫测度的充分必要条件.

测度的势(potential of a measure) 与测度关

联的一种积分. 设 μ 是 R^d 上有界正波莱尔测度, $\alpha \geqslant 0$. μ 在点 $x \in \mathrm{R}^d$ 的 α 势定义为

$$U_\mu^\alpha(x) = \int \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^\alpha}.$$

测度 μ 的 α 能量定义为

$$I_\alpha(\mu) = \int U_\mu^\alpha(x)\mathrm{d}\mu(x) = \iint \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^\alpha}.$$

能量与豪斯多夫测度的关系: 设 $E \subset \mathrm{R}^d$ 为波莱尔集.

1. 若 $\mu \in M_b^+(E)$, $I_\alpha(\mu) < \infty$, $\alpha > 0$, 则

$$\mathscr{H}^\alpha(E) > 0.$$

2. 若 $\mathscr{H}^\alpha(E) < 0$, 则存在 $\mu \in M_b^+(E)$, 使对任意 $\beta < \alpha$, $I_\beta(\mu) < \infty$.

集合容量(capacity of a set)　与 R^d 中集合关联的一种量. 设 K 为 R^d 的紧子集, 记

$$I(K) = \inf_{\mu \in M_1(K)} I_\alpha(\mu),$$

其中 $M_1(K)$ 表示由 K 支撑的波莱尔概率测度构成的集合. 紧集 K 的 α 容量定义为

$$\begin{aligned} C_\alpha(K) &= (I(K))^{-1} \\ &= \sup\{(I_\alpha(\mu))^{-1} \mid \mu \in M_1(K)\}. \end{aligned}$$

任意 $E \subset \mathrm{R}^d$ 的 α 容量定义为

$$C_\alpha(E) = \sup_{K \subset E, K\text{紧}} C_\alpha(K).$$

容量维数(capacity dimension)　与容量相关的一种维数. 设 $E \subset \mathrm{R}^d$, 则集合 E 的容量维数定义为

$$\begin{aligned} \dim_C E &= \sup\{s \mid C_s(E) > 0\} \\ &= \inf\{s \mid C_s(E) = 0\}. \end{aligned}$$

容量维数与豪斯多夫维数的关系: 若 $E \subset \mathrm{R}^d$ 为波莱尔集, 则 $\dim_H E = \dim_C E$.

闵科夫斯基容度(Minkowski content)　经典测量方式的一种推广. 设 E 为 R^2 中有界集, 用下面的方式来考察 E 的"大小". 设 $E(\varepsilon)$ 为 E 的 ε 平行体: $E(\varepsilon) = \{x; d(x,E) \leqslant \varepsilon\}$. 设 E 分别为 R^2 中的点, 长为 l 的线段, 面积为 a 的圆盘, 则 $E(\varepsilon)$ 的面积分别等价于

$$\pi\varepsilon^2,\ 2l\varepsilon + \pi\varepsilon^2,\ \pi\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} + \varepsilon\right)^2.$$

在上面三种情形都有 $\mathscr{L}^2(E(\varepsilon)) \sim c\varepsilon^{2-s}$, 其中 s 为 E 的欧氏维数. 基于上述思想, 在 R^d 中, 可以用一般非整数"尺度" s, 通过极限式

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathscr{L}^d(E(\varepsilon))}{\varepsilon^{d-s}}$$

来测量 E. 特别地, 若 s 恰好为 E 的欧氏维数, 测量的结果为正有限, 因此上述测量可视为经典的测量的推广.

设 E 为 R^d 的非空有界子集, $s \geqslant 0$, 则 E 的上、下 s 维闵科夫斯基容度分别定义为:

$$\mathscr{B}^{*s}(E) = \limsup_{\varepsilon \to 0} (2\varepsilon)^{s-d} \mathscr{L}^d(E(\varepsilon)),$$

$$\mathscr{B}_*^s(E) = \liminf_{\varepsilon \to 0} (2\varepsilon)^{s-d} \mathscr{L}^d(E(\varepsilon)).$$

如果 $\mathscr{B}^{*s} = \mathscr{B}_*^s$, 则称 E 的 s 维闵科夫斯基容度存在, 记为 $\mathscr{B}^s(E)$, 并等于上述共同值. 闵科夫斯基容度不具次可加性, 因此不是一个外测度.

闵科夫斯基维数(Minkowski dimension)　一种与闵科夫斯基容度相关联的维数. 设 E 为 R^d 的非空有界集, 则 E 的上、下闵科夫斯基维数分别定义为:

$$\begin{aligned} \overline{\dim}_B(E) &= \sup\{s; \mathscr{B}^{*s}(E) = \infty\} \\ &= \inf\{s; \mathscr{B}^{*s}(E) = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B(E) &= \sup\{s; \mathscr{B}_*^s(E) = \infty\} \\ &= \inf\{s; \mathscr{B}_*^s(E) = 0\}, \end{aligned}$$

若 $\overline{\dim}_B(E) = \underline{\dim}_B(E)$, 则称 E 的闵科夫斯基维数存在, 记为 $\dim_B(E)$, 其值为上述公共值.

闵科夫斯基维数有下列等价定义, 这些不同的定义是根据不同的目的引入(故亦有不同的称呼: 布里冈维数, 柯尔莫哥洛夫熵, 度量维数, 对数密度, 信息维数, 计盒维数或分形维数), 在具体使用时可视方便采用. 闵科夫斯基维数的等价定义: 设 E 为 R^d 中非空有界集, $\varepsilon > 0$, $N_\varepsilon^*(E)$ 是下列 4 个数之一:

1. 覆盖 E 的半径为 ε 的最少闭球数;
2. 覆盖 E 的直径最大为 ε 的集的最少个数;
3. 半径为 ε 的球填充 E 所需的球的最大个数;
4. 与 E 相交的 ε 网中的立方体的个数, 其中 ε 网为下述 R^d 中立体的集合

$$[m_1\varepsilon, (m_1+1)\varepsilon] \times \cdots \times [m_d\varepsilon, (m_d+1)\varepsilon]$$
$$(m_1, m_2, \cdots m_d \in \mathrm{Z});$$

则

$$\overline{\dim}_B(E) = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon^*(E)}{-\log \varepsilon},$$

$$\underline{\dim}_B(E) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(E)}{-\log \varepsilon}.$$

闵科夫斯基维数的性质如下: 设 E 是 R^d 中非空有界集, 则

1. $\dim_H E \leqslant \underline{\dim}_B E$.
2. $\underline{\dim}_B$, $\overline{\dim}_B$ 是单调的.
3. 若 $\mathscr{L}^d(E) > 0$, 则 $\dim_B E = d$.
4. $\overline{\dim}_B$ 是有限稳定的, 即

$$\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}.$$

5. 设 $f: E \to \mathrm{R}^d$ 为李普希茨映射, 则

$$\overline{\dim}_B f(E) \leqslant \overline{\dim}_B E;\ \underline{\dim}_B f(E) \leqslant \underline{\dim}_B E,$$

特别地, 上、下闵科夫斯基维数在双李普希茨映射下不变.

6. $\overline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B \overline{E}$, $\underline{\dim}_B E = \underline{\dim}_B \overline{E}$.

由闵科夫斯基维数的定义, 对它的估计要比对

豪斯多夫维数的估计要容易,因此在实用上常采用这一维数;另一方面,闵科夫斯基性质6指出闵科夫斯基的"分辨率"不够.

集函数的修正(modification of set functions) 一种修正的集函数.设 $Q:\{A\mid A\subset\mathbb{R}^d\}\to[0,\infty]$为非负单调集函数,满足$Q(\varnothing)=0$.令

$$\mathscr{Q}(A)=\inf\left\{\sum_i Q(A_i)\mid A\subset\bigcup_i A_i\right\},$$

则 $\mathscr{Q}$ 称为 Q 的修正.如上定义的集函数 $\mathscr{Q}$ 为一外测度.

集函数族的临界指数(critical exponent of family of set functions) 具有临界性质的集函数族诱导出的临界指数.设 $s\geqslant 0$ 并设对每一 s,Q^s 为非负单调集函数族.称集函数族 Q^s 具有临界性质,如果对任意 $A\subset\mathbb{R}^d$,$0<t<s<\infty$,若 $Q^s(A)>0$,则 $Q^t(A)=\infty$;若 $Q^t(A)<\infty$,则 $Q^s(A)=0$.若 Q^s 满足临界性质,则它诱导一个临界指数,记为 $D(Q)=D$,定义为

$$\begin{aligned}D(A)&=\sup\{s\mid Q^s(A)=\infty\}\\&=\inf\{s\mid Q^s(A)=0\}.\end{aligned}$$

集函数族的临界性质(critical property of family of set functions) 见"集函数族的临界指数".

修正族的临界指数(critical exponent of modified family) 通过修正的集函数族诱导的指数.令 $\mathscr{Q}^s$ 为 Q^s 的修正族,则外测度族 $\mathscr{Q}^s$ 亦具有临界性质.由 $\mathscr{Q}^s$ 的临界性质引入一个维数,称为修正族的临界指数,记为 $\mathscr{D}$:

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(A)&=\sup\{s\mid \mathscr{Q}^s(A)=\infty\}\\&=\inf\{s\mid \mathscr{Q}^s(A)=0\}.\end{aligned}$$

临界指数的修正(modification of critical exponent) 对第一个指数修正后得到的指数.后面两个指数都具有可列平稳性.类似于对集函数 Q 的修正,人们引入对维数 D 的下列修正,并记为 D_M,其定义为

$$D_M(A)=\inf\{\sup D(A_i)\mid A=\bigcup A_i\}.$$

各类指数的关系(relationship for various exponents) 集合 A 的各种指数之间的关系.设 $A\subset\mathbb{R}^d$,则:

1. 对任意 $s\geqslant 0$,$\mathscr{Q}^s(A)\leqslant Q^s(A)$.

2. $D_M(A)=\mathscr{D}(A)\leqslant D(A)$.

第2个结果指出修正后的集函数族的临界指数与未修正的集函数族的临界指数经修正后的临界指数一致.

预填充测度(pre-packing measure) 集合的一种测度.设 $E\subset\mathbb{R}^d$,$\delta>0$,$s\geqslant 0$.令

$$P_\delta^s(E)=\sup\left\{\sum|U_i|^s\mid\{U_i\}\text{ 为 }E\text{ 的 }\delta\text{ 填充}\right\},$$

其中sup表示对所有的 E 的 δ 填充取上确界,

$$P^s(E)=\lim_{\delta\to 0}P_\delta^s(E)=\inf_{\delta\geqslant 0}P_\delta^s(E),$$

P^s 称为 s 维预填充测度.P^s 具有单调性与临界性质,但不具次可列可加性.

预填充维数(pre-packing dimension) 由预填充测度诱导出的一种维数.一个维数称为预填充维数,若

$$\begin{aligned}\Delta(E)&=\sup\{s\mid P^s(E)=\infty\}\\&=\inf\{s\mid P^s(E)=0\}.\end{aligned}$$

该维数与上闵科夫斯基维数相等,即

$$\Delta(E)=\overline{\dim}_B E.$$

填充测度(packing measure) 分形几何中一类最重要的测度.对预填充测度 P^s 及它诱导的预填充维数 Δ 进行修正:

$$\mathscr{P}^s(A)=\inf\left\{\sum P^s(A_i)\mid A=\bigcup A_i\right\},$$

$$\dim_P A=\inf\{\sup\Delta(A_i)\mid A=\bigcup A_i\}.$$

上述测度 $\mathscr{P}^s(A)$与维数$\dim_P A$ 分别称为集 A 的 s 维填充测度与填充维数.

填充测度与填充维数具有豪斯多夫测度与豪斯多夫维数的性质(参见"豪斯多夫测度"和"豪斯多夫维数").填充测度与填充维数由崔可(Tricot,C.)于1982年引入,具有与豪斯多夫测度与豪斯多夫维数"对偶"的性质.

填充维数(packing dimension) 见"填充测度".

填充测度的弗罗斯特曼引理(Frostman lemma of packing measure) 关于填充测度的一个重要定理.该定理断言:设 $E\subset\mathbb{R}^d$.

1. 设 μ 是由 E 支撑的有限正测度.如果存在正常数 $c>0$,使得对任意 $x\in\mathbb{R}^d$,有 $\mu(B_r(x))\geqslant cr^s$,则 $\mathscr{P}^s(E)<\infty$.

2. 如果存在正常数 $c>0$,正数序列 $r_n\downarrow 0$,以及 $\mu\in M^+(E)$使得对任意 $x\in\mathbb{R}^d$,有 $\mu(B_{r_n}(x))\geqslant cr_n^s$,则 $\mathscr{P}^s(E)>0$.

不同测度与维数的比较(comparison of diferent measures and dimensions) 几种测度与维数之间的比较.人们定义了豪斯多夫测度 $\mathscr{H}^s$,预填充测度 P^s,填充测度 $\mathscr{P}^s$ 以及上、下闵科夫斯基容度 $\mathscr{B}^{s*}$ 与 $\mathscr{B}^s_*$,其中豪斯多夫测度与填充测度是外测度,并且填充测度是预填充测度的修正.记上、下闵科夫斯基容度的修正测度为 $\mathscr{M}^{*s}$与 $\mathscr{M}^s_*$,并称为上、下闵科夫斯基测度,它们分别诱导出具有可列平稳性质的维数$\overline{\dim}_{MB}$与$\underline{\dim}_{MB}$,称为上、下修正闵科夫斯基维数.

不同测度的比较:设 $E\subset\mathbb{R}^d$,$s\geqslant 0$,则

$$\begin{aligned}c_1\mathscr{H}^s(E)&\leqslant\mathscr{M}^s_*(E)\\&\leqslant\min\{\mathscr{B}^s_*(E),\mathscr{M}^{*s}(E)\}\end{aligned}$$

$$\leqslant \max\{\mathscr{B}^s_*(E), \mathscr{M}^{*s}(E)\}$$
$$\leqslant \mathscr{B}^{*s}(E) \leqslant c_2 P^s(E),$$
$$\mathscr{H}^s(E) \leqslant \mathscr{P}^s(E) \leqslant P^s(E),$$
$$c_3 \mathscr{M}^{*s}(E) \leqslant \mathscr{P}^s(E);$$
$$\dim_H(E) \leqslant \underline{\dim}_{MB}(E)$$
$$\leqslant \min\{\underline{\dim}_B(E), \dim_P(E)\}$$
$$\leqslant \max\{\underline{\dim}_B(E), \dim_P(E)\}$$
$$\leqslant \overline{\dim}_B(E).$$

存在使上述结论中的每个不等号严格成立的集合.

集合的齐次性(homogeneous property)　集合的一种内在性质.下面的结论指出当集合 E 具有某种"齐次"性质时,它的填充维数和上闵科夫斯基维数一致.设 $E \subset \mathrm{R}^d$ 为紧集,如果对任意开集 V,有

$$\overline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B(E \cap V),$$

则$\dim_P = \overline{\dim}_B E$.

分形乘积(product of fractals)　一种分形集.指两个分形集 E 与 F 的积集,记为 $E \times F$.设 $E, F \subset \mathrm{R}$为勒贝格可测集,经典的富比尼定理指出,

$$\mathscr{L}^2(E \times F) = \mathscr{L}^1(E) \times \mathscr{L}^1(F),$$

其中 $\mathscr{L}^n$ 表示 n 维勒贝格测度.如果用豪斯多夫测度或填充测度代替勒贝格测度,上述结论不再成立,但仍具有某些关系.

分形乘积的豪斯多夫测度(Hausdorff measure of product of fractals)　亦称玛斯传德定理.一种集合的豪斯多夫测度.指两个分形集的积集的豪斯多夫测度.设 $E \subset \mathrm{R}^m, F \subset \mathrm{R}^n$,则存在仅依赖于 s,t 的正常数 c,使得

$$\mathscr{H}^{s+t}(E \times F) \geqslant c \mathscr{H}^s(E) \mathscr{H}^t(F).$$

玛斯传德定理(Marstrand theorem)　即"分形乘积的豪斯多夫测度".

分形乘积的豪斯多夫维数(Hausdorff dimension of product of fractals)　一种集合的豪斯多夫维数.指两个分形集的积集的豪斯多夫维数.设 $E \subset \mathrm{R}^m, F \subset \mathrm{R}^n$,则:

1. $\dim_H E \times F \geqslant \dim_H E + \dim_H F$.
2. $\dim_H E \times F \leqslant \min\{\dim_H E + \overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B E + \dim_H F\}$.
3. $\max\{\underline{\dim}_B E + \overline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B E + \underline{\dim}_B E\} \leqslant \overline{\dim}_B E \times F \leqslant \overline{\dim}_B E + \overline{\dim}_B F$.

分形乘积的填充测度(packing measure of product of fractals)　一种集合的填充测度.指两个分形集的积集的填充测度.设 $E \subset \mathrm{R}^m, F \subset \mathrm{R}^n$, $\mathscr{P}^s(E) < \infty, \mathscr{P}^t(F) < \infty$,则存在仅依赖于 s,t 的正常数 c 使得

$$\mathscr{P}^{s+t}(E \times F) \leqslant c \mathscr{P}^s(E) \mathscr{P}^t(F).$$

分形乘积的填充维数(packing dimension of product of fractals)　一种集合的填充维数.指两个分形集的积集的填充维数.设 $E \subset \mathrm{R}^m, F \subset \mathrm{R}^n$,则:

1. $\dim_P E \times F \leqslant \dim_P E + \dim_P F$;
2. $\dim_H E \times F \leqslant \min\{\dim_H E + \dim_P F, \dim_P F + \dim_H F\}$;
3. 设 $E \subset \mathrm{R}^m, F \subset \mathrm{R}^n$,如果 E 与 F 中有一个是正则集(即集合的豪斯多夫维数与填充维数相同),则

$$\dim_H E \times F = \dim_H E + \dim_H F.$$

分形投影(projection of fractal)　一种正交投影.指分形集在通过原点的直线上的正交投影.设 θ 表示平面上通过原点的直线,p_θ 表示对于直线 θ 的正交投影.设 $E \subset \mathrm{R}^2$ 为波莱尔集,则:

1. 对任意 $\theta \in G_{d,p}$,
$$\dim_H p_\theta(E) \leqslant \min\{\dim_H E, p\}.$$
2. 若$\dim_H(E) \leqslant 1$,则对几乎所有的 $\theta \in [0, 2\pi]$,有$\dim_H p_\theta(E) = \dim_H E$.
3. 若$\dim_H E > 1$,则对几乎所有的 $\theta \in [0, 2\pi]$,
$$\mathscr{L}^1 p_\theta(E) > 0.$$

自相似集的相似维数(similarity dimension of self-similar sets)　自相似集的一种重要维数.设 E 为对应于压缩比为 c_i 的相似压缩族$\{S_i, 1 \leqslant i \leqslant m\}$的自相似集.若 s 满足

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1,$$

则 s 称为自相似集 E 的相似维数,记为$\dim_S E$.

自相似集的测度与维数的性质(measure and dimension of self-similar sets)　自相似集所具有的一些重要性质.设 E 满足开集条件,则:

1. $0 < \mathscr{H}^s(E) < \infty$;
2. $\dim_H E = \dim_P E = \dim_B E = \dim_S E = s$;
3. 对任意 $x \in E$ 及任意 $r > 0$,有

$$C_1 \leqslant \liminf_{r \to 0} \frac{\mathscr{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}$$
$$\leqslant \limsup_{r \to 0} \frac{\mathscr{H}^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s} \leqslant C_2,$$

以及

$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \mathscr{H}^s(E \cap B_r(x))}{\log r} = s,$$

其中 C_1, C_2 为正常数;如果开集条件不满足,仍有

$$\dim_H E = \overline{\dim}_B E \leqslant \dim_S E,$$

则称满足上述性质的分形集具有正则性.

几类重要的分形集

有限压缩映射族(finite family of contracing mappings)　亦称迭代函数系.满足压缩条件的有限个映射所成的集族.设 $D \subset \mathrm{R}^d$ 为闭集,映射 $S: D \to \mathrm{R}^d$ 称为 D 上的压缩映射(简称压缩),如果存在正

常数 $0<c<1$，使得对任意 $x,y\in D$，成立不等式

$$d(S(x),S(y))\leqslant cd(x,y).$$

$\mathbb{R}^d$ 上的一有限压缩映射族 $\{S_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ 也称为 $\mathbb{R}^d$ 上的一个迭代函数系(IFS)，其中

$$|S_i(x)-S_i(y)|\leqslant c_i|x-y|\ (0<c_i<1,x,y\in D).$$

迭代函数系(iterated functions system)　即"有限压缩映射族".

压缩映射族的不变集(invariant set of a family of contracting mappings)　迭代函数系生成的不变集，是典型的分形集. 对它的一般性质的研究是一个重要而困难的课题. 设 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的压缩映射族，则存在惟一的紧集 E，使得

$$E=\bigcup_{i=1}^{m}S_iE,$$

集 E 称为压缩族 $\{S_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ 的不变集或吸引子.

开集条件(open set condition)　加在压缩映射族上的一种条件. 设 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的压缩映射. 如果存在开集 $V\subset\mathbb{R}^d$ 使得

$$\bigcup_{i=1}^{m}S_i(V)\subset V;S_i(V)\cap S_j(V)=\varnothing\ \ (i\neq j),$$

则称压缩族 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 满足开集条件，亦称该压缩族的不变集 E 满足开集条件.

开集条件容许相似压缩族作用在某些集合上可以有重叠，但要求重叠不能太多. 由席夫(Schief, A.)提出的定理刻画了开集条件，但并没有减少判别开集条件是否成立的难度.

席夫定理(Schief theorem)　对开集条件的一种刻画. 即在开集条件下，自相似集的测度与维数都有完整的结果. 该定理表述为：设 E 是压缩系数为 c_i 的相似压缩族 $S_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 的自相似集，s 为其相似维数，则下述条件等价：

1. 开集条件成立.

2. $\mathscr{H}^s(E)>0$.

康托尔三分集(Cantor third-middle set)　一种重要的自相似分形集. 设 $E_0[0,1]$ 为单位闭区间，E_1 为由 E_0 删去中间长为 1/3 的开区间(1/3,2/3)所得到的集合，即 E_1 由闭区间[0,1/3]与[2/3,1]组成，这两个区间称为 1 阶基本区间. 而(1/3,2/3)称为 1 阶基本间隔. 分别去掉两个 1 阶基本区间的中间的 1/3 得到 E_2，即 E_2 由 4 个闭区间(称为 2 阶基本区间)

$$\left[0,\frac{1}{9}\right],\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right],\left[\frac{8}{9},1\right]$$

组成，去掉的两个开区间称为二级阶基本间隔. 继续上述作法，至第 k 步，人们得到 E_k. 它由 2^k 个长为 3^{-k} 的闭区间(称为 k 阶基本区间)组成，被挖掉的 2^{k-1} 个长为 3^{-k} 的开区间称为第 k 级间隔. 令 $\mathscr{C}=\bigcap_{k\geqslant1}E_k$，集 $\mathscr{C}$ 称为康托尔三分集，容易验证 $\mathscr{C}$ 为全不连通的自密闭集. 令

$$S_1(x)=\frac{x}{3},\quad S_2(x)=\frac{x}{3}+\frac{2}{3},$$

则相应的自相似集为经典的康托尔三分集.

谢尔品斯基垫(Sierpiński gasget)　一种重要的自相似分形集. 令

$$\varphi_1(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right),$$

$$\varphi_2(x,y)=\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{y}{2}\right),$$

$$\varphi_3(x,y)=\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right),$$

则相应的自相似集称为谢尔品斯基垫.

有向图(directed graph)　一种由顶点与有向线段组成的几何图形. 设 v 为顶点集，将其标记为 $\{1,2,\cdots,q\}$，$\mathscr{E}$ 为有向棱集，它的每条边都从某个顶点出发并在某个顶点终止(一对顶点可以由几条棱连结，一条棱也可以由同一个顶点出发与终止)，二元偶$(v,\mathscr{E})$称为一个有向图. 记 $\mathscr{E}_{i,j}$ 为从顶点 i 出发到顶点 j 终止的棱的集合，$\mathscr{E}_{i,j}^k$ 为从顶点 i 出发到顶点 j 终止的由 k 条棱组成的路径$(e_1,e_2,\cdots,e_k)$的集合，称为路经集. 连结有向图顶点的路径所满足的条件称为传递性条件. 存在正整数 p_0，使对任意 i,j 都有整数 p，满足 $1\leqslant p_0\leqslant p$，使得路径集 $\mathscr{E}_{i,j}^p$ 非空，亦即，对有向图中的每对顶点，都有长度不大于 p 的路径连结它们.

路径集(path sets)　见"有向图".

传递性条件(transition condition)　见"有向图".

图递归集(graph-directed sets)　自相似集的一种推广. 设$(v,\mathscr{E})$为有向图. 设 $F_e:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 为相似比是 r_e 的相似压缩，$e\in\mathscr{E}$，则存在惟一非空紧集族 $E_1,E_2,\cdots,E_q$，使得

$$E_i=\bigcup_{j=1}^{q}\bigcup_{e\in\mathscr{E}_{i,j}}F_e(E_j).$$

压缩集族 $\{F_e:e\in\mathscr{E}\}$ 称为图递归相似压缩族(或图递归迭代函数系)，紧集族 $\{E_1,E_2,\cdots,E_q\}$ 称为图递归集. 图递归集有非常广泛的应用.

直观上看，图递归集族的每个元素 E_i 由若干块分别与 $E_1,E_2,\cdots,E_q$ 相似的部分组成，当 $q=1$ 时，回到经典的自相似集.

图递归矩阵(graph-directed matrix)　对应于图递归集的矩阵. 设 $s\leqslant0$，矩阵 $A^{(s)}=\{A_{i,j}^{(s)}\}_{1\leqslant i,j\leqslant q}$ 称为结合图递归集的图递归矩阵，它的最大特征值记为 $\rho(A^s)$.

图递归集的维数(dimension of graph-directed sets)　图递归集维数的两个性质. 设 $\{E_j\}_{1\leqslant j\leqslant q}$ 为满足传递性条件与开集条件的图递归集，s 满足 $\rho(A^{(s)})=1$，则对任意 $1\leqslant j\leqslant q$.

1. $0<\mathscr{H}^s(E_j)\leqslant\mathscr{P}^s(E_j)<\infty$.

2. $\dim_H E_j=\dim_B E_j$.

麦克缪伦集(McMullen set) 一类重要的自仿集. 设 $n>m\geqslant 2$ 为正整数, $R(n,m)=\{(i,j);0\leqslant i<n,0\leqslant j<m\}$. 令 $R_0\subset R(n,m)$, $\# R_0\geqslant 2$, $\# R_0$ 表示 R_0 的个数. 设 $(i,j)\in R_0$, 定义

$$S_{ij}(x,y)=\left(\frac{x}{n},\frac{y}{m}\right)+(i,j),$$

则 S_{ij}为仿射压缩,其在 x 轴与 y 轴方向的压缩比分别为 $1/n$ 与 $1/m$. 设 E 为仿射压缩族 $\{S_{i,j}\}_{(i,j)\in R_0}$的自仿集,即

$$E=\bigcup\nolimits_{i,j\in R_0}S_{ij}(E),$$

称 E 为仿射压缩族 S_{ij}的麦克缪伦集.

麦克缪伦集有下述几何解释:将单位正方形 E_0 划分为 $n\times m$ 个边长分别为 $1/n$ 与 $1/m$ 的长方形. $E(i,j)$表示长方形

$$\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]\times\left[\frac{j}{m},\frac{j+1}{m}\right],$$

则 S_{ij}将 E_0 变为 $E_{i,j}$(在不产生混淆的情形下,人们用(i,j)表示长方形 $E(i,j)$),从而 R_0 亦表示经映射 S_{ij}, $(i,j)\in R_0$ 所得的长方形族. 令 $\mathscr{S}=\bigcup S_{ij}$, 则

$$\mathscr{S}(E_0)=\bigcup S_{ij}(E_0)=\bigcup\nolimits_{i,j\in R_0}E(i,j).$$

重复上述过程,而将每一 $E(i,j)$用 $\mathscr{S}(E(i,j))$代替,最后得到的极限集 $E=\bigcap_{k\geqslant 0}S^k(E_0)$即为麦克缪伦集.

麦克缪伦集的维数(dimensions of McMullen sets) 麦克缪伦集的维数公式. 设 E 为麦克缪伦集,则

$$\dim_H E=\log_m\left(\sum_{j=1}^{m}N_j^{\log m/\log n}\right),$$

其中 N_j 表示在第一次生成过程中从第 j 列中挑出的矩形数;

$$\dim_B E=\log_m s+\log_n\left(\frac{r}{s}\right),$$

其中 $r=\# R_0$, $s=\#\{j,(i,j)\in R_0\}$(即至少包含 1 阶生成元 $E_1:=\mathscr{S}(E_0)$中的一个矩形的个数).

上述结果指出麦克缪伦集的维数与它的基本长方形所处的位置有关系,另一方面,它的豪斯多夫维数与闵科夫斯基维数不相同,因而不是正则集. 一般的自仿集的研究要比麦克缪伦集困难得多.

莫朗集(Moran sets) 自相似集的一种推广. 莫朗集按下述方式推广自相似集:在逐次迭代中采用有限的不同的压缩比并且基本元的位置可以变化.

莫朗集类(Moran classes) 具一定结构的莫朗集的集类. 莫朗集类考虑满足相同结构的莫朗集构成的集类并考虑集类中莫朗集间的相互关系.

一般莫朗集的构造(construction of Moran sets) 用严格数学形式表示的莫朗集的结构. 设 $J\subset\mathbb{R}^d$ 为内点非空的有界闭集. $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$为一列正整数序列, $\Phi=\{\Phi_k\}$为一列有限正实向量序列,其中

$$\Phi_k=(c_{k,1},c_{k,2},\cdots,c_{k,n_k})$$
$$(0<c_{k,j}<1,k\in\mathbb{N},1\leqslant j\leqslant n_k).$$

对任意 $k\in\mathbb{N}$, 记

$$D_k=\{(i_1,i_2,\cdots,i_k);1\leqslant i_j\leqslant n_k,1\leqslant j\leqslant k\}.$$

约定 $D_0=\varnothing$, 记 $D=\bigcup_{k\geqslant 0}D_k$.

设 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k)\in D_k$, $\tau=(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m)\in D_m$, 记 $\sigma*\tau=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k,\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m)$. 若 $\sigma\in D_k$, $l\leqslant k$, 记 $\sigma|_l=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_l)$. $\mathbb{R}^d$ 的子集族 $\pi=\{J_\sigma;\sigma\in D\}$称为具有莫朗结构,如果它满足:

1. 对任意 $\sigma\in D$, J_σ 与 J 相似,亦即存在相似映射 $S_\sigma:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 使得 $S_\sigma(J)=J_\sigma$, 约定 $J_\phi=J$;

2. 对任意 $k\geqslant 0$ 及任意 $\sigma\in D_k$, $J_{\sigma*1},J_{\sigma*2},\cdots,J_{\sigma*n_{k+1}}$为 J_σ 的子集,并且对任意 $i\neq j$, $J_{\sigma*i}\cap J_{\sigma*j}=\varnothing$(亦即满足开集条件);

3. 对任意 $k\geqslant 1$, $\sigma\in D_{k-1}$及 $1\leqslant j\leqslant n_k$ 有

$$\frac{|J_{\sigma*j}|}{|J_\sigma|}=c_{k,j}.$$

令

$$E_k=\bigcup_{\sigma\in D_k}J_\sigma,$$

及

$$E=\bigcap_{k\geqslant 0}E_k;$$

则 E 为非空有界闭集.

对于子集族 $\pi=\{J_\sigma;\sigma\in D\}$, $\mathbb{R}^d$ 中内部非空的有界闭集 J, 正整数序列$\{n_k\}_{k\geqslant 1}$, 满足莫朗结构的集 $E=E(\pi,J,\{n_k\})$称为满足$(J,\{n_k\},\{\Phi_k\})$的莫朗集. 记 $\mathscr{M}=\mathscr{M}(J,\{n_k\},\{\Phi_k\})$为满足$(J,\{n_k\},\{\Phi_k\})$的莫朗集的集合类,称为莫朗集类. 注意到若 $E,E'\in\mathscr{M}$, 它们对应的生成集族为 π 与 π', 则 π 与 π'的元素间的相互位置可以不一样,尽管它们都满足莫朗结构的条件 1,2,3. 记 $\mathscr{F}_k=\{J_\sigma;\sigma\in D_k\}$, $\mathscr{F}_k$ 的元称为 E 的 k 阶基本元. 记

$$\mathscr{F}=\bigcup\nolimits_{k\geqslant 0}\mathscr{F}_k=\{J_\sigma;\sigma\in D\}.$$

齐次莫朗集(homogeneous Moran sets) 一类特殊的莫朗集. 设对任意 $k\geqslant 1$, $c_{k,1}=\cdots=c_{k,n_k}=c_k$, 亦即第 k 阶的压缩比均为 c_k, 则相应的莫朗集称为齐次莫朗集,相应的莫朗集族记为

$$\mathscr{M}(J,\{n_k\},\{c_k\}).$$

齐次均匀康托尔集(homogeneous symmetry Cantor sets) 一类特殊的康托尔集. 设空间维数 $d=1$, 若对任意 $k\geqslant 1$, $\sigma\in D_k$, 它的 $k+1$ 阶基本元 $J_{\sigma*j}$, $1\leqslant j\leqslant n_{k+1}$(假定 $J_{\sigma*1},J_{\sigma*2},\cdots,J_{\sigma*n_{k+1}}$在 J_σ 中从左至右排列)满足:

1. $J_{\sigma*1}$的左端点与 J_σ 的左端点重合, $J_{\sigma*n_{k+1}}$的

右端点与 J_σ 的右端点重合.

2. $|J_{\sigma*1}|=\cdots=|J_{\sigma*n_{k+1}}|$(从而,每个 $k+1$ 阶基本区间的长度为 $c_1c_2\cdots c_{k+1}$).

3. 相邻的 $k+1$ 阶基本区间的间隔相同.

由此得到的莫朗集称为齐次均匀康托尔集,记为 $\mathscr{C}(J,\{n_k\},\{c_k\})$,简记为 $\mathscr{C}$.

偏齐次均匀康托尔集(partial homogeneous Cantor sets) 一类特殊的康托尔集.如果将齐次均匀康托尔集中的条件 2,3 用下述条件代替:

$J_{\sigma*1}$的左端点与 J_σ 的左端点重合,$J_{\sigma*(j+1)}$的左端点与 $J_{\sigma*j}$的右端点重合,$1\leqslant j\leqslant n_{k+1}-1$,则得到的莫朗集称为偏齐次康托尔集,记为

$$\mathscr{C}^*=\mathscr{C}^*(J,\{n_k\},\{c_k\}).$$

齐次康托尔集与偏齐次康托尔集在一维齐次莫朗集的研究中起重要作用.

预维数序列(pre-dimension sequences) 满足一定条件的序列.设$\{\Phi_k\}$为一列有限正实向量序列,其中

$$\Phi_k=(c_{k,1}c_{k,2},\cdots,c_{k,n_k})$$
$$(0<c_{k,j}<1,k\in\mathbb{N},1\leqslant j\leqslant n_k),$$

若 s_k 满足下列等式

$$\prod_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}c_{ij}^{s_k}=1,$$

称序列$\{s_k\}_{k\geqslant 1}$为预维数序列.

莫朗集的维数(dimension of Moran set) 莫朗集的维数公式.令

$$s_*=\liminf_{k\to\infty}s_k,\ s^*=\limsup_{k\to\infty}s_k.$$

若 $c_*>0$,则$\dim_H E=s_*$,$\dim_P E=\overline{\dim}_B(E)=s^*$.

下面两个结果是压缩比的下确界为零的情形,它们比下确界大于零的情形要复杂得多:

1. 设莫朗集类 $\mathscr{M}=\mathscr{M}(J_0,\{n_k\},\{\Phi_k\})$满足下述条件:

1) $\sup\limits_k n_k:=\lambda<\infty$.

2) $0<\inf\limits_i\max\limits_j\{c_{ij}\}\leqslant c*:=\sup\limits_i\max\limits_j\{c_{ij}\}<1$,

则对任意 $E\in\mathscr{M}$,有$\dim_H E=s_*$,$\dim_P E=S^*$.

2. 设

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log d_k}{\log M_k}=0,$$

则对任意 $E\in\mathscr{M}$,

$$\dim_H E=s_*,\ \dim_P E=\overline{\dim}_B E=s^*.$$

上述预维数为将莫朗集的前 k 步构造为基础所生成的自相似集的维数,由莫朗集的构造,它可视为一列自相似集的极限,预维数的极限与该莫朗集的维数有密切关系.

一维齐次莫朗集的维数(dimension of one dimensional homogeneous Moran sets) 一维齐次莫朗集的维数公式.由于在一维的情形有很好的序结构,其结果更为丰富与深入.现将一维齐次莫朗集与莫朗集类的维数公式分别定义如下:

$$t_*=\liminf_{k\to\infty}\frac{\log n_1\cdots n_k}{-\log c_1\cdots c_{k+1}n_{k+1}},$$

$$t^*=\limsup_{k\to\infty}\frac{\log n_1\cdots n_{k+1}}{-\log c_1\cdots c_k+\log n_{k+1}}.$$

则一维齐次莫朗集类的维数有如下性质:

1. 对任意 $E\in\mathscr{M}$,有

$$t_*\leqslant\dim_H E\leqslant s_*\leqslant s^*$$
$$\leqslant\dim_P E\leqslant\overline{\dim}_B E\leqslant t^*.$$

2. 还有

1) 设 $t_*<s_*$并设 $t_*<\alpha<s_*$,则存在 $E\in\mathscr{M}$,使得$\dim_H E=\alpha$.

2) 设 $s^*<t^*$并设 $s^*<\beta<t^*$,则存在 $E\in\mathscr{M}$,使得$\dim_P E=\beta$.

一维齐次莫朗集类的维数(dimension of one dimensional homogeneous Moran classes) 见“一维齐次莫朗集的维数”.

齐次均匀康托尔集的维数(dimensions of homogeneous Cantor sets) 均匀康托尔集的维数公式.设 $\mathscr{C}=\mathscr{C}(J,\{n_k\},\{c_k\})$与 $\mathscr{C}^*=\mathscr{C}^*(J,\{n_k\},\{c_k\})$分别为齐次均匀康托尔集与偏齐次均匀康托尔集,则其维数公式分别为:

$$\dim_H\mathscr{C}=s_*,\ \dim_P\mathscr{C}=\overline{\dim}_B\mathscr{C}=t^*,$$
$$\dim_H\mathscr{C}^*=t_*,\ \dim_P\mathscr{C}=\overline{\dim}_B\mathscr{C}=s^*.$$

偏齐次均匀康托尔集的维数(dimensions of partial homogeneous Cantor sets) 见“齐次均匀康托尔集的维数”.

函数图象的维数

函数图象(graph of functions) 分形的图形所呈现的图象.假定$I=[0,1]$为单位闭区间.设 $f:I\to\mathbb{R}$,令

$$\Gamma(f,I)=\Gamma(f)=\{(t,f(t));t\in I\},$$

则称 $\Gamma(f)$为函数 f 在 I 上的图象.

函数在一点的δ振幅(δ-amplitude at a point of a function) 函数在一点的 δ 邻域中的上、下确界之差.设 $f:I\to\mathbb{R}$ 为连续函数.设 $\delta>0,t\in I$.记 $O_{f,\delta}(t)$为函数 f 在点 t 的 δ 振幅,即

$$O_{f,\delta}(t)=\sup_{|t'-t|\leqslant\delta}f(t')-\inf_{|t'-t|\leqslant\delta}f(t')$$
$$=\sup_{t',t''\in[t-\delta,t+\delta]}|f(t')-f(t'')|.$$

函数在区间上的δ变差(δ-variation on an interval of a function) 刻画函数在区间上变化的一个量.设$[a,b]\subset I$,函数 f 在$[a,b]$上的 δ 变差 $V_{f,\delta}[a,b]$定义为 f 的 δ 振幅在$[a,b]$上的积分:

$$V_{f,\delta}[a,b]=\int_a^b O_{f,\delta}(t)\mathrm{d}t.$$

函数 f 在 I 上的总变差定义为

$$V_f=\sup_{t\in I}f(t)-\inf_{t\in I}f(t).$$

函数在区间上的总变差(total variation on an interval of a function)　见"函数在区间上的 δ 变差".

***s* 阶赫尔德条件**(s-Hölder condition)　刻画函数性态的一种条件.设 $f:I\to\mathbb{R}$ 为连续函数,称 f 在点 t 满足 s 阶赫尔德条件($0<s\leqslant 1$),如果存在常数 c_t,使得对所有的 $t'\in I$,有

$$|f(t)-f(t')|\leqslant c_t|t-t'|^s.$$

称连续函数 $f(t)$ 在点 t 满足反 s 阶赫尔德条件,如果存在常数 $c_t>0$,使得对任意 $\delta>0$,有

$$O_{f,\delta}(t)\geqslant c_t\delta^s.$$

函数图象的闵科夫斯基维数(Minkowski dimensions of the graph of functions)　函数图象的闵科夫斯基维数的几个公式.

Ⅰ.设 $f:I\to\mathbb{R}$ 为连续函数,则

$$\overline{\dim}_B\Gamma(f,I)=\limsup_{\delta\to 0}\left(2-\frac{\log V_{f,\delta}(I)}{\log\delta}\right),$$

$$\underline{\dim}_B\Gamma(f,I)=\liminf_{\delta\to 0}\left(2-\frac{\log V_{f,\delta}(I)}{\log\delta}\right).$$

Ⅱ.设 $0<s\leqslant 1$,f 为 I 上的连续函数:

1.若 f 在 I 满足一致 s 阶赫尔德条件,则

$$\overline{\dim}_B\Gamma(f,I)\leqslant 2-s.$$

2.若 f 在 I 上满足一致 s 阶反赫尔德条件,则

$$\underline{\dim}_B\Gamma(f,I)\geqslant 2-s.$$

3.设连续函数 f 在 I 上满足一致与反一致 s 阶赫尔德条件,则

$$\dim_B\Gamma(f,I)=\dim_P\Gamma(f,I)=2-s.$$

函数图象的豪斯多夫维数(Hausdorff dimension of graph of functions)　函数图象的豪斯多夫维数的一个不等式.与闵科夫斯基维数不同,函数的振幅性态不足以确定函数图象的豪斯多夫维数,而且远比确定闵科夫斯基维数困难.设 $K\subset\mathbb{R}^2$ 为波莱尔集.假定

1. $\mathscr{L}(p_X(K))>0$,其中 $p_X(K)$ 表示集 K 在 X 轴上的正交投影.

2.存在常数 $c_1,c_2>0$ 及 $0<\alpha<1$,使得对任意水平闭区间 $[x_1,x_2]\times\{y\}$,存在 a_1,a_2 满足 $x_1,\leqslant\alpha_1<\alpha_2\leqslant x_2$,使得 $a_2-a_1=c_1(x_2-x_1)$ 并且长方形

$$[a_1,a_2]\times\left[y-\frac{1}{2}c_2(x_2-x_1)^\alpha,\right.$$

$$\left.y+\frac{1}{2}c_2(x_2-x_1)^\alpha\right]\cap K=\varnothing,$$

则 $\dim_H K\geqslant c(\alpha,c_1)>1$.其中 $c(\alpha,c_1)$ 为仅依赖于 α 与 c_1 的正常数.

外尔斯特拉斯函数的维数(dimension of Weierstrass function)　外尔斯特拉斯函数的一个维数公式.设

$$W(t)=\sum_{k\geqslant 1}\lambda^{(s-2)k}\cos(\lambda^k t)\quad(1<s<2,\lambda>1)$$

为外尔斯特拉斯函数,则

$$\dim_p\Gamma(W)=\dim_B\Gamma(W)=s.$$

伯西柯维奇函数的维数(dimension of Besicovich function)　伯西柯维奇函数的一个维数公式.伯西柯维奇函数定义为

$$B(t)=\sum_{n\geqslant 1}\lambda_j^{s-2}\cos(\lambda_j t)\quad(1<s<2),$$

其中 λ_j 是趋于无穷的正实数序列.

设伯西柯维奇函数 $B(t)$ 满足 $\lambda_{k+1}/\lambda_k\uparrow\infty$,则

$$\dim_H\Gamma(B)$$

$$=1+\liminf_{n\to\infty}\frac{(s-1)\log\lambda_n}{(s-1)\log\lambda_n+(2-s)\log\lambda_{n+1}}.$$

拉德马赫级数的维数(dimension of Rademacher function)　拉德马赫级数的两个维数公式.拉德马赫级数定义为

$$R_\lambda(t)=\sum_{n\geqslant 1}\lambda^n R_n(t)\quad(0<\lambda<1),$$

其中 $R_n(t)=1-2\varepsilon_n(t)$ 为 n 阶拉德马赫函数,$\varepsilon_n(t)$ 为 $t\in[0,1)$ 的 2 进展开的第 n 位数字:

1.设 $R_\lambda(t)$ 为拉德马赫函数,有

$$\dim_P\Gamma(R_\lambda(t),I)=\dim_B\Gamma(R_\lambda(t),I)=2-s.$$

2.设 $R_a(t)$ 的占有密度 $\alpha_{R_\lambda}(x)$ 存在,且对任意 $x\in I$,$\alpha_{R_\lambda}(x)\leqslant c$,则 $\dim_H\Gamma(R_\lambda(t),I)=2-s$.

这里占有密度定义为:设 f 是区间 I 上的波莱尔可测函数,E 是 $\mathbb{R}$ 上的波莱尔集,令

$$\mu_f(E)=\mathscr{L}\{t\in I,f(t)\in E\},$$

若 μ_f 对勒贝格测度绝对连续,则由拉东-尼古丁定理,存在波莱尔可测函数 $\alpha_f(x)$,使得

$$\mu_f(E)=\int_E\alpha_f(x)\mathrm{d}x,$$

$\alpha_f(x)$ 称为由 μ_f 诱导的占有密度.

占有密度(occupancy density)　见"拉德马赫尔级数的维数".

切饼集(cookie-cutter sets)　一类常见的分形集.设 $I=[0,1]$,$0<t_0<t_1<1$.映射

$$s:[0,t_0]\cup[t_1,1]\to I$$

称为切饼映射,如果它满足以下性质:

1. $S|_{[0,t_0]}$ 及 $S|_{[t_1,1]}$ 分别是 $[0,t_1]$ 与 $[t_2,1]$ 至 I 的单、满射.

2.存在常数 $\gamma>0,c>0$,使得

$$|DS(x)-DS(y)|\leqslant c|x-y|^\gamma,$$

即 DS 是 γ 阶赫尔德映射,并且

$$\inf_{x\in[0,t_0]\cup[t_1,1]}|DS(x)|>1,$$

其中 $DS(x)$ 表示 S 在点 x 的微分，

$$x\in[0,t_0]\cup[t_1,1].$$

相对于映射 S 的切饼集定义为

$$C=\{x\in[0,t_0]\cup[t_1,1];S^n(x)\in[0,t_0]\cup[t_1,1]\text{对所有的}n\geq 0\text{成立}\}.$$

切饼集的维数的估计涉及现代动力系统的理论与技巧，特别确定其维数的鲍恩公式涉及到吉布斯测度、熵、压力与变分.

切饼映射(cookie-cutter mapping)　见“切饼集”.

测度熵(theoritical entropy)　分形几何中的一个重要概念. 设 $\xi=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 为紧度量空间 X 的一个有限分划，即 $X=\bigcup A_j$ 且 A_j 彼此不相交，则分划 ξ 对于 μ 的测度熵定义为

$$h_\mu(\xi)=-\sum_{j=1}^{k}\mu(A_j)\log\mu(A_j).$$

设 $\eta=\{B_1,B_2,\cdots,B_l\}$ 为 X 的另一分划，令

$$\xi\vee\eta=\{A_i\cap B_j:1\leqslant i,j\leqslant k\}$$

为 ξ 与 η 的加细. 定义 $\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\xi$. T 对于 ξ 与 μ 的测度熵定义为

$$h_\mu(T,\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}h_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\xi\right).$$

最后，T 关于 μ 的测度熵定义为

$$h_\mu(T)=\sup_\xi h_\mu(T,\xi),$$

其中 ξ 取遍 X 的有限分划.

拓扑熵(topology entropy)　分形几何中的一个重要概念. 设 X 为紧度量空间，$T:X\to X$ 为连续映射. 设 $\alpha=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为 X 的一个有限开覆盖，令 $N(\alpha)$ 表示 α 的所有子覆盖的最小基数，则 T 对于 α 的拓扑熵定义为

$$h(T,\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\alpha\right),$$

T 的拓扑熵定义为

$$H(T)=\sup_\alpha h(T,\alpha),$$

其中 α 取遍 X 的有限开覆盖.

压力(press)　分形几何中的一个重要概念. 设 $M_T(X)$ 为所有的 T 不变概率测度，$C(X)$ 为 X 上的连续函数的集合. 设 $f\in C(X)$，f 的压力 $P(f)$ 定义为

$$P(f)=\sup_{\nu\in M_T(X)}\left\{h_\nu(T)+\int f\,\mathrm{d}\nu\right\},$$

亦即 $P(f)$ 满足上述意义的变分原理.

平衡测度(equilibrium measure)　分形几何中常用的一种测度. 如果 ν 使得上述上确界达到，即

$$P(f)=h_\nu(T)+\int f\mathrm{d}\nu,$$

则 ν 称为平衡测度.

符号空间(symbolic space)　分形几何中的一种重要空间. 设 $m\geqslant 2$ 为正整数. $\Omega(=\Omega(m))$ 为 m 个字母的集合，Ω^* 为由 Ω 中元素组成的长度有限的序列的集合，Ω^ω 为长度无穷的序列的集合. 设 $w\in\Omega^*$，柱集 Ω_w 表示 Ω^ω 中前 $|w|$ 个字母等于 w 的元素的集合，其中 $|w|$ 表示 w 的长度(w 中含字母的个数)，则称 Ω^ω 为符号空间. 设 $x=x_1x_2\cdots x_n\cdots\in\Omega^\omega$，令 $\Omega^n(x)$ 表示包含 x 的长为 n 的柱集. $\sigma:\Omega^\omega\to\Omega^\omega$ 称为移位算子，定义为 $(\sigma(x))_n=x_{n+1}$.

吉布斯测度(Gibbs measure)　一种常用的测度. 设 $f:\Omega\to\mathrm{R}$ 为赫尔德连续函数，则存在平衡测度 ν_f，使得对某一 $\xi>0$，任意 $x\in\Omega^\omega$，$n\geqslant 0$，有

$$\xi<\frac{\nu_f(\Omega^n(x))}{\exp(-nP(f)+S_nf(x))}<\xi^{-1},$$

其中 $P(f)$ 为 f 的压力，

$$S_nf(x)=\sum_{t=0}^{n-1}f(\sigma^i(x)).$$

满足上述条件的测度 ν_f 称为吉布斯测度.

码映射(coding mapping)　符号空间 Ω^ω 到切饼集 C 上的一种映射. 设 S 是切饼映射，C 是对应的切饼集，设 $S|_{[0,t_0]}$，$S|_{[t_1,1]}$ 的逆映射分别为

$$\varphi_0:I\to[0,t_0],\ \varphi_1:I\to[t_1,1].$$

设 $x=x_0x_1\cdots x_n\cdots\in\Omega^\omega$，$\Omega=\{0,1\}$，码映射 $\pi:\Omega^\omega\to C$ 定义为

$$\pi(\underset{\sim}{x})=\bigcap_{n\geqslant 0}\varphi_{x_0}\varphi_{x_1}\cdots\varphi_{x_n}(I).$$

切饼集的豪斯多夫维数的鲍恩公式(Bowen formula of Hausdorff dimension of cookie-cutter sets)　切饼集的豪斯多夫维数的一个公式. 设 S 是切饼映射，C 是对应的切饼集. 定义

$$f:\Omega^\omega\to\mathrm{R},f(x)=-\log|DS(\pi x)|,$$

设 $P(f)$ 是 f 的压力，则：

1. $\dim_H C=\dim_B=\tilde{d}$，$\tilde{d}$ 是满足 $P(\tilde{d}f)=0$ 的惟一实数.

2. $0<\mathscr{H}^{\tilde{d}}(C)<\infty$.

测度的分形结构

测度的分形结构(fractal structure of measures)　分形几何的重要组成部分. 其核心内容是研究一个测度的质量是如何分布的，支撑它的集合的几何性质如何影响质量的分布以及一个给定的集合能支撑什么样的测度.

测度的豪斯多夫维数(Hausdorff dimensions of a measure)　测度的一种重要维数. 令 $M^+(\mathrm{R}^d)$ 表示 R^d 中的正波莱尔测度，$\mathrm{Supp}\,\mu$ 表示测度 μ 的支集. 设 $\mu\in M^+(\mathrm{R}^d)$，则 μ 的豪斯多夫维数与填充维数分别定义为

$$\dim_H\mu=\inf_{E\subset\mathrm{R}^d}\{\dim_H E\mid\mu(E)=\mu(\mathrm{R}^d)\}$$

与

$$\dim_P \mu = \inf\{\dim_P E \mid \mu(E^C) = 0\}.$$

测度的填充维数(packing dimensions of a measure) 见“测度的豪斯多夫维数”.

测度的点态维数(pointwise dimension of a measure) 测度的一种维数. 设 $\mu \in M^+(\mathsf{R}^d)$, $x \in \mathrm{supp}(\mu)$,则

$$\underline{D}(\mu, x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r}$$

称为测度 μ 在点 x 的下点态维数(或点 x 的下对数密度,或点 x 的下李普希茨指数). 而

$$\overline{D}(\mu, x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r}$$

称为测度 μ 在点 x 的上点态维数(或点 x 的上对数密度,或点 x 的上李普希茨指数).

测度的点态维数描述了测度支柱中一点附近质量的变化性态,支撑分形集的测度的变化速度的快、慢分别与集合的豪斯多夫维数与填充维数相联系.

测度 μ 的维数与点态维数的关系. 设 $E \subset \mathsf{R}^d$ 为波莱尔集,则

$$\dim_H E = \sup_{\mu(E)>0} \inf_{x \in E} \underline{D}(\mu, x),$$

$$\dim_P E = \inf_{\mu(E)>0} \sup_{x \in E} \overline{D}(\mu, x).$$

维数与点态维数的关系(relation between dimension and pointwise dimension) 见“测度的点态维数”.

测度的奇异指数(singular exponent of a measure) 测度的一种指数. 其定义如下:

$$\mathrm{Ind}_S \mu = \inf\{\alpha \geqslant 0 \mid \mu \perp \mathscr{H}^\alpha\}.$$

测度的连续指数(continue exponent of a measure) 测度的一种指数. 其定义如下:

$$\mathrm{Ind}_C \mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 \mid \mu \ll \mathscr{H}^\alpha\}.$$

测度的奇异指数与连续指数反映了支撑分形集的测度与豪斯多夫测度的关系.

测度的谱维数(spectral dimension of a measure) 测度的一种常用维数. 设 $\mu \in M^+(\mathsf{R}^d)$,它的 α 势记为 U_α^μ,则 μ 的上、下谱维数定义为:

$$\dim^{\bullet} \mu = \inf\{\alpha \geqslant 0 \mid U_\alpha^\mu(x) = \infty, \mu\text{-a. e.}\};$$

$$\dim_{\bullet} \mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 \mid U_\alpha^\mu(x) < \infty, \mu\text{-a. e.}\}.$$

测度的谱维数反映测度的位势敛、散的临界指数.

测度的对数密度指数为

$$\dim_D^* \mu = \inf\{\alpha \geqslant 0 \mid \underline{D}(\mu, x) \leqslant \alpha, \mu\text{-}a.\,e.\};$$

$$\dim_{*D} \mu = \sup\{\alpha \geqslant 0 \mid \underline{D}(\mu, x) \geqslant \alpha, \mu\text{-}a.\,e.\}.$$

尽管上述指数从不同的角度描述测度的性质,但它们之间有密切的关系. 各类指数间的关系如下: 设 $\mu \in M^+(\mathsf{R}^d)$,则

$$\dim^* \mu = \dim_H \mu = \mathrm{Ind}_s \mu = \dim_D^* \mu,$$

$$\dim_* \mu = \mathrm{Ind}_c \mu = \dim_{*D} \mu,$$

$$\dim_* \mu \leqslant \dim^* \mu.$$

自相似测度(self-similar measure) 一类典型而重要的分形测度. 设 E 压缩比为 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 的相似压缩族 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 生成的自相似集. 若

$$\mathrm{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$$

为一概率向量,即 $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. 视 p 为符号集 $\Omega = \{1, 2, \cdots, m\}$ 上的概率测度,满足 $\mathrm{p}(i) = p_i$, τ 为由 p 诱导的符号空间 Ω^ω 上的乘积测度. 则存在惟一的 $\mu \in M_1^+(\mathsf{R}^d)$满足:

1. $\mu = \sum_{i=1}^m p_i \mu \circ S_i^{-1}$.

2. $\mathrm{supp}\,\mu = E$,其中$\mathrm{supp}\,\mu$ 为 μ 的支集,

上述测度 μ 称为由相似压缩族 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 概率向量$(p_1, p_2, \cdots, p_m)$定义的自相似测度.

自相似测度由哈钦生(Hutchinson, J. E.)于 1981 年引入. 它是目前了解得最深入的一种分形测度.

康托尔测度(Cantor measure) 一种重要的自相似测度. 取

$$p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ S_1(x) = \frac{x}{3},\ S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

所得到的自相似测度称为康托尔测度.

自相似测度的维数(dimension of self-similar measure) 自相似测度的一个维数公式. 设 μ 是由相似压缩族 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 与概率向量$(p_1, p_2, \cdots, p_m)$定义的自相似测度. 设 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 满足开集条件,则

$$\dim_H \mu = \alpha = \frac{\sum_{i=1}^m p_i \log p_i}{\sum_{i=1}^m p_i \log c_i}.$$

测度的 L^p 维数(L_p dimension of a measure) 测度 μ 的一种维数. 设 $r > 0$, $I_k(r)$为 r 网中的立方体, $k = (k_1, k_2, \cdots, k_d) \in \mathsf{Z}^d$. 若

$$\mu \in M^+(\mathsf{R}^d),\ 1 < p < \infty,$$

令

$$\overline{D}_p \mu = \limsup_{r \to 0} \frac{\log \sum (\mu(I_k(r)))^p}{(p-1)\log r},$$

$$\underline{D}_p \mu = \liminf_{r \to 0} \frac{\log \sum (\mu(I_k(r)))^p}{(p-1)\log r},$$

则 $\overline{D}_p(\mu)$, $\underline{D}_p(\mu)$分别称为测度 μ 的上、下 L^p 维数. 若 $\overline{D}_p(\mu) = \underline{D}_p(\mu)$,则记其公共值为 $D_p(\mu)$,称为 μ 的 L^p 维数.

设$\{A_k\}$是 R^d 的任一个分划, $\sup|A_k| \leqslant r$,则上述定义中的和式可以由 $\sup \sum \mu(A_k)^p$ 代替.

测度的 L^∞ 维数(L^∞ dimension of a measure) 测度 μ 的一种维数. 设 $\mu \in M^+(\mathsf{R}^d)$,则 μ 的上、下 L^∞维数定义为

$$\overline{D}_{\infty}\mu = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \sup\limits_{k\in Z^d} \mu(I_k(r))}{\log r},$$

$$\underline{D}_{\infty}\mu = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \sup\limits_{k\in Z^d} \mu(I_k(r))}{\log r}.$$

测度的熵维数(entropy dimension of a measure)　测度 μ 的一种维数. 设 $\mu\in M^+(\mathrm{R}^d)$,定义

$$\overline{D}_1\mu = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \sum \mu(I_k(r)) \log \mu(I_k(r))}{\log r},$$

$$\underline{D}_1\mu = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \sum \mu(I_k(r)) \log \mu(I_k(r))}{\log r}.$$

$\overline{D}_1\mu$, $\underline{D}_1\mu$ 亦称为 μ 的上、下熵维数,当此二维数相等时,称上述公共值为 μ 的熵维数,并记为 $D_1\mu$,形式上可看做 $D_p\mu$ 在 $p\to 1$ 时的极限.

测度的 L^p 维数的关系(relation between L^p dimensions of measures)　测度 μ 的几种维数之间的关系. 设 $\mu\in M^+(\mathrm{R}^d)$,则对任意 $1<p\leqslant\infty$时,其维数关系如下:

1. $\frac{p-1}{p}\overline{D}_p\mu$ 与 $\frac{p-1}{p}\underline{D}_p\mu$ 是 μ 的增函数.
2. $\lim\limits_{p\to\infty}\overline{D}_p\mu \leqslant \overline{D}_{\infty}\mu \leqslant \inf\limits_{x\in\mathrm{R}^d}\overline{D}(\mu,x)$;
   $\lim\limits_{p\to\infty}\underline{D}_p\mu \leqslant \underline{D}_{\infty}\mu \leqslant \inf\limits_{x\in\mathrm{R}^d}\underline{D}(\mu,x)$.

测度的截集(level sets of a measure)　波莱尔概率测度的一种截集. 设 μ 是 $I=[0,1]$上的波莱尔概率测度. 设 $c\geqslant 2$ 为正整数,$\{I_{n,j}\}_{0\leqslant j<c^n}$为 n 阶 c 进区间族,$I_n(x)$为包含点 x 的 n 阶区间. 设 $\alpha\leqslant 0$,定义

$$E_\alpha = \left\{x\in I \mid \lim_{n\to\infty}\frac{\log\mu(I_n(x))}{\log|I_n|} = \alpha\right\}.$$

E_α 称为测度 μ 的 α 截集. 令 $f(\alpha)=\dim_H E_\alpha$,称为 μ 的 $f(\alpha)$谱.

热力学极限(thermodynamic limit)　与测度 μ 相关的一种极限. 设 $\alpha>0, q\in\mathrm{R}, n\geqslant 1$,定义

$$S_n(q) = \sum{}'_{0\leqslant j<c^n}\mu(I_{n,j})^q,$$

其中撇号表示对所有 $\mu(I_{n,j})\neq 0$ 的 n 阶 c 进区间求和,

$$\tau_n(q) = -\frac{1}{n}\log_c S_n(q),$$

$$\tau(q) = \liminf_{n\to\infty}\tau_n(q),$$

τ 为结合 μ 的热力学极限.

勒让德变换(Legendre transform)　与热力学极限 τ 相关联的一种变换. 令

$$\tau^*(\alpha) = \inf_{q\in\mathrm{R}}(q\alpha - \tau(q)),$$

τ^* 称为 τ 的勒让德变换.

测度的重分形分析(multifractal analysis of a measure)　分析测度 μ 的性质的一种重要方法. 测度 μ 的重分形分析是讨论 $\tau, \tau^*, f, \dim_H E_\alpha, \dim_P E_\alpha$ 之间关系的一种分析方法.

重分形机理(thermodynamic formalism)　重分形分析中的一个重要概念. 如果对 α 有

$$\dim_H E_\alpha = f(\alpha) = \tau^*(\alpha),$$

则称测度 μ 对于 α 满足重分形机理. 重分形分析的重要目的之一是研究什么样的测度满足重分形机理. 下面是满足重分形机理的一个例子. 设 $q\in\mathrm{R}$. 假定 $\alpha=\tau'(q)$存在并且存在概率测度 ν 以及趋于零的正数序列$\{h_n\}$,使得对任意区间 $I_{n,j}$,

$$\mu(I_{n,j})^q c^{n(\tau(q)-h_n)} \leqslant \nu(I_{n,j}) \leqslant \mu(I_{n,j})^q c^{n(\tau(q)+hn)},$$

则

$$\dim H^{E_\alpha} = \dim_p E_\alpha = \tau^*(\alpha).$$

满足上述条件的测度 ν 为吉布斯测度.

基本不等式(fundamental inequality)　重分形分析中一个重要的不等式. 对任意 $\alpha>0$ 有

$$\dim_P E_\alpha \leqslant f(\alpha) \leqslant \tau^*(\alpha).$$

二项测度(binomial measure)　一种重要的概率测度. 设 $\mathrm{p}=(p_0,p_1)$为概率向量,

$$p_0>0,\ p_1>0,\ p_1+p_2=1.$$

令 $I_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}$表示$[0,1]$区间的 n 阶 2 进区间:若 $\varepsilon_j=0$,则表示取它的 $j-1$ 阶母区间的左半部分;若 $\varepsilon_j=1$,则表示取上述区间的右半部分. 设 μ_{p} 是$[0,1]$上的满足

$$\mu_{\mathrm{p}}(I_{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}) = \prod\nolimits_{1\leqslant j\leqslant n} p_{\varepsilon_j}$$

的惟一的概率测度. 测度 μ_{p} 称为二项测度. 对所有的 α,μ_{p} 满足重分形机理.

撰　稿　丰德军　文志英　苏维宜
审　阅　苏维宜　徐利治

常　微　分　方　程

常微分方程(ordinary differential equation) 含有一个自变量和未知函数及其导数的方程式称为常微分方程,简称微分方程.常微分方程理论研究已有 300 多年的历史,它是近代数学中古老的重要分支;同时,由于它与实际问题有着密切的联系,因此,它又是近代数学中富有生命力的分支之一.早在 17 世纪,牛顿在创立经典动力学的同时也创立了微积分,尔后微分方程就成为定量描述各种形态的物质运动(如机械运动、流体和大气运动、热和电磁运动等)的运动机理的基本语言和运算手段,是现代力学和物理科学不可缺少的数学工具.

如果 y 表示自变量 x 的函数,则关于未知函数 y 的常微分方程一般形式可表示为

$$F\left(x;y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)=0,$$

式中 F 是 $n+2$ 个自变量的函数,n 为正整数,F 中所包含的导数的最高阶数 n,称为该方程的阶数.由若干常微分方程所构成的方程组,称为常微分方程组.其一般形式可表示为

$$F_j\left(x;y_1,y_2,\cdots y_m;\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n_1}y_1}{\mathrm{d}x^{n_1}},\cdots,\frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n_m}y_m}{\mathrm{d}x^{n_m}}\right)=0$$
$$(j=1,2,\cdots,m),$$

其中 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 分别是未知函数 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的导数的最高阶数.如果函数 $F(F_j)$ 关于所有未知函数及其各阶导数都是线性的,则称为线性常微分方程(组);否则,称为非线性方程(组).

如果常微分方程能表示成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=f\left(x;y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right),\qquad(1)$$

式中 f 是 $n+1$ 个自变量的函数,则称这类常微分方程为正规型的.任一上述正规型常微分方程与微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y_1,\ \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=y_2,\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x}=y_{n-1},$$
$$\frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x}=f(x;y,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$$

是等价的.

满足常微分方程的函数称为常微分方程的解.常微分方程理论,就是研究常微分方程(组)在什么条件下有解,即解的存在性问题;和有多少个解,即解的惟一性问题,以及解的各种性质和求解方法等.此外,还要应用常微分方程来描述和解释自然现象,把它们用于各门科学和工程技术.

常微分方程理论的形成与发展是与力学、天文学、物理学及其他自然科学和技术的发展密切相关并彼此促进和推动的.数学的其他分支的新发展,如代数、函数论、李群、拓扑学等都给常微分方程的发展以深刻的影响.目前计算机科学的高速发展,为常微分方程理论与应用的发展,也提供了很重要的条件.

早在 18 世纪,常微分方程发展的古典时期,由于力学、物理学、几何学等的需要,数学家曾把注意力主要集中在求可用初等函数表示的通解上.亦即对于方程(1)求含有 n 个任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的形如 $y=y(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 的解上.在这个阶段,主要有莱布尼茨(Leibniz,G. W.)、约翰第一・伯努利(Bernoulli,Johann,Ⅰ)和欧拉(Euler,L.)等人的工作.他们得到了关于齐次方程、线性方程和伯努利方程的通解求法.但后来人们发现,绝大多数微分方程都求不出通解.特别是刘维尔(Liouville,J.)于 1841 年证明了这样一个事实,即黎卡提方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2+x^m$$

除了某些 m 的特殊值外,其通解不可能用初等函数和初等函数的积分表示.当然,对于一般的非线性方程更是如此.这样人们开始改变了原来的想法,不局限于求用初等函数表示的解,而去求它的近似解或者去研究满足这些条件的解的性质.近代电子计算机出现以后,微分方程数值解法发展成近代计算数学中的一个重要分支.

19 世纪中叶以后,数学分析理论发生了重大的飞跃,在这个时期,柯西(Cauchy,A.-L.)等人建立了严格的数学分析的基础,将新的概念和方法应用于常微分方程,并由实数域扩展到复数域进行研究,严格地建立了解的存在惟一性理论,为常微分方程理论的深入研究奠定了坚实的基础.这个时期柯西等数学家研究了对特定初始值求相应解的问题.这类定解问题称为微分方程的柯西问题,通称初值问题.这个时期,由于提出热传导和弦振动等数理方程的定解问题,因而就出现了由斯图姆(Sturm,J. C.-F.)和刘维尔等开创的微分方程边值问题与特征值问题的研究领域.

19 世纪末到 20 世纪初,庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)和李亚普诺夫(Ляпунов,A. M.)开创了常微分方程定性理论与稳定性理论,这些工作代表了当时非线性力学的最新方法.此后,由于组合拓扑的发展,常微分方程开始转向了大范围方向的研究.在

定性理论研究中，奇点附近积分曲线分布、极限环(即孤立周期解)、奇点的大范围分布、环面上的积分曲线，以及三维空间周期解附近积分曲线的分布等问题的研究得到了极大的发展. 这一时期，对空间曲线性质的研究，特别是“三体问题”的研究促使伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)于 1927 年开创了动力系统这一新的分支，把常微分方程研究提高到了新水平.

这一时期常微分方程解析理论也得到了充分的发展. 柯西指出，在一定条件下，微分方程的解是解析函数，可以用通常的复变函数论方法来研究这种解的性质，从而开辟了微分方程解析理论. 后来布里奥(Briot, C. A. A.)、布凯(Bouquet, J.-C.)和富克斯(Fuchs, I. L.)等人完成了许多很有价值的工作. 这一时期微分方程摄动理论的创立并发展，为这一分支的进一步研究奠定了重要的基础.

20 世纪中期以来，常微分方程无论在理论上还是在应用方面，都有了长足的发展. 拓扑学、函数论、泛函分析等学科的发展，为常微分方程理论和应用的研究提供了新的工具. 定性理论发展到现代微分动力系统理论，对一些奇异的非线性现象的深入研究做出了贡献. 常微分方程的理论与方法还为泛函微分方程和最优控制理论等的产生与发展提供了基础，从而大大拓宽了方程的类型和它的研究领域. 在这一时期，常微分方程理论向高维数、抽象化方向发展，包括欧氏空间常微分方程向抽象空间常微分方程发展，由微分方程所定义的动力系统向抽象动力系统发展，实域定性理论向复域定性理论发展等. 在应用方面，由于计算机科学的发展，微分方程数值解、解析理论以及它们在信息科学、机械学、电子学、生物、经济等许多领域的广泛应用，使常微分方程的理论与应用研究提高到一个更高的水平.

常微分方程组(system of differential equation) 见“常微分方程”.

常微分方程基础

常微分方程的阶(order of ordinary differential equation) 常微分方程表征解的自由度的一种本质属性. 对于常微分方程，其未知函数的最高阶导数的阶数称为该方程的阶. 对于常微分方程组，如果在方程组中出现的未知函数 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的最高阶导数的阶数为 m_i，则称 m_i 为方程组关于 y_i 的阶，而称 $m=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 为该常微分方程组的阶.

常微分方程的解(solution of ordinary differential equation) 常微分方程的基本概念. 满足常微分方程(组)的函数(组)称为常微分方程(组)的解. 如果解以未知函数(组)与自变量的隐函数形式给出，则隐函数形式的解称为常微分方程(组)的积分.

常微分方程组的积分(integral of ordinary differential equation) 见“常微分方程的解”.

常微分方程的通解(general solution of ordinary differential equation) 常微分方程的基本概念. n 阶常微分方程(组)的含有 n 个独立的任意常数的解或积分称为通解或通积分. 方程式的不含自由常数的特定解称为特解. 因此，对通解或通积分中 n 个任意常数取特定值的解或积分均为特解.

常微分方程的通积分(general integral of ordinary differential equation) 见“常微分方程的通解”.

常微分方程的特解(particular solution of ordinary differential equation) 见“常微分方程的通解”.

常微分方程的方向场(field of direction of ordinary differential equation) 一阶常微分方程的几何描述. 研究常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{1}$$

这里 $f(x,y)$ 是确定于 (x,y) 平面某一区域 G 上的函数. 设在 G 上的每一点 (x,y) 做一以 $f(x,y)$ 为斜率的线段，表示 G 在该点的方向，则得到一个方向场. 求解方程(1)的问题可叙述为：求一光滑曲线 $y=\varphi(x)$，使该曲线在每一点的切线方向都与由方程(1)确定的方向场的方向一致. 方程(1)的解在 G 上的几何图线称为解曲线. 方程(1)如上确定的方向场有两点不足：

1. 须将平行于 Oy 轴的方向排除.

2. 解曲线局限于是单值函数的图线，排除了与某一垂直 Ox 轴的直线有两个或两个以上交点的曲线.

为弥补上述不足，把一阶微分方程写成

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{2}$$

的形式，使得 x 与 y 处于对称的地位. 如前述，方程(1)及(2)确定一个方向场，于是求解方程(1)及(2)的问题可叙述为在区域 G 内求所有的曲线，使曲线上任何一点的方向都由方程(1)及(2)所确定. 这些曲线称为方程(1)及(2)的积分曲线，也就是(1)及(2)确定的方向场的积分曲线.

类似地可定义常微分方程组的解曲线和积分曲线.

常微分方程的积分曲线(integral curve of ordinary differential equation) 见“常微分方程的方向场”.

可分离变量方程(equation with separable variables) 一阶常微分方程中可求出通解表示式的一类. 形如

$$g_1(x)g_2(y)\mathrm{d}y=f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}x \tag{1}$$

的一阶方程称为可分离变量方程. 当 $g_1(x)f_2(y)\neq 0$ 时,(1)可化为变量分离的方程

$$\frac{g_2(y)}{f_2(y)}\mathrm{d}y=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\mathrm{d}x,$$

两边分别求积分,即得通积分

$$G(y)=F(x)+C, \tag{2}$$

式中 C 为任意常数. 这种求解方法称为变量分离法. 如能从(2)解出

$$y=G_1(x,C) \text{ 或 } x=F_1(y,C),$$

则得到(1)的通解. 还必须补上使 $f_2(y)=0$ 的常数解 $y=y_i$ 和使 $g_1(x)=0$ 的常数解 $x=x_j$.

变量分离法(separation of variables) 见"可分离变量方程".

齐次微分方程(homogeneous differential equation) 能化为可分离变量方程的一类微分方程. 假设 $f(x,y)$是变元 x 和 y 的零次齐次函数,即有恒等式 $f(tx,ty)=f(x,y)(t\neq 0)$成立,则称一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{1}$$

为齐次微分方程. 特别地,设 $t=1/x$,有

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

记

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right),$$

则齐次微分方程(1)可写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

设 $\varphi(u)$是 u 的连续函数,做变换 $u=y/x$,得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u).$$

当 $\varphi(u)-u\neq 0$ 时,整理可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两边积分,有通积分

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\ln x+C, \tag{3}$$

式中 u 用 y/x 代换.

当 $\varphi(u_0)-u_0=0$(u_0 为常数),则方程(2)除了有通积分(3)外,还有特解 $y=u_0x$.

一阶线性微分方程(first order linear differential equation) 方程中未知函数及其导数均为一次的一阶常微分方程,这是最重要而且完全可积分的一类一阶方程. 一阶线性微分方程的一般形式为

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{1}$$

式中 $p(x)$,$q(x)$常假定为连续函数,$q(x)\neq 0$ 时称(1)为非齐次线性微分方程. 而

$$y'+p(x)y=0 \tag{2}$$

称为与(1)相应的齐次线性微分方程. (2)有通解

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

式中 C 为任意常数. 方程(2)满足初始条件$y(x_0)=y_0$ 的特解为

$$y=y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}.$$

方程(1)的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x+C_1\right),$$

式中 C_1 为任意常数. 方程(1)满足初始条件$y(x_0)=y_0$的特解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\left(\int_{x_0}^{x}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s}q(t)\mathrm{d}t+y_0\right).$$

非齐次线性微分方程(non-homogeneous linear differential equation) 见"一阶线性微分方程".

齐次线性微分方程(homogeneous linear differential equation) 见"一阶线性微分方程".

常数变易法(variation of constants) 求解非齐次线性微分方程的有效方法. 考虑一阶线性微分方程

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{1}$$

$$y'+p(x)y=0. \tag{2}$$

用分离变量法可得到(2)的通解

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \tag{3}$$

式中 C 是任意常数. 为了求解方程(1),将(2)的通解中的常数(或参数)C 视为函数 $C(x)$,使(1)具有如下形式解

$$y=C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{4}$$

将(4)式代入(1)中,可推得关于 $C(x)$满足的一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x), \tag{5}$$

积分(5)式,得到

$$C(x)=\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x+C_1.$$

于是得到(1)的通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x+C_1\right),$$

式中 C_1 为任意常数. 将齐次线性微分方程通解(3)中的常数 C 视为函数而求出非齐次线性微分方程的通解的方法称为常数变易法. 这个方法也适用于求线性方程组及高阶线性方程的通解.

伯努利方程(Bernoulli Equation) 能化为线性方程的一类微分方程. 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)y^{\alpha} \tag{1}$$

的方程称为伯努利方程,其中 $P(x)$,$Q(x)$是连续函数,α 是常数,且 $\alpha\neq 0,1$. 对方程(1)做变换$z=y^{1-\alpha}$,

可把(1)化为关于 z 的一阶线性方程

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)P(x)z + (1-\alpha)Q(x). \quad (2)$$

求出(2)的通解，用 $y^{1-\alpha}$代换 z，就可得到伯努利方程的通积分. 当 $\alpha>0$ 时，还有解 $y=0$.

黎卡提方程(Riccati equation)　最简单的一类非线性方程. 形如

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (1)$$

的方程称为黎卡提方程. 对(1)的特例

$$y' = -by^2 + cx^\alpha, \quad (2)$$

刘维尔(Liouville, J.)于 1941 年证明了：当且仅当

$$\alpha=0,\ -2,\ \frac{-4k}{2k+1},\ \frac{-4k}{2k-1}\ (k=1,2,\cdots)$$

时，方程(2)才能求得用初等函数及其积分所表示的通解. 刘维尔的工作使得人们的注意力开始转向微分方程解的定性研究、数值计算以及求近似解上.

无论在微分方程的经典理论或在近代科学的有关分支，黎卡提方程均有重要应用.

全微分方程(total differential equation)　一类可积分的一阶微分方程. 如果存在一个可微函数 $U(x,y)$，使得

$$dU(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

即

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y),\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y),$$

则方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

称为全微分方程或恰当微分方程. (1)式的左边恰是某个二元函数 $U(x,y)$ 的全微分，这样，方程(1)的通积分为 $U(x,y)=C$. U 可沿特殊道路的线积分求得：

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C,$$

式中 (x_0,y_0) 为定义域中的定点，C 为任意常数.

恰当微分方程(exact differential equation)　见“全微分方程”.

积分因子(integrating factor)　使得一阶微分方程转化为等价的全微分方程的函数因子. 方程

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \quad (1)$$

若能找到连续可微的函数 $\mu(x,y)(\neq 0)$，使得

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

即

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right), \quad (2)$$

则方程

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \quad (3)$$

是全微分方程，此时称 $\mu(x,y)$ 为方程(1)的积分因子. 显然，方程(3)的通积分 $U(x,y)=C$ 也是方程(1)的通积分(注意 $\mu(x,y)\neq 0$). 一般地，求解 $\mu(x,y)$ 满足的方程(2)比求解方程(1)还困难，但给人们提供了解方程(2)的一个办法.

一阶隐方程(implicit equation of first order)　未知函数的导数未表为 (x,y) 的显函数的一类常微分方程. 形如

$$F(x,y,y') = 0 \quad (1)$$

的常微分方程称为一阶隐方程. 若(1)可就 y' 解得多个一阶方程

$$y' = f_i(x,y)\ (i=1,2,\cdots,k), \quad (2)$$

则所解得的方程称为一阶显方程. (2)的每一方程的通积分设为 $G_i(x,y,C_i)=0$，则(2)的通积分为

$$\prod_{i=1}^{k} G_i(x,y,C_i) = 0.$$

若已知曲面 $F(x,y,p)=0\ (p=y')$ 的参数表示式：$x=f(u,v)$，$y=g(u,v)$，$p=h(u,v)$，则方程(1)等价于 $x=f(u,v)$，$y=g(u,v)$，$y'=h(u,v)$. 由此得到 u,v 的一阶显方程

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u} - h\frac{\partial f}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial g}{\partial v} - h\frac{\partial f}{\partial v}\right)dv = 0. \quad (3)$$

若 $w(u,v,C)=0$ 是(3)的通积分，则 $x=f(u,v)$，$y=g(u,v)$，$w(u,v,C)=0$ 是(1)的通积分. 这种求解方法称为引入参数法.

一阶显方程(explicit equation of first order)　见“一阶隐方程”.

引入参数法(method of parameter)　见“一阶隐方程”.

常微分方程的奇解(singular solution of ordinary differential equation)　一阶隐方程的包络解. 奇解是在其上的每一点微分方程解的惟一性都不成立的解. 或者说，奇解对应的曲线上每一点至少有两条积分曲线通过. 一般地，奇解也是一阶隐方程通积分的包络. 方程

$$F(x,y,y') = 0 \quad (1)$$

的奇解必定包含在由方程组

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0, \\ F'_p(x,y,p) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

消去 p 而得到的曲线中，这里 $F(x,y,p)$ 是 x,y,p 的连续可微函数. 由方程(2)决定的曲线称为方程(1)的 p 判别曲线. p 判别曲线或其分支不一定都是奇解，有的是解(不破坏惟一性)，有的不是解. 利用 p 判别曲线可以得到求奇解的途径.

克莱罗方程(Clairaut equation)　一类通解有包络结构的特殊的一阶微分方程. 形如

$$y = xy' + \varphi(y') \quad (1)$$

的方程称为克莱罗方程，其中 φ 是连续可微函数. 为求解，将方程(1)两边对 x 求导，以 $y'=p$ 代入，整理可得

$$\frac{dp}{dx}(x+\varphi'(p))=0.$$

若 $dp/dx=0$，得 $p=c$，代入(1)得到(1)的通解

$$y=cx+\varphi(c), \tag{2}$$

式中 c 为任意常数，(2)式即通解表示一族直线. 若将 $x+\varphi'(p)=0$ 与(1)联立，得

$$\begin{cases} x+\varphi'(p)=0, \\ y=xp+\varphi(p). \end{cases} \tag{3}$$

消去 p 得到(1)的一个解，此解是方程(1)的通解(一族直线)(2)的包络，破坏惟一性，故是奇解.

高阶微分方程(differential equation of higher order) 含有未知函数的导数高于一阶的微分方程. 形如

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \quad (n>1) \tag{1}$$

的方程称为高阶微分方程，式中 F 是所有变元的连续函数. 求解方程(1)的重要的方法就是降阶法.

微分方程组的首次积分(first integral of differential equation system) 微分方程组的解所遵从的关系式. 如果以方程组

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

的任何一个解 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 代入连续可微函数 $\Phi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$，使得

$$\Phi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=C, \tag{2}$$

其中常数 C 一般与所取解有关，则(2)称为方程组(1)的(一个)首次积分，或称第一积分. 例如，能量守恒公式就是保守系统动力学方程的首次积分.

如果能够求得 n 个独立的首次积分，那么，它们合在一起就构成方程组(1)的通积分. 如果能够求得 k 个独立的首次积分，那么，就可利用它们将(1)降为 $n-k$ 阶的方程组.

线性常微分方程

线性常微分方程(linear ordinary differential equation) 理论结构最完整且具有广泛应用的一类常微分方程. 方程中出现的未知函数及其各阶导数都是一次的，则称该常微分方程为线性常微分方程. 线性常微分方程具有完整的构造性质，在实际问题中有广泛的和重要的应用.

***n* 阶线性常微分方程**(linear differential equation of *n*-th order) 未知函数导数最高阶数为 n 的线性常微分方程. 如果方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1}$$

的左端函数 F 包含的未知函数及其各阶导数都是一次的，则称方程(1)为 n 阶线性(常微分)方程，它的一般形式可表为

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x). \tag{2}$$

当 $f(x)\not\equiv 0$ 时，方程(2)称非齐次方程；当 $f(x)\equiv 0$ 时，则称为齐次方程.

线性微分方程组(first order linear differential equation system) 具有完整构造性质和广泛应用的一类常微分方程组. 如果方程组

$$F_j(x,y_1,\cdots,y_n,y'_1,\cdots,y'_n,\cdots,y_1^{(k)},\cdots,y_n^{(k)})=0 \tag{1}$$

$(j=1,2,\cdots,m)$ 的左端各函数 F_j 包含的各未知函数及其各阶导数都是一次的，则称方程组(1)为线性微分方程组. 如果线性微分方程组中各未知函数的导数均为一阶的，则称为一阶线性微分方程组. 其一般形式可写为

$$\frac{dy_i}{dx}=a_{i1}(x)y_1+a_{i2}(x)y_2+\cdots+a_{in}(x)y_n+f_i(x) \quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{2}$$

为简便计，(2)可写为向量形式

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y+f(x), \tag{3}$$

式中

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

方程组(2)或(3)亦可称为 n 阶线性微分方程组(注意方程的阶与方程组的阶的定义). 在(2)及(3)中，若 $f_i(x)\equiv 0$ ($f(x)\equiv 0$)，则称为齐次线性微分方程组；若相应的 $f_i(x)\not\equiv 0$ ($f(x)\not\equiv 0$)，则称为非齐次线性微分方程组. 一般地，线性微分方程组均可化为一阶线性微分方程组的典则形式.

齐次线性微分方程组(homogeneous linear differential equation) 见"线性微分方程组".

非齐次线性微分方程组(nonhomogeneous linear differential equation) 见"线性微分方程组".

叠加原理(superposition principle) 线性常微分方程(组)解的构造性质. 设 y_1,y_2 分别是非齐次线性常微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f_i(x) \quad (i=1,2)$$

的解；或者是两个(用向量矩阵形式表示，这时 y_1,y_2 是向量)非齐次线性常微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + F_s(x) \ (s=1,2)$$

的解，叠加原理为：y_1+y_2 是方程

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y$$
$$=f_1(x)+f_2(x)$$

的解，或向量 y_1+y_2 是方程组

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y+F_1(x)+F_2(x)$$

的解.

朗斯基行列式(Wroński determinant) 判别齐次线性方程解系的线性相关性的特征行列式. 设函数组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中每一个 $y_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均有 $n-1$ 阶导数，称行列式

$$W(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

为已知函数组的朗斯基行列式. 如果 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是齐次线性方程

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=0$$

的 n 个解，则有公式

$$W(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$
$$=W(y_1,y_2,\cdots,y_n)\big|_{x=x_0}e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(s)ds},$$

称为刘维尔公式；对向量函数组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，其中

$$y_i=\begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{pmatrix} \ (i=1,2,\cdots,n),$$

它的朗斯基行列式定义为

$$W(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

如果向量函数组是线性常微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y$$

的 n 个解，其中 y 是 n 维列向量，

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

则有刘维尔公式

$$W(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$
$$=W(y_1,y_2,\cdots,y_n)\big|_{x=x_0}e^{\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(s)ds}.$$

上述定义及公式对研究解的线性相关、线性无关和其他性质很有用.

刘维尔公式(Liouville formula) 见“朗斯基行列式”.

基本解组(fundamental system of solutions) 能用线性组合构造出齐次线性微分方程全部解的线性无关的解系. 对 n 阶齐次线性常微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0 \tag{1}$$

的 n 个解 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$，如果在其定义区间上是线性无关的，则称这 n 个解是(1)的(一个)基本解组；对齐次线性一阶常微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx}=a_{i1}(x)y_1+a_{i2}(x)y_2+\cdots+a_{in}(x)y_n \tag{2}$$

$(i=1,2,\cdots,n)$的 n 个解

$$y_1(x)=\begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad y_2(x)=\begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$y_n(x)=\begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

如果在其定义区间上是线性无关的，则称 $y_1(x)$, $y_2(x),\cdots,y_n(x)$是(2)的(一个)基本解组. 矩阵

$$Y(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

称为(2)的基本解矩阵.

通解结构定理(structure theorem of general solution) 关于线性常微分方程解的结构性质的数学表述. 设 n 阶非齐次线性微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x) \tag{1}$$

的一个特解为 $\bar{y}(x)$，与(1)对应的齐次微分方程的 n 个解为 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$；非齐次线性微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx}=a_{i1}(x)y_1+a_{i2}(x)y_2+\cdots+a_{in}(x)y_n+f_i(x) \tag{2}$$

$(i=1,2,\cdots,n)$的一个特解也用 $\bar{y}(x)$表示，与(2)对应的齐次微分方程组的 n 个解也用 $y_1(x),y_2(x)$, $\cdots,y_n(x)$表示，这时 $y,y_1,\cdots,y_n$ 均为向量函数(参见“线性微分方程组”条目)，则关于齐次微分方程(组)的通解结构定理为：如果 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是齐次方程(组)的一个基本解组，则

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n \tag{3}$$

包含了方程(组)的所有解,其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为 n 个任意常数.显然,解组(3)表示了方程(组)的通解.

关于非齐次微分方程(组)的通解结构定理为:非齐次微分方程(组)的通解等于它的对应的齐次方程(组)的通解与它本身的一个特解之和,即

$$y(x)=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n+\bar{y}.$$

常系数线性微分方程(组)(linear differential equation (system) with constant coefficients) 最简单并可用代数方法求解的一类常微分方程(组).常系数线性高阶微分方程形如

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x), \tag{1}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是常数.常系数线性一阶方程组形如

$$\frac{dy}{dx}=Ay+f(x),$$

其中

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\f_2(x)\\\vdots\\f_n(x)\end{pmatrix},$$

A 为 $n\times n$ 常数矩阵.

常系数线性微分方程理论的研究在常微分方程理论研究中是最深入、完整的,并可以用代数方法求出它们的通解.此外,在工程技术等实际领域内它们也有广泛的应用.

欧拉方程(Euler equation) 可化为常系数线性常微分方程的一类变系数的常微分方程.欧拉方程形如

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x), \tag{1}$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是常数.做变量代换 $x=e^t$,可将(1)化为常系数线性常微分方程.

特征方程(characteristic equation) 表征常系数线性微分方程(组)的解的构造特征的代数方程式.对 n 阶常系数线性常微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \tag{1}$$

有形如 $y=e^{\lambda x}$解的充分必要条件是数 λ 满足代数方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0, \tag{2}$$

称代数方程(2)是方程(1)的特征方程,称特征方程的根为特征根;对常系数齐次线性常微分方程组

$$\frac{dy}{dx}=Ay, \tag{3}$$

其中 y 是 n 维列向量,A 是 $n\times n$ 常数矩阵,有形如 $Y=Re^{\lambda x}$解(R 是 n 维非零常数列向量)的充分必要条件为

$$|A-\lambda E|=0, \tag{4}$$

$$(A-\lambda E)R=0. \tag{5}$$

称代数方程(4)是方程组(3)的特征方程,其根 λ 称为特征值,满足矩阵方程(5)的非零向量 R 称为(对应 λ 的)特征向量.

待定系数法(method of undetermined coefficient) 求解常系数非齐次线性常微分方程特解的一种便捷方法.对于 n 阶常系数非齐次线性常微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x), \tag{1}$$

当 $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$($P_m(x)$是已知的 m 次多项式)时,方程(1)有形如

$$\bar{y}(x)=x^kQ_m(x)e^{\alpha x} \tag{2}$$

的特解,其中 α 是(1)的 $k(k\geqslant 0)$重特征根($k=0$ 时 α 不是特征根),$Q_m(x)$是待定的 m 次多项式,当 $f(x)=e^{\alpha x}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+P_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$ ($P_m^{(1)}(x)$, $P_m^{(2)}(x)$是次数不高于 m 的多项式,但二者至少有一个是 m 次的)时,方程(1)有形如

$$\bar{y}(x)=x^ke^{\alpha x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x] \tag{3}$$

的特解,其中 $\alpha\pm\beta i$ 是(1)的 $k(k\geqslant 0)$重特征根($k=0$ 时 $\alpha\pm\beta i$ 不是特征根),$Q_m^{(1)}(x)$,$Q_m^{(2)}(x)$是待定的 m 次多项式.将(2),(3)代入方程(1),比较方程(1)两边关于 x 的同类项系数,确定出$Q_m(x)$,$Q_m^{(1)}(x)$,$Q_m^{(2)}(x)$的系数,就可以求得方程(1)的特解.这种解法称为待定系数法.对于常系数非齐次线性方程组

$$\frac{dy}{dx}=Ay+f, \tag{4}$$

其中 A 是 $n\times n$ 常数矩阵,y,f 是 n 维列向量,也可用类似待定系数法求它的特解.

拉普拉斯变换法(method of Laplace transform) 求解常系数线性常微分方程的一个重要方法.拉普拉斯变换定义如下:对于在$(-\infty,+\infty)$上有定义,而在$t<0$时恒等于零的函数 $f(t)$,如果

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

存在,则称$F(s)$为$f(t)$的拉普拉斯变换,称$f(t)$为原函数,$F(s)$为像函数.

运用拉普拉斯变换将常系数线性常微分方程的求解问题化为线性代数方程或方程组求解问题时,可把初始条件一起考虑在内,不必求出通解再求特解,这在工程技术中有广泛的应用.用此法求解常微分方程的步骤为:

1. 对方程两端施行拉普拉斯变换.
2. 求出解的像函数.
3. 查拉普拉斯变换表,得到原函数,即方程

的解.

算子方法(method of operator) 用以求解常系数线性高阶常微分方程特解的一种简便方法. 对于常系数线性常微分方程

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dx}+p_n y=f(x), \quad (1)$$

引入算子

$$L(D)=D^n+p_1D^{n-1}+\cdots+p_{n-1}D+P_n, \quad (2)$$

其中 $D=d/dx$ 表示对 x 求微商的运算,

$$D^k=\frac{d^k}{dx^k}$$

表示对 x 求 k 次微商. $L(D)$称为算子多项式. 方程(1)可简写为

$$L(D)y=f(x).$$

根据(2),记

$$\frac{1}{L(D)}f(x)$$

为方程(1)的任一解,称$1/L(D)$为$L(D)$的逆算子. 运用算子 $L(D)$和逆算子 $1/L(D)$的性质和法则可以简便地求解方程(1). 特别当$n\geqslant 3$,$f(x)$为x^k,e^{ax},$\cos\beta x$,$\sin\beta x$等类函数之和,或它们乘积之和时,求方程(1)的特解较用常数变易法简便. 算子方法类似地可运用到常系数线性常微分方程组中去.

幂级数解法(solution by power series) 求解常微分方程的一种方法. 特别是方程不能用初等积分法求解时,往往求幂级数形式(在 $x=0$ 邻域)

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots \quad (1)$$

的解. 将幂级数(1)代入方程中,比较等式两端同类项的系数,确定(1)的各项系数,从而得到方程的解. 这种解法称为幂级数解法. 用幂级数解法和广义幂级数解法可以解出许多数学物理中重要的常微分方程. 例如:

贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0;$$

勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0;$$

埃尔米特方程

$$y''-2xy'+2py=0.$$

周期系数线性微分方程组(linear system of differential equation with periodic coefficients) 一类有重要应用背景的线性方程组. 设方程组

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y \quad (1)$$

的系数矩阵

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

对 x 有周期 ω,则方程(1)称为周期系数线性方程. 方程(1)可变换为常系数线性方程组. 设 $Y(x)$是(1)的基本解矩阵,则$Y(x+w)$也是(1)的基本解矩阵. 故有$Y(x+w)=Y(x)C$,C 是非奇异方阵. 由线性代数知存在方阵 B 使 $C=e^{wB}$. 令 $P(x)=Y(x)e^{-Bx}$,$P(x)$也有周期 ω. 在(1)中做变换 $y=P(x)z$,则 z 将满足常系数线性方程组

$$\frac{dz}{dx}=Bz.$$

C 的特征根 p_i 与 B 的特征根 λ_i 之间存在关系式 $p_i=e^{\lambda_i w}$,p_i 称为方程(1)的特征乘数,λ_i 称为方程(1)的特征指数.

伴随微分方程(adjoint differential equation) 与给定微分方程有共轭关系的微分方程. 对 n 阶齐次线性常微分方程

$$L[y]\equiv\sum_{k=0}^{n}p_k(x)y^{(n-k)}=0, \quad (1)$$

称

$$M[y]\equiv\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\bar{p}_k y)^{(n-k)} \quad (2)$$

为(1)的伴随微分方程,称 $M[y]$为 $L[y]$的伴随微分式. 反之,$L[y]$也是$M[y]$的伴随微分式. 在伴随微分式之间成立等式

$$\bar{z}L[y]-y\overline{M(z)}=\frac{dN(y,z)}{dx}, \quad (3)$$

这里 $N(y,z)$是 $y^{(k)}$,$\bar{z}^{(h)}$$(k,h=0,1,2,\cdots,n-1)$的双线性型

$$N(y,z)\equiv\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-1-k}(-1)^k(p_k\bar{z})^{(h)}y^{(n-1-k-h)}. \quad (4)$$

等式(3)称为拉格朗日恒等式. 等式(4)称为拉格朗日双线性型. 如果能得到 $M[y]=0$ 的 p 个独立解,就可把原来方程 $L[y]=0$ 的阶数降低 p 阶. 当$M[y]\equiv L[y]$时,就称 $L[y]=0$ 是自伴的(微分方程).

对齐次线性一阶常微分方程组

$$y_i'+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j=0 \ (i=1,2,\cdots,n), \quad (5)$$

称方程组

$$z_i'-\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ji}(x)z_j=0 \ (i=1,2,\cdots,n)$$

为方程组(5)的伴随微分方程组.

自伴微分方程(self-adjoint differential equation) 见"伴随微分方程".

常微分方程初值问题

常微分方程初值问题(initial value problem of ordinary differential equation) 常微分方程理论研究与实际应用中的一种基本定解问题.求解和讨论常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

满足初值条件

$$y(x_0)=y_0 \tag{2}$$

的解的问题称为常微分方程初值问题,条件(2)称为初值条件或初始条件.一般地,y 属于 n 维欧氏空间 R^n,f 是由 R^{n+1}中的开域 G 到 R^n 的映射.

初值问题主要讨论的问题有:初值问题是否存在解,解的存在域有多大;解是否惟一;当初值(x_0,y_0)变化时,解如何变化;当函数 f 中含有参数 λ,解与参数 λ 有何种依赖关系等.初值问题是柯西(Cauchy,A.-L.)于 19 世纪 30 年代首先提出的,所以又称为柯西问题.常微分方程初值问题在常微分方程理论及在实际应用中均有着重要的作用.

皮卡逐次逼近法(Picard successive approximation method) 常微分方程解的一种主要近似计算方法.初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{1}$$

可转换为等价的积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx. \tag{2}$$

积分方程(2)的解即是初值问题(1)的解.做迭代函数序列

$$\begin{cases}\varphi_1(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)dx,\\ \varphi_n(x)=y_0+\displaystyle\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi_{n-1}(x))dx\end{cases} \tag{3}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

作为积分方程(2)的近似解,也即初值问题(1)的近似解.在 $f(x,y)$ 满足一定的条件时,函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$是收敛的.皮卡(Picard,(C.-)É.)最早在数学上完善处理这样的逐次逼近的函数序列,所以称为皮卡逐次逼近法.而由式(3)确定的函数 $\varphi_n(x)$称为初值问题(1)的第 n 次近似解.函数序列

$$\{\varphi_k(x)\}\ (k=1,2,\cdots,n,\cdots)$$

称为皮卡序列.

常微分方程解的存在惟一性(existence and uniqueness of solution of ordinary differential equation) 常微分方程初值问题所研究的基本问题之一.初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

并非都有解存在,这里(1)中 y 属于 n 维欧几里得空间 R^n,f 是 R^{n+1}中的开域 G 到 R^n 的映射.

解存在的基本定理是柯西-皮亚诺存在定理:如果 $f(x,y)$在 R^{n+1}中的区域

$$D:|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b$$

上连续,则初值问题(1)在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上至少存在一个解 $y(x)$,这里

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\ M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|.$$

$f(x,y)$的连续性不能保证初值问题的解是惟一的.保证解的惟一性的条件最常用的是李普希茨条件:设 $f(x,y)$在

$$D:|x-x_0|\leqslant a,|y-y_0|\leqslant b$$

上连续,对于任意的(x,y_1),$(x,y_2)\in D$,存在常数 K,使得

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant K|y_1-y_2|, \tag{2}$$

则称 $f(x,y)$在 D 上满足李普希茨条件,其中常数 K 称为李普希茨常数.于是解的存在惟一性定理叙述如下:如果 $f(x,y)$在 D 上连续,对 y 满足李普希茨条件,则初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上存在惟一的解 $y(x)$,其中 D,h 的定义见上文.

常微分方程解的延拓(continuation of solution of ordinary differential equation) 微分方程的解由局部的存在性扩展到全区域.解的延拓定理:设 D 是 R^{n+1}中的开集,$f:D\to\mathrm{R}^n$ 是连续的,又$\varphi(x)$是初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

的解,则 φ 有到最大存在区间上的延拓.即当 x 趋于解的最大存在区间的端点时,$(x,y(x))$趋于 D 的边界.

解对初值和参数连续依赖性定理(continuity theorem of solution on initial condition and parameters) 常微分方程解依赖初值和参数的重要命题.设 $f(x,y,\lambda)$在 $G\times I_\lambda$ 上连续,关于 y 满足李普希茨条件,则对每一个$(x_0,y_0)\in G$,$\lambda\in I_\lambda$,存在通过(x_0,y_0)的惟一解 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$,其定义域是 $\mathrm{R}\times G\times I_\lambda$ 中的开集 E,在 E 上 $\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$是连续的.

解对初值和参数的可微性定理(differentiability theorem of solution on initial condition and parameters) 常微分方程解依赖初值和参数的重

要命题. 设 $f(x,y,\lambda)$ 在 $G\times I_\lambda$ 内关于 (y,λ) 连续可微，则初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\lambda),\quad y(x_0,\lambda)=y_0$$

的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$ 作为变量 (x,x_0,y_0,λ) 的函数在其定义域内连续可微. $\varphi'_{x_0}(x,x_0,y_0,\lambda)$ 和 $\varphi'_\lambda(x,x_0,y_0,\lambda)$ 作为 x 的函数分别满足初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=f'_y(x,\varphi(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda)z,\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0,\lambda)\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=f'_y(x,\varphi(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda)z\\ \qquad +f'_\lambda(x,\varphi(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda),\\ z(x_0)=0;\end{cases}$$

$\varphi'_{y_0}(x,x_0,y_0,\lambda)$ 作为 x 的函数满足矩阵微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dx}=f'_y(x,\varphi(x,x_0,y_0,\lambda),\lambda)X,\\ X(0)=E,\end{cases}$$

其中 E 为 $n\times n$ 单位矩阵.

常微分方程的边值问题

常微分方程的边值问题(boundary value problem of ordinary differential equations) 常微分方程理论研究和实际应用中的一类重要的定解问题. 考虑常微分方程

$$f(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0,\tag{1}$$

对于属于区间 I 的点 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 以及 nk 个值

$$x(a_i),x'(a_i),\cdots,x^{(n-1)}(a_i)\ (i=1,2,\cdots,k),$$

给出 m 个条件(一般地，$m=n$). 求方程(1)在区间 I 上满足这些条件的解的问题称为常微分方程(1)的边值问题. 解满足的这些条件称为边界条件. 在 $k=2$ 时，a_1,a_2 是区间 I 的端点的情形，称为两点边值问题，这是研究的主要对象. 对常微分方程组，可以同样定义边值问题.

两点边值问题(two-point boundary value problem) 见“常微分方程的边值问题”.

线性边值问题(linear boundary value problem) 一类基本的边值问题. 设 $a\leqslant t\leqslant b$ 为有界闭区间，L 为 $n(n\geqslant1)$ 阶线性微分算子

$$L[x]=P_0(t)x^{(n)}+P_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(t)x'+P_n(t)x,\tag{1}$$

其中系数 $P_k(t)$ 为 t 的复值函数，并且对所有的 $t\in[a,b]$，$P_0(t)\neq0$. 给定复常数 $M_{ij},N_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，边值运算式

$$U_i[x]=\sum_{j=1}^{n}M_{ij}x^{(j-1)}(a)+\sum_{j=1}^{n}N_{ij}x^{(j-1)}(b)\tag{2}$$

$(i=1,2,\cdots,m)$ 称为线性边缘算子. 记

$$\xi=(x,x',\cdots,x^{(n-1)})^T,\quad M=(M_{ij})_{m\times n},$$
$$N=(N_{ij})_{m\times n},\quad U=(U_1,U_2,\cdots,U_m)^T,$$

则(2)可表示为向量形式 $U[x]=M\xi(a)+N\xi(b)$. 给定函数 $f(t)$ 和复常向量 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m)^T$，两点边值问题

$$L[x]=f(t),\quad U[x]=\gamma\tag{3}$$

称为线性边值问题. 当 $f(t)=0,\gamma=0$ 时，(3)称为齐次的，否则称为非齐次的.

齐次线性边值问题(homogeneous linear boundary value problem) 见“线性边值问题”.

非齐次线性边值问题(non-homogeneous linear boundary value problem) 见“线性边值问题”.

伴随边值问题(adjoint boundary value problem) 边值问题中的重要概念. 对于微分式

$$L[x]=P_0(t)x^{(n)}+P_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(t)x'+P_n(t)x$$

(参见“线性边值问题”)，称

$$L^*[x]=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\overline{P}_kx)^{(n-k)}$$

为 $L[x]$ 的伴随微分式(参见“伴随微分方程”). 设 $U_i^*[x](i=1,2,\cdots,m^*)$ 为 m^* 个边缘算子. 记 $U^*=(U_1^*,U_2^*,\cdots,U_{m^*}^*)^T$. 如果对于满足边界条件 $U[x]=0$ 的任意的 C^n 类函数 $x(t)$ 和满足边界条件 $U^*[x^*]=0$ 的任意的 C^n 类函数 $x^*(t)$，有

$$\int_a^b L[x]\overline{x}^*\,dt=\int_a^b x\,\overline{L^*(x^*)}\,dt,$$

则称 $U^*[x]=0$ 为 $U[x]=0$ 的伴随边界条件，并称

$$L^*[x]=0,\quad U^*[x]=0$$

为

$$L[x]=0,\quad U[x]=0\tag{1}$$

的伴随边值问题. 当 $L[x]=L^*[x]$ 且条件 $U[x]=0$ 等价于条件 $U^*[x]=0$ 时，称边值问题(1)是自伴的.

伴随边界条件(adjoint boundary condition) 见“伴随边值问题”.

自伴边值问题(self-adjoint boundary value problem) 见“伴随边值问题”.

自伴特征值问题(self-adjoint eigenvalue problem) 在数学物理和算子理论中占有重要地位的一类带参数的边值问题. 含有复参数 λ 的边值问题

$$L[x]=\lambda x,\quad U[x]=0\tag{1}$$

称为特征值问题. 如果 λ 使得(1)有非零解，则称 λ 为(1)的特征值，所对应的解称为特征函数. 如果 λ 不是(1)的特征值，则存在惟一的函数 $G(t,\tau,\lambda)$，使

得非齐次边值问题

$$L[x]=\lambda x+f(t),\quad U[x]=0$$

具有解

$$x(t)=\int_a^b G(t,\tau,\lambda)f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

这样的函数 $G(t,\tau,\lambda)$ 称为(1)的格林函数.(1)的格林函数 $G(t,\tau,\lambda)$ 和对应于 $L^*(x)=\lambda x, U^*[x]=0$(参见"伴随边值问题")的格林函数 $G^*(t,\tau,\lambda)$ 之间存在关系式

$$G(t,\tau,\lambda)=\overline{G}^*(\tau,t,\overline{\lambda}).$$

如果边值问题 $L[x]=0, U[x]=0$(参见"伴随边值问题")是自伴时,则称(1)为自伴特征值问题.此时,(1)有以下结论:

1. 特征值全为实数,特征值的集合是可数的离散集.

2. 对应于不同特征值的特征函数是正交的.

3. 如果 $\{\varphi_n\}$ 是由全体特征函数所做的一个规范正交系,则 $\{\varphi_n\}$ 就是在 $[a,b]$ 上由平方可积函数所构成的希尔伯特空间中的一个完备的规范正交系.从而,对 $f\in L^2(a,b)$ 的傅里叶级数展开

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n,$$

帕塞瓦尔等式成立.

4. 如果 f 为 C^n 类函数,且满足 $U[f]=0$,则 f 的傅里叶展开式在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

斯图姆-刘维尔边值问题(Sturm-Liouville boundary value problem) 最基本而重要的一类微分方程特征值问题.二阶微分方程的特征值问题

$$\begin{cases}(p(t)x')'+[q(t)+\lambda]x=0,\\ x(a)\cos\alpha-p(a)x'(a)\sin\alpha=0,\\ x(b)\cos\beta-p(b)x'(b)\sin\beta=0.\end{cases}\tag{1}$$

称为斯图姆-刘维尔问题,其中 $p(t)>0, q(t)$ 为 $[a,b]$ 上的实值连续函数,λ 为复常数,α,β 为给定的实常数.对斯图姆-刘维尔问题(1),以下结论成立:

1. 特征值(也称点谱)组成一个无界的序列

$$\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_{n-1}<\lambda_n<\cdots.$$

2. 对应于 λ_n 的特征函数 $\varphi_n(t)$ 在 (a,b) 中恰好有 n 个零点,而且在 $\varphi_n(t)$ 的两个相邻零点之间存在 $\varphi_{n-1}(t)$ 的一个零点.

3. $\{\varphi_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上组成一个正交函数系,即

$$\int_a^b\varphi_n(t)\varphi_m(t)\mathrm{d}t=0\quad(m\neq n).$$

4. 若 λ 不是特征值,则存在连续函数

$$G(t,\tau,\lambda)=\overline{G}(\tau,t,\overline{\lambda})\quad(a\leqslant\tau,t\leqslant b),$$

使得

$$y(t)=\int_a^b G(t,\tau,\lambda)h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

为非齐次边值问题

$$\begin{cases}(p(t)y')'+[q(t)+\lambda]y=h(t),\\ y(a)\cos\alpha-p(a)y'(a)\sin\alpha=0,\\ y(b)\cos\beta-p(b)y'(b)\sin\beta=0\end{cases}\tag{2}$$

的惟一解,而且对实数 λ,$G(t,\tau,\lambda)$ 为实值函数.

5. 如 $\lambda=\lambda_n$,λ_n 仅对应一个特征函数 φ_n,且 $h(t)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数,则边值问题(2)有解的充分必要条件为

$$\int_a^b\varphi_n(t)h(t)\mathrm{d}t=0.$$

此时,若 $y(t)$ 是(2)的解,则 $y(t)+c\varphi_n(t)$ 也是(2)的解,而且所有的解均可表为这一形式.

6. 如果特征函数 $\varphi_n(t)$ 已规范化,即满足

$$\int_a^b\varphi_n^2(t)\mathrm{d}t=1,$$

则 $\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots$ 构成 $L^2(a,b)$ 空间中的一个规范的完备正交序列,即如 $h(t)\in L^2(a,b)$,则 $h(t)$ 有傅里叶展开式

$$h(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi_n(t),$$

其中

$$C_n=\int_a^b\varphi_n(t)h(t)\mathrm{d}t,$$

并且

$$\int_a^b\left|h(t)-\sum_{k=0}^{n}C_k\varphi_k(t)\right|^2\mathrm{d}t\to0\quad(n\to\infty).$$

奇异自伴边值问题(singular self-adjoint boundary value problem) 在无穷区间或开区间上推广的边值问题.简单地说,如果在自伴边值问题中将 $a\leqslant t\leqslant b$ 为有界闭区间这一条件换为开区间、半开区间或无穷区间,则这类边值问题称为奇异的.严格地说,是指在上述边值问题中的方程的系数在定义区间端点有奇性,或此区间为无穷区间的情形.因为这时相应微分方程不但有离散的特征值,还有连续谱出现.相应地亦可研究奇异的自伴特征值问题,诸如特征函数的存在性,$L^2(a,b)$ 空间中函数的展开式和帕塞瓦尔等式等性质.但首先要研究在区间端点如何加适当的边界条件.同时还可研究相应方程在其系数满足什么条件时只有连续谱,或只有点谱,或既有连续谱又有点谱的问题.

非自伴边值问题(non-self-adjoint boundary value problem) 一类没有对称性因而问题求解比较困难的线性边值问题.有界闭区间上的边值问题若不满足自伴性条件,则一般地,通过变量代换,可以表示成如下形式

$$L[x]=x^{(n)}+P_2(t)x^{(n-2)}+\cdots+P_n(t)x=\lambda x,\ U[x]=0,\tag{1}$$

其中 $P_2(t),\cdots,P_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续(边缘算子 U 参见"线性边值问题").对非自伴边值问题(1),特征

函数的正交性一般不再成立．但为了展开希尔伯特空间$L^2(a,b)$中的函数，可利用边值问题(1)的特征函数与(1)所对应的伴随边值问题的特征函数的正交性．此时，有下述结果：设(1)的格林函数$G(t,\tau,\lambda)$的所有极点均是简单的，且特征函数为$\{\varphi_n\}$，则(1)的伴随边值问题的特征函数构成一序列$\{\psi_n\}$，使得

$$\int_a^b \varphi_n \overline{\psi}_m \mathrm{d}t = \delta_{mn},$$

并对$f \in L^2(a,b)$，有

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \int_a^b f(\tau) \overline{\psi}_n(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

非线性边值问题(non-linear boundary value problem)　一类在非线性科学里提出来的微分方程定解问题．非线性方程的边值问题的研究比线性情形要困难得多，没有一般的结论，只对特殊形式的方程有一些结果．例如，对于二阶方程

$$x'' = f(t,x,x') \tag{1}$$

和边界条件$x(a)=A$，$x(b)=B$的边值问题，有下述结论：假设$f(t,x,x')$对$a \leqslant t \leqslant b$，$\alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t)$，$-\infty < x' < +\infty$连续，且$|f(t,x,x')| \leqslant M(1+x'^2)$，$\alpha''(t) \geqslant f(t,\alpha(t),\alpha'(t))$，$\beta''(t) \leqslant f(t,\beta(t),\beta'(t))$，$\alpha(a) \leqslant A \leqslant \beta(a)$，$\alpha(b) \leqslant B \leqslant \beta(b)$，则(1)存在一个解$x(t)$满足给定的边界条件，且在$a \leqslant t \leqslant b$上有

$$\alpha(t) \leqslant x(t) \leqslant \beta(t).$$

如果$f(t,x,x')$关于x是单调增加的，那么解是惟一的，而且在适当条件下，解可以用逐次逼近法求得．研究非线性边值问题的方法有打靶法、上下解法、不动点方法．

常微分方程解析理论

常微分方程解析理论(analytical theory of ordinary differential equation)　在复数域上研究微分方程解的性质的数学分支．19世纪中叶，柯西(Cauchy, A.-L.)证明了在相当广泛的条件下微分方程的解是复变量的解析函数，由此开创了运用复变函数论研究微分方程的先河．首先是运用复变函数论方法于复的线性系统，导致了许多重要的数学物理方程的研究，如超几何方程等(参见“超几何方程”)．随着研究的深化，在日本数学家吉田耕作(Yosida, K.)引入奈望林纳(Nevanlina, R.)的近代亚纯函数的值分布理论后，常微分方程的解析理论得到了很大的发展(参见“马尔姆奎斯特定理”)．晚近，在法国和俄罗斯数学学派有关几何理论研究的推动下，又出现了所谓拟解析理论(参见“表现定理”)．

柯西初值问题(Cauchy initial value problem)　微分方程的一种基本定解问题．设$f(z,w)$是定义在复空间$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$的一个区域$\Omega \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$上的复变量向量解析函数，则可考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = f(z,w), \tag{1}$$

写成分量形式为

$$\frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}z} = f_i(z,w_1,w_2,\cdots,w_n) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

又设H是平面$\mathbb{C}$上的一个区域，则一个解析映射$w: H \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$称为是(1)的一个解，若它满足下面诸式：

1. $(z,w(z)) \in \Omega \quad (\forall z \in H)$.

2. $\dfrac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z} = f(z,w(z)) \quad (\forall z \in H)$.

下列问题称为柯西初值问题：给出复平面$\mathbb{C}$上一个区域H，区域Ω上的任一点(z_0,w_0)和一个H上的解$w=w(z)$，满足$w(z_0)=w_0$．上述问题又可写成

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = f(z,w), \\ w(z_0) = w_0. \end{cases}$$

柯西定理(Cauchy theorem)　解析理论的基本定理，最初由柯西(Cauchy, A.-L.)完成．设$f_i(z,w_1,w_2,\cdots,w_n)(i=1,2,\cdots,n)$在区域

$$D: |z-z_0|<r,\ |w_i-w_i^0|<\rho\ (i=1,2,\cdots,n)$$

上为全纯，其中常数$r,\rho \in \mathbb{R}_+$，又

$$M = \sup_{D,i} |f_i(z,w_1,w_2,\cdots,w_n)| < +\infty \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则柯西初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = f(z,w), \\ w(z_0) = w_0 = (w_1^0,w_2^0,\cdots,w_n^0) \end{cases}$$

在区域

$$H: |z-z_0| < r\left(1-\exp\left(-\frac{\rho}{(n+1)Mr}\right)\right)$$

上存在惟一一个全纯解．

柯西定理得到的解的存在区域H一般相当小；利用解析延拓来扩张这个全纯解，是解析理论的基本问题之一，也是困难问题之一(参见“马尔姆奎斯特定理”)．

优级数法(majoriant series method)　研究解的解析性的重要方法之一．优级数法最初被柯西(Cauchy, A.-L.)用来研究复变函数的解析性，后经布里奥(Briot, C. A. A.)和布凯(Bouquet, J.-C.)之手，被发展成一种研究微分方程的有效方法．优级数则是其中的一个重要工具．以下用一个布里奥与布凯的例子说明此法．设要求解一阶偏微分方程

$$\frac{\partial H}{\partial x} = A\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{1}$$

其中$A(x,y)$为$(0,0)\in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$邻域内的已知全纯函数，$H(x,y)$为$(0,0)\in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$邻域内待求全纯函数.记

$$A(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(y)x^p,$$

$$H(x,y) = \sum_{q=0}^{\infty} h_q(y)x^q,$$

其中a_p为y的收敛幂级数，h_0为给定幂级数，$h_q(q\geqslant 1)$为未知幂级数.将A与H代入(1)式，再令两边同幂项相等，得

$$(n+1)h_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} a_{n-p}(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}h_p(y)(F_n)$$
(n为非负整数).

此式显示可由$h_0,a_0,a_1,\cdots$归纳地确定$h_1,h_2,h_3,\cdots$，故H的惟一性是明显的.余下要证明H的收敛性.

若级数u的每一系数的模大于另一级数v的相应系数的模，则称级数u优于级数v，记为$u\succ v$(显然，u的系数均为非负).考虑下式

$$(n+1)\widetilde{h}_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \widetilde{a}_{n-p}\widetilde{h}'_p(\widetilde{F}_n)\ (n\text{ 为非负整数});$$

若其中$\widetilde{a}_q\succ a_q$(对一切q)，即$\widetilde{A}\succ A$，又$\widetilde{h}_0\succ h_0$，则显然$\widetilde{h}_n\succ h_n$(对一切$n\geqslant 1$).从而有$\widetilde{H}\succ H$.

由上述讨论可知，当A在$(0,0)\in \mathbb{C}\times\mathbb{C}$之某一邻域中为解析时，则它有一优级数

$$\widetilde{A}(x,y) = M\sum_{p,q=0}^{\infty} c^{p+q}x^p y^q = \frac{M}{(1-cx)(1-cy)} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{Mc^p}{1-cy}x^p,$$

其中M,c为正实数.今考虑$(\widetilde{F}_n)$，令其中

$$\widetilde{a}_q = \frac{Mc^p}{1-cy},$$

又$\widetilde{h}_0\succ h_0$，则其解将定义一收敛级数

$$\widetilde{H} = \sum_{q=0}^{\infty}\widetilde{h}_q(y)x^q.$$

于是$\widetilde{H}$显然为解析，又优于H，故H必为收敛.

综上所述，优级数法主要由两个步骤组成：假设方程有一个形式级数解，需证明它的系数被惟一确定；其次构造一个优级数，用以证明形式级数收敛.优级数法后来被西格尔(Siegel，C. L.)用于三体问题的研究，以至后来又被阿诺尔德(Арнольд，В. И.)和莫泽(Moser，J. K.)成功地发展成一种非线性问题的广泛而有效的方法—— KAM (Kolmogolov-Arnold-Moser)方法.

奇点(singularity)　复平面上使方程或其解的解析性遭到破坏的点.对于一个形如

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = f(z,w)$$

的方程，如果(z_0,w_0)是方程右端函数的非解析点，则常称为方程的奇点.根据解的存在和惟一性定理，方程的解在z_0的解析性将得不到保证.如果它正好是解的一个奇点，便称为解的奇点.此外，常常还需要考察$z=\infty$的奇性.这些奇点，依据复变函数论应有可去奇点、极点与本性奇点之分.但如研究微分方程或其解的奇点性质，需要对奇点再进行分类.可以依照方程右端函数的奇性进行分类，也可以依照解在奇点处的奇性进行分类.一般地，这两种分类互相独立；就是说，彼此一般没有蕴涵关系，除非方程是线性系统(参见“正则奇点”、“非正则奇点”).

有关奇点最粗糙的分类是将奇点分为可移奇点与固定奇点两种.一个与初值问题的初值有关的奇点称为可移奇点，意思是随着初值的改变，奇点可能消失，甚或奇性增强.反之，与初值无关的奇点称为固定奇点.例如方程$w'=1/2wz$.显然$z=0,w=0$是它的一个奇点，它的积分是

$$w = \sqrt{\ln\frac{z}{C}},$$

可见$z=0$与$z=C$(C为积分常数)都是解的奇点.通过展成级数不难证明，$z=0$是固定奇点，而$z=C$是可移奇点.下面是有关这方面的几个重要结果：

1.(庞加莱定理)任何线性方程都不含可移奇点.

2.(班勒卫定理)方程$P(w',w,z)=0$的积分没有可移本性奇点，其中P是w及w'的多项式，且是z的解析函数.

3.(富克斯定理)对于方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = R(w,z),$$

其中$R(w,z)$为w与z的有理函数，如无可移奇点，则此方程必定为黎卡提方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = a(z)w^2 + b(z)w + c(z).$$

马尔姆奎斯特定理(Malmquist theorem)　一个有关复域方程解结构的重要定理.解析理论的基本定理是柯西的存在惟一性定理.这是一个局部性定理，一旦要求由此经过解析延拓来讨论解的大范围性质，就会出现非常复杂的情况.一个重要的问题是，微分方程何时具有整个复平面上的单值亚纯解或有限多值代数体函数解.对于如下形式的方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = R(w,z), \tag{1}$$

其中$R(w,z)$为w与z的有理函数，1913年，马尔姆奎斯特(Malmquist，J.)首先得到了一个极为重要的结果，被称为马尔姆奎斯特定理.该定理断言：在上述方程(1)中，设

$$R(w,z) = \frac{P(w,z)}{Q(w,z)},$$

其中

$$P(w,z)=\sum_{k=0}^{p}a_k(z)w^k,\ Q(w,z)=\sum_{j=0}^{q}b_j(z)w^j$$

是 w 的互质多项式，系数 $\{a_k(z)\}$ 和 $\{b_j(z)\}$ 是 z 的有理函数. 若(1)存在非有理分式的亚纯解，则必 $q=0,p\leqslant 2$，即方程(1)退化为黎卡提方程

$$\frac{dw}{dz}=a(z)w^2+b(z)w+c(z),$$

其中 a,b,c 为 z 的有理函数. 此后发展的事实，其意义则远远超过了此定理本身. 1933 年，吉田耕作对此定理给出了一个十分漂亮的证明，他的证明用到了奈望林纳(Nevanlinna,R.)的近代亚纯函数论，因而完全改变了解析理论的面貌. 马尔姆奎斯特定理因此得到推广和精确化.

正则奇点(regular singurality)　奇性较弱并宜于级数求解的一类方程的奇点. 考虑线性方程组

$$\frac{dw}{dz}=A(z)w, \tag{1}$$

其中 $A(z)$ 是一 $n\times n$ 复阵，而 w 是一 n 维复向量. 假定阵 $A(z)$ 在一去孔域 $D:0<|z-a|<r$ 中为全纯且单值. 设 $z=a$ 是方程的一个孤立奇点. 对之分类如下：假定 $A(z)$ 在 a 点至多只是一个极点(本性奇点的情形至今没有什么成形的理论)，故可将它写成 $A(z)=(z-a)^{-\mu-1}B(z)$，其中阵 $B(z)$ 在单连通区域 $|z-a|<r$ 内单值全纯. 当 $\mu=0$ 时，称 $z=a$ 为(1)的第一类奇点，当 $\mu\geqslant 1$ 时，称 $z=a$ 为(1)的第二类奇点.

另一方面，对于方程组(1)的解的结构，已有一个结果如下. 当 $A(z)$ 在去孔域 D 内全纯单值时，方程组(1)的每一基本解阵 Φ 可写成 $\Phi(z)=S(z)(z-a)^P$，其中阵 $S(z)$ 在去孔域 D 内为全纯单值，P 为某一常值阵；而幂矩阵的定义是 $z^M=e^{(\log z)M}$.

如果 $z=a$ 至多是 S 的一个极点，即基本阵可写成 $\Phi(z)=S_1(z)(z-a)^{P-kI}$(其中阵 $S_1(z)$ 在 $D\cup\{a\}$ 内为全纯单值，k 为一整数，它表示阵 S 的极点的阶，I 为一单位阵)，则称 a 是方程组(1)的解的正则奇点，否则，称 a 是方程组(1)的解的非正则奇点. 有关这两种分类，还有如下蕴涵关系：

1. 如果 a 是方程组(1)的第一类奇点，则 a 必为解的正则奇点；反之不真.

2. 如果方程组(1)由一个 n 阶线性方程式所诱导(参见“n 阶线性方程”)，则解的正则奇点必为方程的第一类奇点(富克斯定理).

第一类奇点(singularities of the first kind)　见“正则奇点”.

第二类奇点(singularities of the second kind)　见“正则奇点”.

非正则奇点(irregular singularity)　见“正则奇点”.

形式解阵(formal solution matrix)　由矩阵表达的形式解. 用形式级数法讨论具有第一、第二类奇点的线性系统

$$\frac{dw}{dz}=A(z)w, A(z)=z^{-\mu-1}\sum_{m=0}^{\infty}A_mz^m, \tag{1}$$

可以得出很细致的结果. 下列表达式称为形式洛朗级数

$$f=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_mz^m$$

(约定：除有限项外，z 的负幂项的系数均为零). 下列表达式称为形式对数和

$$p=\sum_{j,k=0}^{\infty}f_{jk}z^{\mu_j}(\log z)^k,$$

$$f_{jk}=0, \text{对充分大的 } j+k,$$

其中 f_{jk} 为形式洛朗级数. 显然，形式对数和构成一个复代数 A，它由形式洛朗级数，z 的幂以及 $\log z$ 的整幂生成. 形式洛朗级数以及形式对数和还分别具有形式导数如下

$$f'=\sum_{m=-\infty}^{\infty}mc_mz^{m-1},$$

$$p'=\sum_{j,k=0}^{\infty}(\log z)^k[f'_{jk}+\mu_jf_{jk}z^{-1}+(k+1)f_{j,k+1}z^{-1}]z^{\mu_j}.$$

注意形式导数对复代数 A 也是封闭的. 元素均为形式对数和的矩阵，称为形式对数阵. 例如，上述方程(1)的右端即为一形式对数阵. 一个形式地满足方程(1)的形式对数阵，即称为一形式解阵. 对于具有第一类奇点的(1)，一个非常细致的结果是：任何形式解阵必为一准确解阵. 换言之，形式解阵中的一切形式对数和均收敛. 这个结果能使人们写出(1)类方程的解结构的一般形式，因而也就构成线性方程幂级数解法的理论基础. 但对第二类奇点的系统

$$\frac{dw}{dz}=z^{-\rho-1}B(z)w \tag{2}$$

(其中矩阵 B 在 $z=0$ 处解析，ρ 为一正整数)，却并无相应的结果；传统的做法先得出一个形式解阵(这也是相当困难的)，然后研究其渐近性. 以下仅写出有关形式解阵的结果. 对(2)，考虑奇点 $z=\infty$，则有如下结果. 对于系统

$$\frac{dw}{dz}=z^rA(z)w,$$

其中 r 为非负整数，阵 $A(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内为 z^{-1} 的收敛幂级数

$$A(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}A_k.$$

若 $A_0\neq 0$ 有相异本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则系统存在下面形状的形式解阵 $\Phi=Pz^Re^Q$，其中阵 R 为对

角阵，阵 P 与 Q 分别有形

$$P=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}P_k(P_0\text{ 为非奇阵，即 }\det P_0\neq 0),$$

$$Q=\frac{z^{r+1}}{r+1}Q_0+\frac{z^r}{r}Q_1+\cdots+zQ_r,$$

且各 $Q_i(i=1,2,\cdots,r)$ 均为对角阵，Q_0 与 A_0 有相同本征值.

形式洛朗级数(formal Laurent series) 见“形式解阵”

形式对数和(formal Logarithm sum) 见“形式解阵”.

形式对数阵(formal Logarithm matrix) 见“形式解阵”.

n 阶线性方程的奇点(singularities of linear equation of n-th order) 高阶线性方程的系数或其解的解析性受破坏的点. 考虑 n 阶线性方程

$$\sum_{m=0}^{n}a_{n-m}(z)w^{(m)}=0\ (a_0(z)\equiv 1),\qquad (1)$$

利用传统方法容易将它写成一阶组，即矩阵形式. 但从奇性的考虑出发，则需用另法. z_0 称为(1)的第一类奇点，当且仅当有

$$a_k(z)=(z-z_0)^{-k}b_k(z)\ (k=0,1,\cdots,n),\ (2)$$

其中 b_k 在 z_0 解析. 称 z_0 至多为(1)的第一类奇点，相当于说 z_0 或为解析点或为第一类奇点. 但 z_0 为(1)的第一类奇点时，z_0 未必为相关一阶组的第一类奇点，除非 a_k 均有简单奇点. 但存在一个代换可将(1)化为一阶组，两者同时具有不同意义的第一类奇点. 显然，对(1)采取上述的第一类奇点定义的优点，是可以容纳更多 a_k 的奇性. 考虑系统(1). 令 $\hat{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$，又令 φ 为(1)的任一解. 取

$$\varphi_k=(z-z_0)^{k-1}\varphi^{(k-1)}\ (k=1,2,\cdots,n),$$

$\varphi^{(s)}$表 φ 之 s 阶导数，则

$$(z-z_0)\varphi'_k=(k-1)\varphi_k+\varphi_{k+1}$$
$$(k=1,2,\cdots,n-1),$$

$$(z-z_0)\varphi'_n=(n-1)\varphi_n-\sum_{m=1}^{n}b_{n-m+1}(z)\varphi_m.$$

故 $\hat{\varphi}$ 是

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=A(z)w\qquad (3)$$

的向量解，其中 $A(z)=(z-z_0)^{-1}$

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&1&1&0&\cdots&0\\0&0&2&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&1\\-b_n&-b_{n-1}&-b_{n-2}&\cdots&\cdots&(n-1)-b_1\end{bmatrix}$$

可见当 z_0 为(1)的第一类奇点时，z_0 也是(3)的第一类奇点. 称(3)是由方程(1)诱导的线性系统. 另一方面，当 z_0 为(3)的正则奇点时，由解的结构即知，在 z_0 的附近，每一解都是项

$$(z-z_0)^r(\log(z-z_0))^kp(z)\qquad (4)$$

的线性组合，其中 r 为整数，k 为不超过 $n-1$ 的非负整数，p 在 z_0 解析，又 $p(z_0)\neq 0$. 如果(1)的每一解能在 z_0 的去孔邻域内表为(4)的项的线性组合，则称 z_0 为(1)的正则奇点. 若(1)至多以 z_0 为第一类奇点，则 z_0 必为(1)的正则奇点. 对 n 阶方程，反过来的事实也是对的(参见“正则奇点”).

富克斯方程(Fuchs equation) 一类具有特殊奇性且在数学物理中有很广背景的线性方程. 一个 n 阶线性方程

$$\sum_{h=0}^{n}a_{n-h}(z)w^{(h)}=0\ (a_0(z)=1),$$

如果它有有限个正则奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_k$，同时又以无穷远点∞为正则奇点，则称为富克斯方程. 此时系数可写成下面形状(参见“n 阶线性方程”)：

$$a_h(z)=p_h(z)\prod_{m=1}^{k}(z-z_m)^{-h}\ (h=1,2,\cdots,n),$$

其中$p_h(z)$为一多项式，其次数最多为$h(k-1)$. 特别地，考虑一个二阶富克斯方程

$$w''+f(z)w'+g(z)w=0.\qquad (1)$$

可设有限奇点的个数 k 大于 2(否则方程较平凡)，故可设

$$f(z)=\frac{q(z)}{\prod_{m=1}^{k}(z-z_m)},$$

$$g(z)=\frac{r(z)}{\prod_{m=1}^{k}(z-z_m)^2},$$

则其中 $q(z),r(z)$各为次数不高于 $k-1$ 或 $2(k-1)$ 的多项式. 将其分解为部分分式

$$f(z)=\sum_{m=1}^{k}\frac{a_m}{z-z_m},$$

$$g(z)=\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{b_m}{(z-z_m)^2}+\frac{c_m}{z-z_m}\right)$$
$$(a_m,b_m,c_m\in\mathbf{C}).$$

另一方面，下面方程称为(1)在奇点 z_0 的定态方程：$p(\lambda)=\lambda^2+(p_0-1)\lambda+q_0$，其中

$$p_0=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z),$$

$$q_0=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2g(z).$$

它的两个实根称为(1)在 z_0 的指数，并以 α_{1m},α_{2m}及 $\alpha_{1\infty},\alpha_{2\infty}$分别记(1)的在正则奇点 z_m，∞处的指数. 富克斯(Fuchs，I. L.)证明，当(1)仅有三个正则奇点时，上述系数 a_m,b_m,c_m 将由指数 α_{1m},α_{2m}及 $\alpha_{1\infty},\alpha_{2\infty}$ 完全确定. 换言之，富克斯方程将由其指数完全确定，为此黎曼(Riemann，(G. F.)B.)给出富克斯方程的下列记号

$$w = P\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \infty & \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1\infty} & z \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2\infty} & \end{bmatrix}.$$

最后能得到一个结构定理：设 $\alpha_{11},\alpha_{21},\alpha_{12},\alpha_{22},\alpha_{1\infty},\alpha_{2\infty}\in\mathbf{C}$，$z_1,z_2\in\mathbf{C}$，则存在一个以 $\{z_1,z_2,\infty\}$ 为正则奇点，以上述值为指数的富克斯方程的充分必要条件是 $\alpha_{11}+\alpha_{21}+\alpha_{12}+\alpha_{22}+\alpha_{1\infty}+\alpha_{2\infty}=1$. 此时方程形为

$$w''+\left(\frac{1-\alpha_{11}-\alpha_{21}}{z-z_1}+\frac{1-\alpha_{12}-\alpha_{22}}{z-z_2}\right)w' +\left(\frac{\alpha_{11}\alpha_{21}}{(z-z_1)^2}+\frac{\alpha_{12}\alpha_{22}}{(z-z_2)^2} +\frac{\alpha_{1\infty}\alpha_{2\infty}-\alpha_{11}\alpha_{21}-\alpha_{12}\alpha_{22}}{(z-z_1)(z-z_2)}\right)w=0.$$

超几何方程(hypergeometric equation)　具有三个正则奇点并有规范形式的一类富克斯方程. 利用(非奇)分式变换

$$v=\frac{Az+B}{Cz+D}\ (AC-BD\neq 0),$$

对具有三个正则奇点的富克斯方程进行变量代换，可以进一步化简方程，得到的最后形式为

$$u = P\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{bmatrix},$$

即一般地可设三个正则奇点为 0，1 和∞，而指数分别以 $(0,1-\gamma)$，$(0,\gamma-\alpha-\beta)$ 及 (α,β) 记之，从而至多具有三个正则奇点的富克斯方程的通式，其最后形式为

$$u''+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{1-(\gamma-\alpha-\beta)}{z-1}\right)u' +\left(\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\right)u=0,$$

或

$$z(z-1)u''-[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]u'+\alpha\beta u=0.$$

此方程即称为超几何方程. 可得其一个 $|z|<1$ 上收敛的级数解

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n.$$

当 $F(\alpha,1,\alpha,z)=F(1,\beta,\beta,z)$ 时，此级数为一几何级数. $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ 又称为超几何函数；当 α,β 为 0 或负整数时为多项式.

超几何函数(hypergeometric function)　见"超几何方程".

弗罗贝尼乌斯方法(Frobenius method)　寻求 n 阶方程在正则奇点邻域的解的一种方法. 为简洁计，以二阶方程为例来说明这个方法，即讨论

$$u''+f(z)u'+g(z)u=0. \tag{1}$$

依正则奇点假设，取 $f(z)=F(z)/z$，$zg(z)=G(z)/z$，而

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k,\quad G(z)=\sum_{k=0}^{\infty}d_kz^k.$$

(1)即化为

$$L(u)\equiv z^2u''+zF(z)u'+G(z)u=0.$$

弗罗贝尼乌斯(Frobenius，F. G.)建议取形式解

$$\varphi(\lambda,z)=z^{\lambda}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\lambda)z^k\right),$$

使对(1)，要求满足

$$L(\varphi(\lambda,z))=p(\lambda)z^{\lambda}, \tag{2}$$

其中 $p(\lambda)=\lambda^2+(c_0-1)\lambda+d_0$. 设 α,β 为 $p(\lambda)$ 的两个根. 将 φ 的表达式代入(2)式，可得 $a_0(\lambda)p(\lambda)=p(\lambda)$，及对 $k>0$ 时，

$$\begin{aligned} &a_k(\lambda)p(\lambda+k)+a_{k-1}(\lambda)[(\lambda+k-1)c_1+d_1]\\ &+a_{k-2}(\lambda)[(\lambda+k-2)c_2+d_2]+\cdots\\ &+a_2(\lambda)[(\lambda+2)c_{k-2}+d_{k-2}]\\ &+a_1(\lambda)[(\lambda+1)c_{k-1}+d_{k-1}]\\ &+a_0(\lambda)[\lambda c_k+d_k]\\ &=0. \end{aligned}$$

只要 $\alpha+m\neq\beta$，$m\in\mathbf{Z}_+$，即可逐次递推求出各系数，从而得解 $\varphi(\alpha,z)=u_1(z)$.

下面是三种情况对应的结论：

1. $\alpha-\beta$ 非整数. 此时 $p(\beta+k)\neq 0$，故得第二个解

$$u_2(z)=z^{\beta}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\beta)z^k\right).$$

2. $\alpha=\beta$. 此时 $p'(\alpha)=p(\alpha)=0$，

$$L\left(\left.\frac{\partial\varphi(\lambda,z)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\alpha}\right)=\left.\frac{\partial L(\varphi(\lambda,z))}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\alpha} =(p'(\lambda)z^{\lambda}+p(\lambda)z^{\lambda}\log z)|_{\lambda=\alpha}=0,$$

故得第二个解

$$u_2(z)=z^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}\lambda}(\alpha)z^k\right)+\log z\cdot u_1(z).$$

3. $\alpha-\beta=n>0$ 为整数. 可得

$$u_2(z)=z^{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}[(\lambda-\beta)a_k(\lambda)]_{\lambda=\beta}z^k +cu_1(z)\log z,$$

其中 $c=(\lambda-\beta)a_n(\lambda)|_{\lambda=\beta}$.

表现定理(representation theorem)　有关解的不同表现形式的定理. 表现定理的主要意义是研究微分方程解的解析表示法，例如，在复线性系统中往往用幂级数或洛朗级数来表示解. 进一步的研究发现，非线性方程的解有时必须用下面形式的即所谓 Psi 级数来表示

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{\lambda_n},\quad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}z^{m+\lambda_n},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}z^{\lambda_n}(\log z)^n\ (\lambda_n\in\mathbf{C})$$

等. 例如方程 $zw''=w^2$ 以 $z=0, z=\infty$ 为固定奇点，其初等解可以用两个单参数的级数表示如下

$$\frac{1}{z}\left\{2+\sum_{n=1}^{\infty}c_n a^n z^{-n\sigma}\right\},\frac{1}{z}\left\{2+\sum_{n=1}^{\infty}d_n b^n z^{-n\tau}\right\},$$

其中 σ,τ 分别等于常数 $(\sqrt{17}\pm 3)/2$，a,b 为参数；前一级数对充分大的 $|z|$ 收敛，后一级数对甚小 $|z|$ 收敛. 在数学物理的讨论中也常用积分

$$\int_C K(z,s)f(s)\mathrm{d}s$$

来表示解，与此相关的结果都被称为表现定理. 1986 年，伊里亚申科(Ильяшенко, Ю. С.)在研究极限环的有限性问题时发现，一个鞍点的角点域内构造的单一变换，已经不是预测中的解析形式，而是具有下面形式的 Psi 级数

$$f_T = ax^{\mu_0}+\sum\nolimits_{n\geqslant 1}x^{\mu_n}P_n(\log x),$$
$$a>0;\mu_n\in R;0<\mu_0<\mu_1<\cdots<\mu_n<\cdots,$$
$$\lim_{n\to\infty}\mu_n=+\infty.$$

次年，经伊里亚申科、埃加勒(Ecalle, J.)和马蒂内(Martinet, J.)等人的研究，独立地，但十分困难地给出 60 余年前得到的杜拉克定理的新证明. 其中埃加勒开创所谓超拟解析函数"(Résurgente)函数". 这些成果现在已被冠以"拟解析理论"的名称.

常微分方程定性理论

常微分方程定性理论(qualitative theory of ordinary differential equations)　常微分方程在不求出解的情况下研究解的分布和性态的基本理论. 19 世纪中叶以前，对具体的微分方程或微分方程组，人们总是力求找出其通解的分析表达式. 但很多情况都遇到了困难，后来才知道在绝大多数情况下，特别是对非线性微分方程要得出其通解一般是不可能的. 19 世纪后期，法国大数学家庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)创立了常微分方程定性理论. 其基本思想是从微分方程本身的特征去设法推断其解所具有的性质. 这就要从一些具有特殊性质的特解着手，如对奇点、周期解、极限环，以及更一般地，对轨线的极限集等加以分析研究，在此基础上就可能对常微分方程所确定的解的总体的大范围性态作出判断. 这就是常微分方程定性理论的基本部分. 经过后人的不断发展充实，定性理论已成为微分方程理论中一个最基本的分支.

定常系统的奇点(critical point of autonomous systems)　函数值不随时间而变的常值解，在相空间上的轨道为一定点，即为方程奇点. 考虑定常的微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x), \qquad (1)$$

其中 $x, X\in\mathrm{R}^n$，X 在区域 $G\subset\mathrm{R}^n$ 上连续且适当次可微，以 $\varphi_t(x_0)$ 记(1)的 $t=0$ 时 $x=x_0$ 的解. 如果点 $x^*\in G$，使 $X(x^*)=0$，则称 x^* 为(1)的奇点. 对奇点 x^* 及任何 $t\in\mathrm{R}$，$\varphi_t(x^*)\equiv x^*$. 通过平移变换可使 $x^*=0$，故以下讨论系统(1)以 R^n 的原点 $O: x=0$ 为奇点的情况. 若矩阵 $\frac{\partial X}{\partial x}(0)$ 非异，则称 O 为(1)的非退化奇点，否则称为退化奇点；若 $\frac{\partial X}{\partial x}(0)$ 不具实部为零的特征值，则称 O 为(1)的双曲奇点.

非退化奇点(nonsingular critical point)　见"定常系统的奇点".

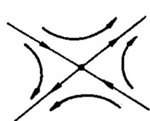
退化奇点(degenerate critical point)　见"定常系统的奇点".

双曲奇点(hyperbolic critical point)　见"定常系统的奇点".

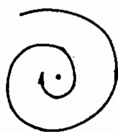
哈德曼-格罗布曼定理(Hartman-Grobman theorem)　关于双曲奇点邻域轨道分布性态的一个重要定理. 设 O 为

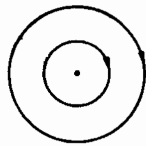
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x) \qquad (1)$$

的双曲奇点，即 $\frac{\partial X}{\partial x}(0)$ 具有 s 个实部为负和 u 个实


鞍点


结点


焦点


中心点

部为正的特征值，$s+u=n$，则存在 O 的邻域 U，使在其内分别有 s, u 维子流形 E^s, E^u，$\mathrm{R}^N\cap U=E^s\oplus E^u$，对 E^s 内的任一点 x，

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi_t(x)=0,$$

而对 E^u 内的任一点 x，

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi_t(x)=0.$$

分别称 E^s, E^u 为奇点 O 的局部稳定和不稳定流形. 当 $u=0$ 时，称奇点 O 为渊；当 $s=0$ 时，称奇点 O 为源. 当 $n=2$ 时，(1)为平面系统，O 的几何性态可由二阶方阵 $\frac{\partial X}{\partial x}(0)$ 的特征值 λ_1, λ_2 的不同情况来决定：若 λ_1, λ_2 为异号实数，则称 O 为鞍点；若 λ_1, λ_2 为同号实数，则称 O 为结点；若 λ_1, λ_2 为一对共轭复数，则称 O 为焦点. 在结点和焦点的情况，如 $\lambda_1<0$ 或 $\lambda_1>0$，则

相应奇点为稳定或不稳定的. 若λ_1,λ_2为一对纯虚根(非双曲奇点),则O可能为中心点,也可能为焦点,须进一步由(1)的右端的非线性项的情况来具体确定. 平面初等奇点的结构如图所示.

鞍点(saddle point) 见“哈德曼-格罗布曼定理”.

结点(node) 见“哈德曼-格罗布曼定理”.

焦点(focus) 见“哈德曼-格罗布曼定理”.

中心点(center) 见“哈德曼-格罗布曼定理”.

平面奇点的指标(index of planar critical points) 反应奇点性态的一个重要特征数. 当$n=2$时系统(1)可表为(x,y)平面上的系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y). \tag{1}$$

它确定了(x,y)平面上的连续向量场

$$V(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)).$$

取单闭曲线C,其上不含有V的奇点(即指系统(1)的奇点),当点(x,y)在C上逆时针绕行一周时,向量$V(x,y)$连续变化而回到原位置,故它转动的角度为2π的整数倍,称此整数为向量场V沿曲线C的旋转数,记为$R_V(C)$. 若C内部不含奇点,则$R_V(C)=0$;若曲线C连续形变为曲线C_1,且在此过程中不碰到V的奇点,则$R_V(C)=R_V(C_1)$. 向量V与x轴的夹角$\theta=\arctan(Q/P)$,故有计算公式

$$R_V(C)=\frac{1}{2\pi}\oint_C \mathrm{d}\left(\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}\right).$$

若C为(1)的闭轨,则$R_V(C)=1$,故闭轨内部必包含奇点. 设M为V的孤立奇点,取$r>0$足够小,使以M为圆心、r为半径的圆周C_r及其内部不含异于M的奇点,则称V沿曲线C_r的旋转数为奇点M的指标,记为$I_V(M)$. 并有下列计算公式

$$I_V(M)=R_V(C_r)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\mathrm{d}\left(\arctan\frac{Q}{P}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{P\mathrm{d}Q-Q\mathrm{d}P}{P^2+Q^2}.$$

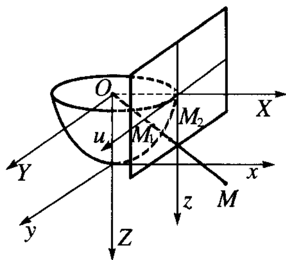
若M为结点、焦点或中心点,则$I_V(M)=1$;若M为鞍点,则$I_V(M)=-1$. 设单闭曲线C的边界上不含V的奇点,其内部含V的有限个奇点$M_1,M_2,\cdots,M_n$,则

$$R_V(C)=\sum_{i=1}^{n}I_V(M_i).$$

无穷远奇点(critical point at infinity) 平面奇点的一种推广,用于研究平面系统的轨线在平面上无穷远处的性态. 庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)把(x,y)平面上的系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y) \tag{1}$$

的轨线投影到与(x,y)平面相切于原点的一个单位球面S上. 后人就称此球面S为庞加莱球面. 如下图取坐标系. 在(X,Y,Z)空间中,(x,y)平面上的点M可表示为$(x,y,1)$. 取球心投影,即连结M与球心$(0,0,0)$,其连线与球面S交于两点,取定下半球面的一点$M_1(X,Y,Z)$. 这样就把(x,y)平面上的点一一对应到庞加莱下半球面上,(x,y)平面上的无穷远即对应于S的赤道:$X^2+Y^2=1,Z=0$. 为便于写出微分方程研究$Z=0$上各点邻近的性态,再把下半球面上的点投影到一个适当的铅直平面上,例如对不是y轴方向的无穷远点,可投影到平面$X=1$上,$\overline{OM}$与之相交于点M_2. 在$X=1$上取其与球面的切点为坐标原点,u轴与Y轴平行,z轴与Z轴平行,M_2的坐标为(u,z). 易推出(x,y)与(u,z)的变换关系



$$x=\frac{1}{z},\ y=\frac{u}{z}\ \text{或}\ u=\frac{y}{x},\ z=\frac{1}{x}.$$

对y轴方向的无穷远点,则投影到平面$Y=1$,在其上类似地引进坐标(v,z),则易得

$$x=\frac{v}{z},\ y=\frac{1}{z}\ \text{或}\ v=\frac{x}{y},\ z=\frac{1}{y},$$

以下计算从略. 在(u,z)坐标下,(1)变为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-uzP\left(\frac{1}{z},\frac{u}{z}\right)+zQ\left(\frac{1}{z},\frac{u}{z}\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-z^2P\left(\frac{1}{z},\frac{u}{z}\right).$$

$z\neq0$时,此方程组在$X=1$平面上的轨线为(x,y)平面上(1)的轨线的投影. 而$z=0$恰好对应于(x,y)面上的无穷元,正是人们要研究的. 为消去分母上的z,设P,Q为x,y的多项式,则可将上述方程组写成

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{z^n}\overline{P}(u,z),\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{z^n}\overline{Q}(u,z),$$

其中n为非负整数,使$\overline{P},\overline{Q}$为$u,z$的多项式且不同时含有因子$z$. 做变换$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t/z^n$,则化得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=\overline{P}(u,z),\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=\overline{Q}(u,z), \tag{2}$$

它在$z=0$上的奇点$u=u_0,z=0$称为(1)的一个无穷远奇点. 通过对(2)的奇点$(u_0,0)$的分析,搞清楚了它的邻域内的轨线的性态,则它的两个半邻域就分别代表了(1)在(x,y)平面上$y=u_0x$方向上的两端无穷远处的轨线性态.

庞加莱球面(Poincaré sphere) 见“无穷远奇点”.

闭轨(closed orbit) 微分方程的周期解在相空间上所对应的一条封闭曲线. 对系统

$$\frac{dx}{dt}=X(x) \qquad (1)$$

(参见“定常系统的奇点”)的解 $x=\varphi(t)$,如果 $\varphi(t)$ 的各个分量均为 t 的具有相同最小周期的周期函数,则称此解为周期解,它在相空间 R^n 内对应于一条闭曲线 L,称为(1)的一条闭轨. 孤立的闭轨就称为极限环. 所谓孤立,即指存在 L 的邻域 U,使在 U 内不存在(1)的其他闭轨,且对 $x\in U$,$\varphi_t(x)$ 或者当 $t\to+\infty$ 时趋于 L,或者当 $t\to-\infty$ 时趋于 L. 与闭轨以及极限环密切相关的奇闭轨是指由若干奇点和两端进入奇点(当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$)的轨线所构成的单闭曲线. 若其上只含一个奇点,则称为同宿奇闭轨;若其上含多于一个奇点,就称为异宿奇闭轨. 对 $n=2$ 时的平面系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y), \qquad (2)$$

由于在 (x,y) 平面上,有若尔当曲线定理,故可对其极限环以至极限集的性态作深入的分析研究. 以下将分段对平面定性理论的有关内容作介绍. (2)的极限环 L 将其邻域 U 分为内外两侧,若两侧的轨线当 $t\to+\infty(t\to-\infty)$ 时均盘旋逼近 L,则称 L 为稳定(不稳定)极限环;若一侧轨线当 $t\to+\infty$ 时盘旋逼近 L,另一侧当 $t\to-\infty$ 时盘旋逼近 L,则称 L 为半稳定极限环.

常微分方程的周期解(periodic solution of differential equation) 见“闭轨”.

稳定极限环(stable limit cycle) 见“闭轨”.

不稳定极限环(unstable limit cycle) 见“闭轨”.

半稳定极限环(semi-stable limit cycle) 见“闭轨”.

极限环(limit cycle) 见“闭轨”.

极限环稳定性的判定(deciding the stability of limit cycles) 判定极限环稳定性的基本法则. 在 L 上任取一点 p,过 p 做 L 的法线段 l,当 $q\in l$ 充分接近 p 时,过 q 的轨线当 t 增大时必将再次与 l 相交于一点 q_1(由解对初始值的连续依赖性). 一维点映射 $f:q\to q_1$ 称为庞加莱映射. 在 l 上以 p 为坐标原点,外法向距离 x 为正,内法向距离 x 为负,则 f 可表为一元函数 $x_1=f(x)$,称之为后继函数. L 与 l 的交点 p 对应于 $x=0$,为 $f(x)$ 的零点,如果它为 k 重零点 $(k=1,2,\cdots)$,即 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(k-1)}(0)=0$,$f^{(k)}(0)\neq0$,则称 L 为 k 重极限环,$k=1$ 时称为单重环,$k>1$ 时称为重环,k 为偶数时对应于半稳定环. 在 L 邻近取曲线坐标,可依次将 $f^{(i)}(0)$ 用 P,Q 及其各阶偏导数的适当组合沿 L 的某些积分来表示,通常 $f'(0)$ 的符号可由

$$\oint_L\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dt$$

来决定,若

$$\oint_L\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dt<0\ (>0),$$

则 L 为稳定(不稳定)的单重环,若

$$\oint_L\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dt=0,$$

则 L 为多重环,其重次与稳定性要进一步由 $f''(0)$ 或更高阶导数的符号来确定.

庞加莱映射(Poincaré mapping) 见“极限环稳定性的判定”.

后继函数(successor function) 见“极限环稳定性的判定”.

k 重极限环(k-multiple limit cycle) 见“极限环稳定性的判定”.

安德罗诺夫定理(Andronov theorem) 对奇闭轨内侧稳定性的判别定理. 设 (x,y) 平面上的系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y) \qquad (1)$$

有同宿奇闭轨 Γ_1,通过一鞍点 N,且过 N 的另两条分界线位于 Γ_1 的外部,如果在 N 点

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}<0\ (>0),$$

则 Γ_1 为内侧稳定(不稳定),即 Γ_1 内侧邻近的轨线当 $t\to+\infty(t\to-\infty)$ 时盘旋逼近 Γ_1;如(1)有异宿奇闭轨 Γ_2,它包含两个鞍点 N_1,N_2,且

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$$

在 N_1,N_2 同时为负(正),则 Γ_2 为内侧稳定(不稳定). 这时称 Γ_1,或 Γ_2 为内侧稳定(不稳定)的分界线环.

极限环不存在性判别法(criteria of nonexistence of limit cycles) 判定平面系统不存在极限环的准则. 具体法则如下:给定 (x,y) 平面上的系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y). \qquad (1)$$

1. 若在 (x,y) 平面上的单连通区域 G 内,

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$$

保持常号且不在 G 的任何子区域内恒等于零,则(1)在 G 内不存在任何闭轨或奇闭轨. 此判别法是由本迪克松(Bendixson, I. O.)得到的,故亦称本迪克松定理.

2. 若存在连续可微函数 $D(x,y)\neq0$,使在单连通区域 G 内

$$\frac{\partial(DP)}{\partial x}+\frac{\partial(DQ)}{\partial y}$$

保持常号且不在 G 的任何子区域内恒等于零，则(1)在 G 内不存在任何闭轨和奇闭轨. 此判别是由迪拉克(Dulac, H.)得到的，故亦称迪拉克定理. 定理中的函数 D，通常称为迪拉克函数.

本迪克松定理(Bendixson theorem)　见“极限环的不存在性判别法”.

迪拉克定理(Dulac theorem)　见“极限环的不存在性判别法”.

极限环存在性判别法(criteria of existence of limit cycles)　判定平面系统存在极限环的重要准则，即庞加莱环域定理. 该定理断言：对于给定的 (x,y) 平面上的系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y),\qquad (1)$$

若存在平面环状区域 Ω，使其内及边界上不含(1)的奇点，且(1)的轨线与 Ω 的境界线相交时均由 Ω 的外(内)部进入(跑出)Ω 的内(外)部，则 Ω 中至少存在一条包含 Ω 的内境界在其内部的稳定(不稳定)极限环. 自 20 世纪中期以来，经过中外不少数学家的努力，对上述古典结果得到了进一步的发展与应用. 如对迪拉克函数方法加以推广应用等，同时由于微分方程理论研究及应用问题的需要，人们着重考虑如下二阶振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+f(x)\frac{dx}{dt}+g(x)=0$$

或与之等价的平面莱纳系统

$$\frac{dx}{dt}=-y-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=g(x),\qquad (2)$$

其中 $F(x)=\int_0^x f(u)du$，获得了平面系统(2)存在极限环的一些判别定理.

庞加莱环域定理(Poincaré theorem on ring domain)　即“极限环存在性判别法”.

极限环惟一性判别法(criteria of uniqueness of limit cycles)　判定平面系统存在惟一极限环的重要准则，即对于平面系统给出适当条件以保证其极限环最多只有一个. 这是较之判别极限环存在性更为深入而困难的问题. 在分析系统的全局性态以及后面所述及的希尔伯特第十六问题的研究中都需要回答这一问题. 对此，欧美、苏联及中国的不少学者获得了许多好的成果. 就其条件的简洁与应用的广泛性来看，当推张芷芬所给出的下述极限环惟一性定理. 该定理断言：设平面系统

$$\frac{dx}{dt}=-y-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=g(x)\qquad (1)$$

满足微分方程解的存在惟一性的要求，且满足下列条件，则系统(1)至多存在一个极限环，如果它存在，必为稳定的极限环：

1. $xg(x)>0, x\neq 0$，又 $G(\pm\infty)=+\infty$，其中

$$G(x)=\int_0^x g(u)du.$$

2. $f(0)<0$，当 x 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内增大时，$f(x)/g(x)$ 不下降.

根据研究平面系统的需要，还有不少判别极限环惟一性的其他定理.

极限集理论(theory of limit sets)　定性理论的重要基础之一. 考虑系统

$$\frac{dx}{dt}=X(x)\qquad (1)$$

或平面系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y).\qquad (2)$$

从 x_0 点出发的轨线 $\varphi_t(x_0)$，若存在序列 $t_n\to+\infty$，使得 $\varphi_{t_n}(x_0)\to\bar{x}$，则称 $\bar{x}$ 为轨线 $\varphi_t(x_0)$ 的 ω 极限点，称 $\varphi_t(x_0)$ 的所有 ω 极限点的集合为 $\varphi_t(x_0)$ 的 ω 极限集，记为 $L_\omega(x_0)$. 类似地，考察 $t\to-\infty$ 的情况，则可得出 α 极限点与 α 极限集的定义. $\varphi_t(x_0)$ 的 α 极限集记为 $L_\alpha(x_0)$. 由上述定义易见，奇点 x_0 是 $\varphi_t(x_0)=x_0$ 的惟一的 ω 和 α 极限点，闭轨 $\varphi_t(x_0)$ 上的任一点都是此闭轨的 ω 和 α 极限点. 亦即，奇点和闭轨分别为它们自身的 ω 和 α 极限集. 对于平面定常系统(2)，极限集理论有甚为清晰完整的结论，可归结如下：若系统(2)的一条正半轨 $\varphi_t(x_0)(t\geqslant 0)$ 保持在有界区域 D 内，则 $L_\omega(x_0)$ 必属于下列情形之一：

1. 一个奇点.
2. 一条闭轨.
3. 一条奇闭轨.

由此即可推出庞加莱-本迪克松定理.

庞加莱-本迪克松定理(Poincaré-Bendixson theorem)　平面定性理论的经典成果并是后续研究的重要基础. 给定系统

$$\frac{dx}{dt}=X(x)\qquad (1)$$

或平面系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y).\qquad (2)$$

庞加莱-本迪克松定理断言：若系统(2)的一条正半轨保持在某一不含奇点的有界区域内，则它盘旋逼近于一条极限环(它在该轨线所在一侧为稳定). 设有集合 A，如果对任一 $x\in A$ 及一切 $t\in\mathbf{R}$，(1)或(2)的轨线 $\varphi_t(x)\in A$，则称 A 为系统(1)或(2)的不变集. 显然，ω 或 α 极限集均为不变集. 如果不存在 A 的不变真子集，则非空不变集 A 称为一个极小集.

关于极小集的结构，施瓦兹(Schwarz, A. J.)于 1963 年将上述结果推广到定义于二维流形上的 C^2 类流，得到下述结论(亦称施瓦兹定理)：C^2 类流形 M 上的 C^2 流的非空紧极小集必属于下列情形

之一：

1. 一个奇点.

2. 一条闭轨.

3. 整个流形 M.

对维数 $n>2$ 的系统，则可以有结构复杂的极限集，例如混沌集等.

不变集(invariant set)　见“庞加莱-本迪克松定理”.

极小集(minimum set)　见“庞加莱-本迪克松定理”.

施瓦兹定理(Schwarz theorem)　见“庞加莱-本迪克松定理”.

旋转向量场理论(theory of rotated vector fields)　研究极限环随参数而变化的一种基本而重要的理论. 考虑含有实参数 λ 的平面系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y,\lambda),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y,\lambda),\qquad (1)$$

它可视为平面上的含参数向量场 $V(\lambda)=(P,Q)$. 1953 年，德芙(Duff, G. D. F.)创立了旋转向量场理论，并经塞弗特(Seifert, G.)、陈翔炎等改进完善，使之在平面定性理论，特别是极限环问题的研究中发挥了重要的作用.

在(1)中，设 P,Q 为 x,y,λ 的连续函数，关于 x,y 满足李普希茨条件，对 λ 有连续偏导数，且对一切 λ，(1)的奇点为孤立. 更设(1)的奇点不随 λ 而变动，且恒有

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ \dfrac{\partial P}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial Q}{\partial \lambda}\end{vmatrix}\geqslant 0\ (\text{或}\leqslant 0),$$

又使等号成立的点不充满(1)的任何闭轨，则称(1)或 $V(\lambda)$ 关于 λ 构成旋转向量场. 由此可见，在旋转向量场中，平面 (x,y) 上除奇点外，每一点处向量 $V(\lambda)$ 随 λ 变化同时向一个方向转动(可保持不转动). 旋转向量场理论可归纳为如下的主要结论：

1. $V(\lambda)$ 的奇点的指标不随 λ 而改变.

2. 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $V(\lambda_1)$ 与 $V(\lambda_2)$ 的闭轨互不相交.

3. $V(\lambda)$ 的极限环 L_λ 随 λ 变化而向其一侧单调移动，即或者向外扩大，或者向内缩小. 到底扩大还是缩小，具体由 λ 变化时 $V(\lambda)$ 的旋转方向以及 L_λ 的定向和稳定性来决定.

4. 设 $\lambda=\lambda_0$ 时，$V(\lambda_0)$ 有一半稳定环 L_{λ_0}，则当 λ 向 λ_0 一方变化时，L_{λ_0} 分裂为两个单重极限环，其一为稳定，另一为不稳定；当 λ 向 λ_0 另一方变化时，L_{λ_0} 消失，即 $V(\lambda)$ 在 L_{λ_0} 邻近不再存在闭轨线.

5. λ 变化时，$V(\lambda)$ 的极限环 L_λ 移动所遮盖的区域的内、外边界线上必含有奇点(包括 L_λ 无限扩张时碰到无穷远奇点).

旋转向量场(rotated vector field)　见“旋转向量场理论”.

希尔伯特第 16 问题(Hilbert's 16th problem)　著名数学家希尔伯特(Hilbert, D.)提出的涉及平面多项式系统极限环存在和分布问题的重要数学难题. 1900 年，他在国际数学家大会上提出了 23 个数学问题，其中第 16 问题的后半部分是涉及微分方程的，他提出：右端为 x,y 的 n 次多项式 $P_n(x,y)$，$Q_n(x,y)$ 的平面系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P_n(x,y),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q_n(x,y)\qquad (1)$$

最多有几个极限环，它们的位置分布如何?许多数学家围绕这一问题开展研究，从而深入地推动了平面定性理论及一些相关学科分支的研究. 迪拉克(Dulac, H.)于 1923 年发表长达 140 页的论文，证明每一确定的系统(1)，其极限环只有有限个，称之为有限性定理. 但后人发现其证明存在缺陷，直至 20 世纪 80 年代末期有限性定理才被严格地加以证明，这分别由苏联的依廖申科(Il'yashenko. Yu. S.)和法国的埃加勒(Ecalle, J.)、马蒂内(Martinet, J.)等人独立地完成. 其核心部分是证明(1)不可能有无限多个极限环聚集在一个分界线环邻近.

为解决希尔伯特第 16 问题，人们依不同的 n 来分别研究系统(1). $n=1$ 时，(1)为线性系统，显然不存在极限环. $n=2$ 时称(1)为二次系统，20 世纪 50 年代起，以叶彦谦和秦元勋为代表的中国数学家对其极限环的基本性质做了系统研究. 至 20 世纪末在国际上围绕其极限环与全局结构等已有大量成果. 鲍金(Bautin, N. N.)证明了二次系统在一个奇点外围邻近最多有三个极限环(1952 年)；20 世纪 70 年代末，史松龄以及陈兰荪、王明淑等给出了具有不少于四个极限环的二次系统(其一个奇点外至少有三个，另一奇点外至少有一个). 至今尚未能证明二次系统最多只能有四个极限环. 对于三次系统(即 $n=3$ 时)也有不少研究成果，已经获得了如下的实例：在一个奇点外围邻近聚集有 8 个极限环；也存在三次系统其相互嵌套着的极限环至少有 11 个. 对 $n\geqslant 4$ 的系统则研究甚少. 总之，要彻底解决希尔伯特第 16 问题还有相当大的难度.

结构稳定性(structural stability)　系统的大范围定性结构在微扰下保持稳定的性质. 一个系统所具有的某种性质称为是稳定的，如果该性质在系统本身的微小改变之下仍能保持. 结构稳定性就是指系统的大范围定性结构是稳定的. 为严格给出其定义，首先要说明：什么是系统的微小改变？今就平面系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)\qquad (1)$$

来讨论，假设它定义于(x,y)平面的区域G内，$P,Q\in C^1$(即P,Q在G内一次连续可微)，G的边界为一单闭曲线，且不含有(1)的奇点以及与(1)的轨线相切的点．所有满足这些条件的系统(1)组成一集合X，今在X内引进距离．任取X内另一系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P^*(x,y),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q^*(x,y) \tag{2}$$

定义(1)与(2)的距离为

$$\begin{aligned}&d((1),(2))\\ &=\sup_{(x,y)\in G}\left(|P-P^*|,|Q-Q^*|,\left|\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial P^*}{\partial x}\right|,\right.\\ &\left.\left|\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P^*}{\partial y}\right|,\left|\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q^*}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial Q^*}{\partial y}\right|\right).\end{aligned}$$

在此距离下，X成为一巴拿赫空间．若存在$\varepsilon>0$，使当$d((1),(2))<\varepsilon$时，存在G到它自身的同胚映射T，把(1)的轨线对应为(2)的轨线，则称系统(1)在G上为结构稳定系统，或称为粗系统．(2)称为(1)的一个扰动．这一概念首先由安德罗诺夫(Андронов, A. A.)和庞特里亚金(Понтрягин, Л. С.)于1937年所引进，他们称之为粗系统，且当时假定P,Q为解析函数．并给出了如下结果(未有详细证明)．系统(1)在G上为结构稳定的充分必要条件是：

1. 只有有限个奇点，且均为双曲的．
2. 只有有限条闭轨，且均为单重极限环．
3. 没有从鞍点到鞍点的轨线连结．

1952年，德巴杰斯(DeBaggis, H. F.)把P,Q为解析的要求减弱为$P,Q\in C^1$，并详细证明了上述结果．1962年，佩克索托(Peixoto, M.)把这些结论推广到紧致二维流形上的微分动力系统，得出了下列结论：

1) 在紧致二维流形M^2上定义的微分系统为结构稳定的充分必要条件是：它满足上述条件1－3，再加上条件4：每一轨线的ω与α极限集只能为奇点或闭轨．

2) 把M^2上定义的微分系统所组成的空间记为X，其中结构为稳定的系统组成的子集在X内为开的稠密集．

20世纪60年代起，斯梅尔(Smale, S.)、廖山涛等致力于维数高于2的系统的结构稳定性研究，并由此引出了具有复杂的极限集结构的马蹄映射(常称为斯梅尔马蹄)以及高维结构稳定性的一系列成果．

结构稳定系统(system of structural stability) 见“结构稳定性”．

扰动(perturbation) 见“结构稳定性”．

分支(bifurcation) 结构不稳定的系统在小摄动之下产生的结构变异现象．就上述二维系统来说，只要上述结构稳定的充分必要条件中的条件有一个被破坏，就得到分支系统．譬如说，具有一个非双曲奇点，或具有一个非单重的极限环，或具有一条鞍点连结轨线，这一系统就是分支系统，它在适当的小摄动之下，非双曲奇点就会转化为一个或多个双曲奇点，非单重极限环也可转化为邻近的一个或多个单重极限环，鞍点连结轨线则会破裂．因此，系统的定性结构在相应的一个局部会因小摄动而发生变化，这个局部就出现分支现象，对应地就称为奇点分支、闭轨分支或鞍点连线分支(它也包含同宿或异宿奇闭轨分支作为特例)．

对维数$n>2$的高维系统，结构稳定性与分支问题要比$n=2$时复杂得多，譬如具有同宿或异宿轨时就不一定出现分支．设有双曲奇点p_1,p_2，把它们的局部稳定与不稳定流形向大范围延伸可得到全局的稳定流形$W^s(p_1)$，$W^s(p_2)$和全局的不稳定流形$W^u(p_1)$，$W^u(p_2)$．集合$W^u(p_i)\cap W^s(p_j)(i\neq j)$中的点就称为异宿点，集合$W^u(p_i)\cap W^s(p_i)(i=j)$中的点称为同宿点．通过同宿(或异宿)点的轨线称为同宿(或异宿)轨．具有同宿(或异宿)轨的高维系统是否为分支，还要看在同宿(或异宿)点处$W^u(p_i)$与$W^s(p_j)$的相交情况，如果它们横截相交(即在交点处$W^u(p_i)$与$W^s(p_j)$的并能张满空间R^n)，则不产生分支(局部为结构稳定)，而在非横截相交时则出现分支．

环面上的微分方程(differential equation on torus) 环面上定义的微分方程．在平面系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y) \tag{1}$$

中，设P,Q关于其变元分别是以1为周期的函数，即满足

$$\begin{aligned}P(x,y+1)=P(x+1,y)=P(x,y),\\ Q(x,y+1)=Q(x+1,y)=Q(x,y).\end{aligned} \tag{2}$$

这时，把(x,y)平面上的单位正方形$S=[0,1]\times[0,1]$两对对边叠合，得到一个环面T^2．从而(2)就确定了环面T^2上的一个系统．在T^2上，常把圆周$x=x_0$(任一常数)称为一纬圆，圆周$y=y_0$称为一经圆．进一步设P,Q恒不等于零，即环面上不含奇点的方程．考虑它从经圆$C_0: x=0, 0\leqslant y\leqslant 1$上一点$(0,y_0)$出发的轨线，它对应的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

满足初值$\varphi(0,y_0)=y_0$的解$y=\varphi(x,y_0)$．$x=1$时，记$\psi(y_0)=\varphi(1,y_0)$，由叠合原理，$(1,\psi(y_0))$仍为C_0上的一点，故通过对应$(0,y_0)\to(1,\psi(y_0))$确定了一个微分同胚$H: C_0\to C_0$．庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)通过研究这个一维点映射的性质来得出上述环面微分方程的轨线性态．对任意整数n，将映射ψ迭代n次，可以证明极限

$$\mu = \lim_{|n| \to +\infty} \frac{\psi^n(y_0)}{n}$$

存在，且不随 y_0 而变化. 它是环面系统的一个特征数，称之为旋转数. 这时，沿着每一条轨线在经圆与纬圆方向绕行圈数（不足一圈时不计入）之比的极限均等于 μ. 当 μ 为有理数 q/p 时，环面轨线性态必属于如下两种情形之一：

1. 周期环型. 即环面上充满闭轨，每一条沿经圆绕行 q 圈，沿纬圆绕行 p 圈而后闭合.

2. 极限环型. 环面上有若干条闭轨（如同平面系统的极限环），形态与情形 1 中相同，其他轨线非闭，而以这些极限环中的一条为其 ω 或 α 极限集.

当 μ 为无理数时，可考虑经圆 C_0 上的点集

$$S_p = \{T^n p \mid p \in C_0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}.$$

S_p 的极限点集记为S'_p. S'_p为完全集，即$(S'_p)' = S'_p$，且对任何$p \in C_0$，S'_p均相同. 只能有下列两种情况：

1. $S'_p = C_0$.

2. S'_p 在 C_0 内无处稠密，它们分别对应于环面上两种不同的轨线性态：

1）遍历型. 这时环面上每一条轨线均为非闭，它的轨迹在环面上处处稠密（此即遍历一词的含意）.

2）奇异型. 对应的轨线结构较为奇特. 直观地说，相当于在遍历型中抽去若干条轨线，而代之以有限条或可数多条带子，每条带子由拓扑平行的轨线组成，但带子两端的宽度单调趋于零，以使它们取代某些轨线后，仍得一环面.

对环面上的 C^2 类流，若旋转数为无理数，则必为遍历型，即不会出现奇异型. 当儒瓦（Denjoy, A.）举出一个 C^1 流的例子，说明它呈现奇异型.

旋转数（rotation number） 见“环面微分方程”.

达芬方程（Duffing's equations） 一类二阶微分方程. 通常可写为

$$\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = p(t), \tag{1}$$

其中 c 为常数，$xg(x) > 0$（$|x| \gg 1$）. 若$g(x)$是线性函数，则可用常数变易法写出（1）的通解表达式. 若 $g(x)$为非线性函数，则（1）的动力学行为非常复杂，可以出现混沌状态. 如 $c \neq 0$，（1）是耗散系统，其庞加莱映射不保面积. 当 $c = 0$ 时，（1）成为

$$\ddot{x} + g(x) = p(t). \tag{2}$$

（2）是一保守系统，它的庞加莱映射是保面积的.（2）等价于一特殊的哈密尔顿系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) + p(t), \end{cases}$$

其中哈密尔顿函数

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}y^2 + G(x) - xp(t),$$

$$G(x) = \int_0^x g(s)\mathrm{d}s.$$

（2）可分成三种类型：

1. 超线性：

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty.$$

2. 半线性：

$$a < \frac{g(x)}{x} < b.$$

3. 次线性：

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{g(x)}{x} = 0.$$

（2）可以有无穷多个周期运动和无穷多个拟周期运动，可以有无穷多个不变环面，也可以出现混沌状态.

常微分方程稳定性理论

常微分方程稳定性理论（stability theory of ordinary differential equation） 亦称运动稳定性理论，是常微分方程理论的一个分支. 研究常微分方程的解在微小扰动下的性质. 粗略地说，系统的某个状态，如果在微小扰动之下其状态变化保持是小的，则称它是稳定的，否则，称它是不稳定的. 由于在实际系统中不可避免地会出现各种偶然的扰动，所以只有稳定的状态或过程才有现实意义. 因此，研究描写实际系统的微分方程解的稳定性具有重要的意义.

稳定性的概念和理论由俄国数学家李亚普诺夫（Ляпунов, A. M.）于 19 世纪 90 年代所创立，并提出称之为第一方法和第二方法的两种解决方法. 20 世纪五六十年代，美国数学家莱夫谢茨（Lefschetz, S.）和拉萨尔（Lasalle, J. P.）进一步发展了稳定性理论. 现在稳定性理论和方法已推广到泛函微分方程、广义微分方程及偏微分方程等更广泛的系统中去. 目前，稳定性的概念已被推广和应用到自然科学和工程技术的许多领域之中，并形成了非常丰富的理论. 这里主要研究常微分方程解的稳定性.

稳定性（stability） 常微分方程稳定性理论的重要概念之一. 如果对于任一 $\varepsilon > 0$ 及$t_0 \geq \tau$，存在对应的 $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$，使得当 $\|x_0\| < \eta$，$t \geq t_0$ 时，有 $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$，则称奇点 O 为稳定的. 否则，称 O 为不稳定的.

不稳定性（instability） 见“稳定性”.

渐近稳定性（asymptotic stability） 常微分方程稳定性理论的重要概念之一. 如果 O 是稳定的并且对每一个 $t_0 \geq \tau$，存在 $\eta(t_0)$，使得对每一个 $\xi > 0$ 及 $\|x_0\| < \eta(t_0)$，存在对应的 $T(x_0, t_0, \xi)$，使当 $t \geq t_0 + T$ 时，有 $\|x(t, t_0, x_0)\| < \xi$，则称 O 为渐近稳定的. 如果可以选到与 x_0 无关的 $T = T(t_0, \xi)$，则称 O

为同等渐近稳定的. O 为稳定的，等价于对每一固定的 $t_0 \geqslant \tau, x(t,t_0,x_0)$ 在 $x_0=0$ 的连续性相对 $t \in [t_0, +\infty)$ 是一致的；O 的渐近稳定性等价于 O 为稳定的且具有吸引的性质.

一致稳定性(uniform stability) 常微分方程稳定性理论的重要概念之一. 在有关稳定性的各定义中，$x(t,t_0,x_0)$ 在 $x_0=0$ 处的连续性只要求对 $t \in [t_0, +\infty)$ 是一致的，如果进一步要求它关于 $t_0 \geqslant \tau$ 也是一致的，这就是一致稳定性的概念. 严格定义如下：如果对于任一 $\varepsilon>0$ 及 $t_0 \geqslant \tau$，存在只与 ε 有关的 $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$，使得当 $\|x_0\| < \eta$, $t \geqslant t_0$ 时，有 $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$，则称 O 为一致稳定的.

如果 O 为一致稳定的，并且存在 η 不依赖于 t_0 使得对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T(\varepsilon)>0$，使当 $\|x_0\|<\eta, t \geqslant t_0+T$ 时，有 $\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon$，则称 O 为一致渐近稳定的.

如果存在 $\lambda>0$，以及任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得当 $\|x_0\|<\delta, t_0 \geqslant \tau$ 时，对于一切 $t \geqslant t_0$，都有

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \varepsilon \exp[-\lambda(t-t_0)],$$

则称 O 为指数渐近稳定的.

齐次线性系统的稳定性(stability in linear homogeneous systems) 最简单和基本的系统稳定性. 考虑齐次线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{1}$$

这里矩阵 $P(t)$ 对于 $t \geqslant \tau$ 是连续有界的. 由于(1)的所有解构成一个线性空间，所以其原点的稳定性同所有解的有界性是一致的，并且各种类型的稳定性之间存在密切关系：

1. 对于齐次线性方程组(1)来说，

1) 原点的稳定性等价于所有解的有界性.

2) 原点的一致稳定性等价于所有解有界，且关于 t 是一致的.

2. 齐次线性方程组(1)的原点为同等(指数)渐近稳定的充分必要条件是它为渐近(一致渐近)稳定的.

当 $P(t) \equiv A$ 为常数矩阵时，原点的稳定性完全由 A 的特征值决定：齐次线性方程组(1)的原点为渐近稳定的充分必要条件是 A 的一切特征值都有负的实部；原点为稳定的充分必要条件是 A 的一切特征值的实部非正，并且零实部特征值所对应的若尔当块都是一阶的.

按一次近似决定稳定性(stability in the first approximation) 应用近似的线性系统研究更复杂系统稳定性的一种方法，即由最基本的线性(一次)系统出发研究能否决定更复杂系统的稳定性. 对于常系数线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = Px, \tag{1}$$

其解的渐近性态是很清楚的. 如果在(1)的右端加上一个小扰动，即

$$\frac{dx}{dt} = Px + q(x,t), \tag{2}$$

则人们试图从(1)的解的已知性态去获得(2)在原点附近的渐近性态，这就是通常所称的按一次近似决定稳定性的问题. 当 P 没有零或纯虚数的特征根，且 q 相对于 $\|x\|$ 适当小时，则(1)和(2)在原点附近解的渐近性态完全相同. 设 P 有 $k(0 \leqslant k \leqslant n)$ 个具有负实部的特征根，而其余具有正实部. 又假定当 $t \geqslant \tau$ 及 $\|x\|, \|x'\| \leqslant A$ 时，对 t 一致地有

$$\begin{aligned}&\|q(x,t)-q(x',t)\| \\ &= O(\|x\|+\|x'\|) \cdot \|x-x'\|,\end{aligned} \tag{3}$$

则存在常数 $\mu, \upsilon>0$，使得下述性质成立：

1. 当 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k) \in \mathrm{R}^k$ 且 $\|\xi\|<\mu$ 时，(2)有连续依赖于 ξ 的解 $x(\xi,t)$，使得

$$\lim_{t\to\infty} x(\xi,t) = 0$$

且原点关于这族解是渐近稳定的.

2. 当 $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-k}) \in \mathrm{R}^{n-k}$ 且 $\|\eta\|<\upsilon$ 时，(2)有连续依赖于 η 的解 $x(\eta,t)$，使得

$$\lim_{t\to-\infty} x(\eta,t)=0.$$

设(2)为自治的：$q=q(x)$，且 $1<k<n$，则性质 1 和 2 表现的性质为典型的鞍点性质，它们给出了原点的局部稳定和不稳定流形.

李亚普诺夫稳定性(stability in the sense of Liapunov) 在无限时间区间上微分方程的解对其初值连续依赖的稳定性概念. 考虑微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = X(x,t), \tag{1}$$

假设它在 $D \times I$ 上连续且满足局部李普希茨条件，其中 $I=[\tau,+\infty)$，$D \subset \mathrm{R}^n$ 为含原点 O 的区域. 进一步，假设原点为(1)的奇点，即 $X(0,t) \equiv 0 (t \geqslant \tau)$. 记(1)满足 $x(t_0)=x_0$ 的解为 $x(t,t_0,x_0)$. 由解对初值的连续依赖性，$x(t,t_0,x_0)$ 在其定义域内为多元连续映射. 由于 O 为奇点，所以对于任一固定的 $t_0 \geqslant \tau$ 及有限区间 $[t_0,T]$，当 $\|x_0\|$ 充分小时，$x(t,t_0,x_0)$ 在该区间上有定义且对 x_0 的连续性相对于 $t \in [t_0,T]$ 是一致的. 但是，一般地，这种“一致”的性质在无限区间 $[t_0,+\infty)$ 上并不总是成立. 稳定性的概念其实就是考察在无限时间区间上的解关于初始点的连续依赖性，严格定义如上所述，它是由李亚普诺夫(Ляпунов, A. M.)给出的.

李亚普诺夫特征数(the characteristic numbers of Liapunov) 定量描述变系数线性方程组解的稳定性态的一种数. 对于变系数线性方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x, \quad (1)$$

其中 $P(t)$ 在 $t\geqslant\tau$ 上连续，李亚普诺夫(Ляпунов, A. M.)引进了一些数，现在称之为李亚普诺夫特征数，来代替特征根的作用，它们是用来测定 $t\to+\infty$ 时其解的"指数"增长的数.

李亚普诺夫特征数. 设 $\varphi(t)$ 是定义于 $t\geqslant\tau$ 上的实函数，则

$$\{\lambda'\}=\{\lambda' \mid \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda' t}\varphi(t)=0\}$$

为左端无穷的区间，令 λ_0 为 $\{\lambda'\}$ 的右端点，而

$$\{\lambda''\}=\{\lambda'' \mid \limsup_{t\to+\infty} e^{\lambda'' t}|\varphi(t)|=+\infty\}$$

为右端无穷的区间，令 λ_1 为 $\{\lambda''\}$ 的左端点. 如果 λ_0, λ_1 都是有限的，则必有 $\lambda_0=\lambda_1$. 定义这一公共值为 φ 的李亚普诺夫特征数 $\lambda(\varphi)$. 如果它们之一为无穷，则 $\lambda(\varphi)$ 为无穷. 事实上，

$$\lambda(\varphi)=-\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\log|\varphi(t)|.$$

如果 $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))$ 为定义于 $t\geqslant\tau$ 上的向量函数，则其李亚普诺夫特征数定义为

$$\lambda(\varphi)=\min\{\lambda(\varphi_i) \mid i=1,2,\cdots,n\}.$$

如果矩阵 $P(t)$ 对于大的 t 为连续有界的，则：

1. 变系数线性方程组(1)的每个解 $x(t)$ 的李亚普诺夫特征数 $\lambda(x)$ 是一个有限数.

2. 令 X 为变系数线性方程组(1)的所有解的集合，则数集 $\lambda(X)=\{\lambda(x) \mid x(t)\in X\}$ 是一个有限集.

事实上，当 $P(t)\equiv P_0$ 时，$\lambda(X)$ 为 P_0 的特征根的实部的反号数；当 $\lambda(X)$ 由正数构成时，变系数线性方程组(1)的原点为渐近稳定的.

李亚普诺夫第一方法(the first method of Liapunov)　以级数的形式表示解析方程组的解以研究其稳定性态的方法. 考虑微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=Px+q(x,t), \quad (1)$$

其中 x 为复向量而 t 为实数. 在 $\Omega(A)$: $\|x\|\leqslant A$ 中，$q(x,t)$ 的每个分量可以展成 x 的分量的幂级数，至少从二次项开始. 该级数在 $\Omega(A)$ 中为全纯函数，它和它的系数在此集中对 $t\geqslant\tau$ 是一致有界的. 如果 P 的特征根均有负实部，且相异的特征根不满足任何具正整数 m_h 的关系式 $\lambda_j=\sum m_h\lambda_h, m_h\geqslant0$, $\sum m_h>1$，则称特征根 $\{\lambda_j\}$ 为好品质的. 以 N 表示不同的 λ_j 的个数. 设 $u(t)=\sum a_h u^h(t)$ 为方程组(1)的第一近似的通解，用 a 表示参数 a_j 的向量.

如果微分方程组(1)如上所述，有一组好品质的特征根 $\{\lambda_j\}$，那么，微分方程组具有下列形式的级数通解

$$x(t)=\sum_{m=1}^{+\infty}Z^m(t,a), \quad (2)$$

这里 $Z^m(t,a)$ 有下列性质：

1. $Z^1(t,a)=u(t)$.

2. $Z^m(t,a)=$

$$\sum_{m_1+m_2+\cdots+m_N=m} X^{m_1,\cdots,m_N}(t,a)\exp t\sum_{j=1}^{N}m_j\lambda_j,$$

其中 $X^{m_1,\cdots,m_N}$ 为向量，它的分量都是 t 的多项式，其系数为 a_j 的 m 次型，而各型的系数当 $t\geqslant\tau$ 时是 t 的连续有界函数.

3. 存在正数 ρ,τ_1，使得级数(2)当 $\|a\|\leqslant\rho$ 及 $t\geqslant\tau_1$ 时，绝对且一致收敛于 $\Omega(A)$ 的一点.

李亚普诺夫第二方法(the second method of Liapunov)　通过寻找满足某种几何性质的函数直接推证方程组稳定性的一种方法. 李亚普诺夫第二方法就是借助于一个所谓李亚普诺夫函数 $V(x,t)$ 及根据微分方程所计算得到的 V 沿着轨线的导数 dV/dt 的符号性质来直接推断稳定性问题. 考虑实方程组

$$\frac{dx}{dt}=X(x,t), \quad (1)$$

这里 X 在集 $\Omega(A,\tau)$: $\|x\|\leqslant A, t\geqslant\tau$ 上连续且满足局部李普希茨条件，且当 $t\geqslant\tau$ 时，$X(0;t)\equiv0$. 设数量函数 $V(x,t)$ 及 $W(x)$ 分别在 $\Omega(A,\tau)$ 及 $\Omega(A)$ 中有定义且连续，对于 $t\geqslant\tau$ 有 $V(0,t)\equiv0$ 及 $W(0)=0$. $V(x,t)$ 在 $\Omega(A,\tau)$ 内称为常正的(常负的)，如果它在此集中 $\geqslant0(\leqslant0)$；$W(x)$ 在 $\Omega(A)$ 内称为定正的(定负的)，如果对于 $x\neq0$，它在 $\Omega(A)$ 内均 $>0(<0)$；$V(x,t)$ 在 $\Omega(A,\tau)$ 内称为定正的(定负的)，如果它在该集中不小于(不大于)定正(定负)函数 $W(x)$. 如果进一步要求 $V(x,t)$ 为 C^1 函数，则它沿着实向量方程组(1)的轨线的导数为

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum X_h\frac{\partial V}{\partial x_h}.$$

函数 $V(x,t)$ 称为 $\Omega(A,\tau)$ 上的李亚普诺夫函数，如果它在该集中是定正的，且 dV/dt 为常负的. 下面叙述李亚普诺夫(Ляпунов, A. M.)给出的几个定理：

1.(稳定性定理)　如果存在定义于 $\Omega(A,\tau)$ 上的李亚普诺夫函数 $V(x,t)$，则原点是稳定的.

2.(渐近稳定性定理)　如果在 $\Omega(A,\tau)$ 内有一个不大于定正函数 $W_1(x)$ 的李亚普诺夫函数 $V(x,t)$，并使 dV/dt 为定负，则原点是渐近稳定的.

3.(不稳定性定理)　设 $U(x,t)$ 为定义于 $\Omega(A,\tau)$ 上的有界 C^1 函数，在 Ω 的某一子域 Ω_1 内 $U>0$，Ω_1 的边界的一部分 B 包含射线 T: $x=0$, $t\geqslant\tau$，且在 B 上 $U=0$. 假定下列条件成立，则原点是不稳定的：

1) 只要 $t_0\geqslant\tau$，就有点 $(x_0,t_0)\in\Omega_1$ 任意接近 T.

2) 对于每一个小的 $h>0$，有 $k(h)>0$，使得在 Ω_1 内 $U\geqslant h$ 蕴涵在 Ω_1 内 $U'\geqslant k(h)$.

李亚普诺夫函数(Liapunov function)　见"李亚普诺夫第二方法".

乘积空间中的稳定性(stability in product spaces)　将一个方程组分解为两个方程组相当于将一个空间分解为两个空间的乘积,以此来研究原完全方程组相应的稳定性的方法.考虑 p 维向量 y 及 q 维向量 z 在闭域 Ω: $\|y\|\leqslant A$, $\|z\|\leqslant A, t\leqslant\tau$ 上的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=Y(y,z,t),\\ \dfrac{dz}{dt}=Z(y,z,t).\end{cases}\qquad(1)$$

假设该方程组连续并满足李普希茨条件,且原点 O 为(1)的奇点.当

$$Y=Y_0(y)+Y^*(y,z,t),$$
$$Z=Z_0(z)+Z^*(y,z,t)$$

时(其中 Y^* 及 Z^* 相对于 Y_0 及 Z_0 来说是较小的),人们希望知道完全方程组(1)的稳定性受部分方程组 $dy/dt=Y_0(y)$ 及 $dz/dt=Z_0(z)$ 的稳定性的制约程度,这就是乘积空间稳定性的研究内容.设 $\zeta(t)$ 是连续的 q 维向量.取对应的方程组

$$\frac{dy}{dt}=Y(y,\zeta(t),t).\qquad(2)$$

令 O_y, O_z 表示方程组(1)的第一式及第二式的原点 $y=0$ 及 $z=0$,则称 O_y 关于方程组(1)的第一式为拟稳定的,只要对于给定的任何 $0<\varepsilon<A$ 及 $t_0\geqslant\tau$,存在 $0<\eta(t_0,\varepsilon)\leqslant\varepsilon$,使当 $\|\zeta(t_0)\|<\eta$ 时,(2)的任一满足 $\|y(t_0)\|<\eta$ 的解 $y(t)$ 具有如下的性质:在使 $\|\zeta(t)\|\leqslant\varepsilon$ 的任一区间 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 内,有 $\|y(t)\|<\varepsilon$;原点 O_y 称为关于方程组(1)的第一式为拟不稳定的,如果给定了任何 ε,η 适合 $0<\eta\leqslant\varepsilon<A$,以及适合 $\|\zeta(t_0)\|<\eta$ 和 $t\geqslant t_0$ 时 $\|\zeta(t)\|<\varepsilon$ 的任何连续函数 $\zeta(t)$,那么,对于(2)的满足 $\|y(t_0)\|<\eta$ 的某一解 $y(t)$,对某一 $t\geqslant t_0$,就有 $\|y(t)\|=\varepsilon$.

1. 如果 O_y, O_z 关于方程组(1)的两式都是拟稳定的,则 O 关于(1)为稳定的;如果 O_y 或 O_z 关于对应的方程组为拟不稳定的,则 O 关于(1)为不稳定的.

2. 设 Y 独立于 t, $Z=Qz+Z^*(y,z)$,这里 Q 为稳定的常矩阵,且当 $\|y\|+\|z\|\to 0$ 时,

$$\|Z^*(y,z)\|=O(\|y\|^\beta+\|z\|)\ (\beta>1),$$

则方程组(1)的第一式的拟稳定性性质就是(1)的稳定性性质.

3. 设 y 为数量变数, $Y=\varphi(y)+Y^*(y,z)$, $Z=Qz+Z^*(y,z)$ 均为解析的,且 $\varphi(y)=gy^N+\cdots+Z(y,0)$ 的幂级数展式至少从 $T>N$ 项开始, Q 为稳定的常矩阵.

如果 N 为奇数而 g 为负(正),则原点为渐近稳定(不稳定)的,如果 N 为偶数,则原点为条件稳定的.乘积空间稳定性的概念是由莱夫谢茨(Lefschetz, S.)提出的.

临界情形的稳定性(stability in the critical cases)　稳定性的一种.不能由一次近似决定的稳定称为临界情形稳定性.对于微分方程

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(x,t)\qquad(1)$$
$$(x\in G\subset \mathbf{R}^n, t\geqslant 0),$$

考虑定常系统

$$\frac{dx}{dt}=Px+q(x),\qquad(2)$$

其中 x 和 q 是 n 维向量, P 是常数矩阵, $q(x)$ 解析,在原点附近可展为 x 的幂级数,其所有项的次数不小于2.用李亚普诺夫第一方法或第二方法容易证明,如果特征方程

$$D(\lambda)=|P-\lambda E|=0\qquad(3)$$

的所有根都具有负实部,则(2)的奇点 $x=0$ 是渐近稳定的.当(3)之根中有具有正实部者,则(2)的奇点 $x=0$ 是不稳定的.在上述情况下,系统(2)与它的一次近似方程

$$\frac{dx}{dt}=Px\qquad(4)$$

的奇点 $x=0$ 有相同的稳定性,即系统(2)的稳定性由系统(4)决定.当(3)的所有根均满足

$$\mathrm{Re}(\lambda_i)\leqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n),$$

但至少有一个根,例如 λ_1 满足 $\mathrm{Re}(\lambda_1)=0$ 的情形,李亚普诺夫(Ляпунов, А. М.)称它为临界情形.在临界情形,(2)与(4)的稳定性性质可以很不相同.例如,设 $n=1, P=0, q(x)=ax^3$,于是(4)的奇点 $x=0$ 是稳定的,而当 $a=-1$ 时,(2)的奇点 $x=0$ 是渐近稳定的,当 $a=1$ 时,(2)的奇点 $x=0$ 是不稳定的.因此,(2)的稳定性性质不能再由(4)决定,需要根据 $q(x)$ 做进一步的研究.

李亚普诺夫深入地研究了特征方程(3)只有一个零根,其余根均具有负实部,以及只有一对纯虚根,其余根都具有负实部两种情形下(2)的奇点 $x=0$ 的稳定性问题,前者称为第一临界情形,后者称为第二临界情形,他得到完整的结果.对于周期系统他也进行了研究.

轨道稳定性(orbital stability)　亦称庞加莱稳定.不同于李亚普诺夫稳定性的一种.令 W 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集, $f: W\to\mathbf{R}^n$ 是连续且满足局部李普希茨条件.设 C 为方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x)$$

的轨线的一个集合, $\Gamma_0: x^0(t)$ 为 C 中一个元.所谓轨道稳定性,粗略地说,它意味着,如果 Γ_1 在某一时刻

充分靠近 Γ_0，则它以后永远保持十分接近 Γ_0. 精确定义如下：称 Γ_0 关于轨线的某集合 C 为轨道稳定的，如果给定了 $\varepsilon>0$，就存在 $\eta(\varepsilon)$ 及 $\tau(\varepsilon)$，只要 $\Gamma_1\in C$，且在时刻 τ 经过 $\mathscr{C}(\Gamma_0,\eta)$（与 Γ_0 距离小于 η），则对于 $t>\tau$，Γ_1 保留在 $\mathscr{C}(\Gamma_0,\varepsilon)$ 之内.

自治系统闭轨道的稳定性（stability of the closed orbit of autonomous systems） 一类特殊的轨道稳定性. 考虑自治微分系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x),\tag{1}$$

这里 $X:\Omega\to\mathrm{R}^n$ 是解析的，其中 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 是一区域. 设(1)有一个具有周期 ω 的解 $\xi(t)$，其轨道记为 γ. 令

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=P(t)y\tag{2}$$

是周期解 $\xi(t)$ 的变分方程. 设 $Y(t)$ 为(2)的基解矩阵，则 $Y(t+\omega)=Y(t)C$，其中 C 为非奇异矩阵，它的特征根 $\mu_1,\mu_2\cdots,\mu_n$ 称为(2)的特征指数. 于是，至少有一个特征指数等于1，不妨设 $\mu_n=1$.

关于自治系统闭轨道的稳定性，有如下结论：如果特征指数 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{n-1}$ 的模小于1，则闭轨道 γ 为轨道稳定的. 如果其中有 K 个特征指数的模小于1，则有解析地依赖于 K 个参数的解族，使得 γ 关于这一解族是轨道稳定的.

李亚普诺夫函数的存在性（the existence of Liapunov functions） 李亚普诺夫稳定性定理的逆命题，即系统的奇点若是稳定的，是否必存在李亚普诺夫函数. 李亚普诺夫第二方法中得到的稳定性定理是用满足一定性质的 V 函数来判断微分方程组的奇点的稳定性性质. 反过来，如果已经知道微分方程组的奇点有一定的稳定性性态，那么是否存在满足某些性质的 V 函数，这就是所谓稳定性定理的逆问题，也就是李亚普诺夫函数的存在性问题. 这一问题曾经吸引过不少研究工作者，得到了相当丰富的成果. 这里只举出两个例子如下：考虑微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t),\tag{1}$$

其中 x 和 f 是 n 维向量，$f(x,t)$ 在区域

$$G_H=\{(x,t)\mid \|x\|\leqslant H,t\geqslant 0\}\tag{2}$$

上定义，连续且满足局部李普希茨条件，同时 $f(0,t)=0$（对 $t\geqslant 0$）. 于是有下面的结论：

1.（稳定性定理的逆定理） 如果方程组(1)的奇点 $x=0$ 稳定，则存在定正函数 $V(x,t)$，使 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 是常负的.

2.（一致渐近稳定性定理的逆定理） 如果方程组(1)的奇点 $x=0$ 是一致渐近稳定的，则存在定正函数 $V(x,t)$，它在原点关于 $t\geqslant 0$ 是一致连续的，且 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 是定负的.

经常干扰作用下的稳定性（stability under persistent disturbances） 亦称完全稳定性. 系统本身在经常微扰下解的稳定性问题. 设微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t),\tag{1}$$

其中 x,f 为 n 维向量，$f(x,t)$ 在区域

$$G_H=\{(x,t)\mid \|x\|\leqslant H,t\geqslant 0\}\tag{2}$$

上定义，连续且满足局部李普希茨条件，同时 $f(0,t)=0$（对 $t\geqslant 0$）. 考虑(1)的扰动系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t)+g(x,t),\tag{3}$$

其中 $g(t,x)$ 在 G_H 上连续且保证(3)的初始值问题解的惟一性. 如果对每一个 $\varepsilon>0$，存在两个正数 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$ 和 $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)$，使得对于任何在域 G_H 上定义且满足条件 $\|g(x,t)\|<\delta_2$ 的 n 维向量函数 $g(x,t)$，方程组(3)的解 $x(t,t_0,x_0)$ 当 $\|x_0\|<\delta_1$ 时有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon\ （对一切\ t\geqslant t_0\geqslant 0）.$$

于是方程组(1)的奇点 $x=0$ 称为经常干扰作用下稳定的. 一致渐近稳定与经常干扰作用下稳定之间有下述关系：如果方程组(1)的奇点 $x=0$ 是一致渐近稳定的，则它也是经常干扰作用下稳定的.

经常干扰作用下的稳定性概念是马尔金（Malkin, I. G.）建立的. 李亚普诺夫意义下的稳定性是研究奇点 $x=0$ 在初始条件的扰动下的稳定性. 可是在实际问题中，真正的运动往往受到持续作用的微小干扰，因此，不仅要考虑初始条件的扰动，还要考虑对系统本身（运动方程的右边函数）的扰动. 这种情况下的稳定性就称为经常干扰作用下的稳定性.

完全稳定性（total stability） 即“经常干扰作用下的稳定性”.

全局渐近稳定性（global asymptotic stability） 一类全相空间均为吸引区域的渐近稳定性. 考虑微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x)\ (x\in\mathrm{R}^n),\tag{1}$$

其中 $f(x)$ 在域 $G_\infty=\{x\mid \|x\|<+\infty\}$ 上定义且连续并满足局部李普希茨条件，同时设 $f(0)=0$. 因此，对任何初始值 x_0，存在(1)的惟一的解 $x(t)=x(t,x_0)$ 满足 $x(0,x_0)=x_0$. 由李亚普诺夫第二方法知道，如果存在一个定正函数 $V(x)$，它关于(1)的导数 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 是定负的，那么，方程(1)的奇点 $x=0$ 是渐近稳定的. 方程组(1)的奇点 $x=0$ 的吸引区域（或称渐近稳定性区域）是所有具有性质

$$\lim_{t\to\infty}x(t,x_0)=0$$

的点 x_0 的集合. 如果吸引区域是整个相空间 R^n，则 $x=0$ 被称为全局渐近稳定的. 这时下面的结论成立：如果存在定正函数 $V(x)$，它关于(1)的导数 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 是定负的，并且 $V(x)$ 是径向无界的，则奇点 $x=0$ 是全局渐近稳定的. 李亚普诺夫（Ляпунов, A. M.）原来只考虑原点附近即局部的稳定性. 克拉索

夫斯基(Красовский, H. H.)将其推广为全相空间,即全局的稳定性.

绝对稳定性(absolute stability) 研究控制系统的稳定性时提出的一种稳定性概念. 考虑控制系统中提出来的一类非线性微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + \varphi(\sigma)b, \\ \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \varphi(\sigma), \sigma = c^T x - \gamma\xi,\end{cases} \tag{1}$$

其中 n 维向量 x 是控制系统的状态变量,纯量 ξ 是辅助变量,σ 为反馈信号,常数 γ 和 n 维向量 b,c 是控制参数,函数 $\varphi(\sigma)$ 表示控制机构的非线性特征. 假设 $\varphi(\sigma)$ 具有连续偏导数,这就保证(1)的初值问题解的存在惟一性. 如果 $\gamma\neq 0$,则(1)称为间接控制系统;如果 $\gamma=0$,则(1)称为直接控制系统. 假设非线性函数 $\varphi(\sigma)$ 满足下列条件:

$$\varphi(0) = 0;\ 0 < \sigma\varphi(\sigma) < k\sigma^2 \quad (\sigma \neq 0, 0 < k \leqslant +\infty), \tag{2}$$

则 $x=0,\xi=0$ 是(1)的惟一奇点. 如果对任何满足条件(2)的函数 $\varphi(\sigma)$,系统(1)的奇点 $(x,\xi)=(0,0)$ 均是全局渐近稳定的,则称系统(1)在角 $(0,k)$ 内是绝对稳定的. (1)的绝对稳定性问题的研究曾吸引了大批学者,得到了丰富的结果.

拉萨尔不变原理(the Lasalle invariance principle) 李亚普诺夫第二方法的推广. 推广的形式是多种多样的,这里只介绍最简单也是最常用的一种. 考虑微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \tag{1}$$

这里 $f:G\to\mathbf{R}^n$ 是连续的且满足局部李普希茨条件,其中 $G\subset\mathbf{R}^n$ 为开集. 称纯量函数 V 是 G 上的李亚普诺夫函数,如果 V 在 G 的闭包 $\overline{G}$ 上连续,在 G 内连续可微,且

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \operatorname{grad} V(x) \cdot f(x) \leqslant 0.$$

令

$$S = \left\{x \in \overline{G} \,\middle|\, \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0\right\}.$$

设 M 是(1)在 S 内的最大不变集. 如果 V 是 G 上的李亚普诺夫函数,而 $\gamma^+(x_0)$ 是(1)的落在 G 内的有界轨道,则 γ^+ 的 ω 极限集 $\Omega(x_0)\subset M$,即当 $t\to\infty$ 时,$x(t,x_0)\to M$.

20 世纪 60 年代初,拉萨尔(Lasalle, J. P.)发现了李亚普诺夫函数 $V(x)$ 与伯克霍夫极限集 $\Omega(x_0)$ 之间存在着一个简单的关系,即在适当的条件下,$\Omega(x_0)$ 含于 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 的零点集合. 这种观察给出了李亚普诺夫理论的统一认识,且极大地推广了李亚普诺夫第二方法,现在人们称这一推广为拉萨尔不变原理.

泛函微分方程

泛函微分方程(functional differential equation) 含有偏差变元的微分方程,是微分方程理论的一个重要分支. 含有导数的泛函方程(或称函数方程)称为泛函微分方程. 从应用角度来看,动力学系统中的时滞现象通常是不可避免的,即使以光速传递的信息也不例外. 在可以略去时滞的情形则以常微分方程为数学模型,此时系统的未来状态仅取决于初始的瞬间状态而和过去的历史无关. 在不允许略去滞量的情形就必须以滞后型差分微分方程或者更普遍的泛函微分方程为数学模型. 例如方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))),$$

其中 $\tau(t)\geqslant 0$ 称为滞量. 这时初值问题不仅要考虑系统状态的瞬间初值,而且要顾及历史的状况. 到 20 世纪 50 年代末为止,主要是把常微分方程的各种结果尽可能直接推广到滞后型差分微分方程上去. 其中主要是解的存在惟一性,解对初始数据的连续依赖性,初等积分法(分步法),线性自治系统特征根的分布及其与稳定性的关系,在拉兹密辛条件下推广李亚普诺夫第二方法等. 但解映射 $x(t,\sigma,\varphi)\triangleq x(t)$ 只限于认定是 $\mathbf{C}\to\mathbf{R}^n$. 1959 年,克拉索夫斯基(Красовский, H. H.)提出把轨线段

$$x(t + \theta) \triangleq x_t(\theta) \quad (\theta \in [-r, 0], r = \mathrm{const} > 0)$$

视为空间 $C=C([-r,0],\mathbf{R}^n)$ 的元,把解映射 $T(t,\sigma):C\to C$ 定义为 $T(t,\sigma)\varphi=x_t(\sigma,\varphi)$,于是滞后型泛函微分方程可写成

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

其中 $\dot{x}(t)$ 是右导数,习惯简记为 RFDE(f). 由于右端算子可取种种形式,所以它是在广泛基础上的概括. 20 世纪 60 年代确立了(1)的基本理论,和李亚普诺夫泛函方法下的稳定性理论等(参见"李亚普诺夫泛函方法"). 对方程中最高阶导数也出现偏差变元的方程(参见"中立型泛函微分方程"),如

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau)) \quad (\tau(t) \geqslant 0),$$

长期以来只是形式上的推广,但 1976 年开始有大量的应用背景被发现,主要是控制理论、博弈论、遗传学、细胞的生化机理以及物理学中的种种应用问题. 例如,布莱顿(Brayton, R.)在研究信息无损传输网络时便提出一类中立型方程. 1971 年,霍尔(Hall, J.)与克鲁兹(Cruz, M. A.)从中划分出一类方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D(t, x_t) = f(t, x_t), \tag{2}$$

称为算子型中立型泛函微分方程,简记为 NFDE(D,f),D 称为差分算子. 如

$$D(t,x_t) = x(t) + cx(t - \tau(t)) \quad (\tau(t) \geqslant 0, c = \mathrm{const}).$$

可以把(1)的基本理论、稳定性理论等都方便地推广到(2)上去，因为初始函数空间也是 C 而不必限制在 C^1 上. 对 $\tau(t)$ 是无界连续函数以及滞量在无穷区间上连续分布的泛函微分方程，可以概括为(1)和(2)型的无穷时滞系统，记号完全一样，但需要用一系列公理来限定初始数据空间. 严格的定义与基本理论是由霍尔与加藤顺二(Kato, J.)于 1978 年共同确立的. 有限时滞系统的种种已知结果都在一定条件下推广到无穷时滞系统.

传统的泛函微分方程有三类：滞后型是理论的主体，其次是中立型，超前型只有少量研究工作. 研究课题除基本理论和稳定性理论以外，还涉及解的振动性、周期解与概周期解的存在性、边值问题、数值解、线性系统理论以及摄动方法的应用等. 滞后型、中立型、超前型方程分别略称为 R 型、N 型、A 型方程.

20 世纪 80 年代以来，各类应用学科中提出大量新型泛函微分方程，它们是现有泛函微分方程理论所无法概括的，统称为非 R,N,A 方程，包括：

1. 混合型方程，指的是 R,N,A 型方程的某些复合形式(参见"混合型差分微分方程").

2. 偏泛函微分方程，指的是带有偏差变元的偏微分方程(参见"偏泛函微分方程").

3. 复杂偏差泛函微分方程，指的是偏差依赖于未知函数及其导数的方程，如

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t,x(t),\dot{x}(t)))).$$

对这些新类型泛函微分方程，有许多探索性工作，虽然完整的基本理论尚待确立，但可以预期这将是泛函微分方程未来发展的热点之一.

滞后型泛函微分方程(retarded functional differential equation)　最基本的一类泛函微分方程，即概括各类时滞微分系统的一类泛函微分方程，是泛函微分方程理论的主体. 设 $\sigma\in\mathrm{R}=(-\infty,+\infty)$, $r\in\mathrm{R}_+\cup\{0\}=[0,+\infty)$, $C=C([-r,0],\mathrm{R}^n)$，定义 C 中的范数为：

$$\varphi\in C,\ |\varphi|=\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}|\varphi(\theta)|,\ A\geqslant 0,$$

函数 $x(t)\in C([\sigma-r,\sigma+A),\mathrm{R}^n)$. 对 $\forall t\in[\sigma,\sigma+A)$，定义 $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\in[-r,0]$，故 $x_t\in C$. 若 $\Omega\subset\mathrm{R}\times C$, $f:\Omega\to\mathrm{R}^n$ 是给定的泛函，则称

$$\dot{x}(t)=f(t,x_t) \tag{1}$$

是一个滞后型泛函微分方程，$\dot{x}(t)$ 表示右导数. 若 $r=+\infty$，则方程的形式不变，但 $x_t=x(t+\theta)$, $\theta\in(-\infty,0]$，此时(1)是无穷时滞的滞后型泛函微分方程. 这样定义具有极大的广泛性，例如选取算子 $f=a\varphi(0)+b\varphi(-\tau)$，则(1)化为

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau),$$

取 $f=f(t,\varphi(0),\varphi(-\tau(t)))$，则(1)化为

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))),$$

取

$$f=\int_{-r}^{0}A(t)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

则(1)化为

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}A(t)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta.$$

$x(t)$ 称为(1)在 $[\sigma-r,\sigma+A)$ 上的解，若存在 $\sigma\in\mathrm{R}$, $A>0$，使得 $(t,x_t)\in\Omega$，且 $t\in[\sigma,\sigma+A)$ 时满足(1). 若再加上条件 $x_\sigma=\varphi$，则称 x 是(1)过 (σ,φ) 的解，即基本初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x_t),\\ x_\sigma=\varphi\end{cases}$$

的解.

算子的原子性(atomicity of operator)　一种线性算子的非异性条件，是为讨论泛函微分方程的反向延拓问题和保证中立型的条件. 设 $L(t,\varphi)$ 是 $\Omega\subset\mathrm{R}\times C$ 上的线性泛函，由里斯表示定理，存在有界变差矩阵函数 $R(t,\theta)$，使得

$$L(t,\varphi)=\int_{-r}^{0}[\mathrm{d}_\theta R(t,\theta)]\varphi(\theta)\quad((t,\varphi)\in\Omega). \tag{1}$$

由 $\theta\in[-r,0]$，定义阵

$$A(t,\theta)=R(t,\theta^+)-R(t,\theta^-),$$

若 A 在 t_0 处是非异的，即 $\det A(t_0,\theta)\neq 0$，则称 $L(t,\varphi)$ 在 t_0 上于 θ 处是原子的. 若 $A(t,\theta)$ 对 $\forall t\in I\subset\mathrm{R}$ 是非异的，则称 $L(t,\varphi)$ 在 I 上于 θ 处是原子的. 对非线性泛函 $F(t,\varphi)$，它关于 φ 的弗雷歇导数 F_φ 是线性算子，可用 F_φ 的原子性来定义 $F(t,\varphi)$ 的原子性. 在定义中若 $\theta=0$，则 θ^+ 取为 0，若 $\theta=-r$，则 θ^- 取为 $-r$. 用下例说明定义原子性的目的：设 $L(t,\varphi)=a(t)\varphi(0)+b(t)\varphi(-r)$，它是连续线性算子. $R(t,\theta)$ 定义为

$$R(t,\theta)=\begin{cases}a(t) & (\theta=0),\\ 0 & (-r<\theta<0),\\ -b(t) & (\theta=-r).\end{cases}$$

由 $A(t,\theta)$ 的定义，有

$$\det A(t,0)=\det[R(t,0^+)-R(t,0^-)]=a(t),$$

$$\det A(t,-r)=\det[R(t,r^+)-F(t,r^-)]=b(t).$$

此时在 $t\in I$ 上于 0 处是原子的，即 $a(t)\neq 0$，于 $-r$ 处是原子的，即 $b(t)\neq 0$. 若仅在 $t=\sigma$ 上，则于 0 处原子即 $a(\sigma)\neq 0$，于 $-r$ 处原子即 $b(\sigma)\neq 0$. 若中立型泛函微分方程中 $D(t,\varphi)=a(t)\varphi(0)+b(t)\varphi(-r)$，则 $D(t,\varphi)$ 的原子性是保证方程为中立型方程的系数条件.

中立型泛函微分方程(neutral functional differential equation)　最高阶导数存在滞后的一类泛函微分方程，这里是指算子型泛函中立型方程. 其他形式参见"中立型差分微分方程"与"超中立型泛函

微分方程”. 保持对滞后型泛函微分方程中对 f 及空间 C 的种种假定，再设算子 $D(t,\varphi)$ 在 σ 上于 0 及 $-r$ 处是原子的，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D(t,x_t) = f(t,x_t) \qquad (1)$$

称为中立型泛函微分方程. 给定 $x_\sigma=\varphi$，基本初值问题也与滞后型相同.

超中立型泛函微分方程（superneutral functional differential equation） 一类特殊的中立型泛函微分方程，亦即非算子型中立型泛函微分方程，通常 $\dot{x}(t-\tau)$ 隐含于方程右端函数之中，是不能解出而写成算子 $D(t,\varphi)$ 形式的. 若方程仅含有分立滞量，则是中立型差分微分方程，若同时还含有分布时滞的项，例如方程

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t,\dot{x}(t-\tau)),$$

$$\int_{-r}^{0} A(t,\theta)\, g(\dot{x}(t+\theta))\mathrm{d}\theta,$$

有时称为超中立型泛函微分方程.

无穷时滞泛函微分方程（functional differential equation with infinite delay） 一类具有无界滞量的特殊的滞后型泛函微分方程. 具有无界滞量或滞量在无穷区间上分布的方程称为无穷时滞泛函微分方程. 如

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),x(t-t/2)), \qquad (1)$$

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{0} g(t,x(t),x(t+\theta))\mathrm{d}\theta, \qquad (2)$$

它们可以用经典分析方法进行研究，得到许多与有界滞量方程平行的结果. 但若要像有界滞量方程那样用一个有限区间上的连续函数空间 C 来建立普遍的、算子形式下的泛函微分方程则是不可能的. 例如，方程(1)随着初始时刻 σ 的增大，初始集 $E_\sigma=[\sigma/2,\sigma]$ 的长度无限增大，但只要把 $[-r,0]$ 换为 $(-\infty,0]$，仍可以如法定义.

设 B 是 $(-\infty,0]=\mathrm{R}_-\cup\{0\}$ 映入 R^n 的连续函数全体构成的空间，若 $A>0,\sigma\in\mathrm{R},X:(-\infty,\sigma+A)\to\mathrm{R}^n$，定义 $x_t=x(t+\theta)(\theta\in\mathrm{R}_-)$. 设 $\Omega\subset\mathrm{R}\times B$，$f:\Omega\to\mathrm{R}^n$ 是给定的泛函，$\dot{x}(t)$ 表示右导数，则

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t) \qquad (3)$$

称为滞后型无穷时滞泛函微分方程. 若 $D(t,x_t)$ 的右导数存在，则中立型无穷时滞泛函微分方程可类似定义. 由于 R_- 不是紧集，B 不是巴拿赫空间，同时若定义范数为

$$|x_t| = \sup_{\theta\in\mathrm{R}_-} |x(t+\theta)|,$$

则 $t\to\infty$ 时必定成立 $|x_t|\not\to 0$，除非 $\varphi(\theta)=0(\theta\in\mathrm{R}_-)$ 才可能. 因此，用这种范数谈论稳定性的基础已不复存在，所以必须在空间 B 上加入一系列公理限制，以达到建立基本理论并把有界滞量泛函微分方程的种种结果予以推广的目的.

滞后型无穷时滞泛函微分方程（retarded functional differential equation with infinite delay） 见“无穷时滞泛函微分方程”.

中立型无穷时滞泛函微分方程（neutral functional differential equation with infinite delay） 见“无穷时滞泛函微分方程”.

偏差变元微分方程（differential equation with deviating arguments） 泛函微分方程的另一种称谓. 设 t 是微分方程的自变元，若方程的未知函数中出现不同于 t 但依赖于 t 的变元，则称它为具有偏差变元的微分方程. 这种不同于 t 的变元有两种形式：

1. 它可以写成 $g(t)=t-\tau(t)$. 此时 $\tau(t)$ 称为偏差，它甚至可能依赖于未知函数及其导数.

2. 它以分布的形式包含在积分号之下，例如方程

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^{0} A(t)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta.$$

已知的各类泛函微分方程都具备这一特点，所以它是经典意义下泛函微分方程的同义语.

泛函微分方程解的延拓（continuation of solution of functional differential equation） 泛函微分方程的重要概念和问题之一. 在泛函微分方程里，解的延拓通常是指正向的积分延拓. 设 $x(t)$ $(=x(t,\sigma,\varphi))$ 是滞后型泛函微分方程 $\dot{x}(t)=f(t,x_t)$ 在区间 $[\sigma-r,a)(a>\sigma)$ 上的一个解，若存在 $b>a$，并且 $\hat{x}(t)$ 是方程在 $[\sigma-r,b)$ 上的解，它在 $[\sigma-r,a)$ 上等于 x，则称 $\hat{x}(t)$ 是 $x(t)$ 的一个延拓. 若 $[\sigma-r,a)$ 是 $x(t)$ 的最大存在区间，则称 $x(t)$ 是不可延拓的. 有如下定理：若 $\Omega\subset\mathrm{R}\times C$，$f\in C(\Omega,\mathrm{R}^n)$，$x(t,\sigma,\varphi)$ 是过 (σ,φ) 在 $[\sigma-r,b)$ 上的不可延拓解，则对任何紧集 $W\subset\Omega$，$\exists\, t_W$ 使当 $t\in(t_W,b)$ 时，$(t,x_t)\notin W$. 若 f 是全连续算子，则只要 W 是有界闭集，t_W 存在，定理结论仍成立. 对算子型中立型方程有类似结果.

反向延拓定理（backward continuation theorem） 一种微分延拓. 由滞后型泛函微分方程初值问题的提法，它总是沿正向 $(t\geqslant\sigma)$ 求解的. 仅当方程满足某些特定条件时，对某些初始函数可以进行负向延拓 $(t\leqslant\sigma)$. 例如，当 f 和 φ 满足下列条件时，方程 $\dot{x}(t)=f(t,x_t)$ 的初值问题的解是可以负向延拓的（负向延拓亦称反向延拓），并有以下重要结论：

1. 存在 $\alpha\in(0,r)$，使得 $\varphi(\theta)$ 在 $[-\alpha,0]$ 上连续，且满足 $\varphi(0)=f(\sigma,\varphi)$.

2. 设 $\Omega\subset\mathrm{R}\times C$，$f:\Omega\to\mathrm{R}^n$ 关于 φ 有二阶连续的弗雷歇导数，并且在 Ω 上于 $-r$ 处是原子的，则 $\exists\,\bar{\alpha}(\alpha)>0$，使方程过 (σ,φ) 的解在 $[\sigma-r-\bar{\alpha},\sigma]$ 上存在且惟一.

解的连续依赖性(continuous dependence of solution) 常微分方程解的连续依赖性在空间 $\mathrm{R}\times C([-r,0],\mathrm{R}^n)$ 中的推广. 滞后型泛函微分方程 $\dot{x}(t)=f(t,x_t)$ 过 (σ,φ) 的解记为 $x(t,\sigma,\varphi,f)$, 这里指的是 x 关于 σ,φ,f 的连续依赖性与可微性问题. 例如, 若 f 在开集 $\Omega\subset\mathrm{R}\times C$ 上连续, 满足局部李普希茨条件或 $f\in C^1(\Omega,\mathrm{R}^n)$, 则解 $x(t,\sigma,\varphi,f)$ 不仅存在惟一, 而且关于 σ,φ,f 是连续的. 若 $f\in C^p(\Omega,\mathrm{R}^n)$ $(p\geqslant 1)$, 则解 $x(t,\sigma,\varphi,f)$ 对 $[\sigma,A)$ 的紧子集中的 t, 关于 (φ,f) 是 p 次可微的.

解的平展性(flatness of solution) 滞后型泛函微分方程所特有的性质. 设滞后型泛函微分方程中滞量大于某一正数 r, 则由分步法可知, 随着步距的增加, 解表达中的积分次数越来越多. 换句话说, 解的可微性次数随着步距的增加而增加. 这个性质称为解的平展性.

点态退化系统(pointwise degenerate system) 值域不能充满方程定义域的泛函微分方程. 设 RFDE(f) 过 (σ,φ) 的解整体存在且惟一, 对给定的 $\sigma\in\mathrm{R}$, $\forall\varphi\in C$, 若存在 R^n 的真子空间 R^n_*, $t_1>\sigma$, 使得方程的一切解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 成立 $x(t_1,\sigma,\varphi)\in\mathrm{R}^n_*$ (对 $\forall\varphi\in C$), 则称方程在 t_1 处点态退化, 反之称点态完备. 若 $\forall t_1\in I\subset\mathrm{R}$ 点态退化, 则称方程在 I 上点态退化. 例如方程 $\dot{x}(t)=-\alpha(t)x(t-1)$, 其中

$$\alpha(t)=\begin{cases}2\sin^2(t\pi) & (t\in[2n,2n+1]),\\ 0 & (t\in[2n-1,2n])\end{cases}$$
$$(n=0,\pm1,\cdots),$$

当 $t\geqslant\sigma+3$ 时, $x(t,\sigma,\varphi)\equiv 0$ 对 $\forall\sigma\in\mathrm{R},\varphi\in C$ 成立.

由于常微分方程的解映射定义了一个同胚, 即解映射之下空间 R^n 的球的像含有一个球, 所以它总是点态完备的. 而对泛函微分方程, 即使是线性自治系统也可能点态退化. 例如

$$\dot{x}_1(t)=2x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t)=-x_3(t)+x_1(t-1),$$
$$\dot{x}_3(t)=2x_2(t-1).$$

设 $\sigma=0$, $\forall\varphi\in C([-r,0],\mathrm{R}^3)$, 当 $t\geqslant 1$ 时 $x(t,\sigma,\varphi)=(x_1,x_2,x_3)^T$ 都落在同 $(1,-2,-1)^T$ 垂直的平面上. 但对线性自治系统可以证明: 若 $n\leqslant 2$, 则单滞量的情形, 系统是点态完备的, 而 $n=2$ 且有两个滞量的情形, 则存在点态退化的例子. 对线性自治系统还可以证明, 若系统在 t^* 处点态退化, 则 $\forall t\geqslant t^*$, 系统也点态退化.

泛函微分方程的广义解(generalized solution of functional differential equation) 常微分方程广义解的直接推广. 对滞后型泛函微分方程 $\dot{x}(t)=f(t,x_t)$, 设 $\Omega\subset\mathrm{R}\times C$ 是开集. $f:\Omega\to\mathrm{R}^n$, 对固定的 φ 关于 t 可测, 对固定的 t 关于 φ 连续, 并且对 $\forall(t,\varphi)\in\Omega$, 存在 (t,φ) 的邻域 $U(t,\varphi)$ 以及一个勒贝格可积函数 m, 使得 $|f(s,\psi)|\leqslant m(s)$, $(s,\psi)\in U(t,\varphi)$ (即 f 满足卡拉西奥多里条件). 函数 $x(t,\sigma,\varphi,f)$ 称为方程过 (σ,φ) 的一个广义解, 如果存在 $A>0$, 使 $x\in C([\sigma-r,\sigma+A],\mathrm{R}^n)$, $x_\sigma=\varphi$ 且 $x(t)$ 在 $[\sigma,\sigma+A]$ 上绝对连续, 几乎处处满足方程.

差分微分方程(differential-difference equation) 一种偏差变元微分方程. 指描述时滞动力系统的方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau)).$$

若其左边没有导数, 则它是一个差分方程; 若 $\tau=0$, 则它是常微分方程. 所以很自然地称它为差分微分方程. 由于 $t-\tau$ 可视为变元 t 的偏差变元, 所以它是具偏差变元微分方程的一种. 一般地, τ 可能不止一个, 也可能是 t 的连续常号函数. 在定义差分微分方程的阶与次时, 对未知函数不问它的变元有无偏差, 均应同等看待.

初始集(initial set) 时滞初值问题中初始函数的定义域. 对差分微分方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))), \qquad (1)$$

其中 $\tau(t)\geqslant 0$ 连续, 引入初始集的概念是要说明确定它的解究竟需要多少初始数据. 设 t_0 为初始时刻, 称集

$$E_{t_0}=\{t-\tau(t)\,|\,t-\tau(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\}$$

为(1)的初始集. 若 $\tau(t)$ 有界, 则

$$E_{t_0}=\{t-\tau(t)\,|\,t-\tau(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\},$$

若有 m 个 $\tau_i(t)\geqslant 0$, 则

$$E_{t_0}=\bigcup_{i=1}^m\{t-\tau_i(t)\,|\,t-\tau_i(t)\leqslant t_0,t\geqslant t_0\}\cup\{t_0\}.$$

对方程

$$\dot{x}(t)=\int_0^{\sigma(t)}g(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}\tau \quad (\sigma(t)\geqslant 0),$$

在 E_{t_0} 定义中以 $\sigma(t)$ 代替 $\tau(t)$ 即可. 基本初值问题便是在 E_{t_0} 上给定连续的初始函数以确定解是否存在的问题.

分步法(method of steps) 一种直接求解差分微分方程的方法. 设初始集 E_{t_0}, 且 $t-\tau(t)\leqslant t_0$ 的 t 值全体是一个连通集, 记为 F_{t_0}. 用 E_{t_0} 上给定的初始函数 φ 代入方程便得到一个常微分方程, 它的解便是差分微分方程在 F_{t_0} 上的解. 若 F_{t_0} 是含有 t_0 的区间, $t_0'=\sup\{t\,|\,t\in F_{t_0}\}$ 是常数, 则求解过程可以重复进行. 称此法为分步法. 若 F_{t_0} 不是单点集 $\{t_0\}$, 则分步法对滞后型、中立型、超前型均适用, 但超前型方程此时是微分延拓. 例如对方程 $\dot{x}(t)=-x(t-1)$, $x(t)=\varphi(t)\equiv 1$, $t\in[-1,0]$, 则在 $[0,1]$ 上解为 $x(t)=1-t$, 在 $[1,2]$ 上解为 $x(t)=t^2/2-2t-3/2$, 凡此等等.

解映射(solution map) 泛函微分方程的重要概念之一.有两种观点将滞后型泛函微分方程的解看做映射. RFDE(f)过(σ,φ)的解可以看做$C\to\mathbf{R}^n$的映射$x(\sigma,\varphi,f)(t)=x(t)$,也可以看做$C\to C$的映射$T(t,\sigma)\varphi=x_t(\sigma,\varphi,f)=x_t$.后一种观点是由克拉索夫斯基(Красовский, H. H.)于1959年提出的,其目的在于引进稳定性理论中V泛函的概念,并证明它的存在性,也提供泛函微分方程几何理论的新途径.例如,方程

$$\dot{x}(t)=-x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

过$(\sigma,\varphi)\in\mathbf{R}\times C$的解恒存在且惟一,当$x\in\mathbf{R}$时,解$\sin t$与$\cos t$在$(x,t)$空间中相交无限多次.但对$t_1$, $t_2\in\mathbf{R}$成立$t_1\neq t_2\Leftrightarrow x_{t_1}\neq x_{t_2}$.换言之,若$\exists\tau>\sigma$,使$T(\tau,\sigma)\varphi=T(\tau,\sigma)\psi$,则$\forall t>\tau$, $T(t,\sigma)\varphi=T(t,\sigma)\psi$.由此可直观地预期在$C$中讨论几何性质比$\mathbf{R}^n$中优越.

解的等价类(equivalence classes of solutions) 泛函微分方程的重要概念之一.为了研究自治泛函微分方程的几何理论,把相交的轨线归为同一类,称为解的等价类.设$\forall\varphi\in C([-r,0],\mathbf{R}^n)$, RFDE($f$)过$(\sigma,\varphi)$的解整体存在且惟一,但解映射$T(t,\sigma):C\to C$可能不是一一的.对于$(\sigma,\varphi)$, $(\sigma,\psi)\in\mathbf{R}\times C$,称二者是等价的,若$\exists\ \tau\geqslant\sigma$,使$x_\tau(\sigma,\varphi)=x_\tau(\sigma,\psi)$或者$x_t(\sigma,\varphi)=x_t(\sigma,\psi)\ (t\geqslant\tau)$.这个等价关系具有自反性、对称性、传递性,用它可以把C分解为一个等价类集$\{v_\alpha\}$.取v_α的代表元$\varphi^{\sigma,\alpha}$, $\varphi^{\sigma,\alpha}$的全体记为$W(\sigma)$,它是使$T(t,\sigma)$在$W(\sigma)$上是一一映射的极大集.当$\forall v_\alpha$为单点集时,$T(t,\sigma)$在C中确定一个同胚.于是常微分方程几何理论可有效地推广到泛函微分方程上去.这是研究解映射一般性质的另一个途径.

滞后型差分微分方程(retarded differential-difference equation) 最重要的一类差分微分方程.若差分微分方程中偏差$\tau(t)\geqslant0$,且最高阶导数不出现偏差变元,则这个方程称为滞后型的.它所描述的动力学系统称为时滞系统.它的初值问题写成

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau(t))),\\ x(t)=\varphi(t)\,(t\in E_{t_0}).\end{cases}$$

问题的确切含义是:在E_{t_0}上给定连续函数$\varphi(t)$,是否存在函数$x(t)$,它定义在$E_{t_0}\cup[t_0,A)$上,在E_{t_0}上等于$\varphi(t)$,在$[t_0,A)$上满足方程.其中$A>0$,可以是$+\infty$.对多滞量方程可类似定义.

时滞系统(system with time lag) 见"滞后型差分微分方程".

中立型差分微分方程(neutral differential-difference equation) 一类特殊的差分微分方程.差分微分方程称为中立型的,如果它满足条件:

1. 方程中未知函数的最高阶导数同时出现无偏差和有偏差的变元.

2. 未知函数的低阶导数的变元都不大于高阶导数诸变元.例如$\tau>0$, $C\neq0$,则方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau)),\qquad(1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)+cx(t-\tau))=g(t,x(t),x(t-\tau))\qquad(2)$$

都是中立型差分微分方程.定义中条件2是不可缺少的.因为方程

$$\dot{x}(t)+a\dot{x}(t-1)+bx(t)+cx(t-1)+ex(t+1)=0$$

当$e\neq0$时便不是中立型方程,而是一类混合型方程.(1),(2)的初值问题分别写成

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau))\quad(\tau>0),\\ x(t)=\varphi(t),\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t)\qquad(t\in E_{t_0}),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)+cx(t-\tau))=g(t,x(t),x(t-\tau)),\\ x(t)=\varphi(t)\ (t\in E_{t_0}).\end{cases}$$

问题的含义与滞后型类似.

超前型差分微分方程(advanced differential-difference equation) 一类特殊的差分微分方程.若差分微分方程中至少有一个未知函数低阶导数的变元大于所有最高阶导数的变元,则称之为超前型的.例如方程$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t+1)$,它的初值问题有不同的提法.若沿正向求解,并把初值问题写成

$$\begin{cases}x(t+\tau)=f(t,x(t),\dot{x}(t))\quad(\tau>0),\\ x(t)=\varphi(t),\dot{x}(t)=\dot{\varphi}(t)\qquad(t\in E_{t_0}),\end{cases}$$

此时求解过程是微分延拓.若沿t的负向求解,则与滞后型相同.

混合型差分微分方程(differential-difference equation of compound type) 一类最常见且应用广泛的差分微分方程.非R,N,A型的差分微分方程统称为混合型的.设$\tau_i(t)$连续$(i=1,2,\cdots,m)$且至少有一个是变号的,$r_j=\text{const}>0\,(j=1,2,\cdots,n_1)$, $\sigma_k=\text{const}>0\,(k=1,2,\cdots,n_2)$, m,n_1,n_2为正整数,方程

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(t-r_1),\cdots,x(t-r_{n_1}),\\ x(t+\sigma_1),\cdots,x(t+\sigma_{n_2})),$$

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t)))$$

称为混合型差分微分方程.更一般的情形可以是二者的复合.这类方程的初值问题还没有确切的提法,还没有完整的基本理论,但有越来越多的应用学科以这类方程为数学模型.

概周期泛函微分方程(almost periodic functional differential equation) 一类重要的泛函微分方程.设$D\subset C$是开集,$f:\mathbf{R}\times D\to\mathbf{R}^n$,称为对$\varphi\in D$关于$t$是概周期的,若对$\forall\varepsilon>0$及$D$中紧集$S$,

$\exists l(\varepsilon,S)>0$，使得每一长度为 $l(\varepsilon,S)$ 的区间上均含有 τ，使 $|f(t+\tau,\varphi)-f(t,\varphi)|\leqslant\varepsilon$ 对一切 $t\in\mathbf{R}$，$\varphi\in S$ 成立. 此时，方程 $\dot{x}(t)=f(t,x_t)$ 称为滞后型概周期泛函微分方程. 若算子 $D(t,\varphi)$ 在 σ 上于 0 及 $-r$ 处是原子的（σ 为初始时刻），对 $\varphi\in D$ 关于 t 是概周期的，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D(t,x_t)=f(t,x_t)$$

称为中立型概周期泛函微分方程.

滞后型概周期泛函微分方程（retarded almost periodic functional differential equation） 见“概周期泛函微分方程”.

中立型概周期泛函微分方程（neutral almost periodic functional differential equation） 见“概周期泛函微分方程”.

自治泛函微分方程（autonomous functional differential equation） 一类特殊的泛函微分方程. 由于记号的缺点，必须强调自治泛函微分方程的概念. 若泛函微分方程满足条件：

1. 方程中不显含自变量 t；
2. 滞量是常数；

则称之为自治的. 这与常微分方程不同，条件 2 绝不可忽视，所以对表达式 $\dot{x}(t)=f(x_t)$ 还必须事先约定滞量是常数，否则将导致错误.

更新方程（renewal equation） 一类特殊的泛函微分方程. 在生态系统中用斯蒂尔杰斯积分表示的滞后型泛函微分方程

$$x(t)=\int_0^t x(t-\tau)\mathrm{d}_\tau R(t,\tau)+f(t)$$

称为更新方程. 若 $R(t,\tau)$ 关于 τ 可微，则它是一个具分布时滞的积分方程. 若 $R(t,\tau)$ 关于 τ 是具有限个第一类间断点的阶梯函数，则它是一个差分方程.

特征方程（characteristic equation） 表征线性自治差分微分方程解的性态的超越方程. 自治差分微分方程的特征方程一般是超越的，根的分布状况与常微分方程非常不同. 取 $a,b,c,d,\tau>0$ 为常数，给出线性自治差分微分方程

$$\dot{x}(t)+a\dot{x}(t-\tau)+bx(t)+cx(t-\tau)+dx(t+\tau)=0. \tag{1}$$

设(1)有形式解 $\mathrm{e}^{\lambda t}$，则 λ 满足一个超越方程

$$h(\lambda)=\lambda(1+a)+b+c\mathrm{e}^{-\lambda\tau}+d\mathrm{e}^{\lambda\tau}=0. \tag{2}$$

(2)称为(1)的特征方程. 一般地，它有可列个根分布在复平面上，这与常微分方程截然不同，但对特征方程的 m 重根 $\lambda(m\geqslant1)$，$\mathrm{e}^{\lambda t},t\mathrm{e}^{\lambda t},\cdots,t^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$ 都是原方程的解这一点则相同. 设 $x\in\mathbf{R}^n$，方程组

$$\dot{x}(t)+A\dot{x}(t-\tau)+Bx(t)+Cx(t-\tau)+Dx(t+\tau)=0, \tag{3}$$

其中 $\tau=\mathrm{const}>0$，A,B,C,D 为 $n\times n$ 阵，则特征方程为

$$\det|\lambda E-A\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\tau}+B+C\mathrm{e}^{-\lambda\tau}+D\mathrm{e}^{\lambda\tau}|=0. \tag{4}$$

设 $c\in\mathbf{R}^n$. 由形式解 $c\mathrm{e}^{\lambda t}$ 代入(3)即导出(4).

考察一阶自治线性方程及其特征方程(1)，(2). 若 $a=d=0,b\neq0$，则方程是滞后型的，此时 $h(\lambda)$ 的零点都落在复平面上某一平行于虚轴的直线的左边，且 $\mathrm{Re}(\lambda_j)\to-\infty(j\to+\infty)$；若 $a=c=0,d\neq0$，则方程是超前型的，此时存在平行于虚轴的直线，使 $h(\lambda)$ 的一切零点均位于它的右边. 这两种情形 $h(\lambda)$ 在任何条形域 $\alpha\leqslant\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant\beta$（$\alpha,\beta$ 为常数）中只有有限个零点，而且零点都是孤立的. 若 $a\neq0,d=0$，则方程是中立型的，此时 $h(\lambda)$ 的所有零点都位于某一条形域 $\alpha_1\leqslant\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant\beta_1$（$\alpha_1,\beta_1$ 为常数）之中. 这种分布状况表达了“中立型”一词的本来含义. 此外，中立型方程的 $h(\lambda)$ 的零点也是孤立的，在域 $\alpha_2\leqslant\mathrm{Im}(\lambda)\leqslant\beta_2$（$\alpha_2,\beta_2$ 是常数）中只有有限个.

上述结论对 n 阶自治线性系统也成立. 若滞后型线性自治方程的特征根均具有负实部，则零解是渐近稳定的，若除了实部零的单重根以外其他根均具负实部，则零解稳定但不是渐近稳定的. 对超前型和混合型线性自治系统，由于恒存在正实部的特征根，所以零解总是不稳定的. 此时方程称为不稳定型方程. 最后，对中立型方程，当特征根的实部均满足 $\mathrm{Re}(\lambda_j)\leqslant\delta<0$ 时，零解是渐近稳定的. 但 $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0$ 对一切 j 成立并不能保证零解的渐近稳定性，因为存在 $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0,\mathrm{Re}(\lambda_j)\to0(j\to+\infty)$ 而零解不是渐近稳定的反例. 不仅如此，还可能出现有可列个单重纯虚根而其他根均具负实部的复杂情况.

庞特里亚金定理（Pontryagin theorem） 关于滞后型线性自治系统特征根分布的一个重要定理. 线性自治常微分方程的特征根全部分布在虚轴左边的充分必要条件是众所周知的劳斯-霍维茨判据. 对滞后型线性自治系统是否有类似的准则？1942 年，庞特里亚金（Понтрягин，Л. С.）在理论上给出了这种准则，这就是庞特里亚金定理. 把线性自治差分微分方程的特征方程写成 $H(z)=h(z,\mathrm{e}^z)=h(z,t)$，设诸项中 z 的最高次数为 r，t 的最高次数为 s，若 $a\neq0$，则 az^rt^s 称为 $h(z,t)$ 的主项. 再记

$$H(\mathrm{i}y)=F(y)+\mathrm{i}G(y),$$

则庞特里亚金定理断言：

1. 若 $h(z,\mathrm{e}^z)$ 有主项，则它的所有零点均具负实部的充分必要条件是，$F(y)$ 和 $G(y)$ 的根都是实的，并且至少有一个 y 的值使

$$G'(y)F(y)-F'(y)G(y)>0.$$

2. 若 $h(z,\mathrm{e}^z)$ 没有主项，则 $h(z,\mathrm{e}^z)$ 必存在具任意大实部的零点.

定理的第二部分证明了超前型与混合型系统的零解必定是不稳定的这一事实. 第一部分给出滞后

型系统零解渐近稳定的充分必要条件.但对中立型系统,判断特征根均具负实部这一点并不能保证渐近稳定性.必须指出,庞特里亚金定理的条件是超越的,难以检验的,从应用的角度看,特征根分布的代数判断准则是目前亟待研究的课题.

稳定的 *D* 算子(stable D operators) 一种使得稳定性性质最接近于滞后型泛函微分方程的中立型泛函微分方程的构造性质.对算子型中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D(t,x_t)=f(t,x_t),$$

设 $D(t,\varphi)\in C(\mathrm{R}\times C,\mathrm{R}^n)$,$C=C([-r,0],\mathrm{R}^n)$,用差分算子 D 构造齐次与非齐次差分方程 $D(t,y_t)=0$ 和 $D(t,y_t)=h(t)$.若存在常数 $a,b>0$,使对任意的 $h\in C(\mathrm{R}_+,\mathrm{R}^n)$,非齐次差分方程 $D(t,y_t)=h(t)(t\geqslant\sigma)$的解$y(t)$满足

$$|y_t|\leqslant b\mathrm{e}^{-a(t-\sigma)}|y_\sigma|+b\sup\{h(u)\}\quad(t\geqslant\sigma),$$

则称 D 算子是一致稳定的.若 D 是线性自治的,在0处是原子的,则当且仅当 $Dy_t=0$ 的零解渐近稳定时 D 算子是一致稳定的.当 D 算子为一致稳定时,性质最接近滞后型方程.

泛函微分方程的稳定性(stability of functional differential equation) 李亚普诺夫稳定性理论在泛函微分方程中的推广.设滞后型泛函微分方程 $\dot{x}(t)=f(t,x_t)$的解整体存在,且 $f(t,0)\equiv0$.与常微分方程的李亚普诺夫稳定性类似,称方程的零解 $x(t)=0$是稳定的,若$\forall\sigma\in\mathrm{R}$ 和 $\varepsilon>0$,$\exists\delta(\varepsilon,\sigma)>0$,使当$|\varphi|<\delta$时,对$\forall t\geqslant\sigma$,不等式$|x(t,\sigma,\varphi)|<\varepsilon$成立.若 δ 不依赖于 σ,则称零解是一致稳定的.这里

$$|\varphi|=\sup_{\theta\in[-r,0]}|\varphi(\theta)|,$$

$|x|$表示 x 取 R^n 中的模.$|\varphi|$与$|x|$都用记号$|\cdot|$表示而不加区别,这不致引起混淆.一般地,初始函数空间与解空间(可以是 R^n 或 $C([-r,0],\mathrm{R}^n)$),可能取相同或不同的模,但要保证稳定性的定义是等价的.

RFDE(f)的零解称为渐近稳定的,如果它是稳定的,并且$\exists\delta(\sigma)>0$,使得$|\varphi|<\delta(\sigma)$时,有$|x(t,\sigma,\varphi)|\to0(t\to+\infty)$.零解称为一致渐近稳定的,若它是一致稳定的,并且$\exists\delta_0>0$,对$\forall\sigma\in\mathrm{R}$,$\forall\eta>0$,$\exists T(\eta)$,当$|\varphi|<\delta_0$时,$|x(t,\sigma,\varphi)|<\eta$,$t\geqslant\sigma+T(\eta)$.对中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D(t,x_t)=f(t,x_t),$$

上述诸定义仍然适用.

注意到稳定性的定义中指出"$\forall\sigma\in\mathrm{R}$",如果把这一点改为常微分方程的提法"对某一个 $\sigma\in\mathrm{R}$",则稳定性可能依赖于 σ 的选择(参见"稳定性依赖于初始时刻").此外,由于滞后型泛函微分方程中滞量不恒等于零,因而存在稳定性对时滞的依赖关系问题.如大时滞稳定性、小时滞等价性问题、全时滞稳定性问题等可参见有关条目.

稳定性依赖于初始时刻(stability depend on initial instants) 泛函微分方程的一种特殊性质.即选择不同的初始时刻,零解的稳定性可能不同.在泛函微分方程的稳定性定义中,若把"$\forall\sigma\in\mathrm{R}$"改为"对某一 $\sigma\in\mathrm{R}$",则零解稳定与否可能依赖于 σ 的选择.例如方程 $\dot{x}(t)=x(t)-x(t\mathrm{e}^{-t})$,若取 $\sigma=0$,则零解是稳定的;若取 $\sigma=1$,则零解是不稳定的.这里 σ 是初始时刻.

稳定性依赖于滞量(stability depend on delays) 泛函微分方程的一种特殊性质.对给定的泛函微分方程,当滞量 τ 不同时,零解的稳定性可能是不同的,即使 τ 取常量也不例外.若视 τ 为参数,则稳定性、周期解的存在性等都可能出现分歧点.例如方程 $\dot{x}(t)=x(t)-x(t-\tau)$,当 $\tau\in[0,1)$时零解是稳定的,而 $\tau\geqslant1$ 时零解是不稳定的,$\tau=1$ 是稳定性关于 τ 的一个分歧点.

大范围渐近稳定性(asymptotically stable in the large) 亦称整体稳定性.泛函微分方程稳定性理论的重要概念之一.记RFDE(f)或NFDE(D,f)过$(\sigma,\varphi)\in\mathrm{R}\times C$的解为$x(t,\sigma,\varphi)$,若零解是稳定的,并且$\forall(\sigma,\varphi)\in\mathrm{R}\times C$,当$t\to\infty$时$|x(t,\sigma,\varphi)|\to0$,则称方程的零解是大范围稳定的.若$\forall\alpha>0$,$\forall\varepsilon>0$,$\forall\sigma\in\mathrm{R}$(或$[t_l,+\infty]$,$t_l\in\mathrm{R}$),$\exists$ $T(\varepsilon,\alpha)>0$,使得当$|\varphi|<\alpha$时,

$$|x(t,\sigma,\varphi)|<\varepsilon,\quad t\geqslant\sigma+T(\varepsilon,\alpha),$$

则称零解是大范围拟一致渐近稳定的.若方程的零解是一致稳定的,一致有界的,并且是大范围拟一致渐近稳定的,则称零解是大范围一致渐近稳定的.

整体稳定性(global stability) 即"大范围渐近稳定性".

大范围一致渐近稳定性(uniformly asymptotical stability in the large) 见"大范围渐近稳定性".

小时滞等价命题(equivalent proposition for small delays) 泛函微分方程稳定性理论的重要概念之一.含有小时滞的泛函微分方程在略去时滞后得到一个常微分方程,这两个方程解的稳定性是否相同?这个命题的原先含义是:在什么条件下可以略去滞量而不改变系统的稳定性?因为一般地,处理常微分方程比处理泛函微分方程要简单得多,所以寻求这种等价性条件在应用上有特别重要的意义.近年来,除了稳定性外,还研究解的存在惟一性,周期解与概周期解的存在性等性质,在略去滞量后是否保持的"等价命题".

大时滞稳定性(stable for large time lag) 泛

函微分方程稳定性理论的重要概念之一.这一概念描述了一类可以通过增大滞量以保证稳定性的时滞微分系统.例如,对线性自治差分微分方程组

$$\dot{x}(t)+C\dot{x}(t-\tau)=Ax(t)+Bx(t-\tau),$$

若存在充分大的常数 M,使得系统的零解当$\forall\tau>M$时都是稳定的(渐近稳定的),则称系统是大时滞稳定的(渐近稳定的).例如,若存在常数 $M>0$,使当 $C=0$ 时系统的所有特征根$\lambda_j(\tau)<0$,当$C\neq0$时$\lambda_j(\tau)\leqslant\delta=\text{const}<0(\forall\tau>M)$成立,则系统是大时滞渐近稳定的.这意味着零解当$\tau\leqslant M$时可能是不稳定的.非线性自治差分微分方程的大时滞稳定性可类似定义.

大时滞渐近稳定性(asymptotically stable for large time lag) 见"大时滞稳定性".

全时滞稳定性(stability for all delays) 泛函微分方程稳定性理论的重要概念之一.这类系统允许滞量的任意偏差而能保持渐近稳定性.设 $x\in\mathrm{R}^n$,A,B,C 为 $n\times n$ 常数阵,若$\forall\tau\in\mathrm{R}_+$,线性自治差分微分方程族

$$\dot{x}(t)+C\dot{x}(t-\tau)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$$

的零解都是渐近稳定的,则称系统是全时滞稳定的.例如,系统相应的特征根全体记为$\{\lambda_j(\tau)\}(\forall\tau\in\mathrm{R}_+)$,当 $C=0$ 时$\forall\lambda_j(\tau)<0$,$C\neq0$ 时$\forall\lambda_j(\tau)\leqslant\delta=\text{const}<0$,则系统是全时滞稳定的.对非线性自治系统可类似定义.目前,这种稳定性的主要问题在于寻求代数的判别依据.

拉兹密辛条件(Razumikhin's condition) 一种表述泛函微分方程的李亚普诺夫稳定性条件.20世纪50年代,当人们把常微分方程的李亚普诺夫方法推广到泛函微分方程时发现,所有的稳定性定理的适用范围都极其有限.例如,对最简单的方程

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)\quad(\tau=\text{const}>0),$$

取

$$V(x)=\frac{1}{2}x^2,$$

则

$$\dot{V}(x(t))=ax^2(t)+bx(t)x(t-\tau)$$

中第二项是否恒正或恒负难以确定.拉兹密辛(Razumikhin,B.)注意到$\dot{V}$并不需要在原点的邻域内定号,只要当$|x(t-\tau)|\leqslant|x(t)|$时定号即可.这就是拉兹密辛条件.它还可推广为 $P(x(s))\leqslant P(x(t))(s\leqslant t,t\geqslant\sigma)$.$P(\xi)$是 K 类函数:$P(0)=0$,$P(\xi)>0(\xi\neq0)$.在这个条件之下,上述方程中只要$a<0$,$|b|\leqslant|a|$,则零解是稳定的.条件的成功之处在于它并没有对方程自身附加新的限制.

在拉兹密辛条件下的稳定性定理通常称为拉兹密辛型定理.例如对 RFDE(f):$\dot{x}(t)=f(t,x_t)$,设f:$\mathrm{R}\times C\to\mathrm{R}^n$ 把 $\mathrm{R}\times(C$ 中的有界集)映入 R^n 中的有界集,设 u,v,w:$\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}_+$是连续的,非减函数$u(s)$,$v(s)$当 $s>0$ 时为正,$u(0)=v(0)=0$,若存在连续函数 $V(t,x)$满足下列条件,则方程的零解是一致稳定的:

1. $u(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant v(|x|)(t\in\mathrm{R},x\in\mathrm{R}^n)$.

2. $\dot{V}(t,x(t))\leqslant-w(|x(t)|)$,在条件$V(t+\theta,x(t+\theta))\leqslant V(t,x(t))(\theta\in[-r,0])$时成立.

若对 $s>0$,$w(s)>0$,且存在连续函数 $P(s)>0$,$s>0$,条件 2 换为

$$V(t+\theta,x(t+\theta))\leqslant P(V(t,x(t)))\ (\theta\in[-r,0]),$$

则方程的零解是一致渐近稳定的.

李亚普诺夫泛函方法(method of Liapunov functionals) 李亚普诺夫第二方法对泛函微分方程的一种推广.用李亚普诺夫函数$V(t,x)$研究RFDE(f):$\dot{x}(t)=f(t,x_t)$的稳定性,因为有了拉兹密辛条件而大大扩展了应用范围,然而仍有很大的局限性,而且无法证明 V 函数的存在性定理.正是由于这个原因,克拉索夫斯基(Красовский,H.H.)于1959年提出了在空间 C 中解释轨线的观点,同时引入李亚普诺夫泛函 $V(t,\varphi)$的概念.设泛函 V:$\mathrm{R}\times C\to\mathrm{R}$ 连续,$x(t,\sigma,\varphi)$是方程过(σ,φ)的解,定义

$$\dot{V}(t,\varphi)=\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}(V(t+h,x_{t+h}(t,\varphi))-V(t,\varphi))$$

为 V 关于方程的全导数,或者说沿方程的解取上右导数.作为例子,观察一个稳定性定理:设 f:$\mathrm{R}\times C\to\mathrm{R}^n$,使 $\mathrm{R}\times(C$ 的有界子集)映入 R^n 的有界集.u,v,w:$\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}_+$是连续的非减函数,$u(s)$,$v(s)$当 $s>0$ 时取正值,且$u(0)=v(0)=0$.若存在 $\mathrm{R}\times C$ 到 R 上的连续泛函 V,使得

$$u(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant v(|\varphi|),$$
$$\dot{V}(t,\varphi)\leqslant-w(|\varphi(0)|),$$

则 RFDE(f)的零解是一致稳定的.若$s\to\infty$时,$u(s)\to\infty$,则零解是一致有界的.若 $s>0$ 时,$w(s)>0$,则零解是一致渐近稳定的.

除了稳定性理论以外,V 泛函还用于研究解的有界性,周期解与概周期解的存在性等问题.对算子型中立型泛函微分方程 NFDE(D,f),有一系列与RFDE(f)平行的应用结果.

***D* 划分法**(method of *D*-divide) 一种划分稳定区的方法.设滞后型和中立型线性自治差分微分方程的 N 个系数构成一个参数空间 R^N,相应的特征方程$h(\lambda)=0$中令 $\mathrm{Re}\,\lambda=0$,则$h(\mathrm{i}y)=0$的实部和虚部分开后得两个含 y 的实系数方程,消去 y 得 $N-1$维超曲面,这种超曲面把 R^N 划分成若干区域,在一些区域中方程的零解渐近稳定,另一些区域中则是不稳定的.在曲面上可能是稳定的,也可能是不

稳定的,这要视实部为零的特征根是否为单重而定.对方程族的这种分法称为 D 划分法.完成了 D 划分,则认为是比较完整地解决了稳定性问题.划分法的边界曲面也可以用幅相法求得.

楔函数(class of K-function) 亦称 K 类函数.是应用 V 泛函方法时必不可少的辅助概念.若 $W:\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}_+$ 连续,严格单调增加且 $W(0)=0$,则 W 称为楔函数,记为 $W\in K$.若 $W\in K$ 且 W 是凸函数,则称 $W\in KC$ 类.

健忘泛函(forgetful functional) 即健忘李亚普诺夫泛函.用以消除无穷时滞对未来状态的不良影响.泛函 $V(t,x(\cdot))$ 称为是健忘的,若存在楔函数 $W(\xi)$ 及常数 $l>0$,满足:

1. $0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant W|x|_{[\alpha,t]}(t\geqslant\alpha,x\in C([\alpha,t],\mathrm{R}^n))$.

2. $\forall D>0,\delta>0,\sigma\geqslant\alpha,\exists s>0$ 使当 $|x|_{[\alpha,\sigma]}\leqslant D$, $|x|_{[\sigma,\sigma+s]}\leqslant\delta,t\geqslant\sigma+s$ 时,

$$0\leqslant V(t,x(\cdot))\leqslant l\ \max\{W(\delta),W(|x|_{[\sigma+s,t]})\}.$$

若 s 与 σ 无关,则称 $V(t,x(\cdot))$ 是一致健忘的,其中 $|x(\theta)|_{[a,b]}=\sup\{|x(\theta)||\theta\in[a,b]\}$.因为无穷时滞泛函微分方程的解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 不问 $t\geqslant\sigma$ 有多大,$x_t=x(t+\theta)$ 总含有初始函数 $\varphi(\theta)(\theta\in\mathrm{R}_-)$,若用有界的 V 泛函来研究稳定性,便意味着过去的历史毫无例外地直接影响任何时刻 t 时的状况,而用健忘 V 泛函,则意味着逐步排除或忘却过去历史对未来状态的影响.

一致健忘泛函(uniformly forgetful functional) 见"健忘泛函".

容许空间(allowable space) 附加健忘条件的状态空间.设 $X=C(\mathrm{R}_-,\mathrm{R}^n)$,$X$ 是线性空间,赋以拟范数 $|\cdot|_X$,记 $\varphi_t(s)=\varphi(t+s)(s\in\mathrm{R}_-)$,$\forall\tau>0$,

$$X_\tau=\{\varphi\in X|\varphi(s)\in C([-\tau,0],\mathrm{R}^n),\varphi_{-\tau}\in X\}.$$

称空间 $(X,|\cdot|_X)$ 是容许的,若 $\forall\tau\geqslant0$ 及 $\varphi\in X_\tau$,成立:

1. $\varphi_t\in X$ 且 φ_t 关于 t 连续,$t\in[-\tau,0]$.

2. $\mu|\varphi(0)|$

$$\leqslant|\varphi|_X\leqslant K(\tau)\sup_{s\in[-\tau,0]}|\varphi(s)|+M(\tau)|\varphi_{-\tau}|_X,$$

这里 $\mu=\mathrm{const}>0$,$K(s)$,$M(s)$ 是连续函数.称容许空间 $(X,|\cdot|_X)$ 具有衰退记忆的,若

$$K(s)=K=\mathrm{const},\lim_{s\to\infty}M(s)=0.$$

由定义可知,若 $(X,|\cdot|_X)$ 是容许的,则空间 $(X_\tau,|\cdot|_{X_\tau})$ 也是容许的,这里

$$|\varphi|_X=\sup\{|\varphi_s|_X|s\in[-\tau,0]\}.$$

引入容许空间的目的也是为了研究无穷时滞泛函微分方程的稳定性,只不过现在是把记忆衰退——健忘的条件加在状态空间之上,但稳定性的定义要从头叙述一遍.

解的振动性(oscillation of solution) 泛函微分方程解的重要特性之一.泛函微分方程的解 $x(t)$ 称为振动的,如果它不是最终零解且存在可列个零点 $\{t_n\}$,$t_n\to\infty(n\to\infty)$,使得 $x(t_n)=0$.$x(t)$ 不是最终零解这一限制是合理的,因为存在点态退化的系统,使方程在保证解存在惟一且有最终零解,也符合存在 $\{t_n\}$,$t_n\to\infty$,$x(t_n)=0$.例如方程 $\dot{x}(t)=b(t)x(t-1)$,其中 $b(t)=0,t\leqslant0$ 或 $t>1$;$b(t)=\cos 2\pi t-1$,$t\in(0,1]$.若初始时刻 $\sigma<0$,则当 $t\geqslant1,\varphi\in C$ 时,所有的解 $x(t,\sigma,\varphi)\equiv0$.这是常微分方程不会出现的情况.解的振动性包括:

1. 证明至少存在一个振动解.
2. 证明所有非零解均振动.
3. 证明方程没有振动解等.

所有解振动时称方程是振动的.

周期解的存在性(existence of periodic solution) 泛函微分方程定性研究中的一个重要课题.泛函微分方程周期解的定义与常微分方程相同,但所有判断方法都需要推广与更新才能适用.例如对 RFDE(f):$\dot{x}(t)=f(t,x_t)$,有如下的定理:若 $f(t,\varphi)$ 关于 $\varphi\in C([-r,0],\mathrm{R}^n)$ 是局部李普希茨型的,$f(t,\varphi)$ 关于 t 是周期为 $\omega(\omega\geqslant r)$ 的周期函数,则方程的解一致有界且对界 β 一致最终有界,存在一个周期为 ω 以 β 为界的周期解.对周期解存在性的研究有许多更细致的结果,例如证明周期解是惟一的,给出周期 ω 的精确值或估计值,周期解存在性关于时滞的依赖关系等.对中立型方程有大量类似的工作.

概周期解(almost periodic solution) 泛函微分方程的基本概念.若泛函微分方程的解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 关于 t 是概周期的,即 $\forall\varepsilon>0,\exists l(\varepsilon)>0$,使得每一长度为 $l(\varepsilon)$ 的区间上均含有 τ,使

$$|f(t+\tau,\varphi)-f(t,\varphi)|\leqslant\varepsilon$$

对 $\forall t\in\mathrm{R}$ 成立,则 $x(t)$ 称为方程的一个概周期解.若方程的解 $x(t,\sigma,\varphi)=x(t)$ 定义在 R_+ 上(或定义在 $[t_l,+\infty)$ 上,$t_l\in\mathrm{R}$),$\forall t\geqslant0$,有 $|x(t)|\leqslant\alpha<H=\mathrm{const.}$,且 $x(t)=\xi(t)+\eta(t)$,$\xi(t)$ 是概周期的,$\eta(t)\to0(t\to\infty)$,则 $x(t)$ 称为方程的渐近概周期解.此时方程一定存在概周期解.

解的有界性(boundness of solution) 泛函微分方程解的一种特征描述.泛函微分方程的解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 称为有界的,若存在常数 $\beta(\sigma,\varphi)$,使 $\forall t\geqslant\sigma-r$ 成立 $|x(t,\sigma,\varphi)|<\beta(\sigma,\varphi)$.$x(t,\sigma,\varphi)$ 称为一致有界的,若 $\forall\alpha>0,\sigma\in\mathrm{R}$,存在 $\beta(\alpha)$,当 $|\varphi|<\alpha$ 时,$|x(t,\sigma,\varphi)|<\beta(\alpha)$,对 $\forall t\geqslant\sigma$ 成立.在时滞生态系统中十分重要.

解的最终有界性(ultimate boundness of solution) 泛函微分方程解的一种特征描述.泛函微分方程的解 $x(t,\sigma,\varphi)$ 称为最终有界的,若存在常数 β

>0，使$\forall(\sigma,\varphi)\in \mathrm{R}\times C$，存在常数$T(\sigma,\varphi)>0$，当$t\geqslant\sigma+T(\sigma,\varphi)$时，就有$|x(t,\sigma,\varphi)|<\beta$. $x(t,\sigma,\varphi)$称为一致最终有界的，若存在常数$\beta>0$，使$\forall\alpha>0$，$\exists T(\alpha)>0$，对$|\varphi|<\alpha$，$\forall\sigma\in\mathrm{R}$，当$t>T(\alpha)$时成立$|x(t,\sigma,\varphi)|<\beta$. 最终有界有时称为毕竟有界.

最终零解(ultimate zero solution) 泛函微分方程的基本概念. 这些概念都是为了定义和研究解的振动性而提出的. 设泛函微分方程过(σ,φ)的解$x(t,\sigma,\varphi)$整体存在. 若存在$T(\sigma,\varphi)=\mathrm{const}$，使当$t\geqslant\sigma+T(\sigma,\varphi)$时$x(t,\sigma,\varphi)\equiv 0$，则称$x$为最终零解. 若当$t\geqslant\sigma+T(\sigma,\varphi)$时$x(t,\sigma,\varphi)>0$(或$<0$)，则称$x$为最终正解(或负解).

线性泛函微分方程(linear functional differential equation) 最重要的一类泛函微分方程，其中自治线性系统又是最基本的部分. 设$L(t,\varphi)$为$\mathrm{R}\times C\to\mathrm{R}^n$的线性算子，滞后型齐次和非齐次线性方程分别写成

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t),\tag{1}$$

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t)+f(t).\tag{2}$$

若$x_i(t,\sigma,\varphi_i)\ (i=1,2)$是(1)过$(\sigma,\varphi_i)$的解，$x^*(t,\sigma,\varphi)$是(2)过$(\sigma,\varphi)$的解，则对$\forall\alpha,\beta\in\mathrm{R}$，

$$\alpha x_1(t,\sigma,\varphi_1)+\beta x_2(t,\sigma,\varphi_2)$$

是(1)过$(\sigma,\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)$的解，$\alpha x_1(t,\sigma,\varphi_1)+\beta x_2(t,\sigma,\varphi_2)+x^*(t,\sigma,\varphi)$是(2)过$(\sigma,\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2+\varphi)$的解. 类似地叠加原理也成立. 把(1)用有界变差阵表示为

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}[\mathrm{d}_\theta R(t,\theta)]x(t+\theta).\tag{3}$$

人们有如下解的整体存在定理：设(3)满足：

1. $f\in L_{\mathrm{loc}}([\sigma,+\infty),\mathrm{R}^n)$，即$f$在$[\sigma,+\infty)$的任何紧集上勒贝格可积；

2. $R(t,\theta)$关于θ有界变差，二元可测；

3. $\exists m(t)\in L^{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}_+,\mathrm{R})$，$\forall t\in\mathrm{R}$，$\forall\varphi\in C$成立

$$|L(t,\varphi)|\leqslant m(t)|\varphi|;$$

则方程(2)过(σ,φ)的解在$[\sigma-r,+\infty)$存在且惟一. 由条件3可推出

$$\operatorname*{Var}_{[-r,0]}R(t,\cdot)\leqslant m(t).$$

线性系统理论涉及解的指数估计，通解的表示，常数变易公式，伴随系统，解的稳定性，振动性，有界性以及周期与概周期解，扰动线性系统等.

解的指数估计(exponential estimates of solution) 线性泛函微分方程解的上界的定量描述. 自治系统解的指数估计保证了应用拉普拉斯变换的可能性. 若$\dot{x}=L(t,x_t)+f(t)$满足"线性泛函微分方程"中的假定，用等价的积分方程估计解$x(t,\sigma,\varphi,f)$，得

$$|x(t,\sigma,\varphi,f)|$$

$$\leqslant\left(|\varphi|+\int_\sigma^t|f(s)\mathrm{d}s|\right)\exp\int_\sigma^t m(s)|\mathrm{d}s\ \ (t\geqslant\sigma).$$

若系统是自治的，则存在常数a,b，使

$$|x(t,\sigma,\varphi,f)|\leqslant|\varphi|a\mathrm{e}^{bt},$$

此时b可以精确到取特征方程根实部的上确界. 若$b<0$，则零解指数渐近稳定.

泛函微分方程的通解(general integral of functional differential equation) 泛函微分方程的基本概念. 线性自治差分微分方程的通解，不能用它的诸特征根与任意常数来构造，只能用拉普拉斯变换形式地表达. 以方程$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)$为例，设其特征方程$h(\lambda)$的可列个特征根$\lambda_j$各不相同，则$\mathrm{e}^{\lambda_j t}$是方程的可列个独立解，但无法证明方程的一切解均可表示为

$$\sum_{j=1}^{\infty}C_j\mathrm{e}^{\lambda_j t}$$

的形式，因而通解需用拉普拉斯变换给出. 称初始函数

$$\varphi(\theta)=0,\ -\tau\leqslant\theta<0,\varphi(0)=1$$

对应的解

$$X(t)=\int_C h^{-1}(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda$$

为基础解. $\forall\varphi\in C$，通解表示成

$$x(t,0,\varphi)=X(t)\varphi(0)+b\int_{-\tau}^{0}X(t-\theta-\tau)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

对中立型方程和n阶方程，方程组有类似结果.

基础解(base solution) 见"泛函微分方程的通解".

常数变易公式(variation of constants formula) 常微分方程的常数变易法在线性泛函微分方程的推广. 在拉普拉斯变换表示之下，由通解同样可以得出常数变易公式. 设齐次线性与非齐次泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t),\tag{1}$$

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t)+f(t)\tag{2}$$

过$(\sigma,\varphi)\in\mathrm{R}\times C$的解整体存在. 记$x(t,\sigma,\varphi)$为(1)的解，$x(t,\sigma,\varphi,f)$为(2)的解，则有

$$x(t,\sigma,\varphi,f)=x(t,\sigma,\varphi)+\int_\sigma^t U(t,s)f(s)\mathrm{d}s\tag{3}$$

$$(t\geqslant\sigma,x_\sigma=\varphi)$$

当$t\geqslant\sigma$时几乎处处成立，并称为常数变易公式. 其中$U(t,s)$满足方程

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t}=L(t,U_t(\cdot,s)),$$

$$U(t,s)=\begin{cases}0 & (s-r\leqslant t<s),\\ I & (t=s).\end{cases}$$

$$U_t(\cdot,s)(\theta)=U(t+\theta,s)\ (\theta\in[-r,0]),$$

$U(t,s)$称为基解阵. 若$L(t,x_t)=ax(t)+bx(t-\tau)$，则$U(t,s)=X(t-s)$，$X(t-s)$是由拉普拉斯变换表示的基础解. 对中立型泛函微分方程类似地可以给出公式.

形式伴随方程(formal adjoint equation) 在

$\mathbb{R}^n$ 中为确定常数变易公式的积分核而导出的相关方程. 设线性泛函微分方程 $\dot{x}(t)=L(t,x_t)$或

$$\dot{x}(t)=\int_{-r}^{0}[d_\theta R(t,\theta)]x(t+\theta)$$

的解整体存在,则 $\dot{x}(t)=L(t,x_t)+f(t)$ 的解 $x(t,\sigma,\varphi,f)$ 由常数变易法可用齐次方程的解 $x(t,\sigma,\varphi)$和$U(t,s)$表示为

$$x(t,\sigma,\varphi,f)=x(t,\sigma,\varphi)+\int_\sigma^t U(t,s)f(s)ds.$$

当 $U(t,s)$用另一途径确定时,导出方程

$$y(s)+\int_s^{\infty}y(s)R(\alpha,s-\alpha)d\alpha=\text{const}. \qquad (1)$$

(1)的矩阵解 $Y(s,t)$满足:$U(t,s)=Y(s,t)$几乎处处成立. (1)称为原方程的形式伴随方程.

真实伴随算子(true adjoint operator) 在 $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$中为确定常数变易公式而导出的相关算子. 设齐次与非齐次线性泛函微分方程的解整体存在,用内积定义空间 $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$的共轭空间 B_0,

$$\langle\psi,\varphi\rangle=\int_{-r}^{0}[d\psi(\theta)]\varphi(\theta)\ (\psi\in B_0,\varphi\in C).$$

对非齐次方程的解 $x(t,\sigma,\varphi,f)$,不用常数变易公式而直接写成 $x_t(\sigma,\varphi,f)=T(t,\sigma)\varphi+K(t,\sigma)f$,其中 $T(t,\sigma):C\to C,K(t,\sigma):L([\sigma,t],\mathbb{R}^n)\to C(t\geqslant\sigma)$都是连续线性算子,$T(\sigma,\sigma)=I,K(\sigma,\sigma)=0$. T,K 的真实伴随算子 T^*,K^*分别定义为:

$T^*(\sigma,t):B_0\to B_0$;

$K^*(\sigma,t):B_0\to L^\infty([\sigma,t],\mathbb{R}^n)$

$\langle T^*(\sigma,t)\psi,\varphi\rangle=\langle\psi,T(t,\sigma)\varphi\rangle$;

$\int_\sigma^t(K^*(\sigma,r)\psi)(s)f(s)ds=\langle\psi,K(t,\sigma)f\rangle.$

过程(process) 常微分方程的过程概念在泛函微分方程中的推广. 设 X 是巴拿赫空间,$u:\mathbb{R}\times X\times\mathbb{R}_+\to X$ 是给定的映射,对 $\sigma\in\mathbb{R}_+,t\in\mathbb{R}_+$,由

$$U(\sigma,t)=u(\sigma,x,t)$$

定义的 $U(\sigma,t):X\to X$ 满足性质:

1. u 是连续的;
2. $U(\sigma,0)=I$ 是恒等映射;
3. $U(\sigma+s,t)U(\sigma,s)=U(\sigma,s+t)$;

则称映射 u 是 X 上的一个过程.

设方程 $\dot{x}(t)=f(t,x_t)$的右端 $f:\mathbb{R}\times C\to\mathbb{R}^n$ 全连续,且满足惟一性条件,则过(σ,φ)的解$x(t,\sigma,\varphi)$在 $[\sigma-r,+\infty)$ 上存在,且当 $(\sigma,\varphi,t)\in\mathbb{R}\times C\times[\sigma,+\infty)$时 x 连续. 若对$(\sigma,\varphi,\tau)\in\mathbb{R}\times C\times\mathbb{R}_+$,记 $u(\sigma,\varphi,\tau)=x_{\sigma+\tau}(\sigma,\varphi)$,则 u 是 C 上的一个过程. 若存在 $\omega>0$,使$\forall\sigma\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}_+,U(\sigma+\omega,t)=U(\sigma,t)$,则称 u 是 ω 周期过程.

ω 周期过程(ω-period process) 见"过程".

时滞动力系统(dynamical system with time lag) 泛函微分方程的一类特殊过程. 一个过程称为一个动力系统,如果 $U(\sigma,t)$与 σ 无关,即若 $T(t)=U(0,t)(t\geqslant0)$,则对$(t,x)\in\mathbb{R}_+\times X,T(t)x$ 是连续的,$T(0)=I,T(t+\tau)=T(t)T(\tau)(t,\tau\in\mathbb{R}_+)$. 若 $S:X\to X$ 是连续映射,S 的迭代族$\{S^k|k\geqslant0\}$称为一个离散的动力系统. 若这种过程是由滞后型泛函微分方程导出的,则称之为时滞动力系统.

相轨(orbit) 泛函微分方程的重要概念. 与常微分方程一样,由抽象空间中的过程依次定义相轨及其极限集. 设 u 是 X 上的一个过程,则对每一个$(\sigma,x)\in\mathbb{R}\times X$,称集 $\tau^+(\sigma,x)=\{(\sigma+t,U(\sigma,t)x)|t\in\mathbb{R}_+\}$为过$(\sigma,x)\in\mathbb{R}\times X$ 的轨道. 称集 $\gamma^+(\sigma,x)=\{U(\sigma,t)x|t\in\mathbb{R}_+\}$为过$(\sigma,x)$的相轨. 若$H\subset X$,则

$$\tau^+(\sigma,H)=\bigcup_{x\in H}\tau^+(\sigma,x),$$
$$\gamma^+(\sigma,H)=\bigcup_{x\in H}\gamma^+(\sigma,x).$$

若$\{T^kx|k=0,1,2,\cdots\}$是一个离散动力系统,则过 $x\in X$ 的相轨为 $\gamma^+(x)=\{T^kx|k=0,1,2,\cdots\}$.

若 u 是 X 上的 ω 周期过程,则轨道 $\tau^+(\sigma+k\omega,x)$是 $\tau^+(\sigma,x)$沿实轴做长度为 $k\omega$ 的平移,相轨 $\gamma^+(\sigma+k\omega,x)=\gamma^+(\sigma,x)$对任意整数 k 成立. 若 u 是 X 上的动力系统,则轨道 $\tau^+(\sigma+s,x)$是轨道 $\tau^+(\sigma,x)$沿实轴做长度为 s 的平移且对$\forall\sigma\in\mathbb{R},\gamma^+(\sigma,x)=\gamma^+(0,x)=\gamma^+(x)$.

设 u 是 X 上的一个过程,则集合

$$\omega(\sigma,x)=\bigcap_{t\geqslant0}\overline{(\bigcap_{\tau\geqslant t}U(\sigma,\tau)x)},$$
$$\alpha(\sigma,x)=\bigcap_{t\leqslant0}\overline{(\bigcup_{\tau\leqslant t}U(\sigma,\tau)x)}$$

分别称为相轨 $\gamma^+(\sigma,x)$的 ω 极限集和 $\gamma^-(\sigma,x)$的 α 极限集,其中 $\gamma^+(\sigma,x)=\{U(\sigma,t)x|t\in\mathbb{R}_+\}$, $\gamma^-(\sigma,x)=\{U(\sigma,t)x|t\in\mathbb{R}_-\}$. 若 $\gamma^+(\sigma,x)$是予紧的,则 $\omega(\sigma,x)$存在,非空,单连通而且是紧的,并且 $\mathrm{dist}(U(\sigma,t)x,\omega(\sigma,x))\to0\ (t\to+\infty)$. 同理,若 $\gamma^-(\sigma,x)$是予紧的,则$\alpha(\sigma,x)$存在,非空,单连通而且是紧的,当$t\to-\infty$时$\mathrm{dist}(U(\sigma,t),\alpha(\sigma,x))\to0$.

泛函微分方程的边值问题(boundary value problem of functional differential equation) 泛函微分方程的一种基本定解问题. 对泛函微分方程已经有效地推广了两类边值问题. 考察线性泛函微分方程,设 V 是巴拿赫空间,$\sigma<\tau$ 是给定的实数,$M,N:C\to V$是线性算子,定义在 C 的稠密集上,$\gamma\in V$ 取定. 若 $L:\mathbb{R}\times C\to\mathbb{R}^n,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n,x\in\mathbb{R}^n$,则边值问题写成

$$\dot{x}(t)=L(t,x_t)+f(t),$$
$$Mx_\sigma+Nx_\tau=\gamma. \qquad (1)$$

其解的存在定理为:设 V^* 是 V 的共轭空间,M^*,N^* 分别是 M,N 的伴随算子,则(1)解存在的

必要条件为

$$\int_{\sigma}^{t} y(\alpha)f(\alpha)\mathrm{d}\alpha = -\langle\delta,\gamma\rangle_V.$$

$\forall\delta\in V^*$ 和形式伴随方程

$$y(s) + \int_{s}^{t} y(\alpha)R(\alpha, s-\alpha)\mathrm{d}\alpha = \text{const}$$
$$(\sigma - r\leqslant s\leqslant\tau-\gamma),$$
$$y_{\sigma}^{0} = -(I+\Omega(\sigma))^{-1}M^*\delta,$$
$$y_{\tau}^{0} = (I+\Omega(\tau))^{-1}N^*\delta$$

的解 $y(s)$. 若 $R(M+NT(t,\sigma))$ 是闭的,则条件还是充分的. 另一提法是,对 C 中固定的元 p,q,如何求得 $v\in V$ 和 $[\sigma,\tau]$ 上的解使满足

$$\dot{x}(t) = L(t,x_t) + f(t),\quad x_{\sigma} = Mv + p,\ x_{\tau} = Nv + q. \tag{2}$$

沿用上述记号,且 $f:\mathrm{R}\times C\to\mathrm{R}^n$, $p,q:V\to C$ 是有界线性算子,求滞后型泛函微分方程 $\dot{x}(t)=L(t,x_t)+f(t,x_t)$ 在 $[\sigma-r,\tau]$ 上满足边值条件 $Mx_{\sigma}+Nx_{\tau}=\gamma$,或者满足另一边值条件 $x_{\sigma}=Pv+p, x_{\tau}=Qv+q$ 的解. 边值问题的研究结果便是寻求种种条件以保证解的存在性、惟一性.

概周期常微分方程

概周期常微分方程(almost periodic ordinary differential equations) 常微分方程的一个重要分支. 在自然与社会现实中概周期现象是比周期现象更为普遍存在的现象. 例如,在经济学、生态学、振动理论、电力系统以及天体力学等许多学科领域出现线性或非线性振动现象的实际问题中除寻求周期解答外,还经常会出现寻求概周期解的问题. 通常所说线性或非线性振动是指可用线性或非线性常微分方程的解所表达的振动. 一般常微分方程除有自治系统外还有非自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x),$$

其中 x 与 $f(t,x)$ 是 n 维向量,t 是标量. 当 $f(t,x)$ 关于 t 是周期的或概周期的时候,系统称为周期系统或概周期系统. 这类系统的周期解或概周期解所表示的运动描述了系统的振动现象. 寻求概周期系统的概周期解以及研究概周期解的稳定性是概周期常微分方程研究的主要课题(当然,不是概周期的微分方程也可能有概周期解,这方面的研究也同样是重要的). 研究这一课题就必须以概周期函数的理论为基础.

概周期函数的理论首先是由丹麦数学家玻尔(Bohr, H.)在 1924—1926 年建立起来的. 在 20 世纪 20—30 年代经一批数学家的努力,玻尔的理论有了进一步的发展,包括在群上的调和分析理论以及由博赫纳(Bochner, S.)于 1933 年所建立的巴拿赫空间的向量值概周期函数的理论. 往后的发展更密切地联系着常微分方程、稳定性理论以及动力系统. 其应用范围不仅限于常微分方程和古典动力系统,而且涉及泛函微分方程、巴拿赫空间的微分方程以及广泛一类的偏微分方程.

周期系统(periodic systems) 见"概周期常微分方程".

概周期系统(almost periodic systems) 见"概周期常微分方程".

概周期函数(almost periodic functions) 一种重要的函数类,是周期函数概念的推广. 由丹麦数学家玻尔(Bohr, H.)首先建立,较周期函数更广泛存在的一种函数. 设 $f(t)$ 是定义在 $\mathrm{R}=(-\infty,+\infty)$ 上的连续实值或复值函数,如果对于任给一个实数序列 $\{\alpha'_n\}$,可找出一个序列 $\{\alpha_n\}\subset\{\alpha'_n\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty} f(t+\alpha_n)$$

在 R 上一致地存在,则称 $f(t)$ 为概周期函数,简记为 a. p. 函数. 这个定义是博赫纳(Bochner, S.)于 1927 年给出的,并证明与早先玻尔(Bohr, H.)关于概周期函数的定义是等价的. 玻尔称 $f(t)$ 为概周期的,如果对于任给 $\varepsilon>0$, $f(t)$ 的 ε 概周期数集(ε 平移数集) $T(f,\varepsilon)=\{\tau\mid |f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon$ 对一切 $t\in\mathrm{R}\}$ 是相对稠密的. 也就是说,对于任给 $\varepsilon>0$,存在正数 $l(\varepsilon)$,在长度为 $l(\varepsilon)$ 的任一区间上存在 τ,使 $|f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon$ 对一切 $t\in\mathrm{R}$ 成立. $l(\varepsilon)$ 称为 $T(f,\varepsilon)$ 的包含区间长,τ 称为 $f(t)$ 的 ε 概周期.

显然,周期函数是概周期函数,其逆不一定对. 概周期函数有许多重要性质. 例如,概周期函数在 R 上必有界且一致连续;如果 $f(t)$ 与 $g(t)$ 均为概周期函数,则 $|f(t)|$,代数和 $f(t)\pm g(t)$,乘积 $f(t)g(t)$ 仍是概周期函数. 若更设

$$\inf_{t\in\mathrm{R}} |g(t)| > 0,$$

则 $f(t)/g(t)$ 亦为概周期函数等. 另外,特别指出,函数 $f(t)$ 为概周期的充分必要条件是对任意两个序列 $\alpha'=\{\alpha'_n\}$, $\beta'=\{\beta'_n\}$,都可找到具有公共下标的子序列 $\alpha=\{\alpha_k\}\subset\{\alpha'_n\}$, $\beta=\{\beta_k\}\subset\{\beta'_n\}$,其中 $\alpha_k=\alpha'_{n(k)}$, $\beta_k=\beta'_{n(k)}$,使得

$$\lim_{k\to\infty} f(t+\alpha_k+\beta_k) = \lim_{k\to\infty} g(t+\alpha_k)$$

对每一 t 点态成立,其中

$$g(t) = \lim_{k\to\infty} f(t+\beta_k).$$

上述充分必要条件可简记为对任给 α' 与 β',可找到公共子序列 $\alpha\subset\alpha'$, $\beta\subset\beta'$,使

$$T_{\alpha+\beta}f(t) = T_{\alpha}T_{\beta}f(t) \tag{1}$$

点态成立. 寻求使(1)式点态成立是论证 $f(t)$ 为概周期函数经常采用的方法. 由概周期函数的定义,上述充分必要条件还可加强为:若(1)式点态成立,则

$f(t)$为概周期函数. 反之,若$f(t)$为概周期函数,则(1)式在R上一致成立.

ε平移数集(ε-translation set) 有界连续函数的一个重要概念. 对任一有界连续函数$f(t)$及任给$\varepsilon>0$,$f(t)$的ε平移数集$T(f,\varepsilon)$定义为

$$\{\tau \mid |f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon \text{ 对一切 } t\in \mathrm{R}\}.$$

当$f(t)$为概周期函数时,$T(f,\varepsilon)$是相对稠密的,这时$T(f,\varepsilon)$也称为概周期函数$f(t)$的ε概周期数集(参见"概周期函数").

ε概周期数集(ε-almostperiod set) 见"ε平移数集".

$T(f,\varepsilon)$的包含区间长(inclusion interval length of $T(f,\varepsilon)$) 概周期常微分方程的一个重要概念. 实数集R的子集S相对稠密时,必存在正数L使$[a,a+L]\cap S\neq\varnothing$对一切$a\in$R成立,数$L$称为包含区间长,$T(f,\varepsilon)$的包含区间长见"概周期函数".

$f(t)$的平移函数集$T(f)$(translation function set $T(f)$ of $f(t)$) 概周期函数空间的子空间. $f(f)$的平移函数集$T(f)$定义为集$\{f_\tau \mid f_\tau(t)=f(t+\tau)$对一切$\tau\in$R$\}$. 显然,对任一$g\in T(f)$,当$f(t)$为周期函数时,$g(t)$也是周期函数,当$f(t)$为概周期函数时,$g(t)$也是概周期函数. 如果所有概周期函数组成的空间记为$AP(C)$,那么,当$f(t)$为周期函数时,$T(f)$为$AP(C)$的列紧子空间.

$f(t)$的外壳(hull of $f(t)$) 概周期函数的一个重要概念. 如果存在序列$\alpha=\{\alpha_n\}$使

$$\lim_{n\to\infty} f(t+\alpha_n)=g(t)$$

存在,简记为$T_\alpha f=g$,其收敛方式是对固定的t点态收敛,在R的某个闭集上一致收敛或在R上一致收敛,均需要另加说明. 例如,采用这个记号,$f(t)$的外壳就可定义为:$H(f)=\{g \mid$存在序列α使$T_\alpha f=g$在R上一致存在$\}$. $f(t)$是概周期函数时,其外壳$H(f)$中可能存在不属于$T(f)$的函数. 例如,对概周期函数$f(t)=\cos t+\cos\sqrt{2}t$就出现这种情况. 若$f(t)$是概周期函数,则对任一$g\in H(f)$,必有

$$H(g)=H(f).$$

函数的平均值(mean value of function) 分析数学的一个重要概念. 设$f(t)$是连续函数,如果

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(s)\mathrm{d}s$$

存在,则称此极限为$f(t)$的平均值,记为$m(f)$. 当$f(t)$是概周期函数时$m(f)$一定存在,且

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(s)\mathrm{d}s$$

对$a\in$R也一致存在,其极限值即$m(f)$. 此外,如果$f(t)\geqslant 0$且不恒等于零,则$m(f)>0$. 设$f(t,x)$是R$\times D$上的连续函数,R$=(-\infty,+\infty)$,D为R中的紧集. 如果极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)\mathrm{d}s$$

对$x\in S$均匀地存在,则称此极限为$f(t,x)$的平均值,记为$m_t(f(t,x))$.

概周期函数的傅里叶级数(Fourier series of almost periodic functions) 一类特殊的傅里叶级数. 对概周期函数$f(t)$,玻尔(Bohr,H.)所引进的变换

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda s}\mathrm{d}s$$

一定存在,记为$a(f,\lambda)$. 显见$a(f,0)=m(f)$. 玻尔指出:使$a(f,\lambda)\neq 0$的所有实数λ组成的集合Λ是可数的. 称Λ为$f(t)$的指数集,有时也记为$\exp(f)$. 集Λ中的λ称为概周期函数$f(t)$的傅里叶指数,$f(t)$的对应于$\lambda\in\Lambda$的$f(t)$的玻尔变换$a(f,\lambda)$称为$f(t)$的傅里叶系数. 因此,对概周期函数$f(t)$,形式上有

$$f(t)\sim\sum_{-\infty}^{\infty} a(f,\lambda_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_n t}\quad(\lambda_n\in\exp(f)).$$

类似于周期函数,概周期函数$f(t)$的傅里叶系数与$|f(t)|^2$的平均值之间满足帕塞瓦尔算式

$$\sum_n |a(f,\lambda_n)|^2=m(|f(t)|^2).$$

概周期函数的指数集(index set of almost function) 见"概周期函数的傅里叶级数".

概周期函数的傅里叶指数(Fouries index of almost function) 见"概周期函数的傅里叶级数".

概周期函数的傅里叶系数(Fouries coefficient of almost periodic function) 见"概周期函数的傅里叶级数".

概周期函数的逼近定理(approximation theorem of almost periodic functions) 用三角多项式近似表示概周期函数的定理. 对任一概周期函数,都存在一致收敛于该函数的三角多项式序列来近似表示. 此三角多项式称为博赫纳-费耶尔多项式,即

$$\sigma(m,\alpha,t)=\sum_{|v_j|\leqslant m_j}\left(1-\frac{|v_1|}{m_1}\right)\cdots\left(1-\frac{|v_n|}{m_n}\right)\cdot a\left(f,\sum_{j=1}^n v_j\alpha_j\right)\exp\left(\mathrm{i}\sum_{j=1}^n v_j\alpha_j t\right),$$

其中$m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$,$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,$m_i$为正整数,$\alpha_i$为实数,$v_i$为整数,$\sum v_j\alpha_j=0$仅当$v_j=0(j=1,2,\cdots,n)$,$i=1,2,\cdots,n$. 当$f(t)$为概周期函数时,$\sigma(m,\alpha,t)$也都是概周期函数. 逼近定理可叙述如下:若$f(t)$为概周期函数,则对任给$\varepsilon>0$,存在三角多项式$\sigma(m,\alpha,t)$,使$|f(t)-\sigma(m,\alpha,t)|<\varepsilon$.

博赫纳-费耶尔多项式(Bochner-Fejer polynomial) 见"概周期函数的逼近定理".

概周期函数的模(module of almost periodic

functions) 概周期函数的一个重要概念.包含着概周期函数 f 的指数集 $\exp(f)$ 的实数的最小加法群称为 f 的模,记为 mod.若 f 与 g 均为概周期函数,则它们的模之间的包含关系有如下等价性质:

1. $\mathrm{mod}(f)\supset\mathrm{mod}(g)$.
2. 对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得
$$T(f,\delta)\subset T(g,\varepsilon).$$
3. $T_\alpha f$ 存在可得出 $T_\alpha g$ 存在.
4. $T_\alpha f=f$ 可得出 $T_\alpha g=g$.
5. $T_\alpha f=f$ 且存在 $\alpha'\subset\alpha$ 使 $T_{\alpha'} g=g$.

上述性质 2—5 中极限的存在无论是点态收敛,R 的任一紧集上一致收敛或在 R 上一致收敛,这三种意义下任意一种都可以.

概周期函数的模包含(module containment of almost periodic function) 见"概周期函数的模".

概周期向量函数(almost periodic vector functions) 一类特殊的向量函数.如果向量值函数 $f(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t))^T$ 的每一元素 $f_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 都是概周期函数,则称 $f(t)$ 为概周期向量函数.或直接给出按玻尔(Bohr,H.)或博赫纳(Bochner,S.)意义下的定义.例如,称向量函数 $f(t)$ 为概周期的,如果 $f(t)$ 的 ε 平移数集 $T(f,\varepsilon)=\{\tau\mid \|f(t+\tau)-f(t)\|<\varepsilon$ 对一切 $t\in\mathbb{R}\}$ 是相对稠密的,其中
$$\|\cdot\|=\sup_{t\in\mathbb{R}}|\cdot|$$
为向量函数 $f(t)$ 的均匀范数.凡提及概周期函数时,读者可以从它的值域中看出所指的是数量还是向量概周期函数.

一致概周期函数(uniformly almost periodic functions) 一种含参变元的重要概周期函数类.设 $f(t,x)\in C(\mathbb{R}\times D,\mathbb{E}^n)$,$D$ 为 $\mathbb{E}^n$ 中开集,$\mathbb{E}^n$ 表示 n 维实空间 $\mathbb{R}^n$ 或复空间 $\mathbb{C}^n$.如果对任给序列 $\alpha'=\{\alpha'_n\}$,存在子序列 $\alpha=\{\alpha_n\}\subset\alpha'$,使
$$T_\alpha f(t,x)=\lim_{n\to\infty}f(t+\alpha_n,x)$$
在 $\mathbb{R}\times S$ 上一致地成立,其中 S 为 D 中任一紧集,则称 $f(t,x)$ 是 t 的概周期函数且关于 $x\in D$ 是一致的,或简称 $f(t,x)$ 对 $x\in D$ 是一致概周期函数,简记为"u. a. p. 对 $x\in D$".这是玻尔型定义.同样,有博赫纳型等价定义:对任给 $\varepsilon>0$ 和任一紧集 $S\subset D$,若存在正数 $l(\varepsilon,S)$,使在长度为 $l(\varepsilon,S)$ 的任一区间内总有 τ,使
$$\|f(t+\tau,x)-f(t,x)\|<\varepsilon$$
对一切 $(t,x)\in\mathbb{R}\times S$,则称 $f(t,x)$ 是 u. a. p. 对 $x\in D$.

集合 $T(f,\varepsilon,S)=\{\tau\mid \|f(t+\tau,x)-f(t,x)\|<\varepsilon$ 对一切 $(t,x)\in\mathbb{R}\times S\}$ 称为 $f(t,x)$ 的 ε 概周期集(或 ε 平移数集),$l(\varepsilon,S)$ 称为 $T(f,\varepsilon,S)$ 的包含区间长.若 $f(t,x)$ 是 u. a. p. 对 $x\in D$,则 $f(t,x)$ 在 $\mathbb{R}\times S$ 上有界且一致连续,S 为 D 中任一紧集.如果另有概周期函数 $\varphi(t)$,对 $t\in\mathbb{R}$ 有 $\varphi(t)\subset S$,那么,复合函数 $f(t,\varphi(t))$ 关于 t 是 u. a. p. 的.这个性质当 $f(t,x)$ 是 t 的 a. p. 函数而不是 u. a. p. 对 $x\in D$ 时就不一定成立.例如,函数 $f(t,x)=\sin xt$ 对每一固定的 x,它是 t 的概周期函数,取 $\varphi(t)=\sin t$,那么,$f(t,\varphi(t))=\sin(t\sin t)$ 已不再是 t 的概周期函数.

对于一致概周期函数,同样可给出平移函数集 $T(f(t,x))=\{f_\tau(t,x)\mid f_\tau(t,x)=f(t+\tau,x)$ 对一切 $\tau\in\mathbb{R}\}$,外壳 $H(f(t,x))=\{g(t,x)\mid$ 存在序列 α 使 $T_\alpha f(t,x)=g(t,x)$ 在 $\mathbb{R}\times S$ 上一致存在,其中 S 为 D 中任一紧集$\}$,平均值
$$m_t(f(t,x))=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)\mathrm{d}s$$
等一些概念,也可给出对应的傅里叶级数和帕塞瓦尔等式等.

一致概周期微分方程(uniformly almost periodic differential equation) 概周期常微分方程研究的主要对象.设 $f(t,x)\in C(\mathbb{R}\times D,\mathbb{R}^n)$,$f$ 对 $x\in D$ 是一致概周期函数.那么
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)$$
就是一致概周期微分方程,它的壳方程是
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=g(t,x),\ \forall g(t,x)\in H(f(t,x)).$$
在讨论概周期解的存在性时不仅对方程本身而往往对其壳方程也要有所要求.当 $f(t,x)=A(t)x+f(t)$ 是 x 的线性函数而系数矩阵 $A(t)$ 以及其非齐次项 $f(t)$ 都是概周期函数时,$A(t)$ 是概周期的,指其每一元素 $a_{ij}(t)$ 均为概周期的 $(i,j=1,2,\cdots,n)$.这时称
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t)$$
为非齐次线性概周期微分方程,它的壳方程是
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=B(t)x+g(t)$$
$$(\forall B(t)\in H(A(t)),g(t)\in H(f(t))),$$
它的齐次壳方程是
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=B(t)x,\ \forall B(t)\in H(A(t)).$$

非齐次线性概周期微分方程(non-homogeneous linear almost periodic differential equation) 见"一致概周期微分方程".

壳方程(equations in the hull) 见"一致概周期微分方程".

齐次壳方程(homogeneous hull equations) 见"一致概周期微分方程".

标准假设(standard hypothesis) 概周期常微

分方程的一个概念. 讨论概周期解的存在性标准假设有时起重要作用. 称微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

满足标准假设, 如果 $f(t,x)$ 为 u. a. p. 的, $x \in K$, K 为 E^n 中固定的一紧集, 又其壳方程中每一方程在 K 中都满足始值问题解的惟一性, 即对每一 $g(t,x) \in H(f(t,x))$, 始值问题

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x), x(t_0) = x_0$$

的解 $x_g(t;t_0,x_0)$ 是惟一的.

渐近概周期函数(asymptotically almost periodic function) 一类概周期函数的近亲函数. 如果函数 $\varphi(t)$ 有分解式 $\varphi(t)=p(t)+q(t)$, 其中 $p(t)$ 是 R 上的概周期函数, $q(t)$ 是定义在 R_+(或 R_-)上的连续函数, 当 $t \to +\infty$(或 $t \to -\infty$)时有 $q(t) \to 0$, 则称 $\varphi(t)$ 是 R_+(或 R_-)上的渐近概周期函数. R_+(或 R_-)上的渐近概周期函数(简记为 a. a. p.)在 R_+(或 R_-)上必有界且一致连续, 且其分解式是惟一的. 如果 a. a. p. $\varphi(t)$ 可微, 且 $\varphi'(t)$ 也是 a. a. p., 则 $\varphi'(t)$ 有分解式 $p'(t)+q'(t)$ 也是惟一的.

渐近概周期函数对论证概周期解的存在性有重要作用. 如果证明了一致概周期微分方程 $dx/dt=f(t,x)$ 有 a. a. p. 解, 那么, 其概周期部分必然是该方程的解. 这时, 对每一 $g(t,x) \in H(f(t,x))$, 微分方程 $dx/dt=g(t,x)$ 都存在 a. a. p. 解.

玻尔-诺伊格鲍尔理论(theory of Bohr-Neugebauer) 阐明常系数线性微分方程有界解为概周期解的重要理论. 玻尔(Bohr, H.)最早指出: 概周期函数 $f(t)$ 的积分

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

是概周期函数的充分必要条件是, $F(t)$ 对一切 $t \in R$ 为有界. 这就解决了最简单的一阶概周期微分方程 $dx/dt=f(t)$ 是否存在概周期解的问题. 以此为基础, 对于一阶线性常系数概周期方程以及一般 n 维非齐次线性常系数概周期微分方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t),$$

其中 A 为 $n \times n$ 常量矩阵, $f(t)$ 为概周期 n 维向量函数, 论证它们的有界解即概周期解的理论, 称为玻尔-诺伊格鲍尔理论.

阿梅留定理(Amerio theorem) 判定概周期解存在的重要定理. 设 $f(t,x)$ 对每一 $x \in S$ 关于 t 是概周期的, 其中 S 为 R^n 中紧集, 又 $f(t,x)$ 在 $R \times S$ 上一致连续, 如果微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

的每一壳方程在 S 中只有惟一解, 对一切 $t \in R$, 那么, 所有这样的解都是概周期的. 上述定理是阿梅留(Amerio)首先证明的, 它可理解为玻尔-诺伊格鲍尔理论推广到非线性概周期微分方程的结果, 即在所指出的"惟一解"的条件下, 有界解即概周期解.

法瓦尔条件(Favard condition) 非齐次线性概周期微分方程存在概周期的一个重要条件. 如果对每一 $B(t) \in H(A(t))$, 齐次壳方程

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x$$

的非零有界解 $\varphi(t)$ 都满足

$$\inf_{t \in R} \| \varphi(t) \| > 0,$$

则称非齐次线性概周期微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

满足法瓦尔条件. 若非齐次线性概周期方程满足法瓦尔条件, 且存在有界解, 则必有概周期解 $x(t)$, 且

$$\mathrm{mod}(x(t)) \subset \mathrm{mod}\ (A(t), f(t)).$$

这就是有名的法瓦尔第二定理. 法瓦尔第一定理讨论了另一情况: 如果每一齐次壳方程都不存在非零有界解, 则对每一 $B(t) \in H(A(t))$ 及每一 $g(t) \in H(f(t))$, 壳方程

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x + g(t)$$

的有界解都是概周期的.

法瓦尔定理(Favard theorems) 见"法瓦尔条件".

博赫纳定理(Bochner theorem) 判断非齐次线性概周期微分方程存在概周期解的一个命题. 如果对每一 $B(t) \in H(A(t))$, 齐次壳方程

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x$$

的所有有界解都是概周期的, 那么, 非齐次线性概周期微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

的所有有界解也都是概周期的.

指数型二分性(exponential dichotomy and spectrum) 关于线性微分方程的一种重要性质. 设齐次线性微分方程系

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

在 R 上连续, 其中 $A(t)$ 是 n 阶方阵, 如果存在投影 P 及正的常数 $k \geq 1$, $\alpha > 0$ 使

$$\| X(t)PX^{-1}(s) \| \leq k \exp(-\alpha(t-s)) \ (t \geq s),$$

$$\| X(t)(I-P)X^{-1}(s) \| \leq k \exp(\alpha(t-s)) (s \geq t),$$

其中 $X(t)$ 是(1)的基本解方阵, 则称(1)在 R 上具有指数型二分性. 全轴上线性系统的指数型二分性在稳定性理论中是一种有力的工具. 在概周期微分方程系的研究中也是非常有用的工具. 如果 $A(t)$ 是概

周期方阵，$f(t)$是概周期向量，且(1)具有指数型二分性，那么，非齐次线性概周期方程系

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t)$$

存在惟一概周期解，它可表达为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)PX^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau$$
$$-\int_{t}^{-\infty}X(t)(I-P)X^{-1}(\tau)d\tau,$$

且 $\mathrm{mod}(x(t))\subset\mathrm{mod}(A(t),f(t))$，同时

$$\|x(t)\|\leqslant\frac{2k}{\alpha}\|f(t)\|.$$

谱点(spectrum) 线性系统中的一个重要概念. 设齐次线性微分方程为

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x, \tag{1}$$

在R上连续，其中 $A(t)$是 n 阶方阵，对实数 λ，若线性系统

$$\frac{dx}{dt}=(A(t)-\lambda I)x$$

不具有指数型二分性，则称 λ 为齐次微分方程(1)的谱点. 从谱点的定义很容易得到下面的事实：

1. 方程(1)具有指数型二分性的充分必要条件是实轴上原点不是(1)的谱点.

2. 方程(1)的谱点集合是闭的，如果 $A(t)$有界，则(1)的谱点集合 Σ 是非空的 k 个闭区间，$k\leqslant n$.

3. 如果 Σ 是孤立点集，就称方程(1)具有点谱.

4. 当 $A(t)$是常数方阵，周期方阵，则(1)具有点谱.

指数型二分性与谱点有密切的关系.

拟周期函数(quasi-periodic function) 一种特殊的概周期函数，是周期函数的推广. 如果有 m 元函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，使 $F(x_1,x_2,\cdots,x_m)$对于每个 x_j 都是以 2π 为周期，那么，称 $f(t)=F(\omega_1t,\omega_2t,\cdots,\omega_mt)$为拟周期函数，其中 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 是常数. 若 $F(x_1,x_2,\cdots,x_m)$对 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 属于 C^r，则称 $f(t)$属于 C^r. 如果 $A(t)$是 n 阶拟周期方阵，就称

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \tag{1}$$

为拟周期线性系统，并存在下述结论：

1. 对(1)常存在拟周期线性变换 $y=Q(t)x$，把(1)变换为拟周期上三角型线性系统

$$\frac{dy}{dt}=C(t)y,$$

其中 $C(t)$是上三角型拟周期方阵. 设 $C(t)$的对角线元素为 $C_1(t),C_2(t),\cdots,C_n(t)$，称

$$B_j=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t C_j(s)ds\ (j=1,2,\cdots,n)$$

为(1)的特征指数根.

2. 如果：

1) $A(t)\in C^r$，$\tau=(N+1)\tau_0$，$\tau_0=2(m+1)$，$N=\frac{1}{2}n(n+1)$.

2) $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 满足下列关系式：

① $\left|\sum_{j=1}^{m}k_j\omega_j\right|\geqslant k(\omega)\left(\sum_{j=1}^{m}|k_j|\right)^{-(m+1)}$

② $\left|\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m}k_j\omega_j+\sum_{l=1}^{m}j_l\beta_l,\right|\geqslant k(\omega,\beta)(1+\|k\|^{m+1})^{-1}$,

其中 $k=(k_1,k_2,\cdots,k_m)$，$j=(j_1,j_2,\cdots,j_n)$是整向量，$k\neq0$，$\mathrm{i}^2=-1$，$|\Sigma j_n|\leqslant1$，$\Sigma|j_n|\leqslant2$，$k(\omega)$，$k(\omega,\beta)$是正的常数，那么，(1)存在拟周期线性变换，把(1)化为常系数线性系统.

上述结果也称为拟周期线性系统的弗洛奎特理论.

拟周期线性系统(quasi-periodic linear system) 见"拟周期函数".

概自守函数(almost-automorphic function) 较概周期函数更弱的一类函数. 如果对于 R^n 的任意紧子集 D，$f(t,x)$在 $R\times D$ 上有界，一致连续，而且对于任何数列$\{t_k\}$，都存在子集$\{t_{k_m}\}$，$\{t_{k_p}\}$，使得

$$\lim_{p\to\infty}\lim_{m\to\infty}f(t-t_{k_m}-t_{k_p},x)=f(t,x)$$

在 $R\times D$ 中任何紧集上一致地成立，那么，称 $f(t,x)$是 t 的概自守函数，且关于 $x\in D$ 是一致的. 类似地还可给出函数 $f(t)$及 n 阶矩阵为概自守函数的定义. 当 $f(t,x)$是一致概自守函数时，

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

称为一致概自守微分方程. 又对于概自守线性微分方程

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x, \tag{1}$$

具有下面的性质：如果(1)的任一非零有界解 $x(t)$具有

$$\inf_{t\in R}\|x(t)\|>0,$$

则概自守线性微分方程

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+tf(t) \tag{2}$$

具有有界解的充分必要条件是(2)具有概自守解. 概自守系统的这个性质与法瓦尔定理有些类似，但条件比法瓦尔定理更弱.

概自守微分方程(almost-automorphic differential equation) 见"概自守函数".

关于解的极限集上一致稳定性(uniform stability with respect to limit set of solutions) 一致概周期微分方程存在概周期解的一类稳定性. 如果

$$x = \varphi(t)$$

是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x) \tag{1}$$

的有界解，而且对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $x_0 \in \Omega_\varphi \cap N(\varphi_0,\varepsilon)$，其中 $N(\varphi(t_0),\delta)=\{x_0 \mid \| x_0-\varphi(t_0) \| <\delta\}$，$\Omega_\varphi$ 是 $\varphi(t)$ 的正极限集，就有

$$\| \varphi(t) - x(t,t_0,x_0) \| < \varepsilon \ (t \geqslant t_0),$$

那么，称 $\varphi(t)$ 是(1)关于极限集的一致稳定解. 对于定常系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x),$$

有界解关于极限集上一致稳定的充分必要条件是存在概周期解. 对于概周期系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x),$$

如果存在有界解关于极限集上一致稳定，那么它具有概周期解.

拓扑等价(topological equivalence)　刻画微分方程的解之间的关系的重要概念. 如果对微分方程系

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(t,x), \tag{2}$$

存在向量函数 $H(t,x)$ 满足下列条件，则称(1)，(2)为拓扑等价：

1. 当 $\| x \| \to +\infty$ 时，$\| H(t,x) \| \to +\infty$ 一致地成立，且

$$\lim_{x\to x_0} H(t,x) = H(t_0,x_0)$$

一致地成立.

2. 对于 $t \in \mathrm{R}$，$H_t: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$，定义为 $H_t(x) = H(t,x)$ 是同胚映射.

3. $G: \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ 定义为 $G(x,t)=(H_t)^{-1}(x)$ 也具性质 1.

4. 若 $x(t)$ 是(1)的解，则 $H(t_1,x(t))$ 是(2)的解；若 $y(t)$ 是(2)的解，则 $G(t,y(t))$ 是(1)的解.

设 $A(t)$ 和 $B(t)$ 在 R 上连续，如果有常数 $\delta>0$，只要 $\| A(t)-B(t) \| <\delta$，使线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x \tag{3}$$

与线性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B(t)x$$

拓扑等价，那么，称(3)具有结构稳定性. 有界线性系统具有结构稳定性的充分必要条件是它自己具有指数型二分性.

结构稳定性(structural stability)　见"拓扑等价".

局部线性化(local linearization)　讨论微分方程线性化的一个概念. 对于微分方程系

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \tag{1}$$

其中 $f(t,0)=0$，且(1)与零解的变分方程系

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Df(t,0)x \tag{2}$$

在原点的某邻域内拓扑等价，那么，称(1)为可局部线性化. 如果(2)具有指数型二分性，那么(1)可局部线性化. 如果(1)是概周期系统，那么，它的拓扑等价函数也是概周期的. 因此，如果(1)是概周期系统，(2)具有指数型二分性，那么，(1)在原点某邻域内不存在非零的概周期解.

行优势(row dominant)　保证齐次线性系统具有指数型二分性的条件. 如果矩阵 $A(t)$ 的元素 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 对某 $\delta>0$ 及一切 $t\in \mathrm{R}$ 满足

$$|\mathrm{Re}\, a_{ii}(t)| \geqslant \sum_{j\neq i} |a_{ij}(t)| + \delta \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则称 $A(t)$ 有行优势. 如果满足

$$|\mathrm{Re}\, a_{ii}(t)| \geqslant \sum_{j\neq i} |a_{ji}(t)| + \delta \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则称 $A(t)$ 有列优势. 利用 $A(t)$ 有行(或列)优势可给出齐次线性微分方程具有指数二分性的准则，从而可借助有行(或列)优势讨论非齐次线性概周期微分方程概周期解的存在性.

列优势(column dominant)　见"行优势".

最小范数解(minimum norm solutions)　讨论概周期解存在性的一个重要概念. 对常系数非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + f(t),$$

不难看出，如果 n 维连续向量 $f(t)\neq 0$，则方程的有界解的集合在 n 维空间是一个不含坐标原点的凸集，这个凸集中必有元素具有最小范数. 该元素所对应的微分方程的解称为具有最小范数解. 这个事实对一般非线性微分方程 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=f(t,x)$ 而言并不是明显的. 设 $x_0(t)$ 是此非线性方程的一个非零有界解，K 为包含着 $x_0(t)$ 的值域的 R^n 中的紧集. 记

$$\lambda = \inf\{ \| x(t) \| \mid x(t)$$

为 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=f(t,x)$ 的解，且对一切 $t\in \mathrm{R}$ 有 $x(t) \subset K\}$，这里

$$\| x(t) \| = \sup_{t\in \mathrm{R}} |x(t)|,$$

那么，只要 $f(t,x)$ 在 $\mathrm{R}\times S$ 上定义且有界，其中 S 为 R^n 中包含着 K 也包含原点的球，则 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=f(t,x)$ 必有具有最小范数的解 $y(t)$，而 $\| y(t) \| = \lambda$ 为最小范数. 通常利用最小范数解的惟一性以及概周期函数的点态定义(参见"概周期函数")往往可证明某有界解的概周期性.

最小范数(minimum norm) 见"最小范数解".

壳扰动下的稳定性(slability under disturbances from the hull) 一致概周期微分方程存在概周期解的一类稳定性条件. 设 K 为 E^n 中紧集, $f(t,x)$是 u. a. p. 的, $\forall x\in K$, 一致概周期微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

的解 $\varphi_f(t;0,\bar{x})$称为在壳 $H(f)$扰动下为稳定的, 如果对每一 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得只要 $\|f(t+\tau,x)-g(t,x)\|<\delta$ 对$\tau>0, g\in H(f), x\in K$, 以及 $\|\varphi_f(\tau,0,\bar{x})-x_0\|<\delta$ 时, 就有

$$\|\varphi_f(t+\tau;0,\bar{x})-\varphi_g(t;0,x_0)\|<\varepsilon\ (t\geqslant 0).$$

一致概周期微分方程的有界解在壳扰动下为稳定的假设下, 此有界解必是渐近概周期解, 从而得出其概周期部分正是方程的概周期解. 在定性稳定性理论中, 有方程 $dx/dt=f(t,x)$ 的解$\varphi_f(t;t_0,\bar{x})$在$[t_0,+\infty)$上称为完全稳定(即在经常扰动下稳定的)概念, 即对每一 $\varepsilon>0$, 存在$\delta(\varepsilon)>0$, 使得只要 $\|\bar{x}-x_0\|<\delta(\varepsilon)$, $\|R(t,x)\|<\delta(\varepsilon)$, $(t,x)\in[t_0,+\infty)\times K$, 则 $\|\varphi(t;t_0,\bar{x})-\varphi_{f+R}(t;t_0,x_0)\|<\varepsilon, \forall t\geqslant t_0$, 其中 $\varphi_{f+R}(t;t_0,x_0)$是

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+R(t,x)$$

的以(t_0,x_0)为始值的解. $f(t,x), R(t,x)\in C(R^+\times K, E^n)$. 比较上述两定义可知, 解$\varphi_f(t;0,\bar{x})$在壳$H(f)$扰动下为稳定也就是微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t+\tau,x)$$

的解 $\varphi_f(t+\tau;\tau,\bar{x})$在 $t\in[0,+\infty)$上是完全稳定的. 这是因为对 $g\in H(f)$, 壳方程

$$\frac{dx}{dt}=g(t,x)$$

可写成

$$\frac{dx}{dt}=f(t+\tau,x)+[g(t,x)-f(t+\tau,x)],$$

可视 $g(t,x)-f(t+\tau,x)\equiv R(t+\tau,x)\in H(f)$, $R(t+\tau,x)$是个经常扰动.

强稳定性(strong stability) 一种较强的稳定性质. 称解 $x(t)$是强稳定的, 如果对任给 $\varepsilon>0$, 存在$\delta(\varepsilon)>0$, 使得只要 $\|x(t_1)-x(t_2)\|<\delta$, 便有 $\|x(t+t_1)-x(t+t_2)\|<\varepsilon, \forall t\in R$. 如果能证明有有界解是强稳定的, 那么它就是概周期解. 反之, 在微分方程满足标准假设时, 方程的任何概周期解都是强稳定的.

可继承性(inherited property) 关于一致概周期微分方程解的一种重要性质. 如果一致概周期微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

的解 $\varphi(t)$相对于方程其他解具有性质 P, 若$T_\alpha f=g, T_\alpha\varphi=\psi$, 而$\psi(t)$相对于

$$\frac{dx}{dt}=g(t,x)$$

的解也具有性质 P, 则称性质 P 是可继承的. 也就是说, 若解 $\varphi(t)$具有可继承的性质 P, 那么, 性质 P 在算子 T_α 的作用下是自封的. 通常往往利用有界解的某些稳定性质来建立有界解的概周期性, 诸如一致稳定、一致渐近稳定、完全稳定或壳扰动下的稳定等, 这些稳定性质在方程满足标准假设时都是可继承的.

半分离解(semi-separated solutions) 概周期微分方程的一个概念. 概周期微分方程的解 $\varphi(t)\subset K$ 称为在 K 中是半分离的, 如果对$t\in R_+$, 整个都包含在 K 中的任何解 $\bar{\varphi}(t)$, 都存在常数$\lambda(\varphi)>0$, 使得 $\|\varphi(t)-\bar{\varphi}(t)\|\geqslant\lambda(\varphi)(t\in R)$. 这个概念是芬克(Fink, A. M.)于 1972 年引进的.

设 $f(t,x)$是 u. a. p. 的, 对 $x\in K$, 微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

在 K 中的解 $\varphi(t)$所具有的性质 P 称为半分离的, 如果对方程在 K 中具有性质 P 的任一其他的解$\psi(t)$, 都存在常数 $\lambda(\varphi,\psi)>0$, 使得 $\|\varphi(t)-\psi(t)\|\geqslant\lambda(\varphi,\psi)(t\in[-\infty,0])$. $\lambda(\varphi,\psi)$称为可分离常数.

如果半分离性质 P 是可继承的, 且方程 $dx/dt=f(t,x)$在 K 中仅有有限个具有性质 P 的解, 那么对每一$g\in H(f)$, 方程 $dx/dt=g(t,x)$在 K 中有相同个数具有性质 P 的解, 且可选取可分离常数, 与解和方程无关. 半分离性质的可继承性对保证概周期解的存在性起着重要作用. 如果一致概周期微分方程仅有有限个在 K 内具有性质 P 的解, 又性质 P 是半分离和可继承的, 那么, 每个这样的解在 R_-上是渐近概周期的, 从而在 K 内有概周期解.

李亚普诺夫函数法(method of Liapunov functions) 研究概周期解存在性的一种方法. 用李亚普诺夫函数法讨论概周期解的存在性问题通常有两个途径, 或保证紧集 $K\subset R^n$ 中有界解的惟一性或确定有界解的某种稳定性质, 从而分别藉阿梅留定理或半分离性质来建立概周期解的存在性. 例如, 考虑方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),$$

其中 $f(t,x)\in C(R\times D, R^n)$, 开集 $D\subset R^n$(或 $D=R^n$), f 为 u. a. p. 的$\forall x\in D$, 如果方程有解 $\varphi(t)\subset S$ 对 $t\geqslant 0$, 这里 S 为 D 中的紧集. 那么, 利用李亚普诺夫函数法有如下结果:

1. 设在 $\mathrm{R}_+\times S$ 上存在 $V(t,x)$，在 R_+ 上 $V(t,\varphi(t))$ 有界，又存在依赖于 S 的常数 L，对 $t\in\mathrm{R}_+$，$x,y\in S$ 有

$$|V(t,x)-V(t,y)|\leqslant L\|x-y\|,$$
$$\dot V(t,x)\geqslant a(\|x-\varphi(t)\|),$$

$a(r)$ 连续正定，则方程存在惟一概周期解 $p(t)$，$\mathrm{mod}(p(t))\subset\mathrm{mod}(f)$.

2. 若取 $D=\{x\mid\|x\|<B^*\}$，$S=\{x\mid\|x\|\leqslant B<B^*\}$，如果对 $t\geqslant 0$，$\|x-\varphi(t)\|\leqslant(B^*-B)/2$，存在 $V(t,x)$ 满足

$$a(\|x-\varphi(t)\|)\leqslant V(t,x)\leqslant b(\|x-\varphi(t)\|),$$

其中 $a(r)$ 和 $b(r)$ 是连续递增正定函数，又有正数 L 及 α 使

$$|V(t,x)-V(t,y)|\leqslant L\|x-y\|,$$
$$\dot V(t,x)\leqslant-\alpha V(t,x),$$

则方程存在惟一的概周期解，它是一致渐近稳定的，$p(t)\subset S$ 且 $\mathrm{mod}(p)\subset\mathrm{mod}(f)$.

平均法(method of averaging)　研究含小参数微分方程常用的一种方法. 考虑含小参数的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x,\varepsilon),$$

其中 $f(t,x,\varepsilon)$ 是 u. a. p. 的 n 维连续向量值函数，对 $(x,\varepsilon)\in S\times\{\varepsilon\}$，$S\times\{\varepsilon\}$ 为紧集，$f(t,x,0)$ 的平均值记为

$$f_0(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\tau,x,0)\mathrm{d}\tau.$$

平均法的基本思想是以平均方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varepsilon f_0(x)$$

的解的性态来刻画所考虑的含小参数方程的解的性态. 哈尔(Hale,T. K.)证明：如果当 $(x,\varepsilon)\to(y,0)$ 时，对 t 一致地有 $f(t,x,\varepsilon)\to f(t,y,0)$，

$$\frac{\partial f(t,x,\varepsilon)}{\partial x}\to\frac{\partial f(t,y,0)}{\partial x},$$

对某个 $x_0\in S$ 有 $f_0(x_0)=0$，且 $\partial f_0(x_0)/\partial x$ 没有实部为零的特征根，则存在 $\varepsilon_0>0$，对 $(t,\varepsilon)\in\mathrm{R}\times(0,\varepsilon_0)$，方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x,\varepsilon)$$

有满足 $x(t,0)=x_0$ 的解 $x(t,\varepsilon)$，它在 x_0 的邻域中是惟一的，对每一固定的 $\varepsilon>0$，它是 t 的概周期函数，$\mathrm{mod}(x(t,\varepsilon))\subset\mathrm{mod}(f)$. 如果 $\partial f_0(x_0)/\partial x$ 的所有特征根都有负实部(或至少有一个特征根具正实部)，那么，$x(t,\varepsilon)$ 是一致渐近稳定的(或不稳定的).

抽象空间中的微分方程

抽象空间中的微分方程(differential equations in abstract spaces)　用泛函分析理论研究抽象空间中的微分方程的新兴领域. 它的主要内容是抽象空间微分方程的基本理论(诸如柯西问题、边值问题解的存在性、惟一性、稳定性等)及其应用. 正如韦独新(Vidossieh,G.)于 1974 年在巴西数学会所作的综述报告所指出的，这个方向之所以重要，是因为它有很多重要的应用. 为此，他列举了巴拿赫空间微分方程理论的四大发现：1950 年，迪厄多内(Dieudonné,J. A.)构造了一个常微分方程的基本存在定理——皮亚诺定理在无限维巴拿赫空间的情形不再成立的著名例子，使这个领域引起了人们的兴趣；1960 年前后，人们发现许多来源于物理模型的复杂的偏微分方程问题可以归结为适当的巴拿赫空间中的常微分方程问题来解决；1970 年，拉沙塔(Lasota,A.)与亚可(Yarko)首先注意到某些泛函方程的问题也可以用适当的巴拿赫空间中的微分方程问题来解决；巴拿赫空间微分方程理论可以运用到非线性分析得到各种不动点的存在定理. 这足以说明抽象空间中的微分方程理论有着深刻的实际背景与广阔的应用前景.

近 30 年来，由于希尔(Hille,(C.)E.)、吉田耕作(Yosida,K.)、马丁(Martin,R. H.)、丹姆灵(Deimling,K. D)、拉克希米卡萨姆(Lakshmikantham,V.)、加藤敏夫、法托里尼(Fattorini,H. O.)与巴布(Burbu,V.)等人的工作，巴拿赫空间常微分方程理论有了很大的进展. 1976—1985 年间，由马丁、丹姆灵、拉克希米卡萨姆、法托里尼和巴布先后写了六本专著，总结了这个领域的工作.

抽象柯西问题(abstract Cauchy problem)　抽象空间中微分方程的基本定解问题. 寻求可微抽象函数 $x:[t_0,t_0+\delta]\to D$，$\delta\in(0,a]$，使当 $t\in[t_0,t_0+\delta]$ 满足 $x'=f(t,x)$，$x(t_0)=x_0$ 的问题称为抽象柯西问题，其中 X 是实巴拿赫空间，$D\subset X$，$x_0\in D$，$f:[t_0,t_0+a]\times D\to X$，而函数 $x=x(t)$ 称为该问题的解，$[t_0,t_0+\delta]$ 是解的定义区间. 特别地，当 $X=\mathrm{R}^n$ 时，它就是经典常微分方程中所提出的柯西问题.

抽象柯西问题的皮卡定理(Picard theorem for abstract Cauchy problem)　抽象柯西问题的基本存在惟一性定理. 经典常微分方程的皮卡定理对抽象柯西问题仍然成立. 设 X 是实巴拿赫空间，$D\subset X$，$x_0\in D$，$J=[t_0,t_0+a]\subset\mathrm{R}$，$f:J\times D\to X$. 考察抽象柯西问题

$$x'=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0,\tag{1}$$

则有如下结论：

1. 设 $f\in C(J\times D,X)$，并满足李普希茨条件：存在常数 $L>0$，使对任意的 $x,y\in D$，满足

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant L\|x-y\|,$$

则有：

1）当 $D=X$ 时，问题(1)在 J 上存在惟一解.

2）当 $D=\overline{B(x_0,r)}=\{x\in X \mid \|x-x_0\|\leqslant r\}$，并且在 $J\times D$ 上，$\|f(t,x)\|\leqslant M$ 时，问题(1)在区间 $[t_0,t_0+\delta]$ 上存在惟一解，其中 $\delta=\min(a,r/M)$.

2. 若 $f\in C(J\times D,X)$，并满足局部李普希茨条件：对于任意 $(t,x)\in J\times D$，存在数 $\eta=\eta(t,x)$ 和 $L=L(t,x)$，以及 x 的某一邻域 $U(x)$，使得当 $s\in[t,t+\eta]\cap J$，$u,v\in U(x)$ 时，有

$$\|f(s,u)-f(s,v)\|\leqslant L\|u-v\|,$$

则问题(1)存在惟一解，它的定义区间可能是整个区间 J，也可能是某个区间 $[t_0,t_0+\delta]\subset J$.

迪厄多内的例子(the example of Dieudonné) 说明经典常微分方程的柯西问题的基本存在定理——皮亚诺定理在无限维巴拿赫空间的情形不再成立的一个著名的例子. 此例迪厄多内(Dieudonné, J. A.)构造于 1950 年. 考察集合

$$c_0=\{x=\{x_j\}\mid x_j\in \mathrm{R}, \lim_{j\to\infty}x_j=0\},$$

并赋予范数 $\|x\|=\sup_j|x_j|$ 构成巴拿赫空间. 令 $e_i=\{e_{ij}\}$，其中 $e_{ij}=\delta_{ij}$(克罗内克记号)，从而每一元素 $x\in c_0$ 可以表示为

$$x=\{x_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}x_je_j.$$

今取

$$f(x)=2\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{|x_j|}e_j,\quad x_0=\sum_{j=1}^{\infty}j^{-2}e_j,$$

则抽象柯西问题 $x'=f(x)$，$x(0)=x_0$ 的右端函数 $f(x)$ 是连续的，容易证明上述问题的解不存在.

非紧性测度(measures of noncompactness) 抽象空间微分方程理论的基本概念. 设 X 是巴拿赫空间，$\mathscr{L}$ 是 X 的有界子集族. 豪斯多夫非紧性测度 $\beta:\mathscr{L}\to\mathrm{R}$ 定义为：$\beta(B)=\inf\{\varepsilon>0\mid B$ 能够用有限个半径为 ε 的球覆盖$\}$，$B\in\mathscr{L}$. 库拉托夫斯基非紧性测度 $\alpha:\mathscr{L}\to\mathrm{R}$ 定义为：$\alpha(B)=\inf\{d>0\mid B$ 能够用有限个直径 $\leqslant d$ 的集合覆盖$\}$，$B\in\mathscr{L}$. 非紧性测度 $\gamma=\alpha$ 或 β 具有下列基本性质：

1. 对 $B\in\mathscr{L}$，$\gamma(B)=0$ 的充分必要条件是 $\overline{B}$ 为紧集.

2. γ 是半范数，即 $\gamma(\lambda B)=|\lambda|\gamma(B)$，$\gamma(B_1+B_2)\leqslant\gamma(B_1)+\gamma(B_2)$，其中

$$B_1+B_2=\{x_1+x_2\mid x_1\in B_1,x_2\in B_2\}.$$

3. 对任意的 $B_1,B_2\in\mathscr{L}$，若 $B_1\subset B_2$，则 $\gamma(B_1)\leqslant\gamma(B_2)$，又 $\gamma(B_1\cup B_2)=\max\{\gamma(B_1),\gamma(B_2)\}$.

4. 对任意 $B\in\mathscr{L}$，$\gamma(\mathrm{conv}B)=\gamma(B)$，$\mathrm{conv}B$ 表 B 的凸包.

5. 非紧性测度 γ 关于豪斯多夫度量：

$$d_H(B_1,B_2)=\max\{\sup_{B_1}\rho(x,B_2),\sup_{B_2}\rho(x,B_1)\}$$

是连续的，特别 $\gamma(B)=\gamma(\overline{B})$.

半内积(semi-inner product) 抽象空间微分方程理论的基本概念. 设 X 是巴拿赫空间，X^* 是 X 的对偶空间，由对任意的 $x\in X$，$Fx=\{x^*\in X^*\mid x^*(x)=\|x\|^2,\|x^*\|=\|x\|\}$ 所定义的映射 $F:X\to 2^{X^*}$(2^{X^*} 表示 X^* 的子集的全体)称为 X 的对偶映像. 利用对偶映像 F 定义上、下半内积 $(\cdot,\cdot)_\pm:X\times X\to\mathrm{R}$ 分别为

$$(x,y)_+=\sup\{y^*(x)\mid y^*\in Fy\},$$
$$(x,y)_-=\inf\{y^*(x)\mid y^*\in Fy\}.$$

巴拿赫空间中的半内积概念在某种意义下是希尔伯特空间中内积概念的推广. 半内积具有下列性质：

1. $(x+y,z)_\pm\leqslant(x,z)_\pm+(y,z)_\pm$，且 $|(x,y)_\pm|\leqslant\|x\|\|y\|$，$(x+\alpha y,y)_\pm=(x,y)_\pm+\alpha\|y\|^2$，$\forall\alpha\in\mathrm{R}$，$(\alpha x,\beta y)_\pm=\alpha\beta(x,y)_\pm$，$\forall\alpha\beta\geqslant0$，$\alpha,\beta\in\mathrm{R}$.

2. 如果 X^* 是严格凸的，那么 $(\cdot,\cdot)_+=(\cdot,\cdot)_-$. 特别地，当 X 是希尔伯特空间时，$(\cdot,\cdot)_+$ 与 $(\cdot,\cdot)_-$ 都等于内积 $(\cdot,\cdot)$.

3. $(x,y)_+=\max\{y^*(x)\mid y^*\in Fy\}$，
$(x,y)_-=\min\{y^*(x)\mid y^*\in Fy\}$.

4. 半内积 $(\cdot,\cdot)_+:X\times X\to\mathrm{R}$ 是上半连续的；$(\cdot,\cdot)_-:X\times X\to\mathrm{R}$ 是下半连续的.

5. 如果 X^* 是一致凸的，则 $(\cdot,\cdot)_\pm$ 在 $X\times X$ 的有界子集上是一致连续的.

6. 如果 $x:(a,b)\to X$ 关于 $t\in(a,b)$ 是可微的，而且 $\varphi(t)=\|x(t)\|$，则 $\varphi(t)D^-\varphi(t)\leqslant(x'(t),x(t))_-$($D^-$ 表示左导数).

抽象柯西问题局部解的存在性(existence of local solutions for abstract Cauchy problem) 利用紧型条件得到的关于抽象柯西问题局部解的存在定理. 对抽象柯西问题

$$x'=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0,\tag{1}$$

设 X 是巴拿赫空间，$D=B(x_0,r)=\{x\in X\mid \|x-x_0\|<r\}$，$J=[t_0,t_0+a]\subset\mathrm{R}$，$R_0=J\times D$. 利用紧型条件有以下三个存在定理：

1. 抽象柯西问题(1)在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上解存在，若：

1）$f\in C(R_0,X)$，$\|f(t,x)\|\leqslant M$ 对 $(t,x)\in R_0$，$\delta=\min(a,r/(M+1))$.

2）f 在 R_0 上一致连续，对任意的 $A\subset B(x_0,r)$ 有 $\alpha(f(t,A))\leqslant g(t,\alpha(A))$.

3）$g\in C(J\times[0,2r],\mathrm{R})$，$g(t,0)=0$ 及 $u(t)\equiv0$ 是 $u'=g(t,u)$，$u(t_0)=0$ 的惟一解.

2. 若满足定理 1 中的条件 1)，此外还满足对任意的 $A\subset B(x_0,r)$，$\alpha(f(J,A))\leqslant g(\alpha(A))$，其中 $g:\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}_+$ 是连续的且初值问题 $u'=g(u)$，$u(0)=0$ 在 J 上只有平凡解 $u\equiv0$，则(1)在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上解存在.

3.设：

1) $f\in C(R_0,X)$，且对$(t,x)\in R_0$，$\|f(t,x)\|\leqslant\mu(t)$，其中$\mu\in L^1(J)$，令$0<\delta<a$满足

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta}\mu(\tau)\mathrm{d}\tau<r.$$

2) 对$t\in J,B\subset D,\gamma(f(t,B))\leqslant g(t,\gamma(B))$.

3) 满足下列条件之一，则抽象柯西问题(1)在$[t_0,t_0+\delta]$上存在解：

① X是wcg空间(即存在弱列紧集$K\subset X$，使K张成的线性空间在X中稠密)，$\gamma=\beta$，g满足定理1中的条件3).

② X是任意巴拿赫空间，$\gamma=\alpha$或$\gamma=\beta$，$2g$满足定理1中的条件3).

抽象柯西问题解的存在惟一性(existence and uniqueness of solution for abstract Cauchy problem)　利用耗散型条件得到的关于抽象柯西问题解的存在惟一性定理，其中耗散型条件比李普希茨条件更为一般(参见“抽象柯西问题的皮卡定理”).对于抽象柯西问题

$$x'=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0,\tag{1}$$

利用耗散型条件有以下的存在惟一性定理：设X是实巴拿赫空间，$J=[t_0,t_0+a]\subset\mathsf{R}$，$D=B(x_0,r)=\{x\in X,\|x-x_0\|<r\}$，$f:J\times D\to X$连续，且在$J\times D$上，$\|f(t,x)\|\leqslant M$及满足耗散型条件：对$t\in[t_0,t_0+a]$，$x,y\in D$，$(f(t,x)-f(t,y),x-y)_-\leqslant g(t,\|x-y\|)\|x-y\|$，其中$g\in C(J\times\mathsf{R}_+,\mathsf{R})$，$g(t,0)\equiv0$且$u(t)=0$是初值问题$u'(t)=g(t,u)$，$u(t_0)=0$的惟一解，则抽象柯西问题(1)在$[t_0,t_0+\delta](\delta<\min(a,r/M))$上存在惟一解.

抽象柯西问题整体解的存在性(existence of global solutions for abstract Cauchy problem)　利用耗散型条件得到的整体解的存在定理.对于抽象柯西问题

$$x'=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0,\tag{1}$$

有如下的整体解的存在性定理：设X是巴拿赫空间，抽象柯西问题(1)在$[t_0,+\infty)$上的解存在，如果f满足：

1. $f\in C(\mathsf{R}_+\times X,X)$，$f$在有界集上有界且对任意$(t_0,x_0)\in\mathsf{R}_+\times X$，(1)存在局部解.

2. $(f(t,x),x)_-\leqslant g(t,\|x\|)\|x\|$，$(t,x)\in\mathsf{R}_+\times X$，其中$g\in C(\mathsf{R}_+\times\mathsf{R}_+,\mathsf{R})$及初值问题：$u'=g(t,u)$，$u(t_0)=\|x_0\|$的最大解$r(t)$在$[t_0,+\infty)$存在且是非负的.

右端函数不连续的抽象柯西问题(abstract Cauchy problem with the discontinous right side function)　右端函数满足卡拉西奥多里条件的抽象柯西问题的广义解.抽象柯西问题

$$x'=f(t,x),\quad x(0)=x_0\tag{1}$$

当右端函数f不连续时，有以下的(广义)解的存在定理：设X是巴拿赫空间，$J=[0,a]\subset\mathsf{R}$，$D=\overline{B(x_0,r)}\subset X$；$f:J\times D\to X$关于$t$可测，关于$x$一致连续，$\|f(t,x)\|\leqslant M(t)$，其中$M\in L^1(J)$，并满足

$$(f(t,x)-f(t,y),x-y)_-\leqslant g(t\|x-y\|)\|x-y\|$$

对$x,y\in D$及a.e.$t\in J$，其中$g:J\times\mathsf{R}_+\to\mathsf{R}_+$满足卡拉西奥多里条件，且$g(t,\cdot)$是递增的及$u(t)\equiv0$是在$J$上a.e.满足$u'=g(t,u)$，$u(0)=0$的惟一(广义)解.则问题(1)在$[0,b]$上存在绝对连续解(广义解)，其中$b<a$使

$$\int_0^b M(s)\mathrm{d}s\leqslant r.$$

闭集上的抽象柯西问题(abstract Cauchy problem in closed sets)　初值x_0是巴拿赫空间X的闭子集的边界点的抽象柯西问题.设X是实巴拿赫空间，$D\subset X$是闭子集，求函数$x:[0,\delta]\to D$使满足

$$x'(t)=f(t,x(t)),\quad x(0)=x_0,$$

其中$x_0\in D$(由于D是闭集，x_0可能是D的边界点).这类问题称为闭集上的抽象柯西问题.考虑这类问题时，要求$f(t,x)$在边界点满足条件：

$$\lim_{\lambda\to0^+}\lambda^{-1}\rho(x+\lambda f(t,x),D)=0\tag{1}$$

对$t\in[0,\delta]$，$x\in\partial D$，$\rho(\cdot,\cdot)$表示距离，∂D是D的边界.(1)式称为边界条件.

闭集上的解的存在性(existence of solution in closed sets)　闭集上的抽象柯西问题的解的存在定理.设X是巴拿赫空间，$D\subset X$，$J=[0,a]\subset\mathsf{R}$，$x_0\in D$，$D_r=D\cap\overline{B(x_0,r)}$是闭集，$f\in C(J\times D_r,X)$且$\|f(t,x)\|\leqslant M$.考察柯西问题

$$x'=f(t,x),\quad x(0)=x_0.\tag{1}$$

设$\delta<\min(a,r/M)$，为方便起见，先列出如下的假设条件：

1. $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\lambda^{-1}\rho(x+\lambda f(t,x),D)=0$，对$t\in J$，$x\in\overline{B(x_0,r)}\cap\partial D$.

2. $\alpha(f(J\times B))\leqslant g(\alpha(B))$，对任意$B\subset D$，这里$g\in C(\mathsf{R}_+,\mathsf{R}_+)$是不减的，且$u'=g(u)$，$u(0)=0$在$J$上只有零解$u(t)\equiv0$.

3. $(f(t,x)-f(t,y),x-y)_+\leqslant L\|x-y\|^2$对$t\in J$，$x,y\in D_r$，$L>0$是常数.

若满足条件1和2，则(1)在$[0,\delta]$上存在解；若满足条件1和3，则(1)在$[0,\delta]$上存在惟一解.

抽象空间的锥(cone in abstract spaces)　建立抽象空间微分不等式理论所需的基本概念.设K是巴拿赫空间X的真子集，满足：对$\lambda\geqslant0$，$\lambda K\subset K$，$K+K\subset K$，$K=\overline{K}$($\overline{K}$表示K的闭包)，$K\cap\{-K\}$

$=\{0\}$（0 表示空间 X 的零元），则称 K 是一个锥. 利用锥 K 可以在空间 X 中引进偏序"$\leqslant$"和"$<$"，进而定义正规锥. 对任意 $x,y\in X$，$x\leqslant y$，当且仅当 $y-x\in K$；$x<y$，当且仅当 K^0（K 的内点全体所成的集合）非空和 $y-x\in K^0$. 若由锥 K 在空间 X 中引进偏序，使每一有界单调序列必存在极限，则锥 K 称为正则锥；若存在实数 $N>0$，使得对任意 $u,v\in X$，$0\leqslant u\leqslant v$ 蕴涵 $\|u\|\leqslant N\|v\|$，则称锥 K 是正规的.

正则锥(regular cone)　见"抽象空间的锥".

正规锥(normal cone)　见"抽象空间的锥".

算子的拟单调性(quasimonotone of a operator)　建立抽象空间微分不等式的重要条件. 设 X 是巴拿赫空间，K 是 X 的一个锥且 K^0 非空，并由 K 在 X 中引进偏序. 记

$$K^*=\{c\in X^*\mid c(x)\geqslant 0,x\in K\},$$
$$K_0^*=\{c\in X^*\mid c(x)>0,x\in K^0\},$$

其中 X^* 表示 X 的对偶空间. 算子 $f:X\to X$ 若满足对 $x,y\in X$，$x\leqslant y$ 及某个 $c\in K_0^*$，$c(x)=c(y)$ 就推出 $c(f(x))\leqslant c(f(y))$，则称算子 f 是拟单调不减的.

关于拟单调算子，有下述断言：设 $u,v\in C^1(\mathbb{R}_+,X)$，$f\in C(\mathbb{R}_+\times X,X)$，且对每个 $t\in\mathbb{R}_+$，$f(t,x)$ 关于 x 是拟单调不减的；进而当 $t\in(t_0,+\infty)$，u,v 满足 $u'(t)-f(t,u(t))<v'(t)-f(t,v(t))$，则由 $u(t_0)<v(t_0)$ 推出当 $t\geqslant t_0$ 时 $u(t)<v(t)$.

最大解和最小解的存在性(existence of maximal and minimal solutions)　抽象柯西问题的最大解和最小解的存在定理. 设 X 是巴拿赫空间，$K\subset X$ 是一个锥且 K^0 非空，由 K 在 X 中引进偏序"$\leqslant$". $D=\overline{B(x_0,r)}\subset X$，$J=[0,a]\subset\mathbb{R}$. $f:J\times D\to X$ 连续且关于 x 是拟单调不减的，$\|f(t,x)\|\leqslant M$ 对 $(t,x)\in J\times D$ 并满足 $\alpha(f(J\times B))\leqslant g(\alpha(B))$，$B\subset D$，其中 $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 连续且使 $u'=g(u)$，$u(0)=0$ 只有零解 $u(t)\equiv 0$，$t\in J$. $\delta<\min\{a,r/M\}$. 则抽象柯西问题 $x'=f(t,x)$，$x(0)=x_0$ 在 $[0,\delta]$ 上（关于偏序"$\leqslant$"）存在最大解与最小解.

拟线性化方法(method of quasilinearization)　求解非线性方程柯西问题的一种方法. 在 f 关于 x 的弗雷歇导数 $f_x(t,x)$ 存在及其他附加条件下，可用一列线性方程柯西问题

$$z'=f(t,z_{n-1})+f_x(t,z_{n-1})(z-z_{n-1}),$$
$$z(t_0)=x_0$$

的解 $z_n(t)$ 去逼近非线性方程柯西问题

$$x'=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0\tag{1}$$

的解，其中 X 是巴拿赫空间，$D=B(x_0,r)\subset X$，$J=[t_0,t_0+a]$，$f\in C[J\times D,X]$. 设 K 是 X 的正则锥且 K^0 非空. 严格叙述如下：设 $\|f(t,x)\|\leqslant M$ 对 $(t,x)\in J\times D$，并且对每个 $t\in[t_0,t_0+a]$，f 关于 x 是拟单调不减的；对 $(t,x)\in J\times D$，$f_x(t,x)$ 存在、连续且有 $\|f_x(t,x)\|\leqslant L$，这里选取 a 满足 $a(M+2Lr)\leqslant r$；对每个 $t\in J$，$f(t,x)$ 在 $B(x_0,r)$ 是凸的. 则存在 $[t_0,t_0+a]$ 上一列函数 $\{z_n(t)\}$，使得：

1. $z_0(t)=x_0$，每个 $z_n(t)$（$t\in J$，$n=1,2,\cdots$）是线性方程 $z'=f(t,z_{n-1})+f_x(t,z_{n-1})(z-z_{n-1})$ 满足 $z(t_0)=x_0$ 的解，而且 $z_n(t)\leqslant x(t)$，这里 $x(t)$ 是(1)的解.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}z_n(t)=x(t)$ 在 $[t_0,t_0+a]$ 上是一致的.

单调迭代方法(monotone iterative methods)　构造性地给出微分方程问题的最大解、最小解的一种方法. 设 X 是巴拿赫空间，$K\subset X$ 是正规锥，考察抽象柯西问题

$$u'=f(t,u),\quad u(t_0)=u_0.\tag{1}$$

设 $v_0,w_0\in C^1(I,X)$，并满足

$$v'_0\leqslant f(t,v_0),\quad w'_0\geqslant f(t,w_0),$$

则 v_0,w_0 分别称为(1)的下解和上解. 对任意在 $I=[0,T]$ 上满足 $v_0(t)\leqslant w_0(t)$ 的 $v_0,w_0\in C(I,X)$，定义锥段 $[v_0,w_0]=\{u\in X\mid v_0(t)\leqslant u\leqslant w_0(t),t\in I\}$.

关于单调迭代序列，有下述结论：设 K 是正规锥，$f\in C(I\times X,X)$ 并满足：

1. v_0,w_0 是(1)的下解和上解，并且在 I 上

$$v_0(t)\leqslant w_0(t);$$

2. 存在定数 $L>0$ 使 $\alpha(f(t,B))\leqslant L\alpha(B)$ 对任意 $B\subset[v_0,w_0]$，$t\in I$；

3. 存在常数 $M>0$，任意 $u,v\in[v_0,w_0]$，$u\geqslant v$ 有

$$f(t,u)-f(t,v)\geqslant -M(u-v);$$

则对任意 $u_0\in X$，$v_0(0)\leqslant u_0\leqslant w_0(0)$，存在单调序列 $\{v_n\}$，$\{w_n\}$ 分别一致单调地收敛于(1)的最小解 ρ 与最大解 r，即若 u 是(1)的解，并且在 I 上 $v_0(t)\leqslant u(t)\leqslant w_0(t)$，则在 I 上有

$$v_0\leqslant v_1\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant\rho$$
$$\leqslant u\leqslant r\leqslant\cdots\leqslant w_n\leqslant\cdots\leqslant w_1\leqslant w_0.$$

非线性二阶微分方程的边值问题(boundary value problems of nonlinear second order ordinary differential equations)　抽象空间里的二阶方程的边值问题. 设 X 是巴拿赫空间，$H:[0,1]\times X\times X\to X$，$x_0,x_1\in X$，考察边值问题

$$\begin{aligned}&x''=H(t,x,x')\ (0<t<1),\\&ax(0)-bx'(0)=x_0,\\&cx(1)+dx'(1)=x_1,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $a,b,c,d\geqslant 0$，$ad+bc>0$. 关于边值问题(1)有下述结论：

1. 假设 $H\in C(J\times X\times X,X)$，$J=[0,1]$，对 $(t,x,y)\in J\times X\times X$，$\|H(t,x,y)\|\leqslant L$.

2. $\alpha H(J\times A\times B)\leqslant k\max[\alpha(A),\alpha(B)]$ 对有界集 $A,B\subset X$ 成立.

设 $G(t,s)$ 是纯量边值问题：

$$y''=h(t),\quad ay(0)-by'(0)=0,$$
$$cy(1)+dy'(1)=0$$

的格林函数，则当 $k<1/2p$ 时，其中

$$p=\max(1,\sup_{J\times J}G(t,s)),$$

(1)存在解 $x\in C^2(J,X)$.

m 耗散算子(m-dissipative operator) 算子半群理论的一个重要概念. 设 X 是一实巴拿赫空间，$F:X\to 2^{X^*}$ 是对偶映射(参见"半内积"). 一个算子 $A:D(A)\subset X\to 2^X$ 称为耗散的，若对任意的 $x_1,x_2\in D(A)$，存在 $f\in F(x_1-x_2)$ 使得 $f(y_1-y_2)\leqslant 0$ 对一切 $y_1\in Ax_1$ 和 $y_2\in Ax_2$ 成立. 一个耗散算子 A 称为 m 耗散的，若 $R(I-A)=X$，这里 $R(\cdot)$ 表示值域.

算子半群(operator semigroup) 研究发展方程的有力工具. 设 X 是巴拿赫空间，C 是 X 的闭子集，称 $S(t)$ 是 C 上的一个算子半群，若算子族 $\{S(t)\mid C\to C,t\geqslant 0\}$ 满足：

1. 对每一 $t\geqslant 0$，$S(t):C\to C$ 连续.
2. 对每一 $x\in C$，$t\to S(t)x$ 对 $t\geqslant 0$ 连续.
3. $S(0)x=x$ 对一切 $x\in C$ 成立.
4. $S(t)(S(\tau)x)=S(t+\tau)x$ 对于一切 $x\in C$ 和 $t,\tau\geqslant 0$ 成立.

设 $S(t)$ 是 C 上的一个算子半群，且

$$\|S(t)x-S(t)y\|\leqslant\|x-y\|$$

对 $t\geqslant 0$ 和一切 $x,y\in C$ 成立，则称 $S(t)$ 是 C 上的一个压缩半群. 若 $C=X$ 且 $S(t)$ 是有界线性算子，则称半群 $S(t)$ 是 X 上的一个 C_0 半群. 设 $S(t)$ 是 C 上的算子半群. 记

$$D(A)=\left\{x\in C\,\middle|\,\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)x-x}{t}\text{存在}\right\},$$

对 $x\in D(A)$，定义

$$Ax=\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)x-x}{t},$$

则称 A 为 $S(t)$ 的生成元(或无穷小生成元)，$D(A)$ 称为 A 的定义域. 关于算子半群有下列重要结论：

1. 设 $S(t)$ 是 X 上的一个 C_0 半群，A 是 $S(t)$ 的生成元，则：

1) $D(A)$ 在 X 中稠密.

2) A 是闭线性算子.

3) 对任意 $x_0\in D(A)$，$S(t)x_0$ 对 $t\geqslant 0$ 连续可微且是齐次的发展方程柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)=Ax(t),t>0,\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

的惟一解，满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(t)x_0)=AS(t)x_0=S(t)Ax_0\quad(t\geqslant 0).$$

2. 设 X 和 X^* 是一致凸的，A 是 X 的一个闭集 C 上的非线性压缩算子半群 $S(t)$ 的生成元，则对 $x_0\in D(A)$，有：

1) $S(t)x_0\in D(A)$ 对 $t\geqslant 0$，且 $AS(t)x_0$ 对 $t\geqslant 0$ 右连续.

2) 右导数 $\dfrac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}S(t)x_0$ 对 $t\geqslant 0$ 存在且

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}S(t)x_0=AS(t)x_0\quad(t\geqslant 0).$$

3) 对 $t\geqslant 0$，除可数个值外导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)x_0$$

存在而且满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)x_0=AS(t)x_0.$$

压缩半群(contractive semigroup) 见"算子半群".

C_0 半群(C_0-semigroup) 见"算子半群".

希尔-吉田耕作定理(Hille-Yosida theorem) 闭稠定线性算子 A 成为某个 C_0 半群生成元的充分必要条件. 设 A 是巴拿赫空间 X 中的一个闭稠定线性算子，则 A 是满足

$$\|S(t)\|\leqslant Me^{\omega t}\quad(t\geqslant 0)$$

的 C_0 半群 $S(t)$ 的生成元，当且仅当对一切复数 λ，$\mathrm{Re}\,\lambda>\omega$，$(\lambda I-A)^{-1}\in L(X,X)$(映 X 到 X 内的有界线性算子空间)，且

$$\|(\lambda I-A)^{-n}\|\leqslant\frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda-\omega)^n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

这里 M 是正常数，ω 是某一实数.

非线性希尔-吉田耕作定理(nonlinear version of the Hille-Yosida theorem) 希尔伯特空间中非线性压缩半群的生成元与 m 耗散算子的关系定理. 该定理断言：设 C 是希尔伯特空间 H 中的一个非空闭凸子集，S 是 C 上的一个非线性压缩算子半群，则存在惟一的一个 m 耗散算子 $A:D(A)\subset X\to 2^X$，使得 A 是 S 的生成元. 反之，设 A 是 $D(A)\subset X\to 2^X$ 的一个 m 耗散算子，则存在 $\overline{D(A)}$ 上的惟一算子半群 S，使得 A 是 S 的生成元且对任意 $x_0\in D(A)$，$x(t)=S(t)x_0$ 几乎处处满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\in Ax(t)\quad(t\geqslant 0).$$

余弦算子函数(cosine operator function) 用来表示巴拿赫空间中二阶线性自治微分方程的解的算子函数. 设 X 是巴拿赫空间，$L(X,X)$ 是映 X 到 X 内的有界线性算子空间，算子函数 $C(t):\mathbb{R}\to L(X,X)$ 若满足：

1. $C(0)=I$；
2. $C(s+t)+C(s-t)=2C(s)C(t)$，对所有的 $t,s\in\mathbb{R}$；
3. 对一切 $x\in X$，$C(t)x$ 对 $t\in\mathbb{R}$ 连续；

则称 $C(t)$ 为 X 上的一个强连续余弦算子函数. 有如下基本结论：

对于巴拿赫空间 X 中的每一强连续余弦算子函数 $C(t)$，存在惟一的闭稠定线性算子 A，使得对每一 $x_0\in D(A)$，$x(t)=C(t)x_0$ 是微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)=Ax(t),\ x(0)=x_0,\ x'(0)=0$$

对 $t\in\mathrm{R}$ 的惟一解. 如此算子 A 称为 C 的生成元(或无穷小生成元).

余弦算子函数的生成定理(the generation theorem of cosine operator functions) 刻画闭稠定线性算子成为一个强连续余弦算子函数生成元的特征的定理. 设 X 是巴拿赫空间，A 是 X 上的一个闭稠定线性算子，则 A 是一个强连续余弦算子函数 $C(t)$ 的生成元，或者等价地对每一 $x_0\in D(A)$，二阶微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)=Ax(t),\ x(0)=x_0,\ x'(0)=0$$

对 $t\in\mathrm{R}$ 有惟一解 $x(t)$ 满足 $\|x(t)\|\leqslant M(t)\|x_0\|$ ($t\geqslant0$，$M(t)$ 对 $t\geqslant0$ 是一个非负不减函数)的充分必要条件是，存在常数 $\omega\in\mathrm{R}$ 和 $M_0>0$，使得对 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$，$(\lambda^2I-A)$ 可逆，$(\lambda^2I-A)^{-1}\in L(X,X)$ 和

$$\|\lambda(\lambda^2I-A)^{-1})^n\|\leqslant M_0n!(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^{-(n-1)}\quad(n=0,1,\cdots).$$

此外，若上条件成立，则对 $x_0\in D(A)$ 和 $x_1\in D_1=\{x\in X\,|\,C(t)x$ 对 $t\in\mathrm{R}$ 连续可微$\}$，柯西问题

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)=Ax(t),\ x(0)=x_0,\ x'(0)=x_1$$

存在惟一解

$$x(t)=C(t)x_0+\int_0^t C(s)x_1\mathrm{d}s\quad(t\in\mathrm{R}).$$

这时由

$$S(t)=\int_0^t C(s)\mathrm{d}s$$

定义的算子函数称为正弦算子函数.

发展方程(evolution equation) 从描述众多依时间变化的物理模型归纳出的一类抽象空间微分方程. 巴拿赫空间 X 中的下列形式的微分方程

$$x'=A(t)x+f(t)\tag{1}$$

被称为发展方程(或演化方程)，其中 $A(t)$ 是依赖于 t 的算子. 一般地，它们是无界的，而且不一定在整个空间 X 上处处有定义，甚至是非线性不连续算子. 数学物理或其他学科中经常遇到描述不定常问题的微分方程，这类方程的初值问题或混合问题就归结为某巴拿赫空间 X 中的发展方程.

发展系统(evolution system) 发展方程的解算子概念的抽象化. 一个巴拿赫空间 X 上的有界线性算子的双参数族 $U(t,s)$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$，如果满足以下两个条件，则称 $U(t,s)$ 为一个发展系统：

1. $U(s,s)=I$，$U(t,r)U(r,s)=U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant r\leqslant t\leqslant T$ 成立.

2. $(t,s)\to U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是强连续的.

抛物发展系统(parabolic evolution system) 一类重要的线性发展方程. 一个巴拿赫空间 X 中的线性发展方程

$$x'+A(t)x=0\ (0\leqslant s<t\leqslant T),\qquad(1)$$
$$x(s)=x_0,$$

若它满足下列条件，则称它是抛物型的：

1. $A(t)$ 对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 的定义域 $D(A(t))=D$ 在 X 中稠密和不依赖于 t.

2. 对 $t\in[0,T]$，$A(t)$ 的预解式 $(\lambda I-A(t))^{-1}$ 对于所有使得 $\mathrm{Re}\lambda\leqslant0$ 的复数 λ 存在，且存在常数 M 使得

$$\|(\lambda I-A(t))^{-1}\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|+1}$$

对 $t\in[0,T]$ 成立.

3. 存在常数 L 和 $0<\alpha\leqslant1$，使得 $\|(A(t)-A(s))A(\tau)^{-1}\|\leqslant L|t-s|^{\alpha}$，对 $s,t,\tau\in[0,T]$ 成立.

设(1)是抛物型的，则存在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 上的惟一的发展系统 $U(t,s)$ 具有以下性质：

1. $\|U(t,s)\|\leqslant C$，对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立，这里 C 是正常数.

2. 对于 $0\leqslant s<t\leqslant T$，$U(t,s):X\to D$ 和 $U(t,s)$ 对 t 强可微且 $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)\in L(X,X)$，对 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 强连续，此外，$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)+A(t)U(t,s)=0$ 对于 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 成立.

3. $\left\|\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)\right\|=\|A(t)U(t,s)\|\leqslant C/(t-s)$ 和 $\|A(t)U(t,s)A^{-1}(s)\|\leqslant C$ 对于 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 成立.

4. 对每一 $0\leqslant s<T$ 和 $x_0\in X$，(1)有惟一解 $x(t)=U(t,s)x_0$.

5. 若 $f(t)$ 在 $[s,T]$ 上是赫尔德连续的，则对每一 $x_0\in X$，柯西问题

$$x'+A(t)x(t)=f(t)\ (0\leqslant s<t\leqslant T),$$
$$x(s)=x_0$$

有惟一古典解

$$x(t)=U(t,s)x_0+\int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

容许子空间(admissible subspace) 为了刻画线性发展方程的双曲性而引入的概念. 设 X 是巴拿赫空间，Y 是 X 的一个子空间按范数 $\|\cdot\|_Y$ 是闭的且范数 $\|\cdot\|_Y$ 强于 X 中的范数 $\|\cdot\|$，即存在正常数 C，使得 $\|x\|\leqslant C\|x\|_Y$ 对一切 $x\in Y$ 成

立.对于具生成元 A 的 C_0 半群 $T(t)$，子空间 Y 称为 A 容许的，若 $T(t)Y\subset Y$ 对 $t\geqslant 0$ 成立和 $T(t)$ 在 Y 中的限制是 Y 中的一个 C_0 半群(即按范数 $\|\cdot\|_Y$ 是强连续的).有以下结论：设 $T(t)$ 是具生成元 A 的 C_0 半群，X 的子空间 Y 是 A 容许的，当且仅当存在常数 $\omega\in\mathrm{R}$ 使得当 $\lambda>\omega$ 时 $(\lambda I-A)^{-1}Y\subset Y$，且 A 在 Y 中的部分 $\widetilde{A}$：$D(\widetilde{A})=\{x\in D(A)$，和 $Ax\in Y\}$ 对 $x\in D(\widetilde{A})$，$\widetilde{A}x=Ax$ 是 Y 上的一个 C_0 半群的生成元.

生成元的稳定族(stable families of generators) 构造双曲发展系统所需的概念.设 X 是巴拿赫空间，X 上的 C_0 半群的生成元族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 称为是稳定的，如果存在常数 $M\geqslant 1$ 和 ω(称为稳定常数)，使得 $\rho(A(t))\supset(\omega,+\infty)$ 对于 $t\in[0,T]$ 成立，且

$$\|\prod_{j=1}^{k}(\lambda I-A(t_j))^{-1}\|\leqslant M(\lambda-\omega)^{-k}$$

对于 $\lambda>\omega$ 及每一有限序列

$$0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_k\leqslant T\quad(k=1,2,\cdots)$$

成立.有关结论是：设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是生成元的稳定族，具稳定常数 M 和 ω.设 $B(t)(0\leqslant t\leqslant T)$ 是 X 上的有界线性算子.如果 $\|B(t)\|\leqslant K$ 对 $t\in[0,T]$ 成立，则 $\{A(t)+B(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一个生成元的稳定族，具稳定常数 M 和 $\omega+KM$.

双曲发展系统(hyperbolic evolution system) 一类重要的线性发展方程.巴拿赫空间 X 中的线性发展方程

$$x'(t)=A(t)x(t)\quad(0\leqslant s\leqslant t\leqslant T),\qquad x(s)=x_0 \tag{1}$$

若满足下列条件，则称它为双曲型的：

1. $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一个生成元的稳定族，具稳定常数 M 和 ω.

2. 存在 X 的一个子空间 Y，使得对一切 $t\in[0,T]$，Y 是 $A(t)$ 容许的，且 $A(t)$ 在 Y 中的部分族 $\{\widetilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 在 Y 中是稳定的，具稳定常数 $\widetilde{M}$ 和 $\widetilde{\omega}$.

3. 对 $t\in[0,T]$，$Y\subset D(A(t))$，$A(t)$：$Y\to X$ 有界，且 $t\to A(t)$ 依 $L(Y,X)$ 中的范数连续.

关于双曲型发展方程有下述结论：若(1)是双曲型的，则存在惟一的发展系统 $U(t,s)$ $(0\leqslant s\leqslant t\leqslant T)$，若它满足下列条件，则 $x(t)$ 是(1)的惟一解：

1. $\|U(t,s)\|\leqslant Me^{\omega(t-s)}$ 对 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立.

2. $\frac{\partial^+}{\partial t}U(t,s)y|_{t=s}=A(s)y$ 对 $y\in Y$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立.

3. $\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)y=-U(t,s)A(s)y$ 对于 $y\in Y$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立.

4. 若 $U(t,s)Y\subset Y$ 对 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立且 $x(t)=U(t,s)y$ 对 $y\in Y$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 在 Y 中连续.

C_0 半群的渐近稳定性(asymptotic stability of C_0-semigroups) C_0 半群理论的一个重要概念.设 $T(t)$ 是巴拿赫空间 X 中的一个 C_0 半群(即强连续有界线性算子半群)，A 是它的生成元.$T(t)$ 称为渐近稳定的，若对每一 $x\in X$，

$$\lim_{t\to\infty}\|T(t)x\|=0.$$

设 $\sigma(A)$ 和 $\sigma_c(A)$ 分别表示 A 的谱和连续谱，有如下非常基本的结论：设 $T(t)$ 是巴拿赫空间 X 中的一个 C_0 半群具生成元 A.若存在正常数 M，使得 $\|T(t)\|\leqslant M$ 对 $t\geqslant 0$ 成立，且 $\sigma(A)\cap iR\subset\sigma_c(A)$，并且是可数的，则 $T(t)$ 渐近稳定.反之，若 $T(t)$ 渐近稳定，则 $\|T(t)\|\leqslant M$ 对 $t\geqslant 0$ 成立和 $\mathrm{Re}\lambda\leqslant 0$ 对于一切 $\lambda\in\sigma(A)$ 成立，同时纯虚数至多是 A 的连续谱.

C_0 半群的指数稳定性(exponential stability of C_0-semigroups) C_0 半群理论的一个重要概念.巴拿赫空间 X 中的一个 C_0 半群 $T(t)$ 称为指数稳定的，若存在正常数 M 和 σ，使得 $\|T(t)\|\leqslant Me^{-\sigma t}$ 对 $t\geqslant 0$ 成立.设 A 是 C_0 半群 $T(t)$ 的生成元，$\rho(A)$ 和 $\sigma(A)$ 分别表示 A 的预解集和谱：

1. 设 $T(t)$ 是希尔伯特空间 H 中的一个 C_0 半群，则 $T(t)$ 是指数稳定的，当且仅当如下条件之一成立：

1) $\{\lambda|\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0\}\subset\rho(A)$ 和 $\sup\{\|(\lambda-A)^{-1}\|\,|\,\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant 0\}<+\infty$.

2) 存在 $p\geqslant 1$，使得

$$\int_0^{+\infty}|(T(t)x,y)|^p\mathrm{d}t<+\infty$$

对一切 $x,y\in H$ 成立.

3) 存在一个有界正线性算子 B，$(Bx,x)>0$ 对一切 $x\neq 0$，使得 $2\mathrm{Re}(BAx,x)=-\|x\|^2$ 对一切 $x\in D(A)$ 成立.

2. 设 $T(t)$ 是巴拿赫空间 X 中的一个 C_0 半群，若 $T(t)$ 对 $t>0$ 按一致算子拓扑连续(比如当 $T(t)$ 是解析的、可微的或紧致半群时)，则 $T(t)$ 指数稳定的充分必要条件是 $\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda|\lambda\in\sigma(A)\}<0$.

非线性算子半群的稳定性(stability of nonlinear operator semigroups) 非线性算子半群理论的一个重要概念.设 $\{S(t)|t\geqslant 0\}$ 是巴拿赫空间 X 中的一个闭集 C 上的非线性算子半群，$0\in C$ 且是 S 的平衡点，即 $S(t)0=0$ 对 $t\geqslant 0$ 成立.零点称为对 $S(t)$ 是稳定的，若对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对一切 $t\geqslant 0$，只要 $x\in C$，$\|x\|<\delta$ 就有 $\|S(t)x\|<\varepsilon$；称为一致渐近稳定的，若它是稳定的并且存在一个邻域 $U=\{x\in C|\,\|x\|<r\}$，使得

$$\lim_{t\to\infty}\|S(t)x\|=0$$

对 $x\in U$ 是一致的.C 上的一个连续实值函数 V 称为李亚普诺夫函数，若

$$\dot{V}(x)=\overline{\lim_{t\to 0^+}}\frac{1}{t}\{V(S(t)x)-V(x)\}\leqslant 0$$
对一切 $x\in C$ 成立.

关于非线性算子半群的稳定性,有下述结论:设 $\{S(t)|t\geqslant 0\}$ 是巴拿赫空间 X 中的一个闭集 C 上的非线性算子半群,0 是它在 C 上的平衡点,V 是李亚普诺夫函数,满足 $V(0)=0$,$V(x)\geqslant C(\|x\|)$ 对 $x\in C$ 成立,这里 $C(\cdot)$ 是严格增函数,$C(0)=0$,$C(r)>0$ 对 $r>0$,那么零点是稳定的. 若附加假设 $\dot{V}(x)\leqslant -C_1(\|x\|)$,这里 $C_1(\cdot)$ 亦是一个单增非负函数,$C_1(0)=0$,那么零点是一致渐近稳定的.

对于非线性算子半群的不变原理(invariance principle for nonlinear operator semigroups) 关于 ω 极限集对于半群的不变性. 设 $\{S(t)|t\geqslant 0\}$ 是巴拿赫空间 X 中的闭集 C 上的一个非线性算子半群. 一个集合 $K\subset C$ 称为对 S 是不变的,若对任一 $x_0\in K$,存在一条连续曲线 $x:\mathrm{R}\to K$ 具 $x(0)=x_0$ 和 $S(t)x(\tau)=x(t+\tau)$ 对 $t>0$,$-\infty<\tau<+\infty$ 成立. 若 $x_0\in C$,那么,集合 $\omega(x_0)=\{x\in C|$ 存在 $t_n\to\infty$ 使得 $S(t_n)x_0\to x\}$ 称为 x_0 关于 S 的 ω 极限集.

1. 设 $x_0\in C$ 和 $\{S(t)x_0|t\geqslant 0\}$ 是 C 中一个紧子集,则 $\omega(x_0)$ 是一个非空连通的紧不变集,当 $t\to+\infty$ 时,$\mathrm{dist}(S(t)x_0,\omega(x_0))\to 0$.

2. 设 V 是 C 上的一个李亚普诺夫函数,$E=\{x\in C|\dot{V}(x)=0\}$,$M$ 是 E 的最大不变子集,若 $\{S(t)x_0|t\geqslant 0\}$ 是 C 的一个紧子集,则当 $t\to+\infty$ 时,
$$S(t)x_0\to M.$$

随机微分方程

随机微分方程(stochastic differential equation) 含有随机因素的微分方程通常称为随机微分方程. 但是,随机常微分方程常习惯地被简称随机微分方程.

一般地,如果在常微分方程的已知函数(代表外力的部分)或初始值中含有随机因素,就成为随机微分方程. 对这种方程,只要固定其中的随机参量 ω,就变成了普通的常微分方程. 由此得到的解在 ω 变动时就是一个随机过程. 与常微分方程不同之处是,人们并不真需要知道这个随机过程的所有轨道,而只需要知道该过程在各个不同时刻的联合分布,或者甚至只需要知道这个随机过程在不同时刻的分布及它们的相关情况. 其中更想知道的是这个过程的数学期望函数、方差函数与相关函数等所满足的微分方程. 这方面的研究,只需要相对地较为初等的概率论知识,但是,在工程、生化等领域中却具有宽广的应用前景.

然而,更为瞩目的是一类与上面完全不同的随机微分方程,这就是伊滕清从 20 世纪 40 年代末开始发展起来的伊滕(随机微分)方程及其推广. 这种方程的研究需要更多的随机过程知识,所以实际上它已不再属于微分方程的范畴,更确切地说,它是概率论中随机过程论的一个分支.

伊滕方程的原始模型是 1908 年郎之万 (Langevin, P.) 在研究质点在摩擦力作用下的无规则随机运动所导出的郎之万方程:
$$\dot{X}_t=-\alpha X_t+\frac{V}{m}\frac{\mathrm{d}B_t}{\mathrm{d}t}\quad(\alpha>0),$$
其中 $\mathrm{d}B_t/\mathrm{d}t$ 是指高斯白噪声过程,伊滕方程就指含有高斯白噪声或由它产生的有色噪声驱动力的随机微分方程. 这里所谓的"高斯白噪声"直观地就是指维纳过程 B_t(在随机过程论中也称为布朗运动)的"按轨道微商". 但是在数学中布朗运动的轨道虽然是连续的(即是时间的连续函数),然而这种轨道是处处不可微的,于是在物理要求与数学处理之间呈现了矛盾. 伊滕清首先克服了这个困难,注意到了不可能按轨道地定义对 $\mathrm{d}B_t$ 的积分,他定义了一种不是按轨道的积分(以后被大家称为伊滕积分). 简略地,令 B_t 为一个连续轨道的 m 维独立增量过程,而且增量 $B_{t+s}-B_s$ 遵从数学期望为零向量且方差矩阵为 tI(I 为 $m\times m$ 单位阵)的正态分布(这就是 m 维布朗运动). 伊滕清把不依赖 B_t 的将来值的随机过程称为不可预期的过程,对于一个 $d\times m$ 矩阵值的不可预期的过程 φ_t,他选取了适当的矩阵值不可预期的阶梯过程列
$$\varphi_s^{(n)}\triangleq\sum_{i=0}^{N^{(n)}-1}\varphi_{t_i^{(n)}}^{(n)}I_{(t_i^{(n)},t_{i+1}^{(n)}]}(s),$$
其中 $t_{N^{(n)}}=t$,$I_{(t_i^{(n)},t_{i+1}^{(n)}]}(s)$ 是 $(t_i^{(n)},t_{i+1}^{(n)}]$ 的示性函数,并定义
$$\int_{t_0}^{t}\varphi_s\mathrm{d}B_s$$
为
$$\sum_{i=0}^{N^{(n)}-1}\varphi_{t_i^{(n)}}^{(n)}(B_{t_{i+1}^{(n)}}-B_{t_i^{(n)}})$$
在 $n\to\infty$ 时的随机极限(概率极限). 引进了伊滕积分以后,只要把伊滕随机微分方程形式地积分,就转变成为具有完全确切含义的随机积分方程,它也称为伊滕方程. 一个伊滕积分
$$\int_{t_0}^{t}\varphi_s\mathrm{d}B_d$$
与一个不可预期的过程 Ψ_s 按轨道的积分
$$\int_{t_0}^{t}\Psi_s\mathrm{d}s$$
及一个不依赖 B_s 在 t_0 以后值的随机变量 ξ_{t_0} 的和,

记为 X_t，称为伊滕过程. 通常也称 X_t 具有随机微分（记为 dX_t）$\varphi_t dB_t + \Psi_t dt$. 对于关于 t 有一阶连续偏导数、对 x 具有二阶连续偏导数的函数 $F(t,x)$，伊滕过程 X_t 的复合过程 $Y_t = F(t, X_t)$ 仍是一个伊滕过程，它具有随机微分

$$dF(t,X_t) = \Big(F_t(t,X_t) + F_x(t,X_t)\Psi_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} F_{x_i x_j}(t,X_t)\varphi_t\varphi_t^T \Big)\, dt + F_x(t,X_t)\varphi_t dB_t,$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$，$F_x \equiv (F_{x_1}, F_{x_2}, \cdots, F_{x_d})$，下标指偏导数，$\varphi_t^T$ 是 φ_t 的转置. 这个公式是伊滕微积分中的基本公式. 它相当于普通微积分中的复合函数的微分公式，称为伊滕公式. 作为特例，对于二阶连续可微函数 $F(x)$ 有

$$F(B_t) - F(B_0) = \int_0^t F'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}\int_0^t F''(B_s)ds.$$

这与斯蒂尔杰斯形式的牛顿-莱布尼茨微积分基本公式不同，它多了一个包含 F'' 的项. 这是由于当 t 小时，B_t 相当于 $t^{\frac{1}{2}}$ 阶无穷小所决定的.

伊滕清最先考虑了下述方程（伊滕方程）

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t,X_t)dB_t + b(t,X_t)dt, \\ X_{t_0} = \xi_{t_0}. \end{cases}$$

与常微分方程类似地，如果想要在整个 $t>0$ 处伊滕方程有解 X_t，就必须对系数 σ 与 b 严格限制. 在较强的条件，例如 σ, b 满足一致李普希茨条件并且 $\sigma\sigma^T, b$ 满足线性增长条件下，解存在惟一且可以通过类似于常微分方程的迭代过程而获得. 如果减弱一些条件，例如局部李普希茨条件，那么就有必要定义局部解，此时惟一地存在一个不依赖 B_t 的将来值的随机变量 ζ，使解的最大存在区间为 $0 \leqslant t < \zeta$. 这个 ζ 称为解的爆炸时刻. 如果以概率为 1 有 $\zeta = +\infty$，那么，解 X_t 以概率为 1 存在 $0 \leqslant t < +\infty$. 这种情形称为保守情形，它具有特殊的重要性.

伊滕随机微分方程的解 X_t 是一个马尔可夫过程. 在一定条件下，这个过程具有转移密度，它是一个二阶抛物型偏微分方程的基本解. 这个抛物型方程称为柯尔莫哥洛夫方程. 20 世纪 30 年代初，柯尔莫哥洛夫（Колмогоров, А. Н.）关于马尔可夫过程的这一方面的研究，也是随机方程发展的重要背景. 这样，伊滕方程的解，马尔可夫过程（其中特别是扩散过程）及偏微分方程就联系起来了. 可见，与伊滕方程研究相联系更多的是偏微分方程，而不是常微分方程. 只有在少数情况下，伊滕方程的解才具有明显的表达式. 解的存在性、惟一性、稳定性、平稳解、常返性、增长速度等也是研究的重要方面. 基赫曼（Гихман, И. И.）几乎与伊滕清同时地独立地提出并研究了伊滕方程.

利用 20 世纪 60 年代末由斯特鲁克（Stroock, D. W.）与伐拉丹（Varadlhan, S. R. S.）发展的鞅方法与弱解理论来研究随机微分方程弱解的存在惟一性，可以解除用随机微分方程研究扩散过程时对特定的布朗运动的依赖性，成为随机微分方程中的重要方法.

伊滕方程有多方面的推广，例如过程的取值可以在微分流形上，也可以在巴拿赫空间中取值；驱动力可以加进泊松白噪声，这样的随机微分方程是用来研究具间断轨道的马尔可夫过程的. 迈耶（Meyer, P.）为首的斯特拉斯堡学派在 20 世纪 60 年代发展起来的半鞅理论，使随机微分方程有了重大的发展，在广义函数空间 $\mathscr{S}'$ 取值的随机微分方程，是数学物理学家重视的方向. 斯各洛霍特（Скороход, А. В.）在 20 世纪 70 年代发展的不可料过程的随机积分及其随机微分方程，以及随机线积分和相应的随机微分方程等，也都得到数学物理学家的重视. 对较好的系数 $\sigma(t,x), b(t,x)$，国田宽（Hiroshi Kunita）证明了：除了一个 w 的零测度（零概率）集合外，初值为 x 的伊滕方程的解可以取成随机流，即对 $\varphi(t,x,w) \triangleq X_t(w)$，有

$$\varphi(t+s,x,w) = \varphi(t,\varphi(s,x,w),\theta_s w),$$

其中 $\theta_s w$ 是轨道 w 的 s-时间推移.

伊滕方程（Ito equation） 见"随机微分方程".

伊滕积分（Ito integral） 见"随机微分方程".

伊滕公式（Ito formula） 见"随机微分方程".

撰 稿 叶大卫 庄万 孙丽华 孙建华 何崇佑 余澍祥 张炳根 陈勇 陈玉波 陈秀东 范弘毅 罗定军 郑祖庥 原文志 袁荣 黄发伦 龚光鲁 盛立人 崔克忍 蒋继发

审 阅 叶彦谦 史金麟 李翊神 余澍祥 张芷芬 陈绍著 林振声 金福临 高维新 黄启昌 曹之江

偏 微 分 方 程

偏微分方程论(theory of partial differential equations)　包含多元函数的偏导数的等式称为偏微分方程.偏微分方程理论则是研究这类方程的一个数学分支学科,一般亦称为偏微分方程.客观世界的物理量一般可能表示成时间 t 与空间位置坐标 (x_1,x_2,x_3) 的函数 $u(t,x_1,x_2,x_3)$,它的变化规律往往表现为它关于时间和空间坐标的各阶变化率之间的关系,即函数 u 与 u 的各阶偏导数之间的等式.例如,一个均匀的传热物体的温度 $u=u(t,x_1,x_2,x_3)$ 就满足等式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\ (a\text{ 是常数}).\qquad(1)$$

这样一类包含未知函数及其偏导数的等式称为偏微分方程.由几个偏微分方程所构成的等式组(未知函数也可以是几个)称为偏微分方程组.偏微分方程或偏微分方程组中所含偏导数的最高阶数称为此方程或方程组的阶.例如,热传导方程(1)是二阶偏微分方程.n 个自变量的函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一阶偏微分方程的一般形状是

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0,$$

其中 F 是 $2n+1$ 个变元的函数.

在微积分理论形成不久的 18 世纪,人们就研究用微分方程来描述物理问题,并针对具体的物理问题求解.人们最早研究的是弦的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

达朗贝尔(D'Alembert,J. le R.)最先得出它的通解

$$u(t,x)=\varphi(x+at)+\psi(x-at),$$

其中 φ 与 ψ 是任意函数;丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)从弦的声音是由基音和泛音叠加而成的观点出发,认为方程的所有可能的解是

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}$$

的形状,其中 l 是弦长;达朗贝尔、欧拉(Euler,L.)和拉格朗日(Lagrange,J.-L.)还研究了两端固定的弦满足初始条件

$$u(0,x)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0$$

的解,并对解的允许函数进行了激烈的争论.欧拉和拉格朗日在流体力学的工作中,勒让德(Legendre,A.-M.)与拉普拉斯(Laplace,P.-S.)在天体力学的工作中都研究了调和方程.在流体力学的论文中,柯西(Cauchy,A.)得到了现在所称的柯西-黎曼方程组,欧拉得出了理想流体动力学方程组.18 世纪末,蒙日(Monge,G.)开创了用几何解释偏微分方程的思想,对一阶和二阶非线性方程建立了完整的特征理论.

19 世纪,傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)系统研究了热传导方程,阐述了把有界区间上初边值问题的解表为三角级数或贝塞尔函数、勒让德函数的级数的一般分离变量法,对初值问题通过积分变换得出了解的表达式.他的工作不仅使微分方程的发展迈出了重要的一步,而且使人们把函数的概念从单个解析表达式中解放出来,促进了函数论、级数理论的发展,引起了人们对数学的逻辑基础的探讨.同时,还出现了许多现在以首创者命名的方程、公式和解法,例如,引力场的泊松方程,泊松公式,格林公式,格林函数,解二阶双曲型方程的黎曼方法,粘性流体运动的纳维-斯托克斯方程,柯西弹性力学方程组,电磁波的麦克斯韦方程组.这些成就对科学技术的发展起了巨大的推动作用,例如,麦克斯韦(Maxwell,J. C.)预言电磁波以光速通过空间,断言光是电磁现象,鼓舞了洛伦兹(Lorentz,H. A.)关于电子的学说和爱因斯坦(Einstein,A.)关于相对论的研究.柯西给出了第一个关于解的存在定理,开创了偏微分方程的现代理论.杜·布瓦-雷蒙(Du Bois-Reymond,P. D. G.)提出把二阶线性偏微分方程分为椭圆、双曲和抛物三种类型.到 19 世纪末,二阶线性偏微分方程的一般理论已基本建立,偏微分方程或者称数学物理方程这一学科开始形成.

20 世纪 30 年代起,各种泛函分析方法陆续被应用于偏微分方程的研究.20 世纪 40 年代,绍德尔(Schauder,J. P.)所采用的先验估计方法,不仅完满地建立了一般二阶线性椭圆型方程的古典解理论,而且为解决偏微分方程定解问题提供了非常有用的技巧.20 世纪 40 年代末期出现的广义函数与索伯列夫空间理论,为偏微分方程理论的进一步发展提供了基本的工具.20 世纪 50 到 60 年代,一方面作为线性分型方程理论的扩展和深入,一般线性偏微分算子理论得到了发展;例如,马尔格朗热(Malgrange,B.)和赫尔曼德尔(Hörmander,L.)证明了一般常系数微分算子 $P(D)$ 都有基本解,即满足 $P(D)E=\delta$ 的解,这里 δ 是狄喇克函数,并通过卷积 $E*f$ 得到方程 $P(D)u=f$ 的解;卢伊(Lewy,H.)给出了没有解的方程的例子,表明变系数方程比常

系数方程有更复杂的情况. 另一方面,由于先验估计的深入发展,拟线性椭圆和抛物方程理论有了重大的进展,拟线性双曲方程(组)的间断解的研究也有许多好的成果.

近二三十年进展较快,且在当前国际上有较多人研究的偏微分方程问题有:在线性问题方面,微分算子的概念已先后推广为拟微分算子、傅里叶积分算子和仿微分算子,利用它们研究偏微分方程解的存在、解的光滑性、定解问题的惟一性、局部可解性、解的奇性传播与反射等问题,都取得了很好的结果. 微局部分析方法是新发展起来的重要工具,利用它不仅解决了线性方程的许多新问题,且被逐步推广应用于处理非线性问题. 在非线性问题方面,研究得较多的有拟线性与完全非线性椭圆及抛物方程、非线性双曲方程、孤立波、自由边界问题、反应扩散方程、多重解和分歧解等. 研究中,不动点理论、拓扑度、变分方法(包括临界点理论)、上(下)解方法、单调算子理论、非线性半群、隐函数定理及变分不等式等方法和工具不断发展并得到了新的应用. 微分流形上的偏微分方程的研究也取得了许多深入的结果,微分几何与偏微分方程的相互渗透成为一个重要的发展趋势.

偏微分方程的基本概念

偏微分方程(partial differential equations) 包含多元函数的偏导数的等式. 亦指研究偏微分方程的一个数学分支. 包含未知多元函数的偏导数的一个等式称为偏微分方程;如果等式不只一个,就称为偏微分方程组. 出现在偏微分方程或偏微分方程组中的未知函数偏导数的最高阶数称为该偏微分方程或偏微分方程组的阶数. 例如,热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

是二阶偏微分方程.

偏微分方程组(system of partial differential equations) 见"偏微分方程".

偏微分方程的阶(order of partial differential equations) 见"偏微分方程".

数学物理方程(equation of mathematical physics) 一类重要的微分方程. 指从物理学及其他各门自然科学、技术科学中产生的偏微分方程,有时也包括和此有关的积分方程、微分积分方程和常微分方程. 如在物理学中描述波的传播的波动方程,反映传热和扩散现象的热传导方程,描述平衡现象或稳定过程的调和方程都是典型的数学物理方程.

线性偏微分方程(linear partial differential equation) 一类重要的偏微分方程. 关于所有未知函数及其导数都是线性的偏微分方程称为线性偏微分方程. 例如,拉普拉斯方程、热传导方程及波动方程都是线性偏微分方程.

非线性偏微分方程(nonlinear partial differential equation) 关于(某个)未知函数或未知函数的某阶导数是非线性的偏微分方程. 在非线性偏微分方程(组)中,如果含未知函数的偏导数的项都是线性的,就称为半线性偏微分方程(组);如果对未知函数的最高阶导数是线性的,就称为拟线性偏微分方程(组);如果对未知函数的最高阶偏导数是非线性的,则称为完全非线性偏微分方程(组). 例如,$\Delta u = u^3$是半线性方程,极小曲面方程

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0$$

是拟线性方程,蒙日-安培方程

$$\det(u_{x_ix_j}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

是完全非线性方程.

半线性偏微分方程(semi-linear partial differential equation) 见"非线性偏微分方程".

拟线性偏微分方程(quasi-linear partial differential equation) 见"非线性偏微分方程".

完全非线性偏微分方程(totally nonlinear partial differential equation) 见"非线性偏微分方程".

偏微分方程的自由项(free term of partial differential equation) 亦称非齐次项. 偏微分方程的基本概念. 偏微分方程(组)中不含未知函数及其导数的项称为偏微分方程的自由项. 例如,泊松方程$\Delta u = f(x)$中的$f(x)$就是这个偏微分方程的自由项.

偏微分方程的非齐次项(nonhomogeneous term of partial differential equation) 即"偏微分方程的自由项".

齐次偏微分方程(homogeneous partial differential equations) 一类特殊而又重要的偏微分方程. 关于未知函数及其所有偏导数为齐次的偏微分方程称为齐次偏微分方程. 如调和方程就是齐次偏微分方程. 齐次(次数不为零)方程(组)的自由项必为零.

超定方程组(overdetermined equation system) 一类偏微分方程组. 未知函数个数少于方程个数的偏微分方程组称为超定方程组. 当未知函数的个数多于方程的个数时称为欠定方程组,当未知函数的个数等于方程的个数时称为确定方程组. 确定方程组一般就简称方程组.

欠定方程组(underdetermined equation system) 见"超定方程组".

确定方程组(determined equation system) 见"超定方程组".

偏微分方程的解(solutions of partial differen-

tial equation) 使偏微分方程变成恒等式的函数. 设函数 u 在区域 Ω 中连续且具有偏微分方程中所出现的各阶连续偏导数,如果将函数 u 及其偏导数代入该方程后,能使方程在区域 Ω 中成为自变量的恒等式,则称 u 为该偏微分方程在区域 Ω 中的解,也称 u 为偏微分方程的正则解或经典解. 偏微分方程的解

$$u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

在 $n+1$ 维空间 $(u, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中是一个曲面,称为偏微分方程的积分曲面. 类似的概念可对偏微分方程组引入.

偏微分方程的积分曲面(integral surface of partial differential equation) 见"偏微分方程的解".

正则解(regular solution) 见"偏微分方程的解".

经典解(classical solution) 见"偏微分方程的解".

广义解(generalized solution) 亦称弱解. 偏微分方程经典解的推广. 许多描述实际物理现象的偏微分方程定解问题不可能有经典解. 例如,当 $\psi \in C^2(\mathrm{R})$ 时,弦振动方程柯西问题

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = \psi(x), u_t(x,0) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{2}$$

有惟一解

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\psi(x+at) + \psi(x-at)]. \tag{3}$$

如果弦的初始状态呈折线,即 $\psi(x)$ 连续但在一些点上没有导数,则由(3)给出的 $u(x,t)$ 只在 ψ 有二阶导数的那些点上满足方程(1),它不是柯西问题(1),(2)在经典意义下的解,但它却是在初始状态(1)下弦的真实物理状态,因此称它为柯西问题(1),(2)的广义解. 对不同的偏微分方程定解问题(甚至对同一定解问题),可以有不同的广义解定义;但它们都是经典解的推广,因此,经典解必定是广义解. 现代定义广义解的方法主要有两种:一种是将经典解序列在某个函数空间中的极限定义为广义解,称为强解. 一种是通过所给偏微分算子的共轭(伴随)算子来定义广义解,称为弱解.

强解(strong solution) 广义解的一种. 它是经典解序列在某个函数空间中的极限. 例如,对区域 Ω 上的偏微分算子 L,如果 $u, f \in L^2(\Omega)$,且存在函数序列 $u_n \in C^\infty(\Omega)$,满足

$$\| u_n - u \|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

$$\| Lu_n - f \|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

则称 u 为方程 $Lu=f$ 的 L^2 强解. 对偏微分方程 $Lu=f$ 的定解问题,如果 u_n 再满足相应的定解条件,则称 u 是相应定解问题的 L^2 强解. 对于同一定解问题,可以有不同的强解定义.

弱解(weak solution) 广义解的一种. 它是通过所给偏微分算子的共轭(伴随)算子来定义的. 例如,对区域 Ω 上的偏微分算子 L,它的共轭(伴随)算子是 L^*,如果 $u, f \in L^2(\Omega)$,且对任意函数 $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ 都有

$$\int_\Omega \psi f \mathrm{d}x = \int_\Omega u L^* \psi \mathrm{d}x,$$

则称 u 为方程 $Lu=f$ 的 L^2 弱解. 对偏微分方程 $Lu=f$ 的定解问题,如果再要求上述函数 ψ 满足所给边界条件的齐次共轭(伴随)边界条件,则称 u 是相应定解问题的 L^2 弱解,对于同一定解问题,可以有不同的弱解定义. 一般地,强解都是弱解;反之,弱解不一定是强解.

定解条件(deterministic conditions of solution) 为了确定偏微分方程的解对解函数附加的条件. 给定一个偏微分方程,通常它只能描写某种状态或运动的一般规律,还不能确定具体的状态或运动,所以把这个方程称为泛定方程. 如果附加一些条件(如已知开始运动时的情况或在边界上受到的外部约束等)后,就能完全确定具体的状态或具体的运动,则称这样的附加条件为定解条件. 表示开始情况的附加条件称为初始条件,表示边界上受到约束的条件称为边界条件. 定解条件中给定的函数或值称为初值函数和边值函数.

边界条件(boundary condition) 见"定解条件".

泛定方程(universal equation) 见"定解条件".

定解问题(deterministic problem of solution) 求给定泛定偏微分方程(组)(在某个区域内)并满足相应定解条件的解的问题. 根据不同的定解条件,定解问题一般可分为初值问题、边值问题和混合问题三类.

初值问题(initial value problem) 由偏微分方程的解在初始时刻的瞬时性态探讨它在以后时刻的性态的问题. 出现在偏微分方程(组)中的某个自变量有时可以赋予特殊的意义(如时间 t). 当对这样初值瞬间的自变量给予特定值 t_0 时,未知函数及其某些导数所取得的值称初始值. 用来确定初始值的条件称初始条件,求满足方程(组)及给定初始条件的解的问题称为初值问题. 初值问题又称柯西问题,初始值也称为柯西数据.

初始值(initial value) 见"初值问题".

初始条件(initial condition) 见"定解条件"及"初值问题".

柯西问题(Cauchy problem) 见"初值问题"、"一阶非线性方程的柯西问题"、"柯西-柯瓦列夫斯

卡娅定理”、“齐次波动方程柯西问题的解”及“非齐次波动方程柯西问题的解”.

边值问题(boundary value problem) 定解问题之一.只有边界条件的定解问题称为边值问题.二阶偏微分方程(组)一般有三种边值问题:第一边值问题又称狄利克雷问题,它的边界条件是给出未知函数本身在边界上的值;第二边值问题又称诺伊曼边值问题或斜微商问题,它的边界条件是给出未知函数关于区域边界的法向导数或非切向导数;第三边值问题又称鲁宾问题,它的边界条件是给出未知函数及其非切向导数的组合.

狄利克雷边值问题(Dirichlet boundary value problem) 见“边值问题”.

诺伊曼边值问题(Neumann boundary value problem) 见“边值问题”.

鲁宾边值问题(Robin boundary value problem) 见“边值问题”.

混合问题(mixed problem) 定解问题之一.既有边界条件也有初始条件的问题称为混合问题,有时也称为初-边值问题或混合初-边值问题.

初-边值问题(initial-boundary value problem) 即“混合问题”.

齐次边值问题(homogeneous boundary value problem) 特殊的边值问题.边界条件关于未知函数及其导数是齐次的边值问题称为齐次边值问题,否则称为非齐次边值问题.

非齐次边值问题(nonhomogeneous boundary value problem) 见“齐次边值问题”.

定解问题的解(solution of the deterministic problem) 满足定解问题中的偏微分方程及定解条件的函数.若函数 u 在某区域内满足泛定偏微分方程,且当点从该区域内趋于给出初始条件的超平面或趋于给出边界条件的边界曲面时,定解条件中所出现的解 u 及其导数的极限处处存在而且满足相应的定解条件,就称 u 是定解问题的解.

解的稳定性(stability of solution) 解对定解条件的某种连续依赖关系.如果定解条件中的数据的微小改变只引起定解问题的解的很小改变,则称定解问题关于定解条件是稳定的.严格的数学定义如下:假定定解条件中的数据为函数 φ(它可以是一个函数,也可以是几个函数),将它看做某个函数空间 Φ 中的元素.对应于数据 φ,定解问题的解 u 看成另一函数空间 U 中的元素.如果在空间 Φ 和 U 中分别规定了某种拓扑(或某种极限关系),那么从 φ 到 u 被看做是从空间 Φ 到空间 U 的一个映射 T.如果此映射是连续的,则称原定解问题是稳定的.此时,若在 Φ 中序列 $\varphi_n\to\varphi$,且 $T(\varphi_n)=u_n$,$T(\varphi)=u$,则在 U 中必有 $u_n\to u$.稳定性的概念依赖于原始数据空间 Φ 和解空间 U 以及在它们中拓扑的选择.因此,讨论稳定性时,必须确切说明在什么意义下的稳定性.

适定问题(well-posed problem) 偏微分方程定解问题研究中的基本问题.如果定解问题的解存在、惟一并且关于定解条件是稳定的,则称定解问题的提法是适定的.通常从物理学和工程问题中提出的偏微分方程(组),由于其固有的性质,它对某些定解条件是适定的.例如,像拉普拉斯方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$那样的椭圆型方程,其边值问题是适定的.而像 $u_{xx}-u_{yy}=0$ 那样的双曲型方程与$u_t-u_{xx}=0$那样的抛物型方程,其初值问题及混合问题(初边值问题)都是适定的.适定这一概念是阿达马(Hadamard,J.(-S.))于 1923 年提出的.

不适定问题(ill-posed problem) 与适定问题相对应的定解问题.对一个定解问题,如果解的存在性、惟一性和解对定解条件的连续依赖性三者之一不满足,则称为不适定问题.

在经典的数学物理中,人们只研究适定问题,所以在相当一段时间里,人们认为不适定问题不反应客观的物理现象,没有研究价值.随着生产和科学技术的进步,在许多领域内,如地球物理、自动控制、连续介质力学、电磁学、热的扩散理论、大气理论、天体力学等,都出现了大量的不适定问题.不适定问题的例子是由阿达马(Hadamard J.(-S.))首先发现的,他指出:拉普拉斯方程的初值问题

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad u(x,0)=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\frac{\sin nx}{n^k}$$

在解析解的意义下有惟一解

$$u(x,y)=\frac{\sin nx\,\mathrm{sh}\,ny}{n^{k+1}},$$

由于

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)\right|\leqslant\frac{1}{n^k},$$

所以当 n 充分大时,u 和 $\partial u/\partial y$ 在 $y=0$ 处的值可以任意地小,但按照 $\mathrm{sh}\,ny$ 的性质,当 n 充分大时,不管 $y>0$怎么小,解 u 都可以取得相当大的值,这就破坏了解对初始条件的连续依赖性.

数学物理中的反问题(inverse problem in mathematical physics) 数学物理中的一类不适定问题.在所考察的偏微分方程定解问题中有不确定的因素,还须利用对解所获得的某些信息来推出方程中的未知系数或自由项、决定一部分定解条件或刻画求解区域的形状等.这类问题称为反问题.在遥测和勘探技术中提出了大量的反问题.例如,在地球物理勘探中,通过地震波的测量来判断地球内部的结构或地下矿藏的位置;在无损探伤中,用红外线扫描来探测固体材料的缺陷;利用 x 光分层扫描构像来做

医学诊断等，都是在研究对象不能达到或不能直接接触的情况下，利用特定的物理手段来取得有关解的信息，从而化为数学上的反问题处理的. 工程技术中的定向设计及系统识别等方面的问题，都属于反问题的范畴，在量子物理中，利用散射资料来反推位势的反散射问题，也是一类有重要意义的反问题. 一大类数学物理反问题可以通过构造其某种适定意义的新问题求近似解(参见“正则化方法”).

正则化方法(method of regularization) 物理和工程技术中提出的一大类数学物理反问题可以归结为算子方程

$$Au = f, \tag{1}$$

其中 f 是通过测量得到的数据，而 u 是不可能直接测量的未知量. 设 f 是度量空间 F(距离为 ρ_F)中的元素，而 u 是可能解的集合所成度量空间 U(距离为 ρ_U)中的元素. 算子方程(1)等价于

$$u=A^{-1}f=R(f).$$

方程(1)的不适定性一般表现为算子 R 在 $AU=\{Au\mid u\in U\}$ 上不连续. 因为 f 是通过测量得到的，它是近似值，设 f 的真值是 $\bar{f}$，问题(1)只能是求方程 $Au=\bar{f}$ 的解 $\tilde{u}=R(\bar{f})$ 的近似值，正则化方法是在测量数据 f 已知且 f 与其真值 $\bar{f}$ 的允许误差 $\rho_F(f,\bar{f})\leqslant\delta_1$ 给定的情况下，构造一个含参数 α 的算子$R(f,\alpha)$，使得由$u=R(f)$可导出函数 $\alpha=\alpha(\delta)$ 满足：对任意 $\varepsilon>0$，存在正数$\delta(\varepsilon)\leqslant\delta_1$，使得 $f_\delta\in F$ 且$\rho_F(f_\delta,f)\leqslant\delta(\varepsilon)$时有$\rho_U(u_\delta,u)<\varepsilon$，这里$u_\delta=R(f_\delta,\alpha(\delta))$；且当$\rho_F(f_\delta,f)\leqslant\delta(\varepsilon)$时，将 $u_\delta=R(f_\delta,\alpha(\delta))$ 作为方程(1)的近似解.

赫尔德空间(Hölder space) 在偏微分方程理论中常用到的一类函数空间. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域(连通开集)，$\alpha(0<\alpha\leqslant1)$是常数. 如果对 Ω 中定义的函数 $u(x)$，存在正常数 C，使得

$$|u(x)-u(y)|\leqslant C|x-y|^\alpha\quad(\forall x,y\in\Omega),$$

则称 u 在 Ω 中具有指数 α 的赫尔德连续性，并称

$$[u]_{\alpha,\Omega}=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

为 u 在 Ω 中的 α 赫尔德系数. 如果 $u(x)$在 Ω 的所有紧子集中具有指数 α 的赫尔德连续性，则称 $u(x)$在 Ω 中具有指数 α 的局部赫尔德连续性.

设 k 是非负整数，在 Ω 中具有所有不超过 k 阶连续偏导数的函数集合$C^k(\Omega)$中，所有 k 阶偏导数在 Ω 中具有指数 α 的局部赫尔德连续性的函数所成的子空间称为赫尔德空间$C^{k,\alpha}(\Omega)$. 在 $\bar{\Omega}$ 上具有所有不超过 k 阶连续偏导数的函数集合$C^k(\bar{\Omega})$中，所有 k 阶偏导数在 Ω 中具有指数 α 的赫尔德连续性的函数所成的子空间称为赫尔德空间$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. 为简单起见，通常记 $C^{0,\alpha}(\Omega)=C^\alpha(\Omega)$，$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})=C^\alpha(\bar{\Omega})$. 对有界区域 Ω，赫尔德空间 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$关于范数

$$\|u\|_{k,\alpha,\Omega}=\sum_{|\beta|\leqslant k}\sup_{x\in\Omega}|D^\beta u(x)|+\sum_{|\beta|=k}[D^\beta u]_{\alpha,\Omega}$$

是巴拿赫空间.

一阶偏微分方程

一阶拟线性偏微分方程(quasi-linear partial differential equation of first order) 一类特殊的一阶非线性偏微分方程. 关于未知函数的偏导数是线性的一阶非线性偏微分方程称为一阶拟线性偏微分方程. 一阶拟线性偏微分方程通常可以写成下列形状

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=a(x_1,x_2,\cdots,x_n,u),$$

其中 a_i 和 a 为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 u 的已知连续可微函数，

$$\sum_{i=1}^n a_i^2\neq0.$$

其几何意义为，在 $n+1$ 维空间中的每一点$(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)$给定了一个方向$(a_1,a_2,\cdots,a_n,a)$，曲面 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在该点上的法方向

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},-1\right)$$

与方向$(a_1,a_2,\cdots,a_n,a)$正交，或者说，曲面 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在该点与此方向相切. 常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=a_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\ (i=1,2,\cdots,n),$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=a(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{a_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)}=\frac{\mathrm{d}u}{a(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)}$$

称为上述一阶拟线性偏微分方程的特征方程. 特征方程的积分曲线，或向量场$(a_1,a_2,\cdots,a_n,a)$的积分曲线称为该一阶拟线性偏微分方程的特征线.

一阶拟线性偏微分方程的特征方程(characteristic equation of quasi-linear partial differential equation of first order) 见“一阶拟线性偏微分方程”.

一阶拟线性偏微分方程的特征线(characteristic curve of quasi-linear partial differential equation of first order) 见“一阶拟线性偏微分方程”.

蒙日束(Monge pencil) 一种特殊的平面束. 两个自变量的一阶拟线性偏微分方程所有过某点的

积分曲面在该点处的切平面所成的集合. 一阶拟线性方程

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \quad (1)$$

的解 $u=u(x,y)$ 可以看成 (x,y,u) 空间中的一个曲面，此曲面在固定点 $(x,y,u)=(x,y,u(x,y))$ 处的法向为 $(u_x,u_y,-1)$，方程(1)表示该法向与方向 (a,b,c) 正交. 于是曲面 $u=u(x,y)$ 在点 (x,y,u) 处的切平面必位于一个平面束中，此平面束称为蒙日束，蒙日束的轴称为蒙日轴，它就是过点 (x,y,u) 而方向为 (a,b,c) 的直线，并称向量 (a,b,c) 为蒙日向量.

蒙日轴(Monge axis)　见"蒙日束".

蒙日向量(Monge vector)　见"蒙日束".

一阶非线性偏微分方程(non-linear partial differential equation of first order)　一阶的完全非线性偏微分方程. 两个自变量的一阶非线性偏微分方程的一般形状是

$$F(x,y,u,p,q) = 0, \quad (1)$$

其中 $p=u_x, q=u_y, F$ 为五个变元的二次连续可微函数，$F_p^2+F_q^2 \neq 0$. 方程(1)给出待求的积分曲面 $u=u(x,y)$ 的法向量 $(p,q,-1)$ 在 (x,y,u) 空间中每点 P 处应满足的条件. 所以积分曲面在 P 点处的切平面形成通过 P 的一族单参数平面族，此单参数的平面族的包络是以 P 为顶点的一个锥面，这个锥面称为蒙日锥. 蒙日锥的母线方向称为特征方向. 在 (x,y,u) 空间中以特征方向为其每点处方向的曲线称为蒙日曲线. 在拟线性方程的情形，蒙日锥退化为蒙日轴.

蒙日锥(Monge cone)　见"一阶非线性偏微分方程".

蒙日曲线(Monge curve)　见"一阶非线性偏微分方程".

特征方向(characteristic direction)　见"一阶非线性偏微分方程".

一阶非线性方程的特征微分方程组(characteristic differential equation of nonlinear equation of first order)　一阶非线性偏微分方程的曲面元素 (x,y,u,p,q) 满足的常微分方程组. 常微分方程组

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{ds} = F_p,\ \frac{dy}{ds} = F_q,\ \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q, \\ &\frac{dp}{ds} = -pF_u - F_x,\ \frac{dq}{ds} = -qF_u - F_y \end{aligned} \quad (1)$$

称为一阶非线性方程 $F(x,y,u,p,q)=0$ 的特征微分方程组. 如果特征微分方程组(1)的解 $(x(s),y(s),u(s),p(s),q(s))$ 满足 $F(x(s),y(s),u(s),p(s),q(s))=0$，则称函数组 $(x(s),y(s),u(s),p(s),q(s))$ 为非线性方程 $F=0$ 的特征带.

在考虑一阶非线性方程 $F=0$ 的柯西问题(参见"一阶非线性方程的柯西问题")时，先要求解特征微分方程组(1)，此时应有五个初始数据 $x=x(t), y=y(t), u=u(t), p=p(t), q=q(t)$，但相应的柯西问题只给出 $x=x(t), y=y(t), u=u(t)$，应按照条件

$$\begin{aligned} &\frac{du(t)}{dt} = p(t)\frac{dx(t)}{dt} + q(t)\frac{dy(t)}{dt}, \\ &F(x(t),y(t),u(t),p(t),q(t)) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

补充初始数据 $p(t)$ 和 $q(t)$. 条件(2)称为成带条件.

特征带(characteristic strip)　见"一阶非线性方程的特征微分方程组".

成带条件(strip condition)　见"一阶非线性方程的特征微分方程组".

全积分(complete integral)　n 个自变量的一阶非线性偏微分方程的含有 n 个独立常数的解. 例如，两个自变量的一阶非线性方程

$$F(x,y,u,p,q) = 0,\ p = u_x,\ q = u_y \quad (1)$$

的包含两个独立常数的解

$$u = \Phi(x,y,a,b) \quad (2)$$

称为方程(1)的全积分. 在两参数曲面族(2)中选取单参数曲面族，例如，$b=v(a)$ 时，单参数曲面族

$$u = \Phi(x,y,a,v(a)) \quad (3)$$

的包络可由方程 $\Phi_a+\Phi_b v'(a)=0$ 解出 $a=a(x,y)$ 代入(3)得出，即

$$u = \Phi(x,y,a(x,y),v(a(x,y))). \quad (4)$$

这个包络是不含任意常数但与函数 v 的选取有关(因 $a=a(x,y)$ 是由 v 的选取决定的)的解，这种含有任意函数 v 的解(4)称为方程(1)的通解；当函数 v 取定时，解(4)则称为方程(1)的特解. 由全积分(2)及方程

$$\Phi_a(x,y,a,b)=0, \quad \Phi_b(x,y,a,b)=0$$

消去 a,b 得到的解称为方程(1)的奇解. 一般地，对 n 个自变量的一阶非线性偏微分方程

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,p_1,p_2,\cdots,p_n) = 0 \quad (5)$$

$$\left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1,2\cdots,n\right),$$

包含 n 个独立常数的解

$$V(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,c_1,c_2,\cdots,c_n) = 0 \quad (6)$$

称为方程(5)的全积分；而由(6)和

$$\frac{\partial V}{\partial c_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

消去 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 得到的解 $G(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=0$ 称为方程(5)的奇解.

通解(general solution)　见"全积分".

特解(special solution)　见"全积分".

奇解(singular solution)　见"全积分".

泊松括号(Poisson bracket)　哈密顿场作用下的函数. 如果 $p(x,\xi)$ 是 $T^*\Omega=\Omega\times\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 上的实值

函数，Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$T^*\Omega$ 上的向量场

$$H_p=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}-\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

称为 p 的哈密顿场. 函数 $H_pq=\{p,q\}$ 称为泊松括号. 即

$$\{p,q\}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial q}{\partial \xi_j}-\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial q}{\partial x_j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(p,q)}{\partial(x_j,\xi_j)}.$$

哈密顿场(Hamiltonian field)　见"泊松括号".

拉格朗日-查皮特方法(Lagrange-Charpitmethod)　求两个自变量一阶非线性偏微分方程的全积分的一种方法. 对未知函数 u 的一阶非线性偏微分方程

$$F(x,y,u,p,q)=0,\ p=u_x,\ q=u_y,\quad (1)$$

如果能找出另一个方程

$$G(x,y,u,p,q)=a\ (a\text{ 是任意常数}),\quad (2)$$

使得方程组(1),(2)关于 p 与 q 是可解的，即满足条件

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial p} & \dfrac{\partial F}{\partial q}\\ \dfrac{\partial G}{\partial p} & \dfrac{\partial G}{\partial q}\end{vmatrix}\neq 0,\quad (3)$$

则可解出

$$p=f(x,y,u,a),\ q=g(x,y,u,a),\quad (4)$$

它们满足

$$F(x,y,u,f(x,y,u,a),g(x,y,u,a))\equiv 0,\quad (5)$$

$$G(x,y,u,f(x,y,u,a),g(x,y,u,a))\equiv 0.\quad (6)$$

此两式对 u 微分得 $F_u+F_pf_u+F_qg_u=0$, $G_u+G_pf_u+G_qg_u=0$. 由此解出

$$f_u=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,q)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)},\quad g_u=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,u)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}.\quad (7)$$

同样，对(5),(6)两式关于 x,y 微分可解出

$$g_x=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)},\quad f_y=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,q)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,q)}.\quad (8)$$

考虑到 $p_y=q_x$，由(4)有 $f_y+f_uq=g_x+g_up$. 将(7)与(8)代入上式得

$$\begin{vmatrix}F_p & F_x+F_up\\ G_p & G_x+G_up\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}F_q & F_y+F_uq\\ G_q & G_y+G_uq\end{vmatrix}=0,\quad (9)$$

这是方程(2)必需满足的可积性条件. 满足条件(9)的方程组(1),(2)称为对合方程组. 这时，可将(4)的第一个方程看成自变量 x 的常微分方程，而把 y 看成是参数，求出这个方程的通解为

$$u=\varphi(x,y,a,c(y)),\quad (10)$$

使它满足(4)的第二个方程，即满足 $\varphi_y+\varphi_cc'(y)=g(x,y,u,a)$ 或

$$c'(y)=\frac{g(x,y,u,a)-\varphi_y}{\varphi_c}.$$

可以证明，此式右端不含 x，因此它又是一个一阶常微分方程，可求出其通解 $c(y)=h(y,a,b)$，将它代入(10)就得到方程(1)的全积分

$$u=\varphi(x,y,a,h(y,a,b))=\psi(x,y,a,b).$$

这就是求全积分的拉格朗日-查皮特方法. 若方程(1)不显含未知函数 u，即有形状 $F(x,y,p,q)=0$ 时，选取的方程(2)也不需要含 u，即 $G(x,y,p,q)=0$. 此时可积性条件(9)简化为

$$\{F,G\}\equiv\frac{\partial(F,G)}{\partial(p,x)}+\frac{\partial(F,G)}{\partial(q,y)}=0,$$

这里的 $\{F,G\}$ 为泊松括号. 拉格朗日-查皮特方法对一般 n 个自变量的一阶非线性方程的推广又称为雅可比方法.

雅可比方法(Jacobian method)　求全积分的一种方法. 把拉格朗日-查皮特方法推广到求 n 个自变量一阶非线性方程的全积分的方法称为雅可比方法. 先假设方程不显含未知函数 u 本身，即求方程

$$F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,p_1,p_2,\cdots,p_n)=0,\ p_i=u_{x_i}\quad (1)$$

的全积分. 选取 $n-1$ 个方程

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,p_1,p_2,\cdots,p_n)=a_i\quad (2)$$

$$(i=2,3,\cdots,n;a_i\text{ 为任意常数}),$$

使得(1)与(2)合成的方程组对 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 可解，此时需要满足的条件有可解性条件

$$\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{\partial(p_1,p_2,\cdots,p_n)}=\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j}\right)\neq 0$$

及可积性条件

$$\{F_i,F_j\}\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(F_i,F_j)}{\partial(p_k,x_k)}=0\quad (3)$$

$$(i,j=1,2,\cdots,n),$$

这里的 $\{F_i,F_j\}$ 为泊松括号. 满足(3)的方程组(1),(2)称为对合方程组. 由(1),(2)解出

$$p_i=\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,a_2,\cdots,a_n)\ (i=1,2,\cdots,n),$$

由这些偏导数可确定再含一个任意常数 a_1 的函数

$$u=g(x_1,x_2,\cdots,x_n,a_2,\cdots,a_n)+a_1,$$

这就得到了所求的全积分. 再考察显含未知函数的方程

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,p_1,p_2,\cdots,p_n)=0.\quad (4)$$

设 u 由隐函数

$$v(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=c\ (c\text{ 为任意常数})\quad (5)$$

所确定，视 u 为自变量而 v 为新的未知函数，则由(5)有 $v_{x_i}+v_up_i=0$，即 $p_i=-v_{x_i}/v_u$，于是方程(4)变为不显含 v 的关于 v 的方程

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,-\frac{v_{x_1}}{v_u},\cdots,-\frac{v_{x_n}}{v_u}\right)=0.$$

根据上面所说的方法可以求出它的全积分

$$v=g(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,c_1,c_2,\cdots,c_n)+c.$$

由 $v=c$ 即 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0$ 可得(4)的全微分

$$u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n,c_1,c_2,\cdots,c_n).$$

对合方程组(convolution system of equations) 见“拉格朗日-查皮特方法”及“雅可比方法”.

哈密顿-雅可比方程(Hamilton-Jacobi equation) 不含未知函数本身的一阶非线性方程的特征微分方程组.在分析力学、几何学、变分学,特别是偏微分方程的特征理论中常常遇到不显含未知函数本身的一阶非线性偏微分方程

$$F(x,p)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n,p_1,p_2,\cdots,p_n)=0, \quad (1)$$

$$p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

写其特征微分方程组时,可以独立地列出关于 x,p 的导数的方程:

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial F}{\partial p_i},\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}\ (i=1,2,\cdots,n). \quad (2)$$

(2)称为函数 F 或方程 $F=0$ 的哈密顿-雅可比方程,(2)称为哈密顿方程组或典则方程组.(2)的解 $x_i=x_i(s),p_i=p_i(s)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足方程(1)时称为函数 $F(x,p)$ 的双特征带,而 $x_i=x_i(s)$ 称为双特征曲线或简称双特征(有时也称为次特征).如果 $F(x,p)$ 是 p 的齐次函数,则使得 $F(x_1(s),(x_2(s),\cdots,x_n(s),p_1(s),p_2(s),\cdots,p_n(s))\equiv 0$ 的双特征带称为零双特征带.一阶偏微分方程的标准型也称为哈密顿-雅可比方程(参见“光程函数方程”).

哈密顿方程组(Hamilton system of equations) 见“哈密顿-雅可比方程”.

典则方程组(canonical system of equations) 见“哈密顿-雅可比方程”.

双特征带(bicharacteristic strip) 见“哈密顿-雅可比方程”.

双特征(bicharacteristic) 双特征曲线的简称.见“哈密顿-雅可比方程”及“特征超曲面”.

次特征(bicharacteristic) 即“双特征”.

光程函数方程(eikonal equation) 一类重要的一阶非线性偏微分方程.如果一阶非线性方程

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,p_1,p_2,\cdots,p_n)=0$$

的解可用隐函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=0$ 给出,则可得到方程

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial u},\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial u},\cdots,-\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)=0.$$

它可以形式地被视为 $n+1$ 个自变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)$ 的不显含 φ 的一阶非线性方程.如果从中解出某一个偏导数,例如 $\partial\varphi/\partial u$,且把 u 写成 t,则得到下列形式的偏微分方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+H\left(t,x,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=0,$$
$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right).$$

这样的方程称为一阶偏微分方程的标准型,也称为哈密顿-雅可比方程.在几何光学中称为光程函数方程.

一阶偏微分方程的标准型(normal form of partial differential equation of first order) 见“光程函数方程”和“哈密顿-雅可比方程”.

蒙日方程(Monge equation) 一种特殊的一阶非线性偏微分方程.对一阶非线性偏微分方程

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,p_1,p_2,\cdots,p_n)=0,$$
$$p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}\ (i=1,2,\cdots,n). \quad (1)$$

由 $n+2$ 个方程

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=F_{p_i},\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\sum_{i=1}^{n}p_iF_{p_i},F(x,u,p)=0$$

消去 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ 和参数 s 所得到的方程称为蒙日方程,例如当 $F_{p_1}\neq 0$ 时,从 $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}x_1=F_{p_i}/F_{p_1}$ 与 $F=0$ 消去 p 就得到蒙日方程

$$M\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_1},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1},\cdots,\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_1}\right)=0.$$

蒙日方程的解所表示的曲线称为方程(1)的积分曲线.方程(1)的特征曲线也是它的积分曲线.当 $n=2$ 时,一般地,不是特征曲线的积分曲线是由与它相切的特征曲线族所生成的曲面($F=0$ 的积分曲面)的脊线.对一阶拟线性方程,即当 F 是 p 的线性函数时,所有积分曲线都和特征线一致.

一阶非线性方程的柯西问题(Cauchy problem of nonlinear equation of first order) 一阶非线性方程的基本定解问题.求一阶非线性偏微分方程 $F(x,y,u,p,q)=0$ 通过给定空间曲线 $C:x=x(t),y=y(t),u=u(t)$ 的积分曲面的问题称为柯西问题.为此应按照成带条件

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+q(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},$$
$$F(x(t),y(t),u(t),p(t),q(t))=0$$

对曲线 C 补充两个函数 $p(t),q(t)$,成为初始带 C_1.用 C_1 作初始条件求解特征常微分方程组(参见“一阶非线性偏微分方程的特征微分方程组”),得到单参数特征带族:$x=x(s,t),y=y(s,t),u=u(s,t),p=p(s,t),q=q(s,t)$.如果在 C_1 上

$$\Delta=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=F_py_t-F_qx_t\neq 0,$$

则在 C_1 附近可以消去 s,t 得到惟一解 $u=u(x,y)$.如果在 C_1 上 $\Delta=0$,原问题可能无解;如果有解,则

从 $\Delta = F_p y_t - F_q x_t = 0$ 可推知 C_1 必是特征带，这时可以作出无限多个过曲线 C_1 的积分曲面，从而柯西问题将有无穷多个解，它们都以特征带 C_1 为公共元素. 以上结论对多个自变量的方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0$$

亦真. 上面给出的由带参数的特征带簇消去参数得到柯西问题的解的方法称为解柯西问题的特征线法.

解柯西问题的特征线法(characteristic method for Cauchy problem) 见"一阶非线性方程的柯西问题".

一阶半线性方程组的特征理论(characteristic theory of semi-linear equation system of first order) 特征是偏微分方程的一个基本几何概念. 利用它不仅可以对方程进行分类，而且对方程解的存在、惟一性及其他性质(如奇性传播)的研究有重要意义. 一阶半线性方程组的一般形式为

$$L_i u = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} a_{ijk}(x) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + b_i(x, u) = 0 \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, l),$$

利用矩阵记号又可写为

$$Lu = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + B(x, u) = 0,$$

其中 $A_k(x) = (a_{ijk}(x))$ 为 $l \times l$ 矩阵，

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_l)^T, \ B = (b_1, b_2, \cdots, b_l)^T.$$

满足方程

$$\det \left| \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right| = 0 \quad (2)$$

的函数 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所定义的曲面 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 称为方程组(1)的特征曲面，而方程(2)称为方程(1)的特征方程. 使得

$$\det \left| \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \alpha_k \right| = 0$$

的方向 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 称为方程组(1)在 x 点处的特征方向.

一阶半线性方程组的特征方程(characteristic equation of semi-linear equation system of first order) 见"一阶半线性方程组的特征理论".

特征曲面(characteristic surface) 见"一阶半线性方程组的特征理论".

特征方向(characteristic direction) 见"一阶半线性方程组的特征理论".

一阶线性方程组的杜阿梅尔原理(Duhamel principle for linear equation system of first order) 通过齐次线性方程组柯西问题的解表示对应非齐次方程组的柯西问题的解的原理，它类似于常微分方程的常数变易法. 将一阶线性方程组写为向量形式

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + Bu = F(x, t),$$

式中 A_k 和 B 都是 $l \times l$ 矩阵，其元为 x, t 的连续函数，u 和 F 是 l 维列向量. 如果依赖于参数 τ 的向量函数 $u = \varphi(x, t; \tau)$ 是齐次方程组 $Lu = 0$ 在 $t = \tau$ 时满足初始条件 $u(x, \tau) = F(x, \tau)$ 的一个解，则

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t; \tau) \mathrm{d}\tau$$

就是方程组 $Lu = F(x, t)$ 的满足初始条件 $u(x, 0) = 0$ 的解. 这一结果是杜阿梅尔(Duhamel, J. M. C.)在研究热力学问题中发现的，称为杜阿梅尔原理. 杜阿梅尔原理对波动方程也成立.

高阶偏微分方程

高阶线性方程的特征方程(characteristic equation of linear equation of higher order) 线性偏微分方程最高阶导数部分对应的齐次代数方程，利用它可以对高阶线性方程进行分类. $m(m \geqslant 2)$ 阶线性偏微分方程的一般形式是

$$H(x, D)u + K(x, D)u = f(x), \quad (1)$$

$$H(x, D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

$$K(x, D) = \sum_{|\beta| \leqslant m-1} b_\beta(x) D^\beta,$$

其中

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \ D = (D_1, D_2, \cdots, D_n),$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$

函数 $a_\alpha(x)$, $b_\beta(x)$ 和自由项 $f(x)$ 都是 x 的连续函数. 对一个曲面 $S: \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$，代替自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 引入新的自变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-1}, \xi_n$，使 $\xi_n = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则方程(1)变成

$$H\left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \frac{\partial^m u}{\partial \xi_n^m} + \cdots = f,$$

左端省略号代表 u 关于 ξ 的偏导数的阶数不超过 m 且对 ξ_n 求导阶数不超过 $m-1$ 的那些项. 于是，若在曲面 S 上给出 u 及其所有关于 ξ_n 不超过 $m-1$ 阶导数的值，则上式中除左端第一项外都是已知的，能否确定 $\partial^m u / \partial \xi_n^m$ 在 S 上的值取决于其系数 H 是否为零. $H(x, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = 0$ 称为方程(1)的特征方程. 称满足方程

$$H\left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) = 0$$

的函数 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所定义的曲面

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

为方程(1)的特征曲面，而称满足方程

$$H(x, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = 0$$

的非零向量 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 为方程(1)在 x 点处的特

征方向.

高阶线性方程的特征方向(characteristic direction of linear equation of higher order) 见"高阶线性方程的特征方程".

高阶线性方程的特征曲面(characteristic surface of linear equation of higher order) 见"高阶线性方程的特征方程".

高阶线性方程的分类(classification of linear equation of higher order) 利用特征方向可对高阶方程分类.若方程

$$H(x,D)u+K(x,D)u=f(x), \qquad (1)$$

$$H(x,D)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)D^\alpha,$$

$$K(x,D)=\sum_{|\beta|\leqslant m-1}b_\beta(x)D^\beta$$

在 x 点处无实特征方向,则称方程(1)在 x 点处为椭圆型的;如果方程(1)在 x 点处只有实特征方向,即对任意取定的实数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$,方程 $H(x,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=0$ 对 α_n 只有实根,则称方程(1)在 x 点处为双曲型的;如果方程(1)在 x 点处对 α_n 有 m 个不同的实特征方向,则称方程(1)为完全双曲型或狭义双曲型的.若方程(1)在区域 Ω 中每一点都是椭圆型(双曲型、完全双曲型)的,则称方程(1)在 Ω 中是椭圆型(双曲型、完全双曲型)的.应予注意的是,高阶方程的分类只与其主部(最高阶导数项)H 有关而与低阶项无关.还应注意对 $m>2$ 的高阶方程所区分出来的称为椭圆型、双曲型等方程只是高阶方程中很少一部分,而对于二阶方程却可以做较完整的分类(参见"二阶线性偏微分方程的分类").

二阶线性偏微分方程的分类(classification of linear partial differential equation of second order) 对特征方程利用二次型理论可以将二阶线性偏微分方程分类.考查 n 个自变量的二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x), \qquad (1)$$

其中 a_{ij},b_i,c 和 f 都是 x 的已知实函数.此方程的特征方程为

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0. \qquad (2)$$

如果函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足特征方程(2),则 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$是方程(1)的特征曲面.对于一个固定点 x_0,过该点的特征方向$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$满足方程

$$Q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0)\alpha_i\alpha_j=0. \qquad (3)$$

根据二次型理论,存在非奇异线性变换

$$x_i=\sum_{j=1}^n d_{ij}\xi_j \ (i=1,2,\cdots,n), \qquad (4)$$

使二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0)x_ix_j \qquad (5)$$

化为标准型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n k_i\xi_i^2,$$

其中系数 k_i 仅取值 1,0 或 -1.此时偏微分方程(1)可经非奇异线性变换(4)化为

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^*(x)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\partial\xi_j}+\sum_{i=1}^n b_i^*(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi}+c^*(\xi)u=f^*(\xi), \qquad (6)$$

其中 $a_{ii}^*(x_0)=k_i(i=1,2,\cdots,n),a_{ij}^*(x_0)=0(i\neq j)$,方程(6)称为方程(1)在点 x_0 处的标准型.如果二次型(5)是正定或负定的,即所有 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$都是 1 或都是 -1,则称方程(1)在点 x_0 处是椭圆型的;如果 k_i 中有一个为 1(或 -1),其余 $n-1$ 个都是 -1(或 1),则称方程(1)在 x_0 处为双曲型的;如果系数 k_i 均不为零,且取 1 及 -1 的个数都大于 1,则称方程(1)在 x_0 处为超双曲型的;如果 k_i 中至少有一个是零,而其余的 k_i 都是 1(或都是 -1),则称方程(1)在 x_0 处为抛物型的.如果在一个区域中的每一点处,方程(1)均有相同的类型,则称(1)在该区域中是这种类型的.如果方程(1)的二阶偏导数的系数都是常数,则其标准型为

$$\sum_{i=1}^k k_i\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i^2}+\sum_{i=1}^n b_i^*(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi_i}+c^*(\xi)u=f(\xi).$$

因此,如果不写出含低阶导数的项,则常系数二阶线性偏微分方程的四类标准型是:

1. 椭圆型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\cdots=0.$$

2. 双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\cdots-\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}-\cdots=0.$$

3. 超双曲型方程($1<m<n-2$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m+1}^2}-\cdots-\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}-\cdots=0.$$

4. 抛物型方程($b\neq 0,1\leqslant m<n$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}-b\frac{\partial u}{\partial x_n}+\cdots=0.$$

对于变系数方程,则它可能在区域的一部分点上是这种类型,而在另一部分点上是另一种类型(参见"混合型偏微分方程").

二阶线性偏微分方程的标准型(canonical forms of linear partial differential equation of second order) 见"二阶线性偏微分方程的分类".

发展方程(evolution equation) 用来描述随时间而演变的过程的偏微分方程(组). 在一个偏微分方程(组)中,如果某个自变量可以赋予像时间 t 那样的含义,且能写为如下形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u+F\left(t,x,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u,\cdots\right)=0,$$

则称其为发展方程,式中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$, $0\leqslant j\leqslant m-1$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是多重指标, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为非负整数,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

常见的发展方程有:热传导方程、双曲型方程、反应扩散方程、克莱因-戈登方程 $u_{tt}-\Delta u+m^2u=0$ 及其非线性形式 $u_{tt}-\Delta u+m^2u=\sin u$,薛定谔方程 $\mathrm{i}u_t+\Delta u=0$ 及纳维-斯托克斯方程组

$$\rho\left(\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial t}+\sum_{i=1}^3 u_i\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial x_i}\right)-\mu\Delta\mathscr{U}=\rho\mathscr{F}-\operatorname{grad}p,$$
$$\operatorname{div}\mathscr{U}=0$$

(式中 ρ 为密度,p 为压强,μ 为粘性系数,$\mathscr{U}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathscr{F}$ 为外力密度)等.

发展方程的定解问题、形式多种多样,有其不同的特点,常常需用不同的方法来求解;但在不少的情形下,可以用适当的方法化为巴拿赫空间中的抽象常微分方程的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=Au+F(u)\ \ (u(0)=u_0),$$

式中 A 是该巴拿赫空间上的一个压缩半群的生成元,因此可用算子半群的方法来统一地处理.

克莱茵-戈登方程(Klein-Gordon equation) 见“发展方程”.

算子半群方法(operator semigroup method) 见“发展方程”及“热传导方程解的半群性质”.

薛定谔方程(Schrödinger equation) 量子力学的基本方程. 描述微观粒子运动状态的波函数 $\psi(t,x)$ 满足的方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H(\mathscr{P},x)\psi$$

称为薛定谔方程,也称为量子力学中的波动方程,式中 $\mathscr{P}$ 表示动量,可以用 $\mathscr{P}=-\mathrm{i}\hbar\nabla$ 表示,$\hbar$ 等于普朗克常数除以 2π,H 是哈密顿算符,$x=(x_1,x_2,x_3)$ 为粒子在空间中的位置坐标. 对受外力场 $V(x)$ 的作用而运动的粒子,如果用 m 表粒子的质量,则

$$H=\frac{\mathscr{P}^2}{2m}+V(x).$$

于是薛定谔方程成为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x)\right\}\psi(t,x)=0,$$

上式虽被称为波动方程,但在形式上却和扩散方程相似,从数学分类上讲它是抛物型方程. 一般地,如果 A 是一个椭圆算子,则形如

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}+Au=f$$

的方程也称为薛定谔型方程.

弹性振动方程(elastic vibration equation) 描述弹性体振动的方程. 设弹性体平衡时占据区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$,设点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 处的位移为

$$u=(u_1,u_2,u_3),\quad \varepsilon_{kh}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h}+\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right)$$

为应变,弹性系数为 a_{ijkh},应力满足虎克定律 $\sigma_{ij}=a_{ijkh}\varepsilon_{kh}(u)$,弹性体受密度为 $f=(f_1,f_2,f_3)$ 的力,则弹性体的振动方程为

$$\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}=f_i\ \ (\text{在 }\Omega\text{ 内}).$$

结合边界上的位移或应变的给定数据可确定 u. 当 u 不依赖 t 时即得弹性平衡方程

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}=f_i.$$

对各向同性的均匀弹性体,当外力为零时,弹性振动方程化为

$$\rho\frac{\partial^2u_i}{\partial t^2}=\mu\Delta u_i+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{div}u)\ \ (i=1,2,3),$$

其中 ρ 是密度,λ,μ 是弹性体的拉梅常数. 每个分量 u_i 都满足由两个不同的波动算子所组成的四阶方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\mu}{\rho}\Delta\right)u_i=0.$$

当弹性体平衡时得到重调和方程 $\Delta^2u=0$.

弹性平衡方程(elastic equilibrium equation) 见“弹性振动方程”.

偏微分方程的基本解(fundamental solutions of partial differential equation) 偏微分方程的一种具有特定奇异性质的解,由它可以构造出一般的解. 对于 n 个自变量的 m 阶线性偏微分方程

$$Lu\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha u=0,\tag{1}$$

其中

$$D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\ \ (|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n),$$

(1)的基本解定义为方程 $Lu=\delta(x-\xi)$ 的解,其中 $\delta(x)$ 是 n 维狄喇克函数(δ 函数),即满足条件

$$\int_{\mathbb{R}^n}\delta(x-\xi)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(\xi)\ \ (\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$$

的广义函数. 方程(1)的基本解 $\Gamma(x,\xi)$ 有下列性质:

1. 当 $x\neq\xi$ 时,$L\Gamma(x,\xi)=0$.

2. 对任意连续函数 $f(x)$,函数

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

是方程 $Lu=f(x)$ 的解. 也可以把具有性质 1,2 的函数 $\Gamma(x,\xi)$ 定义为方程(1)的基本解.

拉普拉斯方程

$$\Delta_n u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

的基本解为

$$\Gamma(x,\xi)=\Gamma(x-\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-\xi|} & (n=2), \\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{2(2-n)\pi^{\frac{n}{2}}}\dfrac{1}{|x-\xi|^{n-2}} & (n\geqslant 3), \end{cases}$$

其中

$$|x-\xi|=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+\cdots+(x_n-\xi_n)^2}.$$

热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_n u$$

的基本解为

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n}\exp\left(\frac{-|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)H(t-\tau).$$

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_n u$$

的基本解为

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}H(a(t-\tau)-|x-\xi|) & (n=1), \\ \dfrac{1}{2\pi a\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}} \times H(a(t-\tau)-|x-\xi|) & (n=2), \\ \dfrac{\delta(|x-\xi|-a(t-\tau))}{4\pi a|x-\xi|} \times H(a(t-\tau)-|x-\xi|) & (n=3), \end{cases}$$

其中 $H(s)$ 为亥维赛函数，即

$$H(s) = \begin{cases} 1 & (s\geqslant 0), \\ 0 & (s<0), \end{cases}$$

满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_n u, \quad u(x,0) = \delta(x-\xi)$$

的解称为 n 维热传导方程柯西问题的基本解，其表达式为

$$\Gamma(x,t;\xi) = \Gamma(x-\xi,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right),$$

满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta_n u, u(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \delta(x-\xi) \end{cases}$$

的解称为 n 维波动方程柯西问题的基本解，其表达式为

$$\Gamma(x,t;\xi) = \Gamma(x-\xi,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}H(at-|x-\xi|) & (n=1), \\ \dfrac{1}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x-\xi|^2}} \times H(at-|x-\xi|) & (n=2), \\ \dfrac{\delta(|x-\xi|-at)}{4\pi a|x-\xi|} & (n=3). \end{cases}$$

柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理(Cauchy-Kovalevskaja theorem) 偏微分方程理论中第一个普遍性的解存在定理.对柯瓦列夫斯卡娅类型方程组：

$$\frac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t,x_1,x_2,\cdots,x_n, u_1,u_2,\cdots,u_N,\cdots,\frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\cdots\right)$$

$(i,j=1,2,\cdots,N;\ k_0+k_1+\cdots+k_n=k\leqslant n_i;k_0<n_i)$，赋予定解条件

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right|_{t=t_0} = \varphi_i^k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$(k=0,1,\cdots,n_i-1;i=1,2,\cdots,n),$$

即成为一个初值问题(柯西问题).柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理断言：如果 φ_i^k 在点 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的邻域内解析，所有 F_i 在相应点 $(t^0,x^0,u^0,\cdots,(\partial^k u_j)^0,\cdots)$ 的邻域内解析，那么如上的柯西问题在 (t^0,x^0) 的某个邻域内有惟一的解析解，其中 $(\partial^k u_j)^0$ 表示

$$\partial^k u_j = \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}$$

在 (t^0,x^0) 处由初始条件确定的值.

卢伊关于无解的线性偏微分方程的例子(Lewy's example of linear partial differential equation without solution) 光滑系数线性偏微分方程没有解的著名例子.自从柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理建立之后，对于线性方程，人们猜测当其系数和自由项虽不是解析的但属于 C^∞ 时，解亦应存在.1957年，卢伊(Lewy,H.)举出了一个简单的反例，否定了这个猜测.卢伊指出，如果方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) + \mathrm{i}(x_1+\mathrm{i}x_2)\frac{\partial y}{\partial x_3} = f(x_3)$$

在原点邻域内有连续可微解 $u(x_1,x_2,x_3)$，那么 f 就必须是解析的.这表明即使 f 无限次可微，但不是解析的，上述方程也没有连续可微解.实际上，在广义函数类中该方程也没有解.卢伊提出的这个著名的光滑系数线性偏微分方程无解的例子，在数学界引起了很大的震动，促进了偏微分方程局部可解性及一般线性偏微分算子的研究.

霍姆格伦的惟一性定理(Holmgren uniqueness

theorem） 偏微分方程理论中一个带普遍性的解的惟一性定理.霍姆格伦惟一性定理断言：原点邻域内具解析系数的一阶线性方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k} + B(x,t)u + f(t,x)$$

（A_k 和 B 是 $N\times N$ 矩阵，u 和 f 为 N 维矢量），满足 C^1 初始条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的柯西问题在原点的某邻域内的 C^1 解是惟一的.

由于具解析系数的高阶方程组可以化成一阶组，所以霍姆格伦定理对高阶线性方程也成立.此定理中关于系数为解析的要求一般是不能去掉的，普李斯（Plis，A.）于 1954 年曾给出一个偏微分方程组的例子，其系数无限次连续可微，但齐次柯西问题除平凡解外还有一个非零的无限可微的解.

二阶偏微分算子的格林公式（Green formula of second order partial differential equation） 联系两个自变量的二阶偏微分算子及其伴随算子的一个等式.二阶偏微分算子

$$Lu=a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+cu$$

的伴随算子为

$$L^*u=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(a_{11}v)+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(a_{12}v)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(a_{22}v)-\frac{\partial}{\partial x_1}(a_1v)-\frac{\partial}{\partial x_2}(a_2v)+cv.$$

令

$$H(u,v)=v\left(a_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_2u\right)-u\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(a_{12}v)+\frac{\partial}{\partial x_2}(a_{22}v)\right),$$

$$K(u,v)=-v\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial x_2}+a_1u\right)+u\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(a_{11}v)+\frac{\partial}{\partial x_2}(a_{12}v)\right),$$

则有黎曼等式

$$vLu-uL^*v=\frac{\partial}{\partial x_2}H-\frac{\partial}{\partial x_1}K,$$

两端积分得二阶微分算子 L 的格林公式

$$\int_\Omega(vLu-uL^*v)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_{\partial\Omega}H\mathrm{d}x_1+K\mathrm{d}x_2.$$

这一公式是定义广义解的基础和用黎曼方法解两个自变量的双曲型方程的出发点.

二阶偏微分算子的伴随算子（adjoint operator of second order partial differential equation） 见“二阶偏微分算子的格林公式”.

双曲型方程

双曲型偏微分方程（partial differential equation of hyperbolic type） 描述振动或波动现象的一类重要的偏微分方程.它的一个典型特例是波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\cdots-\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0.$$

$n=1$ 时的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1}$$

可用来描述弦的微小横振动，称为弦振动方程.这是最早得到系统研究的一个偏微分方程.其解具有十分简单的结构，即总可以表为一个右传播波和一个左传播波的叠加：$u=F(x-t)+G(x+t)$.因此，当给定弦的初始位移和速度

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), \tag{2}$$

即可得到柯西问题(1)，(2)的解的表达式

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-t)+\varphi(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

称为达朗贝尔公式.

二阶线性双曲型方程（second order linear hyperbolic equation） 最简单最重要的双曲型偏微分方程.对于 $n+1$ 个自变量 $t,x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的二阶线性偏微分方程

$$Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}a_{0i}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_i}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-a_0\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-au-f=0,$$

假设所有系数及 f 都是 t,x 的光滑函数.如果在固定点 (t,x) 处特征方程

$$\lambda^2-\sum_{i=1}^{n}a_{0i}\xi_i\lambda-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j=0$$

对任意非零实数组 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，恒有两个相异实根 $\lambda_1(t,x;\xi)$，$\lambda_2(t,x;\xi)$，则称 $Lu=0$ 在点 (t,x) 处为双曲型方程，或简称在 (t,x) 处是双曲的.若在所考查的区域的每点处 $Lu=0$ 都是双曲的，则称 $Lu=0$ 在该区域是双曲的.如果 λ_1,λ_2 关于 $(t,x)\in Q$ 是一致分离的，即当

$$\inf_{(t,x)\in Q,|\xi|=1}|\lambda_1(t,x;\xi)-\lambda_2(t,x;\xi)|=c>0$$

成立时，则称 $Lu=0$ 在 Q 内是正则双曲的.

线性双曲型方程的典型例子是波动方程（参见“波动方程”）以及描述有电漏的导线中电流传导的双曲型方程——电报方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

正则双曲型(regular hyperbolic type)　见"二阶线性双曲型方程".

波动方程(wave equation)　描述波动或振动现象的典型方程.形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)=f(t;x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的方程称为 n 维波动方程,式中 a 为正常数,f 是已知函数.

物体的许多运动规律可以用波动方程来描述,如弦的振动、膜的振动与声波和电磁波的传播可以分别用一维、二维和三维波动方程来描述.因此,一维波动方程又称为弦振动方程,二维波动方程又称为膜振动方程.对于波动方程,柯西(初值)问题和混合(初-边值)问题是适定的,边值问题是不适定的.

波动方程的基本解(fundamental solution of wave equation)　见"偏微分方程的基本解".

弦振动方程(equation of vibration of a string)　见"波动方程"和"双曲型偏微分方程".

膜振动方程(equation of vibration of a membrane)　见"波动方程".

特征超曲面(characteristic hypersurface)　求解双曲型方程或研究其解的性质时起重要作用的一种超曲面.一个超曲面 $S:\varphi(t,x)=0$,如果在其上成立

$$H\left(t,x;\frac{\partial\varphi}{\partial t},\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=0,$$

就称 S 是方程

$$Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}a_{0i}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-a_0\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-au-f=0 \quad (1)$$

的一个特征超曲面,其中

$$H(t,x;\lambda,\xi)=\lambda^2-\sum_{i=1}^{n}a_{0i}\xi_i\lambda-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j.$$

$$H(t,x;\lambda,\xi)=0 \quad (2)$$

称为方程(1)在(x,t)处的特征方程.对于双曲型方程,任一特征超曲面均由双特征线组成,而双特征线(又称特征射线)$t=t(\tau)$,$x=x(\tau)$由如下常微分方程组

$$\frac{dt}{d\tau}=H_\lambda,\ \frac{dx_i}{d\tau}=H_{\xi_i}\ (i=1,2,\cdots,n),$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau}=-H_t,\ \frac{d\xi_i}{d\tau}=H_{x_i}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

满足附加条件(2)的解给出.由过一点 $P(t^0,x^0)$的一切双特征线所构成的特征超曲面,称为以 P 为顶点的特征劈锥面,特征劈锥面连同其内部称为特征劈锥体,它们由位于 $t\geqslant t^0$ 和 $t\leqslant t^0$ 的向前及向后两部分组成.过 P 点指向此劈锥面内部的任一方向,称为此点的类时方向;一个处处和类时方向相切的曲线称为时向曲线.以 P 为顶点的特征劈锥内部的任一点,都可用时向曲线与 P 点相连结.对曲面上任一点,都有经过该点且位于此曲面上的时向曲线时称此曲面为时向曲面.处处将劈锥的前后两部分分隔开的超曲面称为空向曲面.对方程(1),超曲面(t=常数)就是空向曲面.对波动方程,双特征线都是直线 $x_i=a_i+\alpha_i t(i=1,2,\cdots,n)$,式中

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=1,$$

而以 $P(t^0,x^0)$为顶点的特征劈锥面就是特征锥面

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2=(t-t_0)^2,$$

此时 t 轴恰为一个时向曲线.在方程(1)的主部的系数有界时,以任何点为顶点的特征劈锥面都可包含在以此点为顶点的一个固定大小的圆锥中.解的弱间断面一定是特征超曲面.因此,在波的传播中,特征超曲面可用来表示波前,即作为已受扰动与未受扰动的区域的分界面,而任何扰动都沿着双特征线传播.

扰动沿双特征线传播的性质,充分体现了一般情形下线性双曲型偏微分方程的解的奇性传播的特点.在光学中,双特征线就是光线,沿着它们积分一些常微分方程,在高频振动的情形下,可得到精确解的渐近展开式.此方法称为几何光学近似.它将波动光学和几何光学联系起来,并为傅里叶积分算子提供了一个雏型.

特征射线(characteristic ray)　见"特征超曲面".

特征劈锥面(characteristic conoid surface)　见"特征超曲面".

特征劈锥体(characteristic conoid)　见"特征超曲面".

时向曲线(time-like curve)　见"特征超曲面".

时向曲面(time-like hypersurface)　见"特征超曲面".

空向曲面(space-like hypersurface)　见"特征超曲面".

几何光学近似方法(geometric optics' approximate method)　见"特征超曲面".

二阶线性双曲型方程的柯西问题(Cauchy problem for second order linear hyperbolic partial differential equation)　二阶双曲型方程的一类重要的定解问题.求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}a_{0i}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_i}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$-a_0\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-au-f=0 \qquad (1)$$

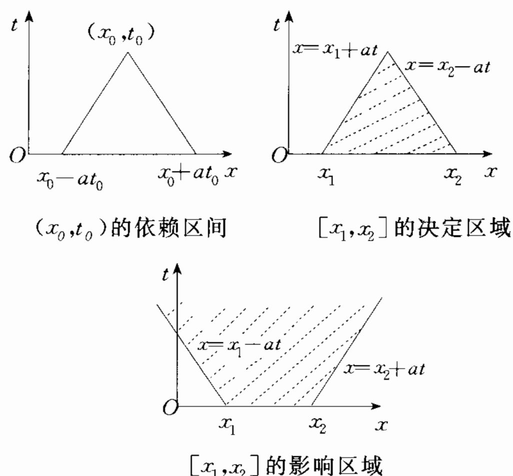
在 $t>0$ 的解 $u=u(x,t)$，使它满足初始条件

$$u|_{t=0}=u_0(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x). \qquad (2)$$

(1)，(2)称为柯西问题或初值问题，式中 $u_0(x)$，$u_1(x)$是给定的适当光滑的函数. 一般地，柯西问题的初始数据可以给在任一类空向曲面上. 对于正则双曲型方程，其柯西问题是适定的.

柯西问题(1)，(2)的解在点 $P(x^0,t^0)(t^0>0)$处的值，只依赖于以 P 点为顶点的后向特征劈锥体(或面)与初始超平面 $t=0$ 交截所得的区域 G_P 上的初始数据，而与 G_P 外的初始数据无关. G_P 称为点 P 的依赖区域. 依赖区域的有界性反映了波动以有限速度传播的事实，这是双曲型方程的一个本质特点. 相应地，初始数据在 $t=0$ 上一点 P^0 的一个邻域中的扰动，仅对以 P^0 为顶点的前向特征劈锥体(面)的一个邻域中的数值产生影响，这个前向劈锥体(面)称为点 P^0 的影响区域. 对初始空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域 D，其依赖区域完全包含在 D 中的点组成的集合称为 D 的决定区域.

对一维波动方程，点(x_0,t_0)的依赖区域是区间$[x_0-at_0,x_0+at_0]$；而区间$[x_1,x_2]$的决定区域是由三条直线 $t=0,x=x_1-at,x=x_1+at$ 围成的三角形；区间$[x_1,x_2]$的影响区域是由两条半射线 $x=x_1-at,x=x_2+at(t\geqslant 0)$和$t=0$上的线段$[x_1,x_2]$所围成的区域. 如下图.



(x_0,t_0)的依赖区间　　$[x_1,x_2]$的决定区域

$[x_1,x_2]$的影响区域

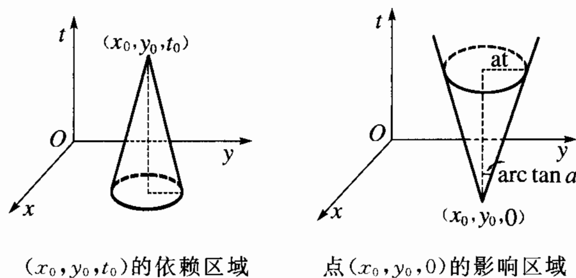
对二维波动方程，点(x_0,y_0,t_0)的依赖区域是 $t=0$ 上的圆

$$S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2t_0^2;$$

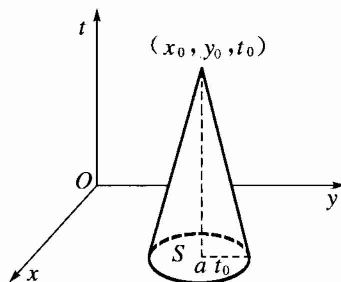
该圆 S 的决定区域是以 S 为底，(x_0,y_0,t_0)为顶点的圆锥体：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2(t-t_0)^2\quad(0\leqslant t\leqslant t_0);$$

而 $t=0$ 上点 $(x_0,y_0,0)$的影响区域是圆锥体：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2t^2$. 如下图.



(x_0,y_0,t_0)的依赖区域　　点$(x_0,y_0,0)$的影响区域



圆 S 的决定区域

对三维波动方程，点(x_0,y_0,z_0,t_0)的依赖区域是超平面 $t=0$ 上的球面$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2t_0^2$；该球面内部区域的决定区域是以该球体为底，以$(x_0,y_0,z_0,t_0)$为顶点的四维圆锥体：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant a^2(t-t_0)^2(0\leqslant t\leqslant t_0)$；初始平面 $t=0$ 上一点$(x_0,y_0,z_0,0)$的影响区域是四维锥面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2t^2(t>0)$，而初始平面上某一区域 D 的影响区域是 D 中每一点所作出的相应锥面的包络面围成的区域.

决定区域(domain of determinacy)　见"二阶线性双曲型方程的柯西问题".

影响区域(domain of influence)　见"二阶线性双曲型方程的柯西问题".

依赖区域(domain of dependence)　见"二阶线性双曲型方程的柯西问题".

二阶线性双曲型方程的混合问题(initial boundary value problem for second order linear hyperbolic partial differential equation)　双曲型方程除柯西问题外的另一类重要的定解问题. 混合问题是求该方程的解 $u(t,x)$在 x 空间的一个区域的边界上满足给定的边界条件，并在此区域上满足 $t=0$ 时的初始条件. 在研究波的反射、干扰或有界弹性体的振动时自然会提出这类问题. 二阶线性双曲型方程带常见边界条件的混合问题是适定的.

齐次波动方程柯西问题的解(solution of Cauchy problem of homogeneous wave equation)　齐次波动方程柯西问题有表达解的公式. 设 φ 三次连续可微，ψ 二次连续可微，那么齐次波动方程柯西

问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u,\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

的解 u 的表达式分别为：

1. 三维（基尔霍夫或泊松公式）

$$u(x,y,z;t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint_{S_{at}} \frac{\psi}{t}\mathrm{d}S + \frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}} \frac{\varphi}{t}\mathrm{d}S\right],$$

式中 S_{at} 表示球面

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = a^2t^2.$$

2. 二维（泊松公式）

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\iint_{K_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{[a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_{K_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{[a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2]^{\frac{1}{2}}}\right],$$

式中 K_{at} 表示圆 $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant a^2t^2$.

3. 一维（达朗贝尔公式）

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

基尔霍夫（Kirchhoff, G. R.）推广亥姆霍兹（Helmhotz, H. von）的工作，得出的三维波动方程初值问题的解的表达式有重要的现实意义（参见“惠更斯原理”）.

达朗贝尔公式（d'Alembert formula） 见“齐次波动方程柯西问题的解”.

基尔霍夫公式（Kirchhoff formula） 见“齐次波动方程柯西问题的解”.

泊松公式（Poisson formula） 见“齐次波动方程柯西问题的解”.

非齐次波动方程柯西问题的解（solution of Cauchy problem of nonhomogeneous wave equation） 非齐次波动方程柯西问题有表达解的公式. 非齐次波动方程 $u_{tt}-a^2\Delta u=f(x,t)$ 的柯西问题的解 $u(x,t)$ 等于齐次波动方程的柯西问题的解添加一项如下形式的函数 u_1（推迟势）：

1. 三维

$$u_1(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{r\leqslant at}\frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

式中 $r=[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{1}{2}}$，积分区域是以 (x,y,z) 为球心，at 为半径的球体.

2. 二维

$$u_1(x,y,t)= \frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left[\iint_{\rho\leqslant a(t-\tau)}\frac{f(\xi,\eta,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{[a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2]^{\frac{1}{2}}}\right]\mathrm{d}\tau,$$

式中 $\rho=((\xi-x)^2+(\eta-y)^2)^{\frac{1}{2}}$.

3. 一维

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

推迟势（retarded potential） 见“非齐次波动方程柯西问题的解”.

降维法（method of the reduction of dimensions） 二维（一维）齐次波动方程柯西问题的解可由三维（二维）的解通过所谓降维法来得到. 例如，将二维波动方程 $u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=0$ 看成三维波动方程的一个特殊情况——它的初始条件和解本身都与变元 z 无关. 这样可以由三维的基尔霍夫公式导出二维的泊松公式. 这种从高维问题的解导出低一维相应问题的解的方法称为降维法. 降维法不仅适用于波动方程，也适用于其他类型的一些方程.

惠更斯原理（Huygens principle） 波的传播有清晰的前阵面及后阵面的现象. 对三维波动方程，根据基尔霍夫公式，点 $(x_0,y_0,z_0,0)$ 在时刻 $t>0$ 时的影响区域是球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2t^2$. 若初始时刻某有界区域 Ω 中有一个扰动，在时刻 t 受到此扰动影响的区域是所有以点 $P\in\Omega$ 为心，以 at 为半径的球面的全部. 当 at 大于区域 Ω 的直径时，这一族球面有内、外两个包络面，称外包络面为传播波的前阵面，内包络面为传播波的后阵面. 前阵面以外的部分是扰动尚未传到的区域，后阵面以内的部分是扰动已传过并恢复到原来状态的那部分区域，前后阵面之间的区域是正受到扰动影响的区域，这种波的传播有清晰的前阵面和后阵面的现象，称为惠更斯原理. 此无后效应的现象对现实生活中信号的传送与接收有重要意义. 对 $n\geqslant3$ 时的 n 维波动方程，惠更斯原理都成立，而对 1 维和 2 维波动方程，惠更斯原理都不成立.

前阵面（forward matrix surface） 见“惠更斯原理”.

后阵面（after matrix surface） 见“惠更斯原理”.

波的弥散（dispersion of wave） 波的传播有前阵面而无后阵面的现象. 对二维波动方程，点 $(x_0,y_0,0)$ 的影响区域是锥体 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2t^2$. 因此，若某点于时刻 t 受到初始扰动的影响，此后该点将继续位于影响区域内，所以初始扰动的影响不会消失，从而波的传播只有前阵面而无后阵面，这种现象称为波的弥散，或者称波具有后效应. 一维波动方程也具有后效应.

波的后效应（after efficiency of wave） 见“波的弥散”.

能量积分（energy integral） 波动方程解的偏

导数组成的正定积分. 设 n 维齐次波动方程 $u_{tt}-a^2\Delta u=0$ 满足边界条件 $u|_\Gamma=0$ 或

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0$$

(Γ 表 $\partial\Omega\times[0,T]$, n 表 Γ 的外法向)的解为 $u(x,t)$, 则称积分

$$E(t)=\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}\Omega$$

为波动方程的能量积分, 它满足能量守恒律: $E(t)=E(0)$ 和能量不等式

$$E_0(t)\leqslant \mathrm{e}^tE_0(0)+\mathrm{e}^t\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}E(\tau)\mathrm{d}\tau\quad(t\geqslant 0),$$

式中

$$E_0(t)=\int_\Omega u^2\mathrm{d}\Omega.$$

如果边界条件换为

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_\Gamma=0,$$

则只要在能量积分中加上一项

$$a^2\int_\Gamma\sigma u^2\mathrm{d}\sigma,$$

能量不等式仍然成立. 对于齐次波动方程的柯西问题的解, 其能量积分为

$$E_1(\Omega_t)=\int_{\Omega_t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+a^2\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}\Omega,$$

其中 Ω_t 为超平面 $t=\tau$ 与特征锥

$$\sum_{i=1}^n(x_i-x_i^0)^2\leqslant a^2(R-t)^2$$

$$(\text{常数 } R>0, t<R)$$

的截面, 而能量不等式为 $E_1(\Omega_t)\leqslant E_1(\Omega_{t_0})$ $(t>t_0\geqslant 0)$. $E_0(\Omega_t)\leqslant \mathrm{e}^{t-t_0}E_0(\Omega_{t_0})+(\mathrm{e}^{t-t_0}-1)E_1(\Omega_{t_0})$, 式中

$$E_0(\Omega_t)=\int_{\Omega_t}u^2\mathrm{d}\Omega.$$

对于非齐次波动方程 $u_{tt}-a^2\Delta u=f(x,t)$ 满足

$$u|_\Gamma=0\ \text{或}\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0$$

的解, 能量不等式为

$$E(t)\leqslant M\left[E(0)+\iint_{Q_t}f^2(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right],$$

其中 $Q_t=\Omega\times(0,t)$, M 为仅与 T 有关的常数. 利用能量积分是证明双曲方程定解问题适定性的一个比较简便的方法, 称为能量积分法.

波动方程的能量不等式(energy inequality of wave equation) 见"能量积分".

能量积分法(energy integral method) 见"能量积分".

二阶非线性双曲型方程(second order nonlinear hyperbolic equation) 一类重要的二阶非线性方程. 对于已解出 $\partial^2u/\partial t^2$ 的二阶非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=A\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x_i},\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}\right),\qquad(1)$$

$1\leqslant i,j\leqslant n$, 在函数 A 对变元

$$\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x_i}\ \text{和}\ \frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}$$

的偏导数中视 $u=\tilde{u}(t,x)$ 为已知函数, 并分别记为 $a_{0i}(t,x)$ 和 $a_{ij}(t,x)$, 如果方程

$$\frac{\partial^2v}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^na_{0i}\frac{\partial^2v}{\partial t\partial x_i}-\sum_{i,j=1}^na_{ij}\frac{\partial^2v}{\partial x_i\partial x_j}=0$$

是双曲型的, 则称(1)在 $\tilde{u}(t,x)$ 的附近是双曲型的. 当考虑(1)的初值问题

$$u(0,x)=u_0(x),\ u_t(0,x)=u_1(x)\qquad(2)$$

时, 如果函数 A 是关于变元

$$t,\ x,\ u,\ \cdots,\ \frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}$$

的充分光滑函数且(1)在 $u_0(x)+tu_1(x)$ 的附近是双曲型的, 则问题(1), (2)在 $t=0$ 的适当邻域中有惟一的解. 一般地, 非线性双曲型方程的初值问题只存在局部解.

二阶退化双曲型方程(degenerate hyperbolic equation of second order) 一类重要的特殊的双曲型方程. 如果研究的二阶偏微分方程的特征形式, 在所考虑的区域的每一点上有一个负特征值而其余特征值为正或零, 则这类二阶偏微分方程称为退化双曲型方程. 有时也称为弱双曲型方程. 它可以用研究具非负特征形式的方程的方法进行研究.

弱双曲型方程(weakly hyperbolic equation) 即"二阶退化双曲型方程".

高阶线性双曲型方程(higher order linear hyperbolic equation) 一类重要的高阶方程. 高阶线性双曲型方程有两种定义. 考虑 $n+1$ 个变量 (t,x) 的 N 阶常系数线性方程

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

$$=\frac{\partial^Nu}{\partial t^N}+\sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|\leqslant N\\ \alpha_0<N}}a_{\alpha_0\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}u=0,$$

式中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

如果方程 $L(\lambda,\mathrm{i}\xi)=0$ 的根 $\lambda=\lambda_1(\xi),\lambda_2(\xi),\cdots,\lambda_N(\xi)$ 的实部是实数组 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的有界函数, 则称 $Lu=0$ 是哥尔丁意义下的双曲型方程. 当 L 是 N 次齐次的情形, 上述条件成为: $\lambda_1(\xi),\lambda_2(\xi),\cdots,\lambda_N(\xi)$ 对于任意非零实数组 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 都是纯虚数. 双曲型方程的主部(最高阶项)也是双曲型的. 当 $a_{\alpha_0\alpha}$ 是 t,x 的函数时, 如果变系数方程 $Lu=0$ 的特征方程

$$\lambda^N + \sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|=N\\ \alpha_0<N}} a_{\alpha_0\alpha}(t,x)\lambda^{\alpha_0}(\mathrm{i}\xi)^\alpha = 0$$

对各点(t,x)和任意的$\xi\neq 0$具有N个相异的纯虚根$\lambda_1(t,x,\xi)$，$\lambda_2(t,x,\xi)\cdots$，$\lambda_N(t,x,\xi)$，则称方程$Lu=0$为彼得罗夫斯基意义下的双曲型方程. 当这些根一致分离时，即

$$\inf_{(x,t),|\xi|=1,j\neq k} |\lambda_j(t,x,\xi)-\lambda_k(t,x,\xi)|=c>0,$$

则称为正则双曲型方程.

哥尔丁意义下的双曲型条件考虑了低阶项的影响，因而不能照搬到变系数的情形. 然而在常系数的情形，一个N阶齐次方程，不管怎样添加阶数不超过$N-1$的低阶项，仍旧保持其整体在哥尔丁意义下是双曲型的充分必要条件是：它的特征方程对任意的非零实数组$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$具有$N$个纯虚根$\lambda$. 这种方程称为狭义双曲型的. 这就说明，在常系数情形，彼得罗夫斯基意义下的双曲型方程必定是哥尔丁意义下的双曲型方程，而哥尔丁意义下的双曲型方程不一定是彼得罗夫斯基意义下的双曲型方程.

哥尔丁意义下的双曲型方程(equation of hyperbolic type in Garding sense)　见“高阶线性双曲型方程”.

彼得罗夫斯基意义下的双曲型方程(equation of hyperbolic type in Petrovski sense)　见“高阶线性双曲型方程”.

狭义双曲型方程(equation of strict hyperbolic)　见“高阶线性双曲型方程”.

正则双曲型方程(equation of regularly hyperbolic)　见“高阶线性双曲型方程”.

线性双曲型方程组(system of linear hyperbolic equations)　一类重要的高阶线性偏微分方程组. 对线性偏微分方程组

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant n_j} a^{ij}_{\alpha_0\alpha}(t,x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u_j = 0,$$
$$i=1,2,\cdots,l,$$

当

$$\det\left(\sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant n_j} a^{ij}_{\alpha_0\alpha}(t,x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\varphi\right)=0$$

作为φ的$N=\sum\limits_{j=1}^{l} n_j$阶单个方程是彼得罗夫斯基意义下的双曲方程时，就称原方程组为(彼得罗夫斯基意义下的)双曲型方程组.

对称双曲型方程组(system of symmetric hyperbolic equations)　能量不等式最自然地成立的一类方程组. 当矩阵形式的一阶线性方程组

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + Bu = f \qquad (1)$$

的每个$A_i(x)$都是对称矩阵时，称(1)为一阶对称方程组；若$A_i(x)$的某一个线性组合

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A_i$$

为正定时，则称(1)为(弗里德里希斯意义下的)对称双曲型方程组. 对称双曲型方程组必是通常意义下的双曲型方程组. 如果令

$$\alpha_i = \frac{1}{2}A_i,\quad \gamma = B - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i},$$

则可将方程组(1)写成

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_i u)\right) + \gamma u = f. \qquad (2)$$

若$\gamma+\gamma^T$为正定矩阵(γ^T表γ的转置)，则称(1)和(2)为正对称方程组，算子L称为正对称算子. 弗里德里希斯(Friedrichs, K. O.)成功地把包含椭圆型、双曲型、抛物型和简单混合型方程的适定边值问题归结为正对称方程组的“可容许”边值问题，进行统一地研究. 但是在弗里德里希斯的理论中有一个困难：没有给出将给定方程的给定边值问题化为正对称组的可容许问题的统一方法.

正对称方程组(symmetric positive system of equations)　见“对称双曲型方程组”.

正对称算子(symmetric positive operator)　见“对称双曲型方程组”.

弱双曲型算子(weakly hyperbolic operator)　一类重要的线性偏微分算子. 对一个N阶微分算子

$$L = \frac{\partial^N}{\partial t^N} + \sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|\leqslant N,\\ \alpha_0\leqslant N-1}} a_{\alpha_0\alpha}(t,x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha},$$

当$Lu=0$具初始条件

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(0,x) = \varphi_k(x)\ \ (0\leqslant k\leqslant N-1)$$

的柯西问题适定时，称算子L为弱双曲型的. 一个弱双曲型算子当任意添加低阶项后仍保持是双曲型的，则称它为强双曲型算子. 所有哥尔丁意义下的常系数双曲算子都是适定的，因此它们都是强双曲的. 在变系数情形，正则双曲型算子是强双曲型的.

强双曲型算子(strongly hyperbolic operator)　见“弱双曲型算子”.

流体动力学方程组(hydrodynamic equation system)　描述流体运动的基本方程组. 运动流体状态可用速度$v=(v_x,v_y,v_z)$，密度ρ和压力p五个变数描述，它们都是位置坐标(x,y,z)和时间t的函数，满足下列方程组：

1. 运动方程

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v\right]$$
$$= f - \nabla p + \mu\Delta v + \frac{\mu}{3}\mathrm{grad}(\mathrm{div}v).$$

2. 连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho v)=0.$$

3. 状态方程

$$p=p(\rho).$$

此方程组称为流体动力学方程组，其中 $f=(f_x,f_y,f_z)$ 是外力，μ 是流体的粘性系数.

上述运动方程是纳维(Navier,(C.-L.-M.-H.))于 1821 年，斯托克斯(Stokes,G. G.)于 1849 年研究一般粘性流体得到的，故又称为纳维-斯托克斯方程. 当 $\mu=0$ 时，流体动力学方程组就简化为理想(无粘性)可压缩流体动力学方程组，是欧拉(Euler,L.)在其文章《流体动力的一般原理》(1755 年)中得到的.

纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes equation) 见“流体动力学方程组”.

麦克斯韦方程(Maxwell equation) 电磁学的基本方程组. 设 E 表示电场强度，H 表示磁场强度，它们都是位置坐标 (x,y,z) 和时间 t 的向量函数. 麦克斯韦(Maxwell,J. C.)在 1864 年发现的描述电磁学规律的方程组

$$\operatorname{rot} H=\frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t},\quad \operatorname{rot} E=-\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu H)}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon E)=\rho,\quad \operatorname{div}(\mu H)=0$$

称为麦克斯韦方程，其中 ε 为介电系数，μ 为磁通率，ρ 为电荷密度.

解的间断性(discontinuity of solution) 一阶拟线性双曲方程(组)的解有强间断的现象. 设 $u(x,t)$ 是一阶拟线性方程 $u_t+uu_x=0$ 的柯西问题 $u|_{t=0}=\varphi(x)$ 的解. 该方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0.$$

因此特征线为 $x=x_0+\varphi(x_0)t$，且解 u 在该特征线上等于常数 $\varphi(x_0)$. 设 $x_0^1<x_0^2$，$\varphi(x_0^1)>\varphi(x_0^2)$，则过点 $(x_0^1,0)$ 和 $(x_0^2,0)$ 的两条特征线 $x=x_0^i+\varphi(x_0^i)t(i=1,2)$ 在时刻 $t_0=(x_0^2-x_0^1)/(\varphi(x_0^1)-\varphi(x_0^2))$ 时相交，在交点处 u 有两个不同的值 $\varphi(x_0^1)$ 和 $\varphi(x_0^2)$，即解在时刻 t_0 出现间断. 此间断性是拟线性方程(组)区别于线性方程(组)的本质特点，甚至初始函数 $\varphi(x)$ 充分光滑时，解也会出现间断. 这一现象相当于空气动力学中出现激波.

守恒律(conservation law) 一类特殊的一阶拟线性偏微分方程. 形如

$$\frac{\partial \varphi(t,x,u)}{\partial t}+\frac{\partial \psi(t,x,u)}{\partial x}=f(t,x,u) \qquad (1)$$

的一阶拟线性偏微分方程称为守恒律. 例如，流体动力学方程组中的连续性方程就描述流体运动的质量守恒律.

由于拟线性方程(组)的解可能出现间断，因此不能限于在通常经典意义下讨论解而需要引入广义解的概念. 设 $u(t,x)$ 是分块连续可微函数，如果对任意由分段光滑闭环路 C 围成区域 G，积分关系

$$\oint_C[\varphi(t,x,u)\mathrm{d}x-\psi(t,x,u)\mathrm{d}t]+\iint_G f(t,x,u)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=0 \qquad (2)$$

成立，则称函数 u 为守恒律(1)的广义解. 若守恒律(1)的广义解在分段光滑曲线 $x=x(t)$ 上发生间断，则由积分关系式(2)，利用极限过程可导出关系式

$$x'(t)[\varphi(t,x\,u(t,x)]_{x=x(t)}-[\psi(t,x,u(t,x)]_{x=x(t)}=0, \qquad (3)$$

其中

$$[g(t,x)]_{x=x(t)}=g(t,x(t)+0)-g(t,x(t)-0).$$

关系式(3)称为间断条件或郎金-于果里奥条件，它表示广义解在间断线两边的极限值和间断运动速度的关系. 广义解的定义(2)并不能保证初值问题的广义解是惟一的，为了保证惟一性，在间断线上除了郎金-于果里奥条件外还要添加所谓熵条件. 满足熵条件的间断称为激波或冲击波，具有激波的广义解称为间断解. 守恒律、间断解和激波对多个自变量的方程及方程组有类似的定义.

守恒律的广义解(generalized solution of conservation law) 见“守恒律”.

激波(shock wave) 见“守恒律”.

冲击波(shock wave) 即“激波”.

间断解(discontinuous solution) 见“守恒律”，“解的间断性”.

间断条件(discontinuity condition) 见“守恒律”.

郎金-于果里奥条件(Rankine-Hugoniot condition) 即“间断条件”.

黎曼问题(Riemann problem) 一阶拟线性双曲方程的最简单的间断初值问题. 对守恒律方程 $u_t+f(u)_x=0(t>0,x\in\mathrm{R})$，形如

$$u_0=\begin{cases}u_l & (x<0),\\ u_r & (x>0)\end{cases}$$

的初值问题称为黎曼问题，其中 u_l,u_r 均为常数. 对守恒方程组 $U_t+F(U)_x=0$，其中 $U=(v,u)$，形如下述初值

$$U(x,0)=U_0(x)=\begin{cases}U_l(=(v_l,u_l)) & (x<0),\\ U_r(=(v_r,u_r)) & (x>0)\end{cases}$$

的初值问题称为黎曼问题.

黎曼(Riemann,(G. F.)B.)最早研究了下列问题：在一细长圆柱形管内一薄膜分开一种气体，两边气体的压强和密度分别有不同的常数值，今薄膜突

然破裂,试问气体将如何运动.人们发现初始间断分裂成中心稀疏波和两类间断:接触间断和激波,接触间断来源于初始数据的间断,在方程的线性逼近中亦出现,而激波则来源于方程的非线性.

接触间断(contact discontinuity) 守恒律广义解的一种间断.守恒律方程的激波速度等于某一侧的特征速度的解称为一个接触间断.

简单波(simple wave) 守恒律的一类重要特解.考虑方程组 $u_t+f(u)_x=0(x\in\mathrm{R},t>0)$,其中 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$,$f(u)=(f_1(u),f_2(u),\cdots,f_n(u))$ 在某邻域 $N\subset\mathrm{R}^n$ 内光滑,雅可比矩阵 $\mathrm{d}f(u)$ 在 N 有 n 个实相异特征值 $\lambda_1(u)<\lambda_2(u)<\cdots<\lambda_n(u)$.对每个 $\lambda_i(u)$ 的右(列)特征向量 $r_i(u)$,满足下式的函数 $\omega:N\to\mathrm{R}$,$(r_k(u),\nabla\omega(u))=0(u\in N)$ 称为 k 黎曼不变量.这里“(,)”表示 R^n 中向量的通常内积.若 u 是上述守恒律方程在某区域 D 的一个 C^1 解,并且所有 k 黎曼不变量在 D 是常数,则 u 称为 k 简单波(或 k 稀疏波).只依赖 $(x-x_0)/(t-t_0)$ 的简单波称为中心简单波(或中心稀疏波),(x_0,t_0) 称为波的中心.

稀疏波(rarefaction wave) 见“简单波”.

中心简单波(centered simple wave) 见“简单波”.

中心稀疏波(centered rarefaction wave) 见“简单波”.

黎曼不变量(Riemann invariant) 见“简单波”.

初等波(elementary wave) 激波、稀疏波与接触间断的统称.

熵条件(entropy condition) 保证一阶拟线性双曲方程(组)广义解惟一性的条件.对单变量单个守恒律方程 $u_t+f(u)_x=0$,熵条件是指不等式

$$\frac{u(x+a,t)-u(x,t)}{a}\leqslant\frac{E}{t}\quad(a>0,t>0),$$

其中 E 是某一常数.对于守恒律形式方程组 $U_t+F_x=0$,其中 $U=U(u)$,$F=F(u)$ 是实函数,解 u 在分布意义下满足的不等式 $U_t+F_x\leqslant 0$ 称为熵条件,条件

$$s[U_l-U_r]-[F(U_e)-F(U_r)]\leqslant 0$$

亦称为熵条件,其中 s 是间断的速度,而 U_l 和 U_r 分别是间断左侧和右侧的状态.熵条件是热力学中熵加原理即过程的不可逆性的数学表述.

粘性消去法(method of vanishing viscosity) 研究守恒律方程(组)的一种重要方法.在求解守恒律方程的初值问题 $u_t+f(u)_x=0(x\in\mathrm{R},t>0)$,$u(x,0)=u_0(x)$ 时,考虑带粘性项的方程的初值问题 $u_t+f(u)_x=\varepsilon u_{xx}(x\in\mathrm{R},t>0)$,$u(x,0)=u_0$,此问题解 $u=u_\varepsilon$ 的存在性与惟一性是已知的,对 u_ε 做先验估计,再令 $\varepsilon\to 0$ 在适当的意义下取极限可以得到原来问题的解,这种方法称为粘性消去法.

KdV 方程(KdV equation) 物理学中提出的一种重要的三阶拟线性方程.方程 $u_t+auu_x+u_{xxx}=0$(a 为常数)首先由科尔泰韦赫(Korteweg,D. J.)和德·弗里斯(de Vries,G.)用于描述浅水波的无损耗传播,称为 KdV 方程.它在许多物理问题中是一个有用的近似,例如等离子体中的离子声和磁流体动力波等.KdV 方程是最早发现具有孤立子(波)的方程.

孤立子(soliton) 亦称孤立波.是非线性波动方程的一类脉冲状的行波解.它们的波形和速度在相互碰撞后仍能保持不变或者只有微弱的变化.一个著名的例子是 KdV 方程的解

$$u(x,t)=12a\ \mathrm{sech}^2[a(x-4a^2t)].$$

此解的图形像一个孤立的脉冲,波峰高 $12a$,速度为 $4a^2$.两个这样的波在碰撞后,能保持各自的波形和速度不变,具有这种性质的波称为孤立子(波).现在人们已经发现很多在应用中十分重要的非线性方程,如正弦-戈登方程(SG 方程)$u_{xt}=\sin u$,非线性薛定谔方程等都具有这种孤立子解.还发现在等离子体光纤通讯中也有孤立子现象,科学家们还认为,神经细胞轴突上传导的冲动、木星上的红斑等都可以看做是孤立子.

孤立波(soliton wave) 即“孤立子”.

散射反演法(scattering inversion method) 求解具有孤立子解的特殊非线性方程的一种方法.其特色是将这类非线性问题的解转化为线性问题来求解.这种方法最初由伽德纳(Gardner,C. S.)等人于 1967 年对 KdV 方程提出.他们发现 KdV 方程和常微分算子的特征问题

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+u\right)\psi=\lambda\psi$$

有密切关系.特别地,若微分算子

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+u\right)$$

中所含的 u(称为位势)取为 KdV 方程的解时,算子的特征值 λ 与时间 t 无关.于是,求解 KdV 方程的初值问题可以转化为求解上述特征问题的正问题和反问题.正问题指已知初值 $u(x,0)=f(x)$,求出与算子

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-u$$

的特征值相关的一组量.这一组量称为散射量.反问题指已知 t 时刻的散射量来复原位势 $u(x,t)$.散射量本身随时间 t 的演化规律十分简单,关键的步骤是求解反问题,此步骤归结为求解一个线性积分方程.伽德纳等人用这种方法成功地求出了 KdV 方程

的单个孤立子解以及由 N 个孤立子叠加起来的 N 重孤立子解.

散射量(scattering data) 见"散射反演法".

椭圆型方程

椭圆型偏微分方程(elliptic type partial differential equation) 简称椭圆型方程,一类重要的偏微分方程. 早在 1900 年,希尔伯特(Hilbert,D.)提出的著名的 23 个问题中,就有 3 个问题(第 19,20,23 问题)都是关于椭圆型方程与变分法的. 近百年来,椭圆型方程的研究获得了丰硕的成果. 椭圆型方程在流体力学、弹性力学、电磁学、几何学和变分法中都有很多的应用. 拉普拉斯方程是椭圆型方程最典型的特例.

二阶线性椭圆型偏微分方程(linear elliptic partial differential equations of second order) 一类关于自变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的未知函数 $u(x)$ 的二阶线性偏微分方程

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x)(a_{ij}=a_{ji}), \tag{1}$$

当其系数矩阵 $(a_{ij}(x))$ 在域 Ω 的各点 x 上都是正定时,就称椭圆型算子 L 或方程(1)在 Ω 中为椭圆型的;即如果用 $\lambda(x)$,$\Lambda(x)$ 分别表示系数矩阵 $(a_{ij}(x))$ 的最小和最大特征值,那么

$$0<\lambda(x)|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x),\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda(x)|\xi|^2 \tag{2}$$

对于所有的 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in \mathrm{R}^n\backslash\{0\}$ 和 $x\in\Omega$ 成立. 如果对于某常数 λ_0 有 $\lambda(x)\geqslant\lambda_0>0(\forall x\in\Omega)$,就称椭圆型算子 L 或方程(1)在 Ω 中是强椭圆型的. 如果 $\Lambda(x)$ 在 Ω 中有界,则称椭圆型算子 L 或方程(1)为严格椭圆型的. 如果 $\Lambda(x)/\lambda(x)$ 在 Ω 中有界,则称算子 L 或方程(1)是一致椭圆型的. 存在偏微分方程是椭圆型的而不是一致椭圆型的,例如两个自变量的二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

在半平面 $x_1>0$ 中是椭圆型的而不是一致椭圆型的,但它在条形区域 $(\alpha,\beta)\times\mathrm{R}^1$ 中(这里 $0<\alpha<\beta<+\infty$)是一致椭圆型的. 调和方程是最简单最典型的二阶椭圆型偏微分方程.

二阶强椭圆型偏微分方程(strong elliptic partial differential equations of second order) 见"二阶线性椭圆型偏微分方程".

二阶严格椭圆型偏微分方程(strict elliptic partial differential equations of second order) 见"二阶线性椭圆型偏微分方程".

一致椭圆型偏微分方程(uniformly elliptic partial differential equations) 见"二阶线性椭圆型偏微分方程".

具有非负特征形式的二阶方程(second order equations with nonnegative characteristic form) 具有亚椭圆性质的二阶偏微分方程. 形式为

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x)$$

的方程,如果在 Ω 的每一点 x 上,对于任意向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,有

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0,$$

人们称 $Lu=f$ 在集合 Ω 上是具非负特征形式的二阶方程. 有时也称为退化椭圆型方程或椭圆-抛物型方程. 显然,椭圆型和抛物型方程、一阶方程($\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\equiv 0$ 的情形)、超抛物型方程、布朗运动方程、在上半平面的特里科米方程等都是具有非负特征形式的二阶方程.

二阶退化椭圆型偏微分方程(degenerate elliptic partial differential equations of second order) 即"具有非负特征形式的二阶方程".

拉普拉斯方程(Laplace equation) 亦称调和方程或位势方程. 最简单最典型的二阶椭圆型方程. 算子

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

称为拉普拉斯算子或者调和算子,用 Δ 表示. $\Delta u=0$ 称为拉普拉斯方程,它是最简单的椭圆型偏微分方程. 如果 u 是 $C^2(\Omega)$ 函数,并且在区域 Ω 中满足 $\Delta u=0(\geqslant 0,\leqslant 0)$,则称 u 是 Ω 中的调和(下调和、上调和)函数(参见《位势论》).

位势方程(potential equation) 即"拉普拉斯方程".

调和方程(harmonic equation) 即"拉普拉斯方程".

拉普拉斯算子(Laplace operator) 见"拉普拉斯方程".

调和算子(harmonic operator) 见"拉普拉斯方程".

调和函数(harmonic function) 见"拉普拉斯方程".

下调和函数(subharmonic function) 见"拉普拉斯方程".

上调和函数(superharmonic function) 见"拉普拉斯方程".

弱极大值原理(weak maximum principle) 二

阶椭圆方程的一个重要特性.在一定条件下,在区域内满足微分方程(或微分不等式)的解的最大值必在区域边界上达到.设偏微分算子

$$L\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\quad(a_{ij}=a_{ji})$$

在有界区域 Ω 中是椭圆型的,以 $\lambda(x)$ 表示矩阵 $[a_{ij}(x)]$ 的最小特征值.如果 $|b_i(x)|/\lambda(x)$ 在 Ω 中有界,函数 $u(x)$ 在 Ω 中满足 $Lu\geqslant0(\leqslant0)$,其中

$$u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega}),$$

则 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值(最小值)在 $\partial\Omega$ 上达到,即

$$\sup_{\Omega}u=\sup_{\partial\Omega}u\quad(\inf_{\Omega}u=\inf_{\partial\Omega}u).\qquad(1)$$

如果不假设 u 在 $\overline{\Omega}$ 上连续,则结论(1)可以换成

$$\sup_{\Omega}u=\lim_{x\to\partial\Omega}\sup u(x)\quad(\inf_{\Omega}u=\lim_{x\to\partial\Omega}\inf u(x)).$$

霍普夫边界点定理(Hopf boundary point theorem) 有关二阶椭圆型方程的一个重要性质.这类方程(或不等式)的非常数解在达到最大值的边界点上的外法向导数必为正值.设 u 在区域 Ω 中满足不等式

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\geqslant0,$$

L 在 Ω 中是一致椭圆型的.假设在 Ω 中 $u\leqslant M$,在边界点 P 上 $u=M$,且 P 位于 Ω 中球 K_1 的边界上.如果 u 在 $\Omega\cup P$ 中连续,并且在 P 点上外法向导数 $\partial u/\partial\nu$ 存在,那么在点 P 有 $\partial u/\partial\nu>0$,除非 $u\equiv M$.利用这个霍普夫边界点定理可以推出二阶椭圆方程的强极大值原理.

强极大值原理(strong maximum principle) 二阶椭圆方程的一个重要特性.在一定条件下,微分方程在区域内部达到最大值的解只能是常数.设

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x)$$

在区域 Ω(不必有界)中是一致椭圆型的,函数 $u(x)$ 满足 $Lu\geqslant0(\leqslant0)$.如果 $c(x)\equiv0$ 且 u 在 Ω 内部达到它的最大值(最小值),那么 u 就是常数.如果 $c(x)\leqslant0$ 并且 $c(x)/\lambda(x)$ 有界,$\lambda(x)$ 是 $[a_{ij}(x)]$ 的最小特征值,那么除非 u 是常数,否则 u 在 Ω 内部不能达到非负最大值(非正最小值).如果 L 仅是局部一致椭圆型的,并且 $b_i/\lambda,c/\lambda$ 仅是局部有界的,上述结论仍然保持.

狄利克雷问题(Dirichlet problem) 求二阶椭圆型方程在区域边界上的值为已知的解.设区域 Ω 的边界为 Γ.求在 $\Omega\cup\Gamma$ 上连续、在 Ω 内满足给定的椭圆型方程、在 Γ 上取给定的连续边界值的解的问题,称为狄利克雷问题或者第一边值问题.特别地,对有界区域 Ω,如果边界点都是正则点(参见"闸函数"),调和方程 $\Delta u=0$ 的狄利克雷问题的解存在且惟一.对于一般的强椭圆型方程

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x),$$

如果 $c(x)\leqslant0$,f 及 L 的系数有界并属于 $C^{\alpha}(\Omega)$.假设有界域 Ω 的每一边界点上满足外部球条件;即,对每一点 $\xi\in\Gamma$,存在一个球 $B=B_R(y)$ 满足 $\overline{B}\cap\overline{\Omega}=\xi$.如果 φ 在 Γ 上连续,那么狄利克雷问题:在 Ω 中 $Lu=f$,在 Γ 上 $u=\varphi$ 就有惟一解 $u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.高阶椭圆型方程的狄利克雷问题见"椭圆型算子的狄利克雷问题".

第一边值问题(first boundary value problem) 即"狄利克雷问题".

闸函数(barrier function) 用来界定区域边界性状的一种函数.设 ξ 是 $\partial\Omega$ 上一点.如果 $C^0(\overline{\Omega})$ 中存在函数 $w(x)$ 满足条件:

1. w 在 Ω 中是上调和的;
2. 在 $\overline{\Omega}-\xi$ 中,$w>0$,$w(\xi)=0$;

则称 ξ 是 Ω 中调和算子的正则点,称 $w=w(\xi)$ 为 Ω 中调和算子在 ξ 点的闸函数.如果有界区域 Ω 在 ξ 点上满足外部球条件(参见"狄利克雷问题"),那么函数

$$w(x)=\begin{cases}R^{2-n}-|x-\xi|^{2-n} & (n\geqslant3),\\ \log\dfrac{|x-\xi|}{R} & (n=2)\end{cases}$$

就是调和算子在点 ξ 的闸函数.

诺伊曼问题(Neumann problem) 对二阶椭圆型方程求边界上的法向导数为已知的解.设 Ω 为 R^n 中的有界域,它的边界由有限个光滑曲面 Γ 所构成.对于偏微分方程

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x),$$

求在闭域 $\overline{\Omega}$ 上连续、在 Ω 的边界 Γ 上满足条件

$$Bu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\cos(\nu,x_i)\frac{\partial u}{\partial x_j}=0\ (\nu\text{ 为外法线方向})$$

的解的问题称为诺伊曼问题或者第二边值问题.如果 $c(x)<0$,那么诺伊曼问题的解是惟一的.如果 $c(x)\equiv0$,那么诺伊曼问题的解除附加常数外惟一确定.特别地,拉普拉斯方程的诺伊曼问题 $\Delta u=0$ 在 Ω 中,$\partial u/\partial\nu=0$ 在 Γ 上的解除附加常数外惟一确定.

第二边值问题(second boundary value problem) 即"诺伊曼问题".

第三边值问题(third boundary value problem) 对二阶椭圆型方程求边界上解与其法向导数的线性组合为已知的解.设 Ω 为 R^n 中的有界域,求在 Ω 中满足方程

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x),$$

在闭域 $\bar{\Omega}$ 上连续，在 Ω 的边界 Γ 上满足条件

$$Bu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cos(\nu, x_i)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \beta u = \varphi \quad (\beta \geqslant 0)$$

的解的问题称为第三边值问题或者鲁宾问题，这里 ν 为外法线. 如果 $c(x)\leqslant 0$ 且 c 与 β 不都恒为 0，那么第三边值问题的解是惟一的. 特别地，拉普拉斯方程的第三边值问题：在 Ω 中 $\Delta u=0$，在 Γ 上

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = \varphi$$

$(\beta>0)$ 的解惟一确定.

鲁宾问题(Robin problem)　即"第三边值问题".

椭圆型方程的弱解(weak solutions for elliptic equation)　偏微分方程(经典)解的推广. 设 L 是由

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x)u\right) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u$$

定义的主部是散度形式的二阶椭圆型偏微分算子. 假设系数 a_{ij}, b_i, c_i 和 d 在 Ω 中有界可测，而且 g 是 Ω 中的可积函数. 如果 $u\in W^{1,2}(\Omega)$（参见"索伯列夫空间"）并且对一切检验函数 $v\in C_0^1(\Omega)$，有

$$\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i u\right)\frac{\partial v}{\partial x_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + du\right)v\right]\mathrm{d}x = -\int_\Omega g v \mathrm{d}x,$$

就把 u 称为椭圆型方程 $Lu=g$ 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的弱解或广义解. 如果系数和 g 都充分光滑并且弱解 $u\in C^2(\Omega)$，则 u 也是经典解.

椭圆型方程的广义解(generalized solution for elliptic equation)　即"椭圆型方程的弱解".

平均值定理(mean value theorem)　调和函数的重要特征. 调和函数在任一点的值等于以该点为中心的任意球面上（或球体内）的平均值. 设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$ 满足 $\Delta u=0$，则对任何一个以 y 为中心，R 为半径的球 $B=B_R(y)\subset\Omega$，有

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B} u\mathrm{d}S, u(y) = \frac{1}{\omega_n R^n}\int_B u\mathrm{d}x,$$

其中

$$\omega_n = 2\pi^{n/2}\Big/ n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

表示 R^n 中的单位球的体积. 这就是说，调和函数在球 B 中心的值等于该函数在球面 ∂B 上的平均值，也等于在球 B 内的平均值，这些结果通称平均值定理.

哈纳克不等式(Harnack inequality)　调和函数的重要性质. 设 u 是区域 Ω 中一个非负调和函数，则对 Ω 的任一紧子集 Ω'，存在一个只依赖于 n，Ω' 和 Ω 的常数 C，使得

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant C \inf_{\Omega} u.$$

特别地，如果 u 在以原点为中心，R 为半径的球 $B_R(0)$ 中是一个非负调和函数，那么哈纳克不等式有如下形式：

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

哈纳克收敛性定理(Harnack convergence theorem)　调和函数的重要性质. 设 $\{u_n\}$ 在区域 Ω 中是一个单调增加的调和函数序列，并设对某点 $y\in\Omega$，序列 $\{u_n(y)\}$ 有界，那么 $\{u_n\}$ 在 Ω 的任一紧子区域 Ω' 上一致收敛到一个调和函数.

泊松方程(Poisson's equation)　最简单的非齐次椭圆型方程. 方程 $\Delta u=f(x)$ 称为泊松方程. 泊松方程的古典狄利克雷问题在拉普拉斯方程可解的同样边界条件下可以求解. 例如有如下结果：设

$$\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{B}),\quad f\in C^\alpha(\bar{B}),$$

B 是 R^n 中的一个球，那么狄利克雷问题：在 B 中 $\Delta u=f$，在 ∂B 上 $u=\varphi$ 有惟一的解 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{B})$.

泊松积分公式(Poisson's integral formula)　用调和函数在球面上的值表示它在球内任一点的值的积分公式. 设 $B_R=B_R(0)$ 是以原点为中心，R 为半径的球，$x\in\partial B_R$. 如果 $u\in C^2(B_R)\cap C^0(\bar{B}_R)$ 是调和函数，那么

$$u(y) = \frac{R^2-|y|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B_R}\frac{u\mathrm{d}S}{|x-y|^n}, \tag{1}$$

其中

$$\omega_n = 2\pi^{n/2}\Big/ n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

为 n 维单位球体积. (1)式称为调和函数的泊松积分公式，公式的右端称为 u 的泊松积分，而

$$k(x,y) = \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R|x-y|^n}\quad (x\in B_R, y\in\partial B_R)$$

称为泊松核. 在泊松公式中取 $u=1$ 便得恒等式

$$\int_{\partial B_R} K(x,y)\mathrm{d}S = 1\quad (\forall x\in B_R).$$

如果 $\varphi(x)$ 是球面 ∂B_R 上的连续函数，则泊松积分

$$u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R}\int_{\partial B_R}\frac{\varphi(y)\mathrm{d}S_y}{|x-y|^n}$$

就是拉普拉斯方程狄利克雷问题

$$\Delta u=0\ (\text{在 } B_R=B_R(0)\text{ 中}),$$
$$u=\varphi\ (\text{在 } \partial B_R \text{ 上})$$

的解.

泊松积分(Poisson's integral) 见"泊松积分公式".

泊松核(Poisson kernel) 见"泊松积分公式".

亥姆霍兹方程(Helmholtz equation) 一类重要的数学物理方程.形如 $\Delta u+\lambda u=f(x)$ 的椭圆型方程称为亥姆霍兹方程.由电磁波、声波的绕射及气体的扩散等物理问题可以导出这类方程.

二阶拟线性椭圆型方程(quasilinear elliptic equations of second order) 关于二阶导数为线性且其系数矩阵为正定的二阶非线性偏微分方程.自变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的函数 $u(x)$ 的二阶拟线性偏微分方程

$$Qu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+b\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0,\qquad(1)$$

$a_{ij}=a_{ji}$,当其系数矩阵 $[a_{ij}(x,z,p)]$ 对所有 $(x,z,p)\in\mathscr{U}$($\mathscr{U}$ 是 $\Omega\times\mathrm{R}^1\times\mathrm{R}^n$ 的一个子集)是正定的,则称方程(1)在 $\mathscr{U}$ 中是椭圆型的.即,如果用 $\lambda(x,z,p)$,$\Lambda(x,z,p)$ 分别表示 $[a_{ij}(x,z,p)]$ 的最小和最大特征值,那么

$$0<\lambda(x,z,p)|\xi|^2\leqslant a_{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda(x,z,p)|\xi|^2$$

对所有 $\xi\in\mathrm{R}^n\setminus\{0\}$ 和所有 $(x,z,p)\in\mathscr{U}$ 成立.如果对于某正常数 λ_0 有 $\lambda(x,z,p)\geqslant\lambda_0$,$\forall(x,z,p)\in\mathscr{U}$,就称方程(1)在 $\mathscr{U}$ 是强椭圆型的.如果在 $\mathscr{U}$ 中 $\lambda>0$ 且 Λ/λ 是一致有界的,则称方程(1)在 $\mathscr{U}$ 内是一致椭圆型的.若方程(1)在整个集 $\Omega\times\mathrm{R}^1\times\mathrm{R}^n$ 中是椭圆型(一致椭圆型)的,就简称方程(1)在 Ω 中是椭圆型(一致椭圆型)的.若存在一个可微向量值函数

$$A(x,z,p)=(A_1(x,z,p),A_2(x,z,p),\cdots,A_n(x,z,p))$$

和一个数值函数 $B(x,z,p)$,使

$$Qu=\operatorname{div}A\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)+B\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\quad(u\in C^2(\Omega));$$

即在(1)中

$$a_{ij}(x,z,p)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}A_j(x,z,p)+\frac{\partial}{\partial p_j}A_i(x,z,p)\right),$$

则称算子 Q 及方程 $Qu=0$ 是散度形式的.和线性方程的情形不同,具有光滑系数的拟线性微分方程未必可以表示成散度形式.

散度形式算子(operator of divergence form) 见"椭圆型方程的弱解"及"二阶拟线性椭圆型方程".

牛顿位势(Newtonian potential) 引力场的位势函数.对于区域 Ω 上一个可积函数 f,f 的牛顿位势是由下式定义的函数 w

$$w(x)=\int_\Omega\Gamma(x-y)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$\Gamma(x-y)=\Gamma(|x-y|)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(2-n)\pi^{\frac{n}{2}}}|x-y|^{2-n} & (n>2),\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-y| & (n=2)\end{cases}$$

是拉普拉斯方程的基本解.当 $n=3$,以 $\rho(x)$ 表示物体 Ω 的密度,$\rho(x)$ 的牛顿位势为

$$w(x)=-\int_\Omega\frac{\rho(y)\mathrm{d}y}{4\pi|x-y|}.$$

以 k 表示引力常数,由

$$P_i(x)=-4\pi k\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}=-k\int_\Omega\frac{(x_i-y_i)\rho(y)}{|x-y|^3}\mathrm{d}y,$$

根据牛顿万有引力定律知道 $P(x)=(P_1(x),P_2(x),P_3(x))$ 是物体 Ω 对点 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 处单位质量的引力,而 $-4\pi kw(x)$ 是引力 $P(x)$ 的位势.

若 f 在 Ω 中有界可积,则 f 的牛顿位势 $w\in C^1(\bar{\Omega})$,并且对任何 $x\in\Omega$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}w(x)=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y)f(y)\mathrm{d}y\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

若 f 在 Ω 中有界且局部赫尔德连续,则 f 的牛顿位势 $w\in C^2(\Omega)$,在 Ω 中 $\Delta w=f$,并且对任何 $x\in\Omega$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}w(x)=\int_{\Omega_0}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_j}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))\mathrm{d}y-f(x)\int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y)\nu_j(y)\mathrm{d}S_y\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

其中 Ω_0 是任一包含 Ω 的区域,对于它,散度定理成立,并且 f 在 Ω 外延拓为零.

拉普拉斯方程的基本解(fundamental solutions of Laplace equation) 见"偏微分方程的基本解".

弱导数(weak derivative) 亦称广义导数.微分学中导数概念的推广.设 Ω 是 R^n 中的一个区域,函数 $u(x)$ 在 Ω 中局部可积,$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是多重指标,α_i=非负整数,

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,$$

如果存在 Ω 中局部可积函数 v,使得积分等式

$$\int_{\Omega}\varphi\, v\mathrm{d}x = (-1)^{\alpha}\int_{\Omega}uD^{\alpha}\varphi\,\mathrm{d}x$$

对所有 $\varphi\in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ 都成立，则称 v 为 u 的 α 阶弱导数，记为 $v=D^{\alpha}u$.

广义导数(generalized derivative)　见"弱导数".

索伯列夫空间(Sobolev spaces)　一类重要的函数空间. 在椭圆型方程理论中要用到整指数索伯列夫空间和实指数索伯列夫空间. 整指数索伯列夫空间 $W^{m,p}(\Omega)$(或 $W_p^m(\Omega)$)是函数本身及其所有 1，2，…，m 阶弱导数满足下列条件的函数 f 的集合：$D^{\alpha}f\in L^p(\Omega)$，$\forall|\alpha|\leqslant m$. 对这个空间的元素 f 引进范数

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|f\|_{m,p} = \left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{\Omega}|D^{\alpha}f|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}},$$

因而 $W^{m,p}(\Omega)$ 是一个巴拿赫空间. 以 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 表示 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包，它也称为索伯列夫空间. 当 $p=2$ 时可以定义内积

$$(f,g)_{m,2} = \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{\Omega}D^{\alpha}f\,\overline{D^{\alpha}g}\,\mathrm{d}x.$$

$W^{m,2}(\Omega)$ 是一个希尔伯特空间. $W^{0,2}(\Omega)=L^2(\Omega)$.

实指数索伯列夫空间 $H^s(\mathrm{R}^n)$ 是满足下列条件的缓增广义函数 f 的集合

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathrm{R}_{\xi}^n),$$

其中 $\hat{f}(\xi)$ 表示 f 的傅里叶变换. 在这个空间中赋予范数

$$\|f\|_s = \left\{\int_{R_{\xi}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right\}^{\frac{1}{2}}$$

并

$$(f,g)_s = \int_{R_{\xi}^n}(1+|\xi|^2)\hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi.$$

$H^s(\mathrm{R}^n)$ $(s\in\mathrm{R}^1)$ 是一个希尔伯特空间. 当 s 是非负整数时有 $H^s(\mathrm{R}^n)=W^{s,2}(\mathrm{R}^n)$. 在抛物型方程理论中还用到对变元 x_i 有不同阶微商的索伯列夫空间(参见"函数空间 $W_2^{r,s}(Q_T)$"). 通常称为各向异性的索伯列夫空间.

索伯列夫(Соболев, С. Л.)把泛函分析应用于偏微分方程理论，引进了这类重要的函数空间，对这类空间建立了嵌入定理，提出了广义函数与偏微分方程的广义解的概念，在此基础上把偏微分方程的解的存在问题分解成某个索伯列夫空间中广义解的存在与广义解的正则性两个问题来研究，解决了一些新的偏微分方程定解问题. 这种方法得到了广泛应用，促进了偏微分方程理论的发展.

函数空间 $H_0^k(\Omega)$(function space $H_0^k(\Omega)$)　研究偏微分方程齐次边值问题常用到的一类索伯列夫空间. 在 $C^k(\Omega)$ 中，在 Ω 内具有紧支集的函数组成的子空间记为 $C_0^k(\Omega)$. 函数集合 $C_0^k(\Omega)$ 在索伯列夫空间 $H^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega)$(参见"索伯列夫空间")中的闭包记为 $H_0^k(\Omega)$ 或 $W_0^{k,2}(\Omega)$，它对于内积

$$(u,v)_k = \int_{\Omega}\sum_{|\beta|\leqslant k}D^{\beta}uD^{\beta}v\mathrm{d}x$$

是希尔伯特空间.

索伯列夫不等式(Sobolev inequalities)　索伯列夫空间最重要的性质. 设 X,Y 是两个巴拿赫空间，它们满足条件：

1. 如果 $u\in X$，则 $u\in Y$；
2. 存在常数 $C>0$，使得对任意 $u\in X$ 有

$$\|u\|_Y\leqslant C\|u\|_X;$$

则称 X 嵌入 Y，记为 $X\rightarrow Y$. 如果空间 X 是索伯列夫空间，条件 2 中的不等式通常称为索伯列夫不等式. 例如，根据索伯列夫嵌入定理，当 $u\in W^{m,p}(\Omega)$ 时有索伯列夫不等式

$$\|u\|_{L^q(\Omega^k)}\leqslant C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}\ (\forall u\in W^{m,p}(\Omega)),$$

其中 Ω^k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 是 Ω 与 R^n 中的一个 k 维超平面相交得到的 k 维区域；当 $mp<n$ 时，$q=kp/(n-mp)$. 而当 $mp\geqslant n$ 时，q 是任意正数.

索伯列夫嵌入定理(Sobolev imbedding theorems)　索伯列夫空间最重要的性质. 整指数索伯列夫空间嵌入定理：设 Ω 是 R^n 中的一个具有光滑边界的区域，Ω^k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 是 Ω 与 R^n 中的一个 k 维超平面相交得到的 k 维区域. 设 j 和 m 是非负整数，$1\leqslant p<+\infty$，那么存在下列嵌入：

1. 假定 $mp<n$ 而且 $n-mp<k\leqslant n$，则

$$W^{j+m,p}(\Omega)\rightarrow W^{j,q}(\Omega^k)\quad\left(q=\frac{kp}{n-mp}\right),$$

特别有

$$W^{j+m,p}(\Omega)\rightarrow W^{j,q}(\Omega)\quad\left(q=\frac{np}{n-mp}\right).$$

2. 假定 $mp=n$，则对于每个 k 及任意 $q<+\infty$，有 $W^{j+m,p}(\Omega)\rightarrow W^{j,q}(\Omega^k)$，特别有

$$W^{j+m,p}(\Omega)\rightarrow W^{j,q}(\Omega).$$

3. 假定 $mp>n$，则 $W^{j+m,p}(\Omega)\rightarrow C^j(\overline{\Omega})$.

实指数索伯列夫空间嵌入定理：如果 $s>n/2$，则

$$H^s(\mathrm{R}^n)\rightarrow C^0(\mathrm{R}^n).$$

此定理基本上是由苏联数学家索伯列夫(Соболев, С. Л.)于 1938 年证明的.

索伯列夫空间的紧嵌入定理(compact imbedding theorem of Sobolev space)　索伯列夫空间的紧嵌入性. 设 Ω 是 R^n 中的一个具有光滑边界的有界区域，Ω^k 是 Ω 与 R^n 中一个 k 维超平面的交. 设 j，m 是整数，$j\geqslant 0$，$m\geqslant 1$，$1\leqslant p<+\infty$，则下面的嵌入是紧的(即对 $X\rightarrow Y$，X 中的有界集在 Y 中必是

紧集)：

1. 假定 $mp<n$，则 $W^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega^k)$ $\left(0<n-mp<k\leqslant n, 1\leqslant q<\dfrac{kp}{n-mp}\right)$.

2. 假定 $mp=n$，则 $W^{j+m,p}(\Omega)\to W^{j,q}(\Omega^k)$ $(1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant q<+\infty)$.

3. 假定 $mp>n$，则 $W^{j+m,p}(\Omega)\to C^j(\overline{\Omega})$.

此定理在 $p=2$ 时，是由德国数学家雷利希(Rellich, R.)于 1930 年证明的. 对于一般情形，是由苏联数学家孔德拉绍夫(Кондрашов, В. И.)于 1945 年证明的.

高阶偏微分算子的象征(symbol of higher-order partial differential operators) 线性偏微分算子对应的多项式. 称

$$P(x,D)u=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha u$$

是区域 Ω 上的 m 阶线性偏微分算子，称 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ 的多项式

$$P(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

为偏微分算子 $P(x,D)$的象征，而称 ξ 的多项式

$$P_0(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

为偏微分算子 $P(x,D)$的主象征. 这里

$$D^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\ (\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$
$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\ \xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}).$$

***m* 阶线性偏微分算子**(linear partial differential operator of order m) 见“高阶偏微分算子的象征”.

偏微分算子的主象征(principal symbol of partial differential operators) 见“高阶偏微分算子的象征”.

高阶椭圆型偏微分算子(elliptic partial differential operators of higher-order) 主象征无非零实根的线性偏微分算子. 高阶微分算子

$$P(x,D)u=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha u$$

如果对于 $x\in\Omega$，其主象征满足条件

$$P_0(x,\xi)u=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha\neq 0\ (\forall\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}),$$

则称算子 $P(x,D)$在点 x 是椭圆型的. 如果对于任何 $x\in\Omega$，上式成立，则称 $P(x,D)$在区域 Ω 内是椭圆型的. 当 $n>2$ 时，每个椭圆型算子都是偶数阶的. 设 $P(x,D)$是 $m=2l$ 阶算子，如果存在复数 γ 和常数 $c>0$，使得

$$\mathrm{Re}(\gamma P_0(x,\xi))\geqslant c|\xi|^{2l}\ (\forall x\in\overline{\Omega},\forall\xi\in\mathbb{R}^n),$$

则称算子 $P(x,D)$是强椭圆型的. 如果存在的复数 γ 和常数 $c>0$ 不依赖 x，则称算子 $P(x,D)$在 $\overline{\Omega}$ 中是一致强椭圆型的.

高阶强椭圆型偏微分算子(strong elliptic partial differential operators of higher-order) 见“高阶椭圆型偏微分算子”.

高阶一致强椭圆型偏微分算子(uniformly strong elliptic partial differential operators of higher-order) 见“高阶椭圆型偏微分算子”.

重调和算子(multiple harmonic operators) 最简单的高阶椭圆型偏微分算子. 若整数 $k>1$，则

$$\Delta^k=\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^k$$

称为重调和算子.

重调和方程(multiple harmonic equations) 最简单的高阶椭圆型偏微分方程. 方程

$$\Delta^k u=0\quad\left(\Delta=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},k>1\text{ 整数}\right)$$

称为重调和方程. 特别地，当 $k=2$ 时，$\Delta^2u=0$ 又称为双调和方程，它在弹性力学中有重要的地位.

双调和方程(biharmoric equation) 见“重调和方程”.

恰当椭圆型算子(properly elliptic operators) 一类重要的椭圆型偏微分算子. 如果算子

$$P(D)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2l}a_\alpha D^\alpha$$

是椭圆型的，并且对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个线性独立的向量 ξ 和 ξ'，复变量 τ 的多项式

$$P_0(\xi+\tau\xi')=\sum_{|\alpha|=2l}a_\alpha(\xi+\tau\xi')^\alpha$$

有 l 个带正虚部的根，那么称 $P(D)$是恰当椭圆型算子. 当 $n>2$ 时，任何椭圆型算子都是恰当椭圆型算子. 存在恰当椭圆型算子但不是强椭圆型算子，例如，在 $\mathbb{R}^3$ 中的算子

$$P(D)=\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}-\frac{\partial^4}{\partial x_3^4}+\mathrm{i}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

正则椭圆问题(regular elliptic problem) 恰当椭圆型算子方程的重要边值问题. 椭圆型方程的边值问题

$$Au\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_\alpha(x)D^\alpha u=f\quad(\text{在 }\Omega\text{ 内}),$$
$$B_ju\equiv\sum_{|h|\leqslant m_j}b_{jh}(x)D^hu=\varphi_j\quad(\text{在 }\partial\Omega=\Gamma\text{ 上})$$
$$(m_j\text{ 是非负整数},\ 0\leqslant j\leqslant m-1)$$

如果满足下列条件，那么称它为正则椭圆问题：

1. 算子 A 在 $\overline{\Omega}$ 内是恰当椭圆型的，并且其系数在 $\overline{\Omega}$ 内是无限次可微的.

2. B_j 的系数在 Γ 上是无限次可微的.

3. 组$\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$在 Γ 上是标准的，即 B_j 的主象征满足

$$\sum_{|h|=m_j}b_{jh}(x)\xi^h\neq 0\ (\forall\ x\in\Gamma\text{ 和 }\forall\ \xi\neq 0),$$

且对于 $j\neq i$ 有 $m_j\neq m_i$.

4. 组 $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ 在 Γ 上覆盖算子 A；即 $\forall x\in\Gamma$，对所有在 x 切于 Γ 的非零 $\xi\in\mathrm{R}^n$ 和对所有在 x 垂直于 Γ 的非零向量 $\xi'\in\mathrm{R}^n$，复变量 τ 的多项式

$$\sum_{|h|=m_j} b_{jh}(\xi+\tau\xi')^h \quad (j=0,1,\cdots,m-1),$$

关于模多项式

$$\prod_{i=1}^{m}(\tau-\tau_i^+(x,\xi,\xi'))$$

是线性独立的，其中 $\tau_i^+(x,\xi,\xi')$ 是多项式

$$A_0(x,\xi+\tau\xi')$$

的具有正虚部的根，而 $A_0(x,\xi)$ 是算子 A 的主象征；

5. B_j 的阶 $m_j\leqslant 2m-1$.

如果 $\{m_j\}_{j=0}^{m-1}$ 遍历 $0,1,\cdots,m-1$，则标准组 $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ 又称为 Γ 上的狄利克雷组. 如果 A 是恰当椭圆型算子，

$$B_j=\frac{\partial^j}{\partial\nu^j}\ (j=0,1,\cdots,m-1),$$

ν 是 Γ 的外法线方向，问题 $\{A,B_j\}$ 称为算子 A 的狄利克雷问题. 狄利克雷问题 $\{A,B_j\}$ 是正则椭圆边值问题.

椭圆算子的狄利克雷问题(Dirichlet problem for elliptic operator)　见“正则椭圆问题”.

狄利克雷组(Dirichlet system)　见“正则椭圆问题”.

椭圆算子的格林公式(Green formula for elliptic operator)　研究正则椭圆问题的重要公式. 设椭圆型算子

$$Au=\sum_{|p|,|q|\leqslant m}(-1)^{|p|}D^p(a_{pq}(x)D^q u),$$

$a_{pq}\in C^\infty(\overline{\Omega})$. 设 $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ 在 Γ 上是标准组(参见“正则椭圆问题”)，

$$B_j u=\sum_{|h|\leqslant m_j} b_{jh}(x)D^h u,\ b_{jh}\in C^\infty(\Gamma)$$
$$(m_j\leqslant 2m-1;j=0,1,\cdots,m-1).$$

总可以选取另一在 Γ 上标准的边界算子组(非惟一) $\{S_j\}_{j=0}^{m-1}$，S_j 的阶 $\mu_j\leqslant 2m-1$，S_j 的系数属于 $C^\infty(\Gamma)$，使组 $\{B_0,B_1,\cdots B_{m-1},S_0,S_1,\cdots,S_{m-1}\}$ 是 Γ 上的狄利克雷组(参见“正则椭圆问题”). 于是存在惟一确定的 $2m$ 个边界算子 $C_j,T_j(j=0,1,\cdots,m-1)$，具有性质：

1. C_j 和 T_j 的系数属于 $C^\infty(P)$.

2. C_j 的阶是 $2m-1-\mu_j$，T_j 的阶是 $2m-1-m_j$.

3. 组 $\{C_0,C_1,\cdots,C_{m-1},T_0,T_1,\cdots,T_{m-1}\}$ 是 Γ 上的狄利克雷组，且使得下述格林公式成立：

$$\int_\Omega Au\bar{v}\mathrm{d}x-\int_\Omega u\,\overline{A^*v}\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma S_j u\,\overline{C_j v}\mathrm{d}\sigma-\sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma B_j u\,\overline{T_j v}\mathrm{d}\sigma$$
$$(\forall u,v\in C^\infty(\overline{\Omega})),$$

其中 A^* 是 A 的形式共轭，它定义如下

$$A^*u=\sum_{|p|,|q|\leqslant m}(-1)^{|p|}D^p(\overline{a_{pq}(x)}D^q u).$$

组 $\{C_j\}_{j=0}^{m-1}$ 称为组 $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ 关于算子 A 和格林公式的伴随组. 例如，对拉普拉斯算子 Δ，格林公式为

$$\int_\Omega(v\Delta u-u\Delta v)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 ν 为 Ω 的外法向单位向量.

伴随组(adjoint system)　见“椭圆算子的格林公式”.

伴随边值问题(adjoint boundary value problem)　正则椭圆问题由格林公式连结的另一边值问题. 在椭圆算子的格林公式中，边值问题 $\{A^*,C_j\}$：

$$\begin{cases}A^*u=f_1 & (\text{在 }\Omega\text{ 内}),\\ C_j u=g_{1j} & (\text{在 }\Gamma\text{ 上};j=0,1,\cdots,m-1)\end{cases}$$

称为边值问题 $\{A,B_j\}$：

$$\begin{cases}Au=f & (\text{在 }\Omega\text{ 内}),\\ B_j u=g_j & (\text{在 }\Gamma\text{ 上};j=0,1,\cdots,m-1)\end{cases}$$

关于格林公式的伴随边值问题或者形式伴随问题. 如果 $A=A^*$，格林公式可表为

$$\int_\Omega u\,\overline{Av}\mathrm{d}x-\int_\Omega(Au)\bar{v}\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma B_j u\,\overline{C_j v}\mathrm{d}\sigma-\sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma C_j u\,\overline{B_j v}\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$，$\{C_j\}_{j=0}^{m-1}$ 是狄利克雷组，B_j 的阶加上 C_j 的阶等于 $2m-1$. 此时问题 $\{A,C_j\}$ 称为自伴随边值问题. 拉普拉斯方程的第一、第二以及第三边值问题都是自伴随边值问题.

自伴随边值问题(self-adjoint boundary value problem)　见“伴随边值问题”.

强迫双线性型(coercive bilinear form)　用泛函分析方法研究椭圆边值问题需要的一种重要的双线性型. 设 V 是复(实)希尔伯特空间，$a(u,v)$ 是 V 上的双线性型，即对任意复(实)数 $\alpha,\beta,a(u,v)$ 满足条件：

$$a(\alpha u+\beta v,w)=\alpha a(u,w)+\beta a(v,w)$$
$$(\forall u,v,w\in V);$$
$$a(u,\alpha v+\beta w)=\alpha a(u,v)+\beta a(u,w)$$
$$(\forall u,v,w\in V).$$

如果存在正常数 C，使得

$$\mathrm{Re}\ a(v,v)\geqslant C\|v\|^2\ (\forall v\in V),$$

那么称双线性型 $a(u,v)$ 是强迫的. 如果存在常数 k，使得

$$|a(u,v)|\leqslant k\|u\|\ \|v\|\ (\forall u,v\in V),$$

则称双线性型是连续的或有界的.

连续双线性型(continuous bilinear form) 见"强迫双线性型".

有界双线性型(bounded bilinear form) 见"强迫双线性型".

拉克斯-密格拉蒙定理(Lax-Milgram theorem) 用来证明线性椭圆方程边值问题有解的一个重要定理. 该定理断言:如果 $a(u,v)$ 是希尔伯特空间 V 上的连续强迫双线性型,则对任意 $F\in V^*$(V^* 是 V 的对偶空间),问题

$$a(u,v)=F(v)\quad(\forall v\in V)$$

有惟一的解 $u\in V$,且上式定义了一个 $V^*\to V$ 的线性连续且同构的算子 $A:F\to u$. 例如,设 $V=W_0^{1,2}(\Omega)$,则椭圆型方程边值问题

$$\begin{cases}-\sum_{i,j=1}^{n}D_j[a_{ij}(x)D_iu]+c(x)u=f(x) & (\text{在 }\Omega\text{ 中})\\ u=0 & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上})\end{cases}$$

的弱解是满足

$$a(u,v)\equiv\int_\Omega\Big[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)D_iuD_jv+c(x)uv\Big]\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x\quad(\forall v\in V)$$

的函数 $u\in V$. 如果在 Ω 中 $c_0\geqslant c(x)\geqslant 0$,且方程是严格椭圆型的,则双线性型 $a(u,v)$ 在 V 上是连续强迫的. 当 $f\in L^2(\Omega)$ 时,令

$$F(v)=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,$$

则 $F\in V^*$. 于是由拉克斯-密格拉蒙定理,上述边值问题有惟一的弱解 $u\in V=W_0^{1,2}(\Omega)$. 因此,拉克斯-密格拉蒙定理是研究线性椭圆方程解的存在性的一个有效工具.

V 强迫(V-coercive) 含参数的线性椭圆方程边值问题有解时,对应双线性型应满足的条件. 对双线性型 $a(u,v)=(Au,\bar v)$,A 是 $V\to V^*$ 的线性算子,V 是希尔伯特空间,且在希尔伯特空间 H 中稠密,V^* 是 V 的对偶空间. 如果存在 $\lambda_0\in\mathrm{R}^1$ 和 $c>0$,使得

$$\mathrm{Re}\,a(v,v)+\lambda_0|v|^2\geqslant c\|v\|^2\quad(\forall v\in V),$$

那么称双线性型 $a(u,v)$ 是 V 强迫的,其中 $|\ \ |$ 和 $\|\ \ \|$ 分别表示 H 和 V 中的范数. 如果连续双线性型 $a(u,v)$ 是 V 强迫的,那么对所有满足条件 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\lambda_0$ 的复数 λ,问题

$$a(u,v)+\lambda(u,\bar v)=(f,\bar v)\quad(\forall v\in V)$$

有惟一的解 u.

勒雷-绍德尔不动点定理(Leray-Schauder fixed point theorem) 用来证明拟线性椭圆方程边值问题有解的一个重要定理. 设 X 是巴拿赫空间,T 是从 $X\times[0,1]$ 到 X 中的紧映射,对所有的 $x\in X$,使得 $T(x,0)=0$. 假设存在常数 M,使得对满足 $x=T(x,\sigma)$ 的所有 $(x,\sigma)\in X\times[0,1]$,有 $\|x\|_X<M$,则由 $T_1x=T(x,1)$ 给出的 X 到自身中的映射 T_1 有一个不动点. 勒雷-绍德尔不动点定理在拟线性方程的定解问题的可解性证明中有广泛的应用. 例如,应用于椭圆型方程的狄利克雷问题有下述结果:设 Ω 是 R^n 中的一个有界区域,具有边界 $\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$,又设 $\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$,设算子族

$$Q_\sigma u\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,u,Du;\sigma)D_{ij}u+b(x,u,Du;\sigma)\quad(0\leqslant\sigma\leqslant1)$$

在 Ω 中满足下述条件:

1. $Q_1u=Qu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,u,Du)D_{ij}u+b(x,u,Du)$, $Q_0u\equiv\triangle u$.

2. 算子 Q_σ 对所有 $\sigma\in[0,1]$ 在 $\bar\Omega$ 中是椭圆型的.

3. 对每一 $\sigma\in[0,1]$,$a_{ij},b\in C^\alpha(\bar\Omega\times\mathrm{R}^1\times\mathrm{R}^n)$,且视为从 $[0,1]$ 到 $C^\alpha(\bar\Omega\times\mathrm{R}^1\times\mathrm{R}^n)$ 中的映射,函数 a_{ij},b 是连续的.

再设对某一 $\beta>0$,存在一个不依赖于 u 和 σ 的常数 M,使得狄利克雷问题:在 Ω 中 $Q_\sigma u=0$,在 $\partial\Omega$ 上 $u=\sigma\varphi(0\leqslant\sigma\leqslant1)$ 的每一 $C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ 解满足 $\|u\|_{C^{1,\beta}(\bar\Omega)}<M$. 那么狄利克雷问题:在 Ω 中 $Qu=0$,在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$ 在 $C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$ 中是可解的.

哥尔丁不等式(Garding inequality) 椭圆型算子的重要特征. 设 L 是定义在区域 Ω 上具有 C^∞ 系数的 m 阶椭圆型算子,则对于任意的 $u\in C_0^\infty(\Omega)$,成立不等式

$$(u,Lu)\geqslant C_1\|u\|_{m/2}^2-C_2\|u\|_0^2,$$

此处 C_1,C_2 是仅依赖于 L 及 Ω 的常数,$\|u\|_s$ 表示 u 在空间 $H^s(\Omega)$ 中的范数. 这个不等式称为哥尔丁不等式,由瑞典数学家哥尔丁(Garding,L.)于 1953 年证明.

指标算子(indexed operators) 亦称弗雷德霍姆算子. 用来刻画算子方程的可解性的概念. 如果算子 $\mathscr{P}$ 的核空间 $\ker\mathscr{P}$ 的维数是有限的,$\mathscr{P}$ 的像空间(值域空间)$\mathrm{Im}\mathscr{P}$ 是闭的并且它的余维数也是有限的,那么就称算子 $\mathscr{P}$ 是指标算子. 算子 $\mathscr{P}$ 的指标 $\chi(\mathscr{P})$ 由下式给出:

$$\chi(\mathscr{P})=\dim\ker\mathscr{P}-\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\mathscr{P}.$$

正则椭圆边值问题 $\{A,B_j\}$:

$$\begin{cases}Au=f & (\text{在 }\Omega\text{ 内}),\\ B_ju=g_j & (\text{在 }\Gamma\text{ 上};j=0,1,\cdots,m-1)\end{cases}$$

对应的算子

$$\mathscr{P}: u \to \mathscr{P}u = \{Au; B_0u, B_1u, \cdots, B_{m-1}u\}$$

是一个指标算子，它将空间 $H^{2m+r}(\Omega)$ 映射到空间

$$H^r(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+r-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

上，这里 $r \geqslant 0$ 是整数.

弗雷德霍姆算子(Fredholm operators) 即“指标算子”.

混合边值问题(mixed boundary value problem) 典型的非正则椭圆边值问题. 设 Ω 是 R^n 中的有界域，它的边界 Γ 由 m 个子集 $\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_{m-1}$ 组成. 设 A 是 Ω 中的 $2m$ 阶椭圆型算子. 设 $\{F_j\}_{j=0}^{m-1}$, $\{\Phi_j\}_{j=0}^{m-1}$ 是分别定义在 Γ_j 和 $\Gamma - \Gamma_j$ 上的边界算子组，F_j 的阶与 Φ_j 的阶之和为 $2m-1$. 边值问题

$$\begin{cases} Au = f & (\text{在 } \Omega \text{ 上}), \\ F_ju = 0 & (\text{在 } \Gamma_j \text{ 上}), \\ \Phi_ju = 0 & (\text{在 } \Gamma - \Gamma_j \text{ 上}), \end{cases}$$

$$(j = 0, 1, \cdots, m-1)$$

称为混合边值问题. 混合边值问题不属于正则椭圆边值问题. 即使对于充分正则的区域，方程的系数充分光滑，混合边值问题也可能有非正则的解.

椭圆型方程组(system of elliptic equations) 描述稳定或定常状态的一类偏微分方程组. 关于自变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 N 个未知函数的 N 个 $2m$ 阶线性方程组有如下形式

$$(-1)^n \sum A^{(k_1, \cdots, k_{2m})}(x) \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_{2m}}} + Bu = f(x),$$

其中 u, f 是具有 N 个分量的向量函数,

$$A^{(k_1, k_2, \cdots, k_{2m})}(x)$$

是 $N \times N$ 阶矩阵，B 是阶数低于 $2m$ 的微分算子，和式对所有足标 $k_1, k_2, \cdots, k_{2m}$ 从 0 取到 n. 如果矩阵

$$A(x, \xi) = \sum A^{(k_1, k_2, \cdots, k_{2m})}(x) \xi_{k_1} \xi_{k_2} \cdots \xi_{k_{2m}}$$

的行列式当 $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \neq 0$ 时异于零，则称这个方程组在点 x 在彼得罗夫斯基意义下是椭圆型的. 如果对任意实向量 $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_N) \neq 0$ 和具有

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \neq 0$$

的任何实数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，二次型

$$A(x, \xi)\zeta \cdot \zeta$$

$$= \sum A^{(k_1, k_2, \cdots, k_{2m})}(x) \xi_{k_1} \xi_{k_2} \cdots \xi_{k_{2m}} \zeta \cdot \zeta > 0,$$

就称这个方程组在点 x 是强椭圆型的. 此处符号 $\eta \cdot \zeta$ 表示 N 维向量的内积.

强椭圆型方程组(system of strong elliptic equations) 见“椭圆型方程组”.

椭圆算子的特征值问题(eigenvalue problem of elliptic operator) 一类重要的椭圆边值问题. 一个椭圆算子 A 确定的边值问题

$$\begin{cases} Au = \lambda u & (\text{在 } \Omega \text{ 内}), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

称为椭圆算子 A(或椭圆方程)的特征值问题，其中 Ω 是 R^n 中的开集. 使得此问题有非平凡解(非零解)的参数 λ 的值称为算子 A 的特征值，相应的解 u 称为特征函数.

椭圆算子的特征函数(eigenfunction of elliptic operators) 见“椭圆算子的特征值问题”.

拉普拉斯算子的特征值问题(eigenvalue problem of Laplace operator) 典型的椭圆算子的特征值问题. 由边界固定的膜引出的拉普拉斯算子的特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & (\text{在 } \Omega \text{ 内}), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

是一个典型的椭圆算子的特征值问题，其中 Ω 是 R^2 中的开区域. 当 Ω 有界且边界 $\partial\Omega$ 适当光滑时，存在可数无穷个特征值

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots, \lim_{k \to \infty} \lambda_k = +\infty,$$

相应的特征函数 $\psi_n(x)$ 组成 $L^2(\Omega)$ 上的完备正交基. 当前对膜振动问题的认识还是相当有限的，仅对矩形和圆等少数的几种简单区域能够精确地得到特征值. 外尔(Weyl, (C. H.)H.)于 1911 年得到不超过 λ 的特征值的个数 $N(\lambda)$ 的渐近公式(外尔公式)

$$N(\lambda) = \frac{|\Omega|}{4\pi}\lambda + o(\lambda),$$

式中 $|\Omega|$ 表示 Ω 的面积. 与外尔公式相关的是如下 MP 公式($t \to +\infty$):

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\lambda_j t)$$

$$= \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{|\partial\Omega|}{4\sqrt{4\pi t}} + \frac{1-h}{6} + o(1),$$

式中 $|\partial\Omega|$ 为边界 $\partial\Omega$ 的长度，h 表示鼓膜 Ω 的洞数. 卡茨(Kac, M)据 MP 公式提出了一个非常生动的问题：能否“听出”鼓膜的面积 $|\Omega|$、周长 $|\partial\Omega|$ 和洞的个数 h? 由于 $1-h$ 恰好是 Ω 的欧拉-庞加莱示性数，是整体几何中颇受重视的一个不变量，“听出鼓形”或“谱的几何”问题立即引起了人们的强烈兴趣，并导出了一系列重要的研究. 然而，这种一般的特征值的反问题还远未解决.

抛物型方程

抛物型偏微分方程(partial differential equation of parabolic type) 简称抛物型方程，是一类重要的偏微分方程. 具代表性的最简单抛物型偏微

分方程是热传导方程. 抛物型方程在流体力学、热力学、电磁学以及概率论的解析处理中都有重要的应用.

二阶线性抛物型方程(linear parabolic equation of second order) 最重要的一类抛物型方程. 对于二阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u+f(x,t), \tag{1}$$

式中系数 a_{ij},b_i,c 和自由项 f 均定义在柱体 $\overline{Q}_T$ 上 ($Q_T=\Omega\times(0,T]$, $\Omega\subset\mathbf{R}^n$), $a_{ij}=a_{ji}$, 如果矩阵 $(a_{ij}(x,t))$ 是正定的, 即对任意实向量 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\neq 0$, 有

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j>0,$$

则称方程(1)在点 (x,t) 是抛物的. 如果方程(1)在 $\overline{Q}_T$ 上的一切点处都是抛物的, 则称方程(1)在 $\overline{Q}_T$ 上是抛物的. 如果存在正常数 ν 和 μ, 使对任意实向量 ξ 和一切点 $(x,t)\in\overline{Q}_T$ 都有

$$\nu|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant\mu|\xi|^2,$$

则称方程(1)在 $\overline{Q}_T$ 上是一致抛物的. 如果 $(a_{ij}(x,t))$ 仅是非负定的, 即对任意实向量 ξ 及某些点 $(x_0,t_0)\in\overline{Q}_T$, 有

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_0,t_0)\xi_i\xi_j=0,$$

则称方程(1)是退化抛物的. 热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(x,t)$$

是最简单的二阶线性抛物型方程.

退化抛物型方程(degenerate parabolic equation) 见"二阶线性抛物型方程".

一致抛物型方程(uniformly parabolic equation) 见"二阶线性抛物型方程".

抛物型方程的定解问题(deterministic problems for parabolic equation) 求抛物型方程满足已知定解条件的解的问题. 抛物型方程通常有两种定解问题:

1. 柯西问题(初值问题), 即求函数 $u(x,t)$ 在半空间 $\{|x|<+\infty, t\geqslant 0\}$ 或带域 $\{|x|<+\infty, 0\leqslant t\leqslant T\}$ 中有定义, 在 $t>0$ 或 $0<t\leqslant T$ 时满足相应方程并在 $t=0$ 时满足初始条件 $u|_{t=0}=\varphi_0(x)$.

2. 混合边值问题(初-边值问题), 即在 $\overline{Q}_T$ ($Q_T=\Omega\times(0,T]$) 上决定函数 $u(x,t)$, 在 Q_T 内满足方程, 在 Q_T 的下底上满足初始条件 $u|_{t=0}=\varphi_0(x)$ ($x\in\Omega$), 在 Q_T 的侧面 S_T ($S_T=\partial\Omega\times[0,T]$) 上满足边界条件. 对二阶抛物型方程, 一般有三种边界条件:

第一边界条件

$$u|_{S_T}=\psi(x,t)\ (x\in\partial\Omega; 0\leqslant t\leqslant T),$$

第三边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u|_{S_T}\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_j}\cos(n,x_i)+\sigma u|_{S_T}=\psi(x,t),$$

第二边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_T}\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_j}\cos(n,x_i)|_{S_T}=\psi(x,t),$$

这里 n 是 $\partial\Omega$ 的外法向, $\sigma\geqslant 0$.

初-边值问题(initial-boundary value problems) 抛物型方程的初-边值问题一般有三类, 即第一, 第二和第三初-边值问题(参见"抛物型方程的定解问题").

相容条件(compatibility conditions) 方程的解具有某种光滑性的必要条件. 设 $u(x,t)$ 是散度形拟线性抛物型方程第一初-边值问题

$$\begin{cases}u_t=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}[a_i(x,t,u,\nabla u)]\\ \qquad +a(x,t,u,\nabla u)\ ((t,x)\in Q_T),\\ u|_{t=0}=\varphi_0(x)\quad(x\in\Omega),\\ u|_{S_T}=\psi(x,t)\quad(x\in\partial\Omega; 0\leqslant t\leqslant T)\end{cases}\tag{1}$$

的解, 式中 $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbf{R}^n$. 如果 $u\in C^0(\overline{Q}_T)$, 则必有

$$\varphi_0(x)=\psi(x,0)\quad(x\in\partial\Omega).\tag{2}$$

此条件称为初-边值问题(1)的零阶相容条件. 如果 $u\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, 则除条件(2)外, 由方程还导致

$$\psi_t(x,0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,0,\varphi_0(x),\nabla\varphi_0)+a(x,0,\varphi_0(x),\nabla\varphi_0))\ (x\in\partial\Omega).\tag{3}$$

此条件称为初-边值问题(1)的二阶相容条件.

热传导方程(equation of heat conduction) 亦称热方程. 是描述热量的传导过程、分子扩散过程等物理现象的偏微分方程. 热传导方程的一般形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(x,t).$$

满足此方程及初始条件 $u|_{t=0}=\varphi(x)$, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ($-\infty<x_i<+\infty$, $i=1,2,\cdots,n$) (φ 和 f 都是有界连续函数)的柯西问题的解的表达式为

$$u(x,t)=(2a\sqrt{\pi t})^{-n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\times\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}\right)d\xi+\int_0^t\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{[(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})]^n}\times\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi\right]d\tau,$$

其中 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $d\xi=d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_n$,

$$|x-\xi|^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2.$$

热传导方程柯西问题的解(solution of Cauchy problem for heat equation) 见"热传导方程".

热传导方程柯西问题解的惟一性(uniqueness of solution of Cauchy problem for heat equation) 热传导方程柯西问题解的重要特性之一.热传导方程柯西问题的解在无穷远处附加增长阶的一定限制下才是惟一的.热传导方程柯西问题的解可能不只一个,为了保证解的惟一性,必须对解的增长性(当$|x|\to+\infty$)加一定限制.热传导方程柯西问题

$$\begin{cases}u_t-u_{xx}=0 & (t>0,-\infty<x<+\infty);\\ u(0,x)=0 & (-\infty<x<+\infty)\end{cases}$$

除有零解外,吉洪诺夫(Тихонов, A. H.)还构造了一个不为零的解

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!}x^{2k},$$

其中

$$g(t)=\begin{cases}\exp(-t^{-\alpha}) & (t>0),\\ 0 & (t\leqslant 0),\end{cases}$$

而α是一个常数.可以证明,如果对解加上条件:存在正常数M及α使得$|u(x,t)|\leqslant Me^{\alpha|x|^2}(0<t<T,x\in\mathbb{R}^n)$,则热传导方程柯西问题$u_t-\Delta u=f(x,t)(0<t<T,x\in\mathbb{R}^n)$;$u(x,0)=\varphi(x)(x\in\mathbb{R}^n)$的解不能多于一个.

吉洪诺夫解(Tihonov solution) 见"热传导方程柯西问题解的惟一性".

热传导方程解的正则性(regularity of solutions of heat equation) 热传导方程柯西问题解的重要特性之一.热传导方程柯西问题解的光滑性由方程的自由项及初始函数的光滑性确定.由热传导方程初值问题解的表达式(参见"热传导方程"),当$f\equiv 0$时,若$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$有界连续,则其解$u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$当$t>0$时是无穷次连续可微的,而且关于空间变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$是解析的,关于时间变量$t$属于谢弗莱二类函数,即在

$$|x|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}<\rho$$

内满足

$$\left|\frac{\partial^m u}{\partial t^m}\right|\leqslant\frac{M(2m)!}{\rho^{2m}}.$$

当$f\neq 0$时,热传导方程的解的可微性与自由项f的性质有关.例如为要得到古典解,除对f需要求连续外尚需要求f对$x_1,x_2,\cdots,x_n$或t是赫尔德连续的.

热传导方程解的渐近性(asymptotic behaviour of solution of heat equation) 热传导方程第一初-边值问题解的重要性质之一.外界温度条件相同时,物体不论初始温度如何最终将趋于同一个稳态的温度分布.对于热传导方程的第一初-边值问题:

$$Lu=u_t-a^2\Delta u=f(x),$$
$$x=(x_1,x_2,x_3),$$
$$u|_{\partial\Omega\times[0,+\infty)}=g(x),$$
$$u|_{t=0}=u_0(x),$$

当边界函数g和自由项f与t无关时,热传导过程将趋于稳定状态,也就是当$t\to+\infty$时,不管什么初始条件,其解$u(x,t)$将趋于同一个函数$u(x)$,$u(x)$是椭圆边值问题$-a^2\Delta u=f(x),u|_{\partial\Omega}=g(x)$的解.一般的抛物型方程(组)也有类似的结果.

热传导方程解的半群性质(semigroup property of solution of heat equation) 热传导方程第一初-边值问题解的重要性质之一.热传导是一个单向的不可逆过程,热总是从高温流向低温.如果边界温度为零,用$S(t)$表示由初始时刻温度场映到t时刻的温度场的线性解算子(热传导方程$u_t-a^2\Delta u=0$的解在t时刻的值定义的映射),即

$$S(t)u_0=u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t;u_0),$$

由于热传导的不可逆性,算子族$\{S(t)\}_{0\leqslant t<+\infty}$具有半群性质:

1. $S(0)=I$(恒同算子).
2. $S(t+\tau)=S(t)S(\tau)(t,\tau>0)$.
3. $\lim_{t\downarrow 0}S(t)u_0=u_0$.

由泛函分析中的希尔-吉田定理,存在一个相应的无穷小生成元A,使得$S(t)=e^{-tA}$且热传导方程的第一初-边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(x,t)\quad((x,t)\in Q_T),$$
$$u(x,0)=u_0(x)\quad(x\in\Omega),$$
$$u(x,t)=0\quad(x\in\partial\Omega).$$

的解可表为

$$u(x,t)=e^{-tA}u_0(x)+\int_0^t e^{-(t-\tau)A}f(x,\tau)d\tau.$$

抛物型方程的拟基本解方法(parametrix method of parabolic equation) 借助对应常系数方程的基本解构造变系数抛物型方程的基本解的方法.列维(Levi, E. E.)给出求变系数的一致抛物型方程

$$\begin{aligned}Lu=&\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\\&+c(x,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}\\=&0\ ((x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T])\end{aligned}$$

基本解的方法称为拟基本解方法,作法如下:设$(a^{ij}(x,t))$是$(a_{ij}(x,t))$的逆矩阵.记

$$\theta^{y,\sigma}(x,\xi)=\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(y,\sigma)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j),$$

$$\omega^{y,\sigma}(x,t;\xi,\tau)=(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[-\frac{\theta^{y,\sigma}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right],$$

$$C(x,t)=(2\sqrt{\pi})^{-n}[\det(a^{ij}(x,t)]^{\frac{1}{2}},$$

$$Z(x,t;\xi,\tau)=C(\xi,\tau)\omega^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau),$$

则 Z 是常系数方程(视 ξ,τ 固定)

$$L_0u(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0$$

的基本解.原变系数抛物型方程的基本解就是如下形式的函数 Γ:

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)$$
$$=Z(x,t;\xi,\tau)+\int_\tau^t\int_\Omega Z(x,t;\eta,\sigma)\varphi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\sigma,$$

其中函数 φ 由 Γ 满足方程 $Lu=0$ 来确定.函数 $Z(x,t;\xi,\tau)$称为 $Lu=0$ 的拟基本解.

抛物型方程的拟基本解(parametrix of parabolic equation) 见“抛物型方程的拟基本解方法”.

二阶线性抛物型方程的基本解(fundamental solution of linear parabolic equation of second order) 二阶线性抛物型方程的一种具有奇性的特解.二阶线性抛物型方程 $Lu=0$ 在 Q_T(算子 L 和 Q_T 的定义见“抛物型方程的拟基本解方法”)中的基本解是一个对一切$(x,t)\in Q_T$, $(\xi,\tau)\in Q_T,t>\tau$ 都有定义的函数 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$,它满足如下条件:

1. 对固定的$(\xi,\tau)\in Q_T$,作为(x,t)的函数在域$\{x\in\Omega,\tau<t\leqslant T\}$中满足方程 $Lu=0$.

2. 对每一个在 $\overline{Q}_T$ 上连续的函数 $f(x)$,当 $x\in\Omega$ 时有

$$\lim_{t\to\tau^+}\int_\Omega\Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x)$$
$$(\mathrm{d}\xi=\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n).$$

热传导方程的基本解是

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)$$
$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n}\exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2}{4a^2(t-\tau)}\right).$$

伴随方程(adjoint equation) 研究方程广义解的工具之一.抛物型方程

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$
$$+c(x,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

的伴随方程为

$$L^*v=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i^*(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i}$$
$$+c^*(x,t)v+\frac{\partial v}{\partial t}=0,$$

其中

$$b_i^*=-b_i+2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j},$$

$$c^*=c-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i}{\partial x_i}+\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial^2a_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}.$$

或写为

$$L^*v=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(a_{ij}v)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_iv)+cv+\frac{\partial v}{\partial t}.$$

热传导方程

$$a^2\Delta u-\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

的伴随方程为

$$a^2\Delta v+\frac{\partial v}{\partial t}=0.$$

如果 u,v 都是 Q_T 中的光滑函数,则下式成立:

$$vLu-uL^*v$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(va_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}-ua_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}-uv\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)\right.$$
$$\left.+b_iuv\right]-\frac{\partial}{\partial t}(uv).$$

此恒等式称为算子 L 的格林恒等式.如果 u,v 在 Q_T 的边界的某个邻域内为零,那么,还有积分形式的格林恒等式

$$\int_{Q_T}(vLu-uL^*v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

因此,可以引进定义:如果 $u\in L(\Omega)$,且对任意在 Q_T 中光滑且在 Q_T 的边界的邻域内为零的函数 v,积分等式

$$\int_{Q_T}uL^*v\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0$$

都能成立,则称函数 u 是方程 $Lu=0$ 在 $L(\Omega)$中的广义解.

格林恒等式(Green identity) 见“伴随方程”.

抛物型方程的能量不等式(energy inequality of parabolic equation) 用来证明解的存在与惟一性的重要工具.设 $u\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$是一致抛物型方程

$$u_t-\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x,t)u_{x_j})=0$$
$$(x\in Q_T=\Omega\times(0,T])$$

满足初-边值条件($S_T=\partial\Omega\times[0,T]$):$u|_{S_T}=0(t\in[0,T])$,$u|_{t=0}=\psi_0(x)(x\in\Omega)$的解,则存在正常数 C,使得不等式

$$\max_{t\in[0,T]}\|u(x,t)\|_{L^2(\Omega)}+\|u_x\|_{L^2(Q_T)}$$
$$\leqslant C\|\psi_0(x)\|_{L^2(\Omega)}$$

成立,此不等式称为能量不等式.对于更一般的二阶线性抛物型方程,甚至对间断系数的抛物型方程,只要系数满足某些可积条件,也有相应的能量不等式.

由能量不等式立即可以得到解的惟一性定理.

抛物型方程的极大值原理(maximum principle of parabolic equation)　抛物型方程初-边值问题的重要性质,亦即在热传导过程中,物体的最高温度一定在初始时刻或边界上达到这一物理现象的数学表述.在 $Q_T=\Omega\times(0,T]$ 中对二阶线性抛物算子

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u-\frac{\partial u}{\partial t},$$

假定系数都是 Q_T 中的连续函数,且 $c(x,t)\leqslant 0$.如果在 Q_T 中 $Lu\geqslant 0(Lu\leqslant 0)$,而且 u 在 Q_T 中某点 $P_0=(x_0,t_0)$ 处达到其正极大(负极小)值,那么对一切点 $P\in S(P_0)=\{(x,t)\in Q_T\mid 0\leqslant t\leqslant t_0\}$ 都有 $u(P)=u(P_0)$.此性质称为极大值原理.对齐次热传导方程 $(\partial u/\partial t)=a^2\Delta u$,上述极大值原理可简述为:方程在 Q_T 中的解一定在 Q_T 的底 $B=\{(x,t)\mid x\in\Omega,t=0\}$ 或侧边 $\Gamma=\partial\Omega\times[0,T]$ 上取最大(最小)值,即

$$\max_{\overline{Q}_T}u(x,t)=\max_{B\cup\Gamma}u(x,t),$$
$$\min_{\overline{Q}_T}u(x,t)=\min_{B\cup\Gamma}u(x,t).$$

应用极大值原理,立即可以导出抛物型方程初-边值问题解的惟一性定理.

霍普夫型边界点定理(boundary point theorem of Hopf type)　抛物型方程初-边值问题的重要性质,亦即方程的解在达到最大值的边界上的外法向导数恒为正值.设点 $P_0=(x_0,t_0)$ 是 $Q_T=\Omega\times(0,T]$ 的边界 ∂Q_T 上的一点,二阶线性抛物型算子

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial t}$$

的系数都是 Q_T 中的连续函数.如果存在中心在 $(\overline{x},\overline{t})\in Q_T$ 的闭球 $B\subset\overline{Q}_T$,$B\cap\partial Q_T=\{P_0\}$,而且 $\overline{x}\neq x_0$,则称 P_0 有强内球性质.如果 $Lu\geqslant 0$,而 $P_0\in\partial Q_T$ 有强内球性质,且存在 P_0 的邻域 V,在 $V\cap Q_T$ 内有 $u<u(P_0)$,则当外法向导数 $\partial u/\partial\nu$ 在 P_0 点处存在时有

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}(P_0)>0.$$

这就是霍普夫型边界点定理.此论断与椭圆型方程的相应结论是一致的,但 $\overline{x}\neq x_0$ 的限制不能去掉,这可由下面的例子看出.设

$$P_0=(0,0),\ Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t},\ u(x,t)=1-t^2,$$

Q_T 为半空间 $\{-\infty<x<+\infty,t>0\}$.

比较定理(comparison theorem)　研究非线性抛物型方程的重要工具之一.设

$$v(x,t),w(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$$
$$(Q_T=\Omega\times(0,T]),$$

设 $F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 及其对 $p_{hk}(h,k=1,2,\cdots,n)$ 的一阶导数都是域 E 上的连续函数,这里 E 是满足下列条件的点 (x,t,p,p_i,p_{ij}) 所成集合的闭包:

$$x\in\Omega,t\in(0,T],$$
$$p\in(v(x,t),w(x,t)),$$
$$p_i\in\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i},\frac{\partial w(x,t)}{\partial x_i}\right),$$
$$p_{ij}\in\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i\partial x_j},\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right),$$

记号 (a,b) 表端点为 a,b 的开区间.再假定

$$\left(\left(\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\right)\right)$$

是非负定矩阵.于是,若在 Q_T 内有

$$\frac{\partial v}{\partial t}>F\left(x,t,v,\frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\right),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}\leqslant F\left(x,t,w,\frac{\partial w}{\partial x_i},\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}\right),$$

且在 $\Gamma_T=\partial\Omega\times[0,T]\cup\{x\in\Omega,t=0\}$ 上有 $v>w$,则在 Q_T 内必有 $v>w$.

解的可微性(differentiability of solutions)　抛物型方程解的重要性质之一.有如下定理:假定 $D_x^m D_t^k a_{ij},D_x^m D_t^k b_i,D_x^m D_t^k c,D_x^m D_t^k f$ $(0\leqslant m+2k\leqslant p,k\leqslant q)$ 在 $Q_T=\Omega\times(0,T]$ 内赫尔德连续(指数为 α).如果 u 是

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t)$$

在 Q_T 内的解,则 $D_x^m D_t^k u$ $(0\leqslant m+2k\leqslant p+2,k\leqslant q+1)$ 存在,并且在 Q_T 内赫尔德连续(指数为 α).由此定理立刻得到,若 L 的系数和 f 在 Q_T 内无穷次可微,则 $Lu=f$ 的解 u 在 Q_T 内也是无穷次可微函数.

函数空间 $W_2^{r,s}(Q_T)$(function spaces $W_2^{r,s}(Q_T)$)　在抛物型方程理论中常用到的一类函数空间.设 r,s 为非负整数,$Q_T=\Omega\times(0,T)$,Ω 为 R^n 中的开集(有界或无界).函数空间 $W_2^{r,s}(Q_T)$ 由所有具如下性质的函数 $u(x,t)$ 组成:$u(x,t)$ 及其对变元 x 的直到 r 阶的弱导数,对变元 t 的直到 s 阶的弱导数都是 $L^2(Q_T)$ 中的元素.$W_2^{r,s}(Q_T)$ 的范数可取为

$$\|u(x,t)\|_{W_2^{r,s}(Q_T)}=\|u\|_{L^2(Q_T)}+\sum_{|\beta|\leqslant r}\left\|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}u\right\|_{L^2(Q_T)}+\sum_{j=1}^{s}\left\|\frac{\partial^j}{\partial t^j}u\right\|_{L^2(Q_T)},$$

其中 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 为重指标,$\beta_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$,$|\beta|=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$.

函数空间 $\mathring{W}_2^{r,s}(Q_T)$ 是 $W_2^{r,s}(Q_T)$ 的子空间,它由 $W_2^{r,s}(Q_T)$ 中具有下列性质的函数 $u(x,t)$ 组成:对任

意的$t\in(0,T)$，$u(x,t)$在$\partial\Omega$上为零. 函数空间$W_2^{r,s}(Q_T)$和$\mathring{W}_2^{r,s}(Q_T)$都是索伯列夫空间.

函数空间 $\mathring{W}_2^{r,s}(Q_T)$(function spaces $\mathring{W}_2^{r,s}(Q_T)$) 见“函数空间 $W_2^{r,s}(Q_T)$”.

抛物型方程的广义解(generalized solutions for parabolic equations) 抛物型方程经典解的推广. 如果线性抛物型方程的系数和自由项不是光滑的，一般地，就不再有通常意义下的经典解. 对于非线性方程，例如方程 $u_t-(u^m)_{xx}=0(m>1)$，即使已知数据充分光滑，其定解问题也可能没有经典解. 因此，在更广泛的函数类中考查解(广义解)就十分必要. 一般地，所选择的广义解类 $\mathscr{M}$ 不仅应使得广义解存在，而且应是惟一的. 例如，对抛物型方程

$$u_t-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]=f(x,t)$$

$$(a_{ij}\in L^\infty(Q_T),f\in L^2(Q_T)),\qquad(1)$$

如果 $u\in W_2^{1,1}(Q_T)$，且对任意在 Q_T 中有紧支集的函数 $\varphi\in W_2^{1,0}(Q_T)$，成立积分恒等式

$$\int_{Q_T}\left(u_t\varphi+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_j}\varphi_{x_i}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{Q_T}f\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

则称 u 是方程(1)在类 $W_2^{1,1}(Q_T)$中的广义解. 如果在 $W_2^{1,1}(Q_T)$中仍然没有解，但 $u\in W_2^{1,0}(Q_T)$且对任意的在 Q_T 中有紧支集的函数 $\varphi\in W_2^{1,1}(Q_T)$，成立

$$\int_{Q_T}\left(-u\varphi_t+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_j}\varphi_{x_i}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{Q_T}f\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

则称 u 是(1)在 $W_2^{1,0}(Q_T)$中的广义解. 广义解的解类 $\mathscr{M}$ 应随具体问题(不同的方程和不同的定解条件)而适当选择. 再如，抛物型方程在 $L(\Omega)$中的广义解详见“伴随方程”.

自由边界问题(free boundary problem) 解和求解区域边界均待定的一类定解问题. 在偏微分方程经典的定解问题中，自变量变化区域的边界总是给定了的. 然而物理学中提出了另外一类定解问题，其所讨论的自变量的变化区域的边界有一部分是“自由的”，即不是给定的，而是要和定解问题的解一起确定. 自然地，在自由边界上还要补充边界条件. 这样的问题称为自由边界问题. 例如，描述冰块融化过程的斯特凡问题和水坝渗流的浸润面问题都是典型的自由边界问题. 所有的自由边界问题都是非线性问题. 自由边界问题的研究有广泛的实际背景，物理学、力学和工程领域都提出了许多种不同形式的自由边界问题.

斯特凡问题(Stefan problem) 一个互相转换的热传导问题. 假定区间 $a\leqslant x<+\infty$上有一条状冰块，冰块的温度处处是零度，而在端点 $x=a$ 处加温并保持温度为 T 度，$T>0$. 于是冰块开始融化，对每一时刻 $t>0$，水将占据区间 $a\leqslant x<s(t)$. 若以 u 记水温，于是有

$$\begin{cases}\alpha^2u_{xx}-u_t=0 & (a<x<s(t),t>0),\\ u(a,t)=T & (t>0),\\ u(s(t),t)=0 & (t>0),\end{cases}\qquad(1)$$

式中 α 为某个正常数. $s(t)$是自由边界，它不是预先给定的. 在 $s(t)$上还有一个补充条件，即满足能量守恒律

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=-ku_x(s(t),t)\qquad(2)$$

$$(t>0,k>0\text{ 是常数}).$$

问题(1),(2)称为斯特凡问题，它描述了固体融化或液体凝固过程中出现的自由边界问题. 对更复杂的物理过程，斯特凡问题有更一般的形式.

水坝渗流问题(filtration problem in dam) 亦称浸润面问题. 一个经典的工程力学问题. 考虑一个分离两个水库的土坝. 设坝体无限延伸，具有可渗透侧壁和不可渗透底部. 假定坝体十分规则，因此导出在矩形 $D=(0,a)\times(0,b)$中的二维渗流问题. 待求的量为坝体的润湿部分 $\Omega\subset D$ 和水在坝内的压力头分布. 这是一个自由边界问题. 假定水库上、下流水位高度分别是 $H(t)$和 $h(t)(h(t)<H(t))$，此问题的数学模型为求函数 $y=\varphi(x,t)$和 $u(x,y,t)$分别定义在 $\overline{B}=[0,a]\times[0,T]$和 $\overline{\Omega}=\{(x,y,t)\in\overline{Q},0\leqslant g\leqslant\varphi(x,t)\}$上，其中

$$Q=(0,a)\times(0,b)\times(0,T),$$

并且满足方程 $u_t-u_{xx}-u_{yy}=0$(在 Ω 内)，初始条件和边界条件

$$\begin{aligned}&u(x,y,0)=u_0(x,y)&&(\text{在 }D\text{ 上}),\\&u(0,y,t)=H(t)&&(0<y\leqslant H(t)),\\&u(a,y,t)=\begin{cases}h(t)\\y\end{cases}&&\begin{matrix}(0<y<h(t)),\\(h(t)<y<\varphi(a,t)),\end{matrix}\\&u_y(x,0,t)=0&&(\text{在 }D\text{ 上}),\end{aligned}$$

在自由边界 $\Gamma:y=\varphi(x,t)$上除满足条件 $u|_\Gamma=y$ 外，还要补充水和空气间的交界面条件：在 Γ 上，$u_t=u_x^2+u_y^2-u_y$.

浸润面问题的数学处理有相当难度，直到变分不等式理论出现之后才有精确的数学处理. 但对不规则坝体的情形，仍是有待进一步研究.

浸润面问题(infiltrated face problem) 即“水坝渗流问题”.

渗流方程(filtration equation) 一个描述流体在多孔介质中运动的方程. 渗流方程的最简单形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta(u^m)\quad(m>1),\qquad(1)$$

它是一个非线性退化抛物方程，可用以描述气体在多孔介质中的运动，u 代表气体的密度. 方程(1)的

柯西问题

$$u|_{t=0}=\varphi(x)\quad(\varphi(x)\geqslant 0)\qquad(2)$$

的解与线性情形解的性质有明显的差异，在线性情形($m=1$)，解 u 于 $t>0$ 时恒大于零，且无穷次可微（参见"热传导方程的正则性"），但当 $m>1$ 时方程(1)的解已不具有此性质. 设在(a,b)内$\varphi(x)>0$，在(a,b)外 $\varphi=0$. 那么(1)，(2)之解必在某个区域$\lambda_2(t)\leqslant x\leqslant\lambda_1(t)$之外恒为零，即非线性渗流问题具有有限的扩散速度. $x=\lambda_1(t)$和 $x=\lambda_2(t)(t\geqslant 0)$就是已扩散部分与未扩散部分间的交界面. 这里的交界面也是一种自由界面，要与解 u 一起求出. ∇u 通过交界面一般不连续，因此这个方程一般只存在索伯列夫意义下的广义解. 渗流型方程(组)不仅如前例中那样可用来描述流体的运动过程，也可用来描述其他的自然现象，例如，人口理论中的一些问题.

抛物型方程组(parabolic system)　一类重要的偏微分方程组. 考虑 $M\times M$ 方程组

$$\frac{\partial^{n_i}w_i}{\partial t^{n_i}}=\sum_{j=1}^{M}\sum_{2bk_0+|k|\leqslant 2bn_j}A_{k_0,k}^{ij}(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k}w_j+g_i(x,t)\ (i=1,2,\cdots,M),\qquad(1)$$

其中 $n_1,n_2,\cdots,n_M$ 为正整数，$k=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，

$$|k|=\sum_{i=1}^{n}k_i,\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n},$$

g_i 和系数 $A_{k_0k}^{ij}$都定义在某个集合 D 内. 考虑行列式

$$\det\Big(\sum_{2bk_0+|k|=2bn_h}A_{k_0k}^{jh}(x,t)\lambda^{k_0}(\mathrm{i}\xi)^{k}-\delta_{jh}\lambda^{n_h}\Big),\qquad(2)$$

其中

$$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\quad|\xi|=\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}=1,$$

$\xi^k=\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\cdots\xi_n^{k_n}$，$\delta_{jh}$是克罗内克符号，即 $\delta_{jh}=0$，当 $j\neq h$；$\delta_{jh}=1$，当 $j=h$. 以 $\lambda_m(\xi;x,t)$记多项式(2)的根，如果在点(x_0,t_0)处

$$\max_j\sup_{|\xi|=1}\mathrm{Re}\{\lambda_j(\xi;x_0,t_0)\}<0,$$

则称方程组(1)在(x_0,t_0)处（在彼得罗夫斯基意义下）是抛物型的，或称(1)是抛物组. 如果在 D 内每点处，(1)是抛物的，则称(1)在 D 中是抛物的. $2b$ 称为方程组的抛物权数，而 $2b\max\limits_j n_j$ 称为方程组的阶. 如果存在正常数 δ，使对所有的$(x,t)\in D$ 有

$$\max_j\sup_{|\xi|=1}\mathrm{Re}\{\lambda_j(\xi;x,t)\xi\}<-\delta,$$

则称组(1)在 D 内是一致抛物的. 若令

$$v_{j0}^0=w_j,\ v_{j1}^0=\frac{\partial w_j}{\partial t},\ \cdots,\ v_{j,n_j-1}^0=\frac{\partial^{n_j-1}w_j}{\partial t^{n_j-1}},$$

$$v_{j,h-1}^l=\frac{\partial v_{j,h-1}^0}{\partial x_l}(j=1,2,\cdots,M,$$

$$l=1,2,\cdots,n,h=1,2,\cdots,n_j-1),$$

则这些函数满足方程组

$$\frac{\partial v_{i,n_j-1}^0}{\partial t}=\sum_{j=1}^{M}\sum_{2bk_0+|k|\leqslant 2bn_j}A_{k_0k}^{ij}(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k}v_{j,k_0}^0+g_i(x,t),$$

$$\frac{\partial v_{i,h-1}^l}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_l}v_{i,h}^0$$

$(i=1,2,\cdots,M,l=0,1,2,\cdots,n,h=1,2,\cdots,n_i-1)$.

将 v_{jh}^l重新排列，并用 u_i 表示，则组(1)化为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|\leqslant 2p}A_k^{ij}(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k}u_j+f_i(x,t)\qquad(3)$$

$$(i=1,2,\cdots,N).$$

然而，多项式

$$\det\Big(\sum_{|k|=2p}A_k^{jh}(x,t)(\mathrm{i}\xi)^k-\delta_{jh}\lambda\Big)$$

的根一般不同于多项式(2)的根，于是即使(1)是抛物的，(3)也可以不是抛物的. $2p$ 称为方程组(3)的阶.

抛物权数(parabolic weight)　见"抛物型方程组".

一致抛物型方程组(uniformly parabolic system)　见"抛物型方程组".

弱耦合抛物组的极大值原理(maximum principle of weakly coupled parabolic system)　一种最简单的抛物型方程组在边界上取最大值的定理. 设

$$L_\nu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{(\nu)}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i^{(\nu)}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial t}$$

$$(\nu=1,2,\cdots,k)$$

是 k 个抛物算子，则形如

$$L_\nu u_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}h_{\nu\mu}(x,t)u_\mu=g_\nu(x,t)\ (\nu=1,2,\cdots,k)$$

的方程组称为弱耦合抛物组. 对弱耦合抛物组成立如下的极大值原理. 如果满足：

1. 每个 L_ν 是一致抛物算子；
2. 成立不等式

$$L_\nu u_\nu+\sum_{\mu=1}^{k}h_{\nu\mu}u_\mu\geqslant 0\ (\nu=1,2,\cdots,k);\qquad(1)$$

3. 函数 $h_{\nu\mu}$满足条件 $h_{\nu\mu}\geqslant 0(\mu\neq v;\mu,\nu=1,2,\cdots,k)$；

则

1. 如果在 $t=0$ 和 $\partial\Omega\times(0,T]$上

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_k)\leqslant 0$$

（即 $u_i\leqslant 0,i=1,2,\cdots,k$)，则在 $Q_T=\Omega\times(0,T]$中 $u_i\leqslant 0$，而且，如果在某个内点(x_0,t_0)处 $u_\nu=0$，则当 $t\leqslant t_0$时，$u_\nu\equiv 0$.

2. 如果 $u\leqslant 0$，且 u 的某个分量 u_ν 在 $\partial\Omega\times(0,T)$的某边界点 P 处为零，而在 Q_T 中存在内球 $B\subset Q_T$，$\overline{B}\cap\overline{Q}_T=\{P\}$，使得在 B 中 $u_\nu<0$，则在点 P 的任何外法向导数如果存在，则必有

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial \tau}>0.$$

弱耦合抛物组(weakly coupled parabolic system) 见“弱耦合抛物组的极大值原理”.

反应扩散方程组(reaction-diffusion equations system) 一类有实际背景的抛物型方程组.物理学、化学中的反应扩散过程和生物学中的生态平衡问题,在数学上通常可归结为以下抛物型方程组(在彼得罗夫斯基意义下)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D(x,u)\Delta u+f(x,u,\operatorname{grad} u) \qquad (1)$$

$$((x,t)\in \Omega\times \mathrm{R}^+),$$

(1)称为反应扩散方程组,式中

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_m),$$
$$\operatorname{grad} u=(\operatorname{grad} u_1,\operatorname{grad} u_2,\cdots,\operatorname{grad} u_m),$$
$$D(x,u)=(D_{ij}(x,u)).$$

根据不同的实际问题,可以研究相应的初值问题和各种初-边值问题.特别地,由于(1)的解通常具有行波解 $u(x-ct)$ 以及当 $t\to\infty$ 时 $u(x,t)$ 趋于相应椭圆方程组的相应边值问题的解(称为平衡解),因此,研究平衡解的稳定性为核心的各种问题构成了半线性抛物型方程(组)的定性理论(或称为几何理论).

破裂现象(blow up of solution) 反应扩散方程的解在有限时间内达到无限大的现象.反应扩散方程(组)定解问题的解不一定对 $t\in[0,+\infty)$ 都有意义,解或者它的微商可能在有限时间内达到无限大.如果存在 T_1, $0<T_1<+\infty$, 其解 u 在 $Q_{T_1}=\bar{\Omega}\times[0,T_1)$ 上存在,且有

$$\lim_{T\to T_1-0}\max_{(x,t)\in \bar{Q}_T}|u(x,t)|=+\infty,$$

或

$$\lim_{t\to T_1-0}\max_{x\in\bar{\Omega}}|u(x,t)|=+\infty,$$

则称解 u 在时刻 T_1 破裂.破裂现象不仅在反应扩散方程中出现,对双曲型方程甚至对一般的发展方程也可能出现.

混合型方程

混合型偏微分方程(partial differential equation of mixed type) 在某一部分区域是椭圆型的而在其余部分是双曲型的偏微分方程.典型的线性混合型方程是特里科米(Tricomi, F. G.)最早系统研究过的方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

(参见“特里科米问题”)和恰普雷根方程(参见“恰普雷根方程”).可压缩流体的二维定常无旋运动方程

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{uv}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

是拟线性混合型方程,式中 φ 为速度势,

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

为速度分量,c 为局部音速,它是速度 $q=(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}$ 的函数.此方程在 $q<c$(即亚音速)的区域中是椭圆型的,在 $q>c$(即超音速)的区域中是双曲型的.

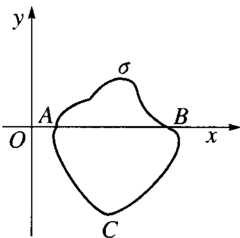
恰普雷根方程(Caplygin equation) 一类混合型方程.可压缩流体的无旋运动方程(参见“混合型偏微分方程”)是非线性方程,直接进行处理是困难的,但若把速度 q 和速度向量的倾角 $\theta=\arctan(v/u)$ 取作自变量,则可化为线性方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}+K(q)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0\ \ (q\cdot K(q)\geqslant 0),$$

该方程称为恰普雷根方程,其中 ψ 是流函数,它是线性的混合型方程,当 $q>0$ 时是椭圆型的,$q<0$ 时是双曲型的.

特里科米问题(Tricomi problem) 最早系统研究过的混合型偏微分方程的边值问题.对最简单的线性混合型方程(也称为特里科米方程)

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$



特里科米(Tricomi, F. G.)在如下的边界条件下建立了解的存在性和惟一性定理:设 AC, BC 是方程在双曲区域中的特征线,σ 是连结 A, B 在椭圆区域中的若尔当曲线,它们围成区域 D,在 AC(或 BC)及 σ 上给定边值.这种边值问题称为特里科米问题.恰普雷根方程的特里科米问题也有意义.

特里科米方程(Tricomi equation) 见“特里科米问题”.

奇异初值问题(singular initial value problem) 一类特殊的偏微分方程初值问题.对于恰普雷根方程或特里科米方程,求在椭圆型区域和双曲型区域的共同边界 $x=0$ 上满足给定初始条件

$$u(0,y)=u_0(y),\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=u_1(y)$$

的解,称为奇异初值问题.

线性偏微分算子

象征类$S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$(class $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ of symbols) 用于将线性偏微分算子推广到拟微分算子的一个函数类.设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 是一开集,$m\in\mathrm{R}^1$, $0\leqslant\delta\leqslant\rho\leqslant 1$,定义象征类如下:$S^m_{\rho,\delta}(\Omega)=\{p\in C^\infty(\Omega\times\mathrm{R}^n)\mid$ 存在常数 C

$= C_{\alpha,\beta}(\Omega')$，使得 $\sup_{x\in\Omega'}|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi)| \leqslant C(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$，$\forall$重指标 $\alpha,\beta,\forall\Omega'\subset\Omega\}$. 如果 $p\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$，那么 $D_x^\beta D_\xi^\alpha p\in S^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}_{\rho,\delta}(\Omega)$. 如果 $p\in S^{m_1}_{\rho,\delta}(\Omega),q\in S^{m_2}_{\rho',\delta'(\Omega)}$，那么 $pq\in S^{m_1+m_2}_{\rho'',\delta''}(\Omega)$，其中 $\rho''=\min(\rho,\rho'),\delta''=\max(\delta,\delta')$. 例如，$m$ 阶线性偏微分算子的象征属于$S^m_{1,0}(\Omega)$，即，若

$$p(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\xi^\alpha\quad(a_\alpha\in C^\infty(\Omega)),$$

则 $p(x,\xi)\in S^m_{1,0}(\Omega)$. 又如，若

$$p(x,\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}\quad(s\in\mathrm{R}^1),$$

则 $p(x,\xi)\in S^s_{1,0}(\Omega)$. 再如，若

$$p(x,\xi)=\varphi(\xi)\sin\log|\xi|\quad(\varphi\in C^\infty),$$

且在原点邻近 $\varphi=0$，当 $|\xi|\geqslant1$ 时 $\varphi=1$，则

$$p(x,\xi)\in S^0_{1,0}(\mathrm{R}^n).$$

拟微分算子(pseudo-differential operators) 微分算子和某些奇异积分算子的推广. 对于象征 $p\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$，在空间 $C_0^\infty(\Omega)$上定义算子 $p(x,D)$如下

$$p(x,D)u(x)=\int_{\mathrm{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}p(x,\xi)\tilde{u}(\xi)\bar{\mathrm{d}}\xi\quad(u\in C_0^\infty(\Omega)),$$

其中 $\tilde{u}(\xi)$表示 $u(x)$的傅里叶变换，

$$\bar{\mathrm{d}}\xi=\frac{1}{(2\pi)^n}\mathrm{d}\xi.$$

算子 $p(x,D)$称为 $\mathrm{OPS}^m_{\rho,\delta}(\Omega)$类拟微分算子. 当 $\rho=1,\delta=0$ 时，称 $p(x,D)$为 m 阶拟微分算子. 记

$$p(x,D)\in\mathrm{OPS}^m_{1,0}=\mathrm{OPS}^m,$$

$p(x,\xi)$称为算子 $P(x,D)$的象征. 显然，m 阶线性偏微分算子是一个特殊的 m 阶拟微分算子. 又如

$$Tu(x)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(y)}{x-y}\mathrm{d}y\in\mathrm{OPS}^0(\Omega).$$

如果 $p\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$，那么 $p(x,\xi)$对应的拟微分算子 $p(x,D)$是从 $C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$的连续算子. 如果 $\delta<1$，那么这个映射可延拓为连续映射

$$p(x,D):\mathscr{E}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega).$$

局部算子(local operators) 具有光滑系数微分算子的推广. 设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 是开集. 如果$C_0^\infty(\Omega)\to C_0^\infty(\Omega)$的线性连续算子 A 满足条件 $\mathrm{supp}\,Au\subset\mathrm{supp}\,u$，那么称 A 为局部算子. 显然，任一具 $C^\infty(\Omega)$系数的微分算子都是局部算子，但是，拟微分算子一般来说不是局部算子. 例如，积分算子

$$Tu=\int_{\Omega_y}K(x,y)u(y)\mathrm{d}y\quad(\forall u\in C_0^\infty(\Omega)),$$

其中 $K(x,y)\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$. 算子

$$T\in\mathrm{OPS}^{-\infty}(\Omega)=\bigcap_{m>0}\mathrm{OPS}^{-m},$$

但它不是局部算子. 皮锐(Peetre,J.)曾证明，由 $C^\infty(\Omega)$到 $C^k(\Omega)$的线性连续映射是局部算子的充分必要条件为：它是具 C^k 系数的线性偏微分算子.

拟局部性质(pseudo local property) 拟微分算子的重要特征. 拟微分算子具有如下的拟局部性质：如果 $p(x,\xi)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega),\delta<1$ 且 $\rho>0$，那么对于 $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$，有 $\mathrm{sing\,supp}\,p(x,D)u\subset\mathrm{sing\,supp}\,u$（参见“奇支集”）. 凡使上式成立的算子 A 称为拟局部算子，因此拟微分算子必为拟局部算子.

拟局部算子(pseudo local operators) 见“拟局部性质”.

分布核(distribution kernels) 积分算子核的推广. 设算子 $T:C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$. 如果在 $\Omega\times\Omega$ 上存在分布 K，使得

$$\langle Tu,v\rangle=\langle K,v\otimes u\rangle\quad(\forall u,v\in C_0^\infty(\Omega)),$$

其中 $v\otimes u$ 由 $(v\otimes u)(x,y)=v(x)u(y)$定义，则称 K 是算子 T 的分布核，并且形式上有

$$Tu(x)=\int K(x,y)u(y)\mathrm{d}y.$$

拟微分算子

$$p(x,D)u=\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle}p(x,\xi)\tilde{u}(\xi)\bar{\mathrm{d}}\xi$$

的分布核

$$K(x,y)=\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}p(x,\xi)\bar{\mathrm{d}}\xi$$

在 $\Omega\times\Omega$ 的对角线外为 C^∞ 函数. 显然，光滑算子 $p(x,D)$（即 $p(x,\xi)\in S^{-\infty}_{1,0}(\Omega)$）的分布核

$$K(x,y)\in C^\infty(\Omega\times\Omega).$$

光滑算子(smoothing operators) 具有 C^∞ 核的积分算子. 如果线性算子 T 将 $\mathscr{E}'(\Omega)$连续映射到 $C^\infty(\Omega)$，那么称 T 是光滑算子. 如果 $p(x,\xi)\in S^{-\infty}(\Omega)$，那么 $p(x,D)$ 将 $\mathscr{E}'(\Omega)$ 连续映射到 $C^\infty(\Omega)$，即$p(x,D)\in\mathrm{OPS}^{-\infty}$是光滑算子. 如果 $K\in C^\infty(\Omega\times\Omega)$，那么由

$$Tu(x)=\langle K(x,\cdot),u\rangle=\int K(x,y)u(y)\mathrm{d}y$$

定义的算子 T 是光滑算子.

恰当子集(proper subsets) $\Omega\times\Omega$ 中具有某种紧性的子集. 如果 Σ 为 $\Omega\times\Omega$ 中的子集，它满足条件：对任一紧集 $K\subset\Omega$，$\{(x,y)|(x,y)\in\Sigma,x\in K\}$和$\{(x,y)|(x,y)\in\Sigma,y\in K\}$都是 $\Omega\times\Omega$ 的紧集，则称 Σ 为恰当子集.

恰当支广义函数(proper support generalized functions) 一类特殊的广义函数. 如果广义函数 $K\in\mathscr{D}'(\Omega\times\Omega)$，其支集 $\mathrm{supp}K$ 为 $\Omega\times\Omega$ 的恰当子集，则称 K 为恰当支广义函数或恰当支分布.

恰当支分布(proper support distribution) 即“恰当支广义函数”.

恰当支拟微分算子(properly supported pseudo differential operators) 一种便于代数运算的拟微分算子. 如果一个拟微分算子 A 的核 K_A 为恰当支广义函数，则称 A 为恰当支拟微分算子. 例如，恒等算子 I 所对应的核是 $\delta(x-y)$，它的支集为对角线 $x=y$，这显然是恰当子集. 于是恒等算子是恰当支

拟微分算子.同样,所有具 C^∞ 系数的线性偏微分算子都是恰当支拟微分算子.如果算子 A 是恰当支拟微分算子,那么它是 $C_0^\infty(\Omega)\to C_0^\infty(\Omega)$ 的线性连续映射,且可以扩张为 $C^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$ 的线性连续映射.

实主型拟微分算子(pesudo-differential operator of real principal type) 一类具有局部可解性的算子.设具有恰当支的拟微分算子 $P\in \mathrm{OPS}^m_{1,0}(\Omega)$ 的主象征为实值的 m 次齐次函数 p,且没有 P 的一条完整的次特征带停留在 Ω 的一紧集的上方,则称 P 在 Ω 中是具实主型的拟微分算子.

紧子集上的可解性定理(theorem for solvability on compact subsets) 线性偏微分方程局部可解的一个判别条件.设 P 是区域 Ω 上的 m 阶线性偏微分算子,具有实主象征 p.设 K 是 Ω 的紧子集,使得没有一条完整的次特征曲线含于 K 中.则 $N(K)=\{V\in\mathscr{E}'(K),PV\equiv 0\}$ 是 $C_0^\infty(K)$ 的有限维子空间,且正交于 $P\mathscr{D}'(X)$.若 $f\in H^s(\Omega)$(或相应地 $C^\infty(\Omega)$)且 f 正交于 $N(K)$,则存在 $u\in H^{(s+m-1)}(\Omega)$(相应地 $C^\infty(\Omega)$),在 K 的某个邻域中满足 $Pu=f$.

上述定理对于具有正齐次实主象征的恰当支拟微分算子仍成立.

局部可解性(local solvability) 线性偏微分算子理论中的重要概念.设 P 为区域 $X\subset\mathbb{R}^n$ 中具恰当支的拟微分算子,K 为 X 中紧集,若对 $C^\infty(X)$ 的余维数有限的某子空间中每个 f,存在 $u\in\mathscr{D}'(X)$ 在 K 的某邻域中满足方程 $Pu=f$,则称 P 在 K 上可解.特别地,若 K 为 X 中的一点 x^0,则称 P 在 x^0 局部可解.设 P 的主象征 p 为正齐次复值函数,则 P 在紧集 K 上可解的必要条件为:p 在 K 的某邻域 $Y\subset X$ 中满足下述的条件(Ψ):不存在正齐次复值函数 $q\in C^\infty(T^*Y\backslash 0)$,使得 $\mathrm{Im}\,qp$ 沿着 $\mathrm{Re}\,qp$ 的半-次特征带朝正向运动时由负值变号为正值,这里 $\mathrm{Re}\,qp$ 的半-次特征带指的是在其上 $q\neq 0$ 的次特征带.特别地,若 P 在 x^0 局部可解,则 p 在 x^0 的某邻域中满足条件(Ψ).对于主型线性偏微分算子,此命题的逆命题成立.然而,在一般情况下,条件(Ψ)对于局部可解是否充分仍属未知.

总之,局部可解性问题仍然是线性偏微分算子理论中远未完全解决的重要问题.

局部可解性定理(local solvability theorem) 局部可解的充分条件.设 $P(x,D)$ 为具有主象征 p 的 m 阶线性偏微分算子,若没有 p 的次特征带位于 Ω 的一点的上方(即:p 没有次特征带,它在 Ω 上的投影为一个点),则对于任一 $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 及任一点 $x^0\in\Omega$,存在点 x^0 的邻域 U 及 $u\in\mathscr{D}'(U)$,满足方程 $p(x,D)u=f$(在 U 中).

L^2 有界性定理(L^2-boundedness theorem) 拟微分算子的重要性质.设 $A\in\mathrm{OPS}^0_{\rho,\delta}(\Omega)$,$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$,且 K_A 具紧支集,则 A 可延拓为 $L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 的连续算子.

紧性定理(compactness theorem) 在解的先验估计及解的存在性问题研究中起重要作用的定理.设 $A\in\mathrm{OPS}^0_{\rho,\delta}(\Omega)$,$0\leqslant\delta<\rho\leqslant 1$,分布核 K_A 具紧支集,若 A 的象征 σ_A 满足条件

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{\substack{x\in\Omega\\|\xi|\geqslant t}}|\sigma_A(x,\xi)|=0,$$

则 A 可延拓为 $L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 的紧算子.

椭圆型拟微分算子(elliptic pseudo differential operators) 一类有拟逆算子的拟微分算子.如果 A 为 $\mathrm{OPS}^m(\Omega)$ 拟微分算子,又存在一个与 A 相差一光滑算子(即 $\mathrm{OPS}^{-\infty}$)的 A_1,其象征 $\sigma_{A_1}(x,\xi)$ 对于任一紧集 $K\subset\Omega$,有常数 C_K,R,使

$$|\sigma_{A_1}(x,\xi)|\geqslant C_K(1+|\xi|)^m\quad(x\in K,|\xi|\geqslant R)$$

成立,则称 A 为椭圆型拟微分算子.易见,当 A 是恰当支拟微分算子时,定义中的不等式可以换成

$$|\sigma_A(x,\xi)|\geqslant C_K(1+|\xi|)^m\ (x\in K,|\xi|\geqslant R).$$

当 A 为微分算子时,以上定义与高阶椭圆型偏微分算子的定义是等价的.

拟基本解(parametrix) 用于研究解的正则性与存在性的工具.若 $Q\in\mathrm{OPS}^m$ 是恰当支拟微分算子,又存在恰当支拟微分算子 P,使得

$$PQ-I=K_1\in\mathrm{OPS}^{-\infty},\tag{1}$$

则称 P 为 Q 的左拟基本解或者左拟逆.如果(1)式改为

$$QP-I=K_2\in\mathrm{OPS}^{-\infty},$$

则称 P 是 Q 的右拟基本解或者右拟逆.如果 P 既是 Q 的右拟基本解,又是 Q 的左拟基本解,则称 P 是 Q 的双边拟基本解,或简称拟基本解或拟逆.左拟基本解通常用来证明正则性定理,而右拟基本解通常利用来证明存在性定理.

左(右)拟基本解(left (right) parametrix) 见"拟基本解".

拟逆(parametrix) 即"拟基本解".

拟基本解存在定理(existence theorem of the parametrix) 判断椭圆型拟微分算子有拟基本解的定理.如果 $Q\in\mathrm{OPS}^m$ 为恰当支的椭圆型拟微分算子,那么存在一个恰当支的椭圆型拟微分算子 $P\in\mathrm{OPS}^{-m}$,它是 Q 的拟基本解.如果 Q 为一般的椭圆型拟微分算子,则可以找到一个与它相差一个光滑算子的恰当支椭圆拟微分算子 Q_1.设恰当支拟微分算子 P 为 Q_1 的拟基本解.由于恰当支拟微分算子可以与任一拟微分算子做乘积,所以

$$PQ-I=PQ_1-I+P(Q-Q_1)\in\mathrm{OPS}^{-\infty},$$
$$QP-I=Q_1P-I+(Q-Q_1)P\in\mathrm{OPS}^{-\infty},$$

这表明 P 为椭圆型拟微分算子 Q 的拟基本解.

奇支集(singular support) 广义函数在其中有一定奇性的点集. 在广义函数(分布)T 的定义域中使 T 为 C^∞ 函数的最大开集的余集,称为分布 T 的奇支集,记为 $\operatorname{sing\,supp} T$. 由奇支集和支集的定义可见,对任何分布 T,有 $\operatorname{sing\,supp} T \subset \operatorname{supp} T$.

亚椭圆算子(hypoelliptic operator) 一类重要的拟微分算子,是椭圆型拟微分算子的推广. 设

$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

其中 $a_\alpha \in C^\infty$. 微分算子 L 称为亚椭圆的当且仅当对任意 $u \in \mathscr{D}'$, $\operatorname{sing\,supp} u \subset \operatorname{sing\,supp} Lu$. 换言之,$L$ 是亚椭圆的当且仅当对任一开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 和 $u \in \mathscr{D}'$,如果 $Lu \in C^\infty(\Omega)$,则有 $u \in C^\infty(\Omega)$. 具有 C^∞ 系数的椭圆型偏微分算子和具有 C^∞ 系数的抛物型偏微分算子都是亚椭圆算子. 如果 P 是拟微分算子,并且对任何 $u \in \mathscr{D}'$,有 $\operatorname{sing\,supp} u \subset \operatorname{sing\,supp} Pu$,也称 P 是亚椭圆算子. 由于椭圆型拟微分算子的内正则性(参见"椭圆型方程解的正则性"),因此椭圆型拟微分算子也是亚椭圆算子.

常系数微分算子(differential operator with constant coefficients) 系数为常数的线性偏微分算子. 其一般形式为:

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha,$$

其中 a_α 为常数(实数或复数). 例如,拉普拉斯算子

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

热算子 $\partial/\partial t - \Delta$,波算子 $\partial^2/\partial t^2 - \Delta$ 等都是常系数微分算子. 线性偏微分算子理论中的若干重要问题,如基本解的存在性、局部可解性、亚椭圆性的判定等对于常系数情形均已完全解决.

基本解的存在性定理(theorem for existence of fundamental solution) 关于基本解存在性的一个定理. 该定理断言:每个非零的常系数微分算子 $P(D)$ 都有基本解. $P(D)$ 的基本解 E 作为广义函数可如下构造:$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle E, \varphi \rangle = \int_H \frac{\tilde{\varphi}(\sigma)}{P(\sigma)} \mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\tilde{\varphi}$ 表示 φ 的逆傅里叶变换. H 为 $\mathbb{C}^n$ 中某个适当的区域,满足 $\inf\limits_H |P(\sigma)| > 0$. 由基本解的存在可知常系数微分算子是局部可解算子.

亚椭圆常系数微分算子(hypoelliptic differential operator with constant coefficients) 最基本的亚椭圆算子. 设 $P(D)$ 是常系数微分算子,则下述条件中的每一个都是 $P(D)$ 为亚椭圆算子的充分必要条件:

1. 以 $d(\xi)$ 记 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 到集合 $\{\sigma | \sigma \in \mathbb{C}^n, P(\sigma) = 0\}$ 的距离,则当 $\xi \to \infty$ 时,$d(\xi) \to +\infty$.

2. 存在正的常数 c 及 C,当 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 且 $|\xi|$ 充分大时,不等式 $d(\xi) \geqslant C|\xi|^c$ 成立.

3. 记 $P^{(\alpha)}(\xi) = \partial^\alpha P(\xi)$. 对于每个非零多重指标 α,当 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 且 $\xi \to \infty$ 时,有 $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \to 0$.

4. 存在正的常数 c 及 C,当 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 且 $|\xi|$ 充分大时,不等式 $|P^{(\alpha)}(\xi)|/|P(\xi)| \leqslant C|\xi|^{-|\alpha|c}$ 成立.

主型算子的亚椭圆性条件(conditions for hypoellipticity for operators of principal type) 对主型算子的研究具有重要作用的条件. 设 $P(x,D)$ 为区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的具有 C^∞ 系数的主型线性偏微分算子,则 P 为亚椭圆算子的充分必要条件为:对于使主象征

$$P_m(x_0, \xi^0) = 0$$

的每点 $(x_0, \xi^0) \in T^*\Omega \backslash 0$,及使

$$d_\xi \mathrm{Re}(zP_m)(x_0, \xi^0) \neq 0$$

的每个复数 z,有:$\mathrm{Im}(zP_m)$ 沿 $\mathrm{Re}(zP_m)$ 的过 (x_0, ξ^0) 的零次特征带不变号,并且在 (x_0, ξ^0) 的任何邻域内沿该零次特征不恒为 0. 对于一般情形下的亚椭圆性判别问题还远未解决.

椭圆型方程解的正则性(regularity of solutions of elliptic equations) 亦称椭圆型方程解的光滑性. 关于椭圆型方程解的正则性的定理. 内正则性定理:设 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 为具 C^∞ 系数的 m 阶椭圆型方程 $Lu = f$ 的解,若 $f \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$,因为此时对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 有 $f\varphi \in H^s(\Omega)$,可得 $u \in H^{s+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$;若 $f \in C^\infty(\Omega)$,则可得 $u \in C^\infty(\Omega)$. 若 P 为椭圆型拟微分算子,$u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $Pu = f$,且有 $\omega \subset \Omega$,在 ω 上 f 为 C^∞ 函数,那么 u 在 ω 上也是 C^∞ 函数.

边界正则性定理:若 $Lu = f$ 是区域 Ω 中具 C^∞ 系数的 m 阶椭圆型方程,边界 $\partial\Omega$ 为 C^∞ 光滑,如果 $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$,则 $Lu = f$ 的狄利克雷问题的解 $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

波前集(wavefront sets) 微局部分析中最基本的概念. 分布 u 的波前集 $WF(u)$ 定义为

$$WF(u) = \bigcap \{\mathrm{char}\, P | P \in \mathrm{OPS}^0(\Omega), \\ Pu \in C^\infty(\Omega)\},$$

其中

$$\mathrm{char}\, P = \{(x,\xi) \in T^*\Omega | P(x,\xi) = 0\}.$$

分布 u 的波前集的另一等价定义如下:$(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ 的充分必要条件是存在 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,使 $\varphi(x_0) \neq 0$ 且 $\widetilde{\varphi u}$ 是在 ξ_0 的锥邻域上的速降函数,此处 $\widetilde{\varphi u}$ 表示 φu 的傅里叶变换.

波前集有时也称奇谱,对于 $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 有

$$\mathrm{sing\ supp}\ u = \pi(WF(u)),$$

其中 $\pi(WF(u))$ 表示波前集 $WF(u)$ 在 Ω 上的投影. 如果 P 是椭圆拟微分算子,则

$$WF(u) = WF(Pu).$$

奇谱(singular spectrum) 见"波前集".

奇性传播定理(theorem of propagation of sin-

gularities) 给出偏微分方程解的非正则性的一种精确描述. 设 $P=p(x,D)\in OPS^{-\infty}$ 有标量主象征 $P_m(x,\xi)$, $\gamma:[t_0,t_1]\to T^*M\backslash\{0\}$ 是 $\mathrm{Re}P_m$ 的零次特征带, 在 γ 的邻域上 $\mathrm{Im}P_m\geqslant 0$; 再设在 γ 上, $Pu=f\in H^s$. 如果在 $\gamma(t_1)$ 上, $u\in H^{s+m-1}$, 那么在 γ 上, 也有 $u\in H^{s+m-1}$(对于 $(x_0,\xi_0)\in T^*M\backslash\{0\}$, 若记 $u=u_1+u_2$, 有 $u_1\in H^s$, 并且 $(x_0,\xi_0)\notin WF(u_2)$, 则称在 (x_0,ξ_0) 上 $u\in H^s$). 特别地, 如果 $WF(f)\cap\gamma=\varnothing$, 并且

$$\gamma(t_0)\notin WF(u),$$

那么 $\gamma\cap WF(u)=\varnothing$. 如果 P 有实主象征,

$$WF(f)\cap\gamma=\varnothing,$$

并且 $\gamma(t_1)\notin WF(u)$, 那么也有 $\gamma\cap WF(u)=\varnothing$, 而且 $WF(u)\backslash WF(f)\subset\mathrm{char}\,P$. 此外, 在哈密顿场 HP_m 的作用下, $WF(u)\backslash WF(f)$ 是不变的, 也就是奇性沿着 P_m 的零次特征带上传播.

位相函数(phase functions) 定义傅里叶积分算子需要的一类光滑的齐一次函数. 若 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, 实值函数 $\varphi(x,\theta)$ 满足如下条件, 则称 $\varphi(x,\theta)$ 是 $\Omega\times\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ 中的一个位相函数:

1. $\varphi(x,\theta)\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$.

2. $\varphi(x,\theta)$ 关于 θ 是正齐一次函数, 即对任意 $t>0$, $\varphi(x,t\theta)=t\varphi(x,\theta)$ 在 $\Omega\times\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ 中.

3. $\varphi(x,\theta)$ 关于 x,θ 无临界点即

$$\nabla_{(x,\theta)}\varphi(x,\theta)\neq 0,\ (x,\theta)\in\Omega\times\mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

振荡积分(oscillatory integral) 定义傅里叶积分算子需要的一类积分. 设 $\varphi(x,\theta)$ 是一个实值位相函数, 对于任意函数 $a(x,\theta)\in S^m_{\rho,\delta}$, 定义振荡积分如下

$$I_\varphi(au)=\iint e^{i\varphi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{i\varphi(x,\theta)}\psi(\varepsilon\theta)a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta.$$

上式极限存在且与 ψ 的具体选取无关, 只要求 $\psi(\theta)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 且在 $\theta=0$ 附近为 1, 其中, $a(x,\theta)$ 称为振幅函数.

振幅函数(amplitude functions) 见"振荡积分"及"傅里叶积分算子".

傅里叶积分算子(Fourier integral operator) 在线性偏微分方程理论中起重要作用的算子. 设 Ω_x 和 Ω_y 分别是 $\mathbb{R}^n_x$ 和 $\mathbb{R}^n_y$ 中的开集, $\varphi(x,y,\theta)$ 是 $\Omega_x\times\Omega_y\times\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ 中的实值位相函数, $a(x,y,\theta)\in S^m_{\rho,\delta}(\Omega_x\times\Omega_y\times\mathbb{R}^N)$, $\rho>0$, $\delta<1$. 对于任一 $u(y)\in C_0^\infty(\Omega_y)$,

$$\langle Au,v\rangle=I_\varphi(auv)\quad(\forall v\in C_0^\infty(\Omega_x)),\qquad(1)$$

其中

$$I_\varphi(auv)=\iiint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)u(y)v(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta$$

是一个振荡积分. 由(1)确定的 $Au\in\mathscr{D}'(\Omega_x)$. 这样, 就确定了一个线性算子 $A:C_0^\infty(\Omega_y)\to\mathscr{D}'(\Omega_x)$, 这个算子称为傅里叶积分算子. $a(x,y,\theta)$ 称为振幅函数. 傅里叶积分算子 A 所对应的分布核 $K_A\in\mathscr{D}'(\Omega_x\times\Omega_y)$ 由下式确定

$$\langle K_A,f(x,y)\rangle=I_\varphi(af)$$

$$=\iiint e^{i\varphi(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta.$$

例如, Ω 上的傅里叶积分

$$u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle x-y,\theta\rangle}u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta$$

确定了一个傅里叶积分算子 I, 它所对应的分布核 $K_I=\delta(x-y)$. 又如, 拟微分算子

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i\langle x-y,\theta\rangle}a(x,y,\theta)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta$$

是位相函数 $\varphi(x,y,\theta)=\langle x-y,\theta\rangle$ 的傅里叶积分算子.

典则变换(canonical transformation) 余切丛上保持泊松括号不变的微分同胚. 设 τ 是从余切丛 $T^*(\Omega_x)$ 到余切丛 $T^*(\Omega_y)$ 上的微分同胚. 在局部坐标下, τ 表示变换 $y=y(x,\xi)$, $\eta=\eta(x,\xi)$. 若对 $T^*(\Omega_y)$ 上任意 $f,g\in C^\infty(T^*(\Omega_y))$, 恒有 $\{f,g\}(y,\eta)=\{f(y(x,\xi),\eta(x,\xi)),g(y(x,\xi),\eta(x,\xi))\}(x,\xi)$ ($\{f,g\}$ 的定义参见"泊松括号"), 则称 τ 是 $T^*(\Omega_x)$ 到 $T^*(\Omega_y)$ 的一个典则变换.

典则变换也是保持哈密顿场不变的微分同胚. 例如, 设 τ 是 $T^*(\Omega_x)$ 上一组对偶坐标间的"对换", 即若 $\tau(x,\xi)=(y,\eta)$, 则对某个 j, 有 $y_j=\xi_j$, $\eta_j=-x_j$, 而其他坐标变量不变

$$y_k=\begin{cases}x_k & (k\neq j),\\ \xi_j & (k=j),\end{cases}\qquad \eta_k=\begin{cases}\xi_k & (k\neq j),\\ -x_j & (k=j).\end{cases}$$

这是一个典则变换.

生成函数(generating function) 能生成典则变换的一类函数. 求生成函数是作出典则变换的最重要的方法. 在一定条件下存在函数 $S(x,\eta)$, 使得

$$\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^n(\xi_i\mathrm{d}x_i+y_i\mathrm{d}\eta_i),$$

即

$$\xi_i=\frac{\partial S}{\partial x_i},\quad y_i=\frac{\partial S}{\partial\eta_i},$$

因此, $\tau:(x,\xi)\to(y,\eta)$ 是一个典则变换, S 称为其生成函数.

主型算子(principal operators) 具有单特征算子的推广. 设 Ω_x 为 n 维微分流形, $T^*(\Omega_x)$ 为余切丛, (x,ξ) 为 $T^*(\Omega_x)$ 的局部坐标, 向量

$$\sum_{j=1}^n\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}$$

称为在点 (x,ξ) 的锥轴, 它是 $T^*_{(x,\xi)}(\Omega_x)$ 的切向量. 设 $p(x,D)$ 是 Ω_x 上的 m 阶拟微分算子, 它的齐次主象征是 $p_m(x,\xi)$. 若对 $(x_0,\xi_0)\in T^*(\Omega_x)\backslash\{0\}$, 当

$p_m(x_0,\xi_0)=0$时，哈密顿场 H_{p_m} 和在(x_0,ξ_0)的锥轴 λ_0 不平行，则称 $p(x,D)$在点(x_0,ξ_0)是主型的. 若对所有 $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $p(x,D)$在点(x_0,ξ)均是主型的，则称 $p(x,D)$在点 x_0 是主型的. 又若在 Ω_x 的每一点 $p(x,D)$为主型，则称 $p(x,D)$为 Ω_x 上的主型算子. 若算子 $p(x,D)$的齐次主象征 $p_m(x,\xi)$在点$(x_0,\xi_0)\in T^*(\Omega_x)\setminus\{0\}$满足 $p_m\{x_0,\xi_0\}=0$ 和 $\nabla p(x_0,\xi_0)\neq 0$，这类算子就是在点$(x_0,\xi_0)$具有单特征的算子，则称这种算子为狭义主型算子. 主型算子的范围要比狭义主型算子更广泛，它包含某些不具单特征的算子. 例如特里科米算子

$$y\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

在 $T^*(\Omega_x)$的子集$\{x,0;\xi,0\};\xi\neq 0\}$上不具有单特征，但它仍是主型算子.

狭义主型算子(principle operator in the narrow sense) 见"主型算子".

叶戈罗夫定理(Egorov theorem) 关于两个拟微分算子具有一定相似性的定理. 对于如下形式的傅里叶积分算子

$$Fu(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{is(x,\eta)}a(x,\eta)\tilde{u}(\eta)d\eta$$
$$=(2\pi)^{-n}\iint e^{is(x,\eta)-\langle y,\eta\rangle}a(x,\eta)u(y)dyd\eta,$$

若在点(x_0,η_0)处 $a(x_0,\eta_0)\neq 0$，则称$(x_0,s_\eta(x_0,\eta_0);s_x(x_0,\eta_0),\eta_0)$为算子 F 的椭圆点，其中 $\tilde{u}(\eta)$为 $u(x)$ 的傅里叶变换.

叶戈罗夫定理断言：设 P,Q 分别是在域 Ω_x,Ω_y 上给定的恰当支拟微分算子，τ 是齐次典则变换：$(x,\xi)\to(y,\eta)$, $\tau(x_0,\xi_0)=(y_0,\eta_0)$, F 是一个形式如上的与 τ 相联系的傅里叶积分算子，且使得$(x_0,y_0;\xi_0,\eta_0)$为其椭圆点；又设 $a(x,\eta)\in S^m$. 若$(x_0,y_0;\xi_0,\eta_0)\notin WF(PF-FQ)$，则 P,Q 的主象征 $p_0(x,\xi)$和$q_0(y,\eta)$在$(x_0,y_0;\xi_0,\eta_0)$邻域必有

$$p_0(x,\xi)=q_0(y(x,\xi),\eta(x,\xi)).$$

拟微分算子的椭圆点(elliptic point of pseudo differential operator) 见"叶戈罗夫定理".

流形上的偏微分算子(partial differential operator on manifold) $\mathbb{R}^n$ 上的偏微分算子的推广. 在一个未知函数的情形，流形 M 上的 m 阶线性的偏微分算子是微分流形 M 上 C^∞ 函数的集合 $C^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M)$的一个线性映射 L，而在每一坐标区域中，L 可表示为

$$L=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha,$$

这里

$$D^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m}$$
$$(|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m).$$

显然，在两个坐标区域的重叠部分，L 的两种表示可以通过坐标变换互相转换. 例如，黎曼流形上的第二类贝尔特拉米算子，在每一坐标区域中可表示为

$$\Delta=\sum_{i,j}g^{ij}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_k}\right),$$

这里 $g^{ij}(x)$是度量张量的逆变分量，$\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}$是克里斯托费尔符号，即

$$\begin{Bmatrix}k\\ij\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).$$

多个未知函数的线性偏微分算子 L 可定义如下：设

$$E_1\xrightarrow{\pi_1}M$$

是定义在 M 上的向量丛，$\Gamma(E_1)$为 C^∞ 截面的全体，同样 $\Gamma(E_2)$表示另一向量丛

$$E_2\xrightarrow{\pi_2}M$$

的 C^∞ 截面的全体，L 是 $\Gamma(E_1)$到 $\Gamma(E_2)$的线性映射，它满足：对每一个小的坐标区域 U，如果$\Gamma(E_1)$和$\Gamma(E_2)$中的元素在 U 上的限制可以用 m_1 元和 m_2 元的列向量函数来表示，则 L 可以写为

$$L=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha,$$

此处 $a_\alpha(x)$是 $m_2\times m_1$ 阵，m_1 和 m_2 分别是 E_1 和 E_2 的纤维的维数. 在局部坐标下，微分算子的主象征 $\sigma(L)(\xi)$可表示为

$$\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha\ \ (\xi^\alpha=\xi^{\alpha_1}\xi^{\alpha_2}\cdots\xi^{\alpha_n}),$$

流形上的偏微分算子的类型可由其主象征(和通常偏微分算子一样地)来决定. 在微分流形上也可以定义非线性偏微分方程.

格林函数

格林函数(Green function) 研究微分方程(包括常微分方程和偏微分方程)边值问题的重要工具. 简言之，格林函数是满足一定边界条件的共轭微分方程的基本解. 以拉普拉斯算子

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

的边值问题为例. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的区域，给定齐次边界条件 B: $u(x)=0(x\in\partial\Omega)$(第一类)或

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\beta(x)u=0\ (\text{第三类}),$$

此处 n 表外法向，$\beta(x)\geqslant 0$且 $\beta(x)\not\equiv 0$. 满足下列条件的函数 $g(x,\xi)$称为算子 L(或方程$L(u)=f(x)$)与边界条件 B 的格林函数：

1. 当 $\xi\in\Omega$ 固定时，在 $x\neq\xi$ 处 $Lg(x,\xi)=0$.

2. $g(x,\xi)=\frac{1}{4\pi r}+w(x,\xi)=\left(\sum_{i=1}^{3}(x_i-\xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，其中 w 是 x 的正则函数.

3. $g(x,\xi)$满足边界条件 B.

条件 1 和 2 表明 $g(x,\xi)$是 L 的一个基本解，即 $Lg(x,\xi)=\delta(x-\xi)$，条件 2 和 3 表明 $w(x,\xi)$是齐次方程 $Lu=0$ 的这样一个特解，它使得 $g(x,\xi)$满足边界条件 B. 如果格林函数存在，则对于任意正则的函数$f(x)$，函数

$$u(x)=\int_{\Omega}g(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

就是方程 $Lu=f(x)$的满足边界条件 B 的解. 一般地，实际去求格林函数并不容易，但在一些特殊情形下，可以比较简单地求得.

自伴二阶常微分方程的格林函数(Green function of self-adjoint ordinary differential equation of second order)　自伴二阶常微分方程格林函数的构造. 在区间$[a,b]$上考虑二阶微分方程

$$Lu=(p(x)u')'+g(x)u=f(x)\ (p(x)>0).$$

在端点 a 处给出边界条件$u(a)=0$ 或$p(a)u'(a)+\alpha u(a)=0$，在端点 b 处给出边界条件$u(b)=0$ 或 $p(b)u'(b)+\beta u(b)=0$，其格林函数$g(x,\xi)$定义为：

1. $x\neq\xi, Lg(x,\xi)=0$.

2. $\left[\frac{\partial g(x,\xi)}{\partial x}\right]_{x=\xi-0}^{x=\xi+0}=\frac{1}{p(\xi)}$.

3. 当 ξ 固定，则 $g(x,\xi)$在 $x=a,b$ 处满足边界条件.

条件 1 和 2 表明 $Lg(x,\xi)=\delta(x-\xi)$. 格林函数 $g(x,\xi)$可按如下方式构造：设 u_1,u_2 是 $Lu=0$ 分别在 $x=a,x=b$ 处满足边界条件的两个线性无关的解，则适当选择常数因子，使得 $p(u_1'u_2-u_1u_2')$恒为常数 1，于是得出格林函数

$$g(x,\xi)=\begin{cases}u_1(x)u_2(\xi) & (x\leqslant\xi),\\ u_1(\xi)u_2(x) & (x\geqslant\xi).\end{cases}$$

若 u_1,u_2 不是线性无关的，通常的格林函数不存在，此时只要把定义稍加改动可以作出起类似作用的广义格林函数. 以上方法对高阶常微分方程也适用.

拉普拉斯算子的格林函数(Green function for Laplace operator)　拉普拉斯算子格林函数的公式. 设 $B_R(0)$是以原点为球心，R 为半径的 n 维球. 拉普拉斯算子

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

在 B 中关于齐次狄利克雷边界条件的格林函数可按下述方式得到. 设 $\Gamma(r)$是 Δ 的基本解(参见“偏微分方程的基本解”)，则格林函数为

$$g(x,\xi)=\Gamma(r)-\Gamma(\rho r'/R),$$

式中

$$\rho=\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$r'=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i')^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \xi_i'=(R/\rho)^2\xi_i.$$

亥姆霍兹方程的格林函数(Green function for Helmholtz equation)　亥姆霍兹方程格林函数的求法. 在 R^3 的某有界区域的外部 Ω，求亥姆霍兹方程 $(\Delta+k^2)u(x)=f(x)(k>0)$的解，它满足边界条件 $u=0$，且在无穷远处满足所谓辐射条件：当$|x|\to\infty$时

$$u(x)=O(|x|^{-1}),\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)\Bigg|_{|x|=r}=o(|x|^{-1})$$

($\partial/\partial r$ 表沿径向微分). 如果对任意 $k>0$ 都能构造格林函数 $G(x,\xi)$，而 $f(x)$是光滑的并在$|x|$充分大时为零的函数，则

$$u(x)=\int_{\Omega}G(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

将是所要求的解. 在这种情形，设

$$G(x,\xi)=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-\xi|}}{4\pi|x-\xi|}+K_c(x,\xi),$$

$$|x-\xi|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2\right)^{1/2},$$

则由求解弗雷德霍姆型积分方程可以求出 $K_c(x,\xi)$. 但此时应留意，以 $L^2(\Omega)$为基础的格林算子(参见“格林算子”)已不存在，但可把 $G(x,\xi)$视为广义格林函数.

二阶线性椭圆算子的基本解(fundamental solution of linear elliptic operator of second order)　一般二阶线性椭圆算子的基本解有显式表达式. 对二阶线性椭圆算子

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u\quad (x\in\Omega),$$

函数

$$\Gamma(x,y)=\begin{cases}\dfrac{[a_{ij}(y)(x_i-y_i)(x_j-y_j)]^{\frac{2-n}{2}}}{n(2-n)\omega_n[\det(a_{ij}(y))]^{\frac{1}{2}}} & (n>2),\\[2ex] \dfrac{\ln[a_{ij}(y)(x_i-y_i)(x_j-y_j)]^{-\frac{1}{2}}}{2\pi[\det(a_{ij}(y))]^{\frac{1}{2}}} & (n=2).\end{cases}$$

称为列维函数或基本解，其中

$$\omega_n=2\pi^{\frac{n}{2}}\Big/n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

是 n 维单位球的体积. 如果函数 $G(x,y)$对于 $\overline{\Omega}$ 上所有 $x,y(x\neq y)$都有定义；对每个 $y\in\Omega$，$G-\Gamma$ 作为 x 的函数满足方程 $L[G(x,y)-\Gamma(x,y)]=0$；且对所有 $x\in\partial\Omega$ 有 $G(x,y)=0$，则称 $G(x,y)$为二阶

线性椭圆型方程 $Lu=0$ 狄利克雷问题的格林函数.

二阶线性椭圆型方程狄利克雷问题的格林函数(Green function of Dirichlet problem for linear elliptic equation of second order) 见"二阶线性椭圆算子的基本解".

列维函数(Levi function) 见"二阶线性椭圆算子的基本解".

热传导算子的格林函数(Green function for heat operator) 热传导算子格林函数的构造. 对一维热传导方程的混合初-边值问题: $Lu=u_t-c^2u_{xx}=f(x,t)$, 于 $(a,b)\times(0,+\infty)$, $u|_{t=0}=\varphi(x)$, $u|_{x=a,b}=0$, 可用下述方法构造格林函数 $g(x,t;\xi,\tau)$: $g(x,t;\xi,\tau)=\Gamma(x,t;\xi,\tau)+\omega(x,t;\xi,\tau)$, $t\geqslant\tau$, 其中

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2(t-\tau)}\right)$$

为基本解, 而 ω 是满足方程 $Lu=0$ 且使得 $g(x,t;\xi,\tau)$ 在 $x=a$ 及 $x=b$ 上满足齐次边界条件的正则函数. 如果 ω 能够确定, 则 $g(x,t;\xi,\tau)$ 就是所要求的格林函数, 并且对于正则的 f,φ, 原问题的解为

$$u(x,t)=\int_0^t\int_a^b g(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+\int_a^b g(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

核函数(kernel function) 与平面域上的拉普拉斯算子的格林函数相联系的函数. 一般地, 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, H 为 E 上的某些复值函数构成的希尔伯特空间. 如果 $E\times E$ 上的函数 $K(x,y)$ 满足:

1. 当 y 固定时, $K(x,y)$ 作为 x 的函数属于 H;
2. 对任意的 $f(x)\in H$, 恒有

$$(f(x),K(x,y))=f(y);$$

则称 $K(x,y)$ 为核函数. 核函数如果存在, 那么它必定是惟一的、埃尔米特的、正定的, 即对任意的 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, $y_1,y_2,\cdots,y_n\in E$, 有

$$\sum_{j,k=1}^n K(y_j,y_k)\xi_j\xi_k\geqslant 0.$$

反之, 任一 $E\times E$ 上的正定函数必是一个核函数.

格林算子(Green operator) 即二阶椭圆算子的逆算子. 考虑二阶椭圆型方程

$$Au=-\Delta u+\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x)$$

在 Ω 内的第一、第三边值问题, 其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界域, 其边界 $\partial\Omega$ 由有限个光滑超曲面构成. 算子 A 的定义域 $\mathscr{D}(A)$ 对第一边值问题为 $\{u(x)\in H^2(\Omega);u(x)=0,x\in\partial\Omega\}$, 对第三边界条件为

$$\left\{u(x)\in H^2(\Omega);\frac{\partial u(x)}{\partial n}+\beta(x)u(x)=0,x\in\partial\Omega\right\}.$$

如果 A 为 $\mathscr{D}(A)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的一一映射, 则称其逆算子 A^{-1}(记为 G)为相应边值问题的格林算子. 一般地 A^{-1} 不一定存在, 但当 t 充分大时,

$$G_t=(A+tI)^{-1}$$

是存在的. 设 λ 为复参数, 对于方程 $(\lambda I-A)u=f(x)$, $f(x)\in L^2(\Omega)$, 用 G_t 从左作用得到 $(I-(\lambda+t)G_t)u=-G_tf$. 反之, 若把此方程看做 $L^2(\Omega)$ 中的方程, $u(x)$ 是它的一个解, 则显然有 $u(x)\in\mathscr{D}(A)$, 且 $u(x)$ 是原偏微分方程的解并满足边界条件. 在上述方程中 G_t 是 $L^2(\Omega)$ 上的紧算子, 因此可利用里斯-绍德尔理论. 特别地, 当 $t+\lambda$ 不是 G_t 的特征值时,

$$u(x)=(\lambda I-A)^{-1}f=-(I-(\lambda+t)G_t)^{-1}G_tf$$

就是原问题的惟一解.

高阶椭圆型方程的格林算子(Green operator of higher order elliptic equation) 高阶椭圆算子的格林算子的构造. 对于高阶椭圆型方程的一般边值问题

$$A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=f(x)\quad(x\in\Omega),$$

$$B_j\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0\quad\left(x\in\partial\Omega;j=1,2,\cdots,\frac{m}{2}\right),$$

其中 m 是算子 A 的阶(偶数), 边界算子 B_j 应满足两个条件:

1. 在 $\partial\Omega$ 的一切点 x 处, $\partial\Omega$ 的法线方向不是任何 B_j 的特征方向.

2. B_j 的阶 $m_j<m$ 并且 $m_j\neq m_k(j\neq k)$.

A 的定义域是

$$\mathscr{D}(A)=\left\{u\in H^m(\Omega)\,\middle|\,B_j\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0,\ x\in\partial\Omega,j=1,2,\cdots,\frac{m}{2}\right\}.$$

当 A 是 $\mathscr{D}(A)$ 到 $L^2(\Omega)$ 上的一一映射时, $G=A^{-1}$ 称为上述问题的格林算子. 如果 A 与 x 无关, 且设 $\Gamma(x)$ 是它的基本解, 即

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Gamma(x)=\delta(x),$$

一般地, 原边值问题的格林函数可如下构造: 令 $G(x,\xi)=\Gamma(x-\xi)+w(x,\xi)$, 而 $w(x,\xi)$ 由两个条件确定:

1. 对 $\xi\in\Omega$, $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)w(x,\xi)=0$.

2. 对 $\xi\in\Omega$,

$$B_j\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)G(x,\xi)=0\quad\left(x\in\partial\Omega,j=1,2,\cdots,\frac{m}{2}\right).$$

高阶椭圆型方程的格林函数(Green function of higher order elliptic equation) 见"高阶椭圆型方程的格林算子".

变分解法与变分不等式

泛函的变分(functional variation)　函数的微分概念的推广. 所谓泛函$v[y(x)]$的变量$y(x)$的变分δy是指两个函数间的差:$\delta y=y_1(x)-y(x)$,其中$y_1(x)$是与$y(x)$属于同一类的函数. 如果泛函$v[y(x)]$的改变量$\Delta v=v[y(x)+\delta y]-v[y(x)]$可以表为如下的形式

$$\Delta v = L[y(x),\delta y] + \beta(y(x),\delta y)\cdot \max|\delta y|,$$

其中$L[y(x),\delta y]$对δy来说是线性的,且当$\max|\delta y|\to 0$时,$\beta(y(x),\delta y)\to 0$,那么$L[y(x),\delta y]$称为泛函$v[y(x)]$的变分,记为$\delta v$,且有

$$\delta v = \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}.$$

泛函的极值(functional extreme value)　泛函的极大值或极小值的总称. 若泛函$v[y(x)]$在与$y=y_0(x)$接近的任一函数上的值不小(大)于$v[y_0(x)]$,即$\Delta v=v[y(x)]-v[y_0(x)]\geqslant 0(\leqslant 0)$,则称泛函$v[y(x)]$在函数$y_0(x)$上达到极小(大)值,称$y_0(x)$为泛函$v[y(x)]$的极值函数. 如果具有变分的泛函$v[y(x)]$在$y_0(x)$上达到极小(大)值,则在$y=y_0(x)$上,对任意$\delta y$,有$\delta v=0$. 对于依赖于多个未知函数的泛函$v[y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)]$的极值有类似的定义.

泛函的极值函数(functional extremal function)　见"泛函的极值".

变分问题(variational problem)　有关求泛函的极大值和极小值的问题. 最早研究的重要变分问题有:

1. 最速降线问题:给定不在同一铅垂线上的两点A和B,求出连结A和B的一条曲线使其具有这样的性质:当质点受重力作用沿着这条曲线由A下滑至B时所需时间为最少.

2. 短程线问题:求曲面$\varphi(x,y,z)=0$上所给二点间长度最短的曲线. 这条最短曲线称为短程线或测地线.

3. 基本的等周问题:求长为一定的封闭曲线l,使其所围的面积S为极大.

最速降线问题(problem of the quickest descent line)　见"变分问题".

短程线问题(geodesic problem)　见"变分问题".

欧拉方程(Euler equation)　泛函的极值函数满足的微分方程. 假设$F(x,y,y')$关于变元是二次可微的,函数$y(x)\in C^2$且满足边界条件

$$y(x_0) = y_0,\quad y(x_1) = y_1.$$

那么泛函

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),y'(x))\mathrm{d}x$$

取极值的必要条件是:$y=y(x)$是微分方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$$

或

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0$$

的解. 这个方程称为欧拉方程. 欧拉方程的积分曲线称为极值曲线. 对于形如

$$v[z(x,y)] = \iint_\Omega F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的泛函,它相应的欧拉方程为

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{z_{xx}} +\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{z_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{z_{yy}}=0,$$

式中

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x},\quad z_y=\frac{\partial z}{\partial y},\quad z_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$z_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad z_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

极值曲线(extreme curve)　见"欧拉方程".

横截条件(transversal condition)　可动边界的变分问题在端点上满足的条件. 假设泛函形如

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x.$$

1. 若$A(x_0,y_0)$,$B(x_1,y_1)$两端分别在曲线

$$y = \varphi_0(x) \text{ 和 } y = \varphi_1(x)$$

上变动,则使泛函达到极值的函数$y=y(x)$,除必须满足欧拉方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$$

外,其端点还必须满足条件

$$[F + (\varphi_0' - y')F_{y'}]_{x=x_0} = 0,$$

$$[F + (\varphi_1' - y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0,$$

这个条件称为横截条件(参见《变分法》同名条).

2. 若$A(x_0,y_0)$,$B(x_1,y_1)$两端点所在的曲线分别以隐函数形式$\varphi_0(x,y)=0$,$\varphi_1(x,y)=0$给出,其中φ_0,φ_1有连续偏导数,且

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2 > 0,\quad \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 > 0,$$

则横截条件为

$$\left[(F-y'F_{y'})\Big/\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right]_{x=x_0} = \left[F_{y'}\Big/\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right]_{x=x_0},$$

$$\left[(F-y'F_{y'})\Big/\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right]_{x=x_1} = \left[F_{y'}\Big/\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right]_{x=x_1}.$$

条件极值变分问题(variational problem of the

conditional extremum） 在附加约束条件下求泛函极值的问题. 对泛函

$$v[y_1,y_2,\cdots,y_n]$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\cdots,y_n,y'_1,y'_2,\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$

所依赖的函数加上约束条件

$$\varphi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0\quad(i=1,2,\cdots,m;m<n)$$

及端点的条件后,求泛函 v 的极值问题,称为条件极值变分问题或者简称条件极值问题. 例如,短程线问题、等周问题以及连续动态系统的最优控制等都是条件极值问题.

拉格朗日乘子法(method of Lagrange multiplicator) 解条件极值问题的一种方法. 考虑最简单的条件极值问题:求两个函数 $y(x)$ 及 $z(x)$,使泛函

$$v[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$$

达到极值,且满足约束条件 $G(x,y,z)=0$ 及固定端点的边界条件 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1,z(x_0)=z_0,z(x_1)=z_1$. 做辅助函数 $F^*=F+\lambda(x)G$,$\lambda(x)$ 是 x 的一个待定函数. 把上述条件极值问题化为以 F^* 为被积函数的泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}F^*(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$$

的无条件极值问题,这样就得到欧拉方程

$$F_y^*-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}^*=0,\quad F_z^*-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}^*=0.$$

由这两个方程和约束条件 $G(x,y,z)=0$,便可定出 $\lambda(x)$ 和待求的函数 $y=y(x)$,$z=z(x)$. 在这两个函数上可以使泛函 v 得到条件极值.

等周问题(isoperimetric problem) 一个重要的条件极值变分问题. 在泛函

$$\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x$$

保持定值 l 的条件下,求泛函

$$v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x,$$

$y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$ 的极值问题称为等周问题. 等周问题是一个条件极值问题,因此可以使用拉格朗日乘子法求解. 即,做辅助函数 $H=F+\lambda G$,λ 是一个待定常数,等周问题便化为泛函

$$v^*=\int_{x_0}^{x_1}H(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的无条件极值问题. 于是由 v^* 的欧拉方程、两个端点条件以及等周条件就能定出曲线 $y=y(x)$. 注意,仅当曲线 $y=y(x)$ 不是等周条件中的积分

$$\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x$$

的极值曲线时才是等周问题的解答.

连续动态系统的最优控制(optimal control of continuous dynamic system) 最优控制中一个重要的条件极值问题. 设控制系统的状态方程为

$$\dot{x}=f(x,m,t),\tag{1}$$

式中 x 是一个 n 维的状态向量,m 是 r 维的控制向量,f 是一个可微的 n 维向量函数,初始条件为

$$x(t_0)=x^0.\tag{2}$$

系统的性能指标为

$$I(m)=\int_{t_0}^{t_1}F(x(t),m(t),t)\mathrm{d}t.\tag{3}$$

最优控制的目的是要求确定控制向量 $m(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$ 在满足约束条件(1),(2)下,使性能指标(3)取极小值. 这是一个条件极值问题. 做辅助函数

$$F^*(x(t),\dot{x}(t),\lambda(t),m(t),t)$$
$$=F(x(t),m(t),t)$$
$$+\lambda^T[f(x(t),m(t),t)-\dot{x}(t)],$$

式中 λ 是一待定的 n 维列向量,λ^T 是 λ 的转置. 问题化为泛函

$$I_1(m(t))=\int_{t_0}^{t_1}F^*(x(t),\dot{x}(t),\lambda(t),m(t),t)\mathrm{d}t$$

的无条件极值问题. 泛函 $I_1(m)$ 取极值的必要条件是:

$$F_m^*=0\quad(\text{控制方程});$$
$$F_\lambda^*=0\quad(\text{状态方程});$$
$$F_x^*-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\dot{x}}^*=0\quad(\text{欧拉方程});$$
$$\eta F_{\dot{x}}^*\Big|_{t=t_0}^{t_1}=0\quad(\text{横截条件}).$$

式中 $\eta(t)$ 是定义在区间 $[t_0,t_1]$ 上的任意向量函数.

欧拉有限差分法(Euler finite difference method) 一种用有限差分法求泛函

$$v[y(x)]=\int_a^bF(x,y,y')\mathrm{d}x$$

在边界条件 $y(a)=y_a,y(b)=y_b$ 下的极值的方法. 其步骤如下:

1. 将积分区间 $[a,b]$ 分成 $n+1$ 等份,分点为 $x_0=a$, $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}=b$. 又

$$x_{i+1}-x_i=\Delta x=\frac{b-a}{n+1},$$

这样

$$v[y(x)]\approx\Phi(y_0,y_1,\cdots,y_{n+1})$$
$$=\sum_{i=0}^{n}F\left(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}\right)\Delta x,$$

式中 $y_0=y_a=y(x_0),y_1=y(x_1),\cdots,y_n=y(x_n),y_{n+1}=y_b=y(x_{n+1})$.

2. 选取 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,使函数 $\Phi(y_0,y_1,\cdots,y_{n+1})$

达到极值，也就是由方程组

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}=0,\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}=0,\ \cdots,\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}=0$$

来确定 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 于是得到变分问题的近似解. 区间 $[a,b]$ 分得愈细所得近似解就愈精确.

正定算子(positive operator) 相应算子方程可以化为变分问题的一类重要算子. 设 H 是实希尔伯特空间, D_A 是 H 的一个线性稠密子集, A 是 $D_A \to H$ 的线性(不必有界)算子. 如果 A 是对称的，即

$$(Au,v)=(u,Av)\quad (\forall u,v\in D_A),$$

且存在正常数 γ，使

$$(Au,u)\geqslant \gamma^2\|u\|^2\quad (\forall u\in D_A),$$

则称 A 为 D_A 上的正定算子. 对 D_A 上的正定算子 A，求算子方程 $Au=f(f\in H)$ 的解 u 可以化成求泛函

$$I(v)=\frac{1}{2}(Av,v)-(f,v)$$

取极小值的极值函数 u 的变分问题. 例如，负拉普拉斯算子 $A=-\Delta$ 是 $D_A=\{u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})\,|\,u=0$ 在 $\partial\Omega$ 上$\}$上的正定算子，其中 $\Omega\subset \mathrm{R}^n$ 是具有 C^1 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域. 狄利克雷问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & (\text{在 } \Omega \text{ 中}),\\ u=0 & (\text{在 } \partial\Omega \text{ 上})\end{cases}$$

的解就是使泛函

$$I(v)=\frac{1}{2}(-\Delta v,v)-(f,v)=\frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2 \mathrm{d}x-\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x$$

取极小值的极值函数.

极小化序列(minimizing sequences) 使泛函值的极限为泛函极小值的函数序列. 设 D_A 是希尔伯特空间 H 的一个线性稠密子集，如果 D_A 上的泛函 I 有下界，即

$$d=\inf_{v\in D_A} I(v)$$

存在，序列 $\{u_n\}\subset D_A$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} I(u_k)=d,\ I(u_1)\geqslant I(u_2)\geqslant\cdots\geqslant I(u_k)\geqslant\cdots,$$

则称 $\{u_k\}$ 是泛函 I 的极小化序列. 如果 A 是 D_A 上的正定算子，则其相应的泛函

$$F(u)=\frac{1}{2}(Au,u)-(f,u)$$

必有极小化序列，以 H_A 表示 D_A 关于新范数

$$\|u\|_A=(Au,u)^{\frac{1}{2}}$$

完备化得到的希尔伯特空间，则此极小化序列在 H_A(也在 H)中收敛于一个函数 $u\in H_A$，且此函数 u 是变分问题

$$F(u)=\inf_{v\in D_A} F(v)$$

的解，也是算子方程 $Au=f$ 的广义解(弱解). 例如，设 Ω 是 R^n 中具有 C^1 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，则 $A=-\Delta$ 是 $D_A=\{u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})\,|\,u$ 在 $\partial\Omega=0\}$ 上的正定算子，它对应的泛函

$$F(u)=\frac{1}{2}(Au,u)-(f,u)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|Du|^2-fu\right)\mathrm{d}x$$

有极小化序列 $\{u_k\}$，在 $H_A=W_0^{1,2}(\Omega)$ 中 $u_k\to u$，u 是变分问题

$$F(u)=\inf_{v\in D_A} F(v)$$

的解. 根据变分问题

$$F(u)=\inf_{v\in D_A} F(v)$$

有解的充分必要条件是 $Au=f$ 有解 $u\in D_A$，故 u 也是泊松方程边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & (\text{在 } \Omega \text{ 中}),\\ u=0 & (\text{在 } \partial\Omega \text{ 上})\end{cases}$$

的弱解.

狄利克雷原理(Dirichlet principle) 拉普拉斯方程狄利克雷问题化为变分问题的方法. 使

$$D(u)\equiv\int_\Omega |Du|^2\mathrm{d}x \tag{1}$$

在函数类 $\{u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})\,|\,u=\varphi$ 在 $\partial\Omega$ 上, $\varphi\in C^1(\partial\Omega)\}$ 中达到极小的极值函数 u 就是拉普拉斯方程狄利克雷问题

$$\begin{cases}\Delta u=0 & (\text{在 } \Omega \text{ 中}),\\ u=\varphi & (\text{在 } \partial\Omega \text{ 上})\end{cases}$$

的解. 因此，求解拉普拉斯方程狄利克雷问题可化成变分问题(1)，这就是狄利克雷原理. 积分 $D(u)$ 称为狄利克雷积分.

狄利克雷积分(Dirichlet integral) 见“狄利克雷原理”.

变分原理(variational principle) 微分方程边值问题化为变分问题的方法. 在 n 维有界区域 Ω 上考虑 $2m$ 阶线性偏微分方程的齐次边值问题

$$\begin{cases}Lu\equiv\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)D^\alpha u=f(x) & (\text{在 } \Omega \text{ 中}),\\ B_j u\equiv\sum\limits_{|\beta|\leqslant m-1} b_\beta(x)D^\beta u=0 & \\ \quad (\text{在 } \partial\Omega \text{ 上}; j=0,1,\cdots,m-1). & \end{cases} \tag{1}$$

取 $H=L^2(\Omega)$，则

$$D_L=\{u\in C^{2m}(\bar{\Omega})\,|\,B_j u=0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}, j=0,1,\cdots,m-1\}$$

为 H 的线性稠密子集. L 可视为 $D_L\to H$ 的线性微分算子. 如果 L 是 D_L 上的正定算子，则边值问题(1)可以化为在 D_L 中求泛函

$$F(u)=\frac{1}{2}(Lu,u)-(f,u)$$

的极值函数的问题. 这种把微分方程边值问题化为

变分问题的方法称为能量法，也称为变分原理. 狄利克雷原理就是最早出现的最简单的变分原理(参见本卷《变分法》同名条).

能量法(energy method) 即“变分原理”.

里茨方法(Ritz method) 求变分问题的极小化序列的常用方法. 例如，对 D_A 上的正定算子 A，可用里茨方法求泛函

$$F(u)=\frac{1}{2}(Au,u)-(f,u)$$

的极小化序列，其主要步骤如下：

1. 在集合 D_A 中选取在 H_A 中完备的元素序列 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$，并要求对任意的 $n,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 线性无关. 称这样的元素为坐标元素.

2. 令

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k,$$

其中 a_k 是待定系数. 代入泛函 $F(u)$，得自变量 a_1，$a_2,\cdots,a_n$ 的函数

$$F(u_n)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}a_ja_k(A\varphi_j,\varphi_k)-\sum_{j=1}^{n}a_j(f,\varphi_j).$$

3. 为使函数 $F(u_n)$ 取极小，必须

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_j}=0\ (j=1,2,\cdots,n),$$

从而求出 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$. 序列 $\{u_n\}$ 即为极小化序列，u_n 可作为问题的近似解. 当 n 越大时得到的近似解 u_n 越精确(参见本卷《变分法》同名条).

加廖尔金法(Galerkin method) 求算子方程 $Au=f$ 近似解的常用方法. 当算子 A 非正定时，不能用里茨法而使用加廖尔金法. 其主要步骤是：

1. 在 D_A 中选取在空间 H 中完备的元素序列 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$，其中任意 n 个元素线性无关，称 $\varphi_i(i=1,2,\cdots)$ 为坐标元素序列.

2. 把方程的近似解表示为

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k,$$

式中 a_k 是待定常数. 把 u_n 代入方程 $Au=f$ 中的 u，两端与 $\varphi_j(j=1,2,\cdots,n)$ 做内积，得以 a_k 为未知数的 n 元代数方程组

$$\sum_{k=1}^{n}a_k(A\varphi_k,\varphi_j)=(f,\varphi_j)\ \ (j=1,2,\cdots,n).$$

3. 求出 a_k，代回 u_n 的表达式，便得方程 $Au=f$ 的近似解 u_n. 在自共轭边值问题中，当算子正定时，由加廖尔金法和里茨法得到的关于 a_k 的代数方程组是相同的(参见本卷《变分法》同名条).

坎托罗维奇法(Kantorovetz method) 将二元函数泛函的变分问题求近似解化为有限个一元函数的常微分方程组求解的方法. 考虑泛函

$$v[z(x,y)]=\int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的极值，右端积分展布在由两条曲线 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$ 和两条直线 $x=x_0,x=x_1$ 所围成的区域 D 上，设在区域 D 的边界上函数的值 $z(x,y)$ 已经给出. 其步骤如下：

1. 选取坐标函数序列 $w_1(x,y),w_2(x,y)$，$w_3(x,y),\cdots$，构造函数

$$z_m(x,y)=\sum_{i=1}^{m}u_i(x)w_i(x,y)\approx z(x,y),$$

$u_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$ 是待定函数. 将 $z_m(x,y)$ 代入泛函 v，得

$$v[z_m(x,y)]=\int_{x_0}^{x_1}\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}F\left(x,y,z_m,\frac{\partial z_m}{\partial x},\frac{\partial z_m}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x,u_1(x),\cdots,u_m(x),u_1'(x),\cdots,u_m'(x))\mathrm{d}x.$$

2. 选取函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_m(x)$，使泛函 $v[z_m(x,y)]$ 达到极值，也就是由欧拉方程

$$\Phi_{u_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{u_i'}=0\ (i=1,2,\cdots,m)$$

来确定 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_m(x)$. 于是得到变分问题的近似解(参见本卷《变分法》同名条).

自然边界条件(natural boundary condition) 变分问题的解自然满足的边界条件. 设区域 Ω 有 C^1 边界 $\partial\Omega,f\in C(\Omega),\alpha\in C(\partial\Omega)$. 令

$$D=C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}),$$

$$I(u)=\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}|Du|^2+fv\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\alpha(x)u^2\mathrm{d}S,\tag{1}$$

则变分问题

$$I(u)=\min_{v\in D}I(v)\tag{2}$$

的解 u 必定是泊松方程第三边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f & (\text{在 }\Omega\text{ 中}), \quad (3)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x)u=0 & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}) \quad (4)\end{cases}$$

的解，其中 n 是 Ω 的外法线方向. 对变分问题(2)所考虑的函数类 D 不涉及边界条件(4)，而变分问题(2)的解必然满足此边界条件，即边界条件(4)自然地包含在变分问题(2)中，称(4)为变分问题(2)的自然边界条件. 对一般二阶线性椭圆型方程，第二及第三边界条件都可以取成对应变分问题的自然边界条件(参见本卷《变分法》同名条).

临界点(critical point) 泛函费雷歇导数的零点，亦即函数导数的零点的推广. 椭圆型方程的弱解常常是相应泛函的临界点. 设 D 是实巴拿赫空间 $\mathscr{X}$ 中的开集，泛函 $f:D\to\mathrm{R}^1$ 在 D 上具有弗雷歇导数. 若 $x_0\in D$，使得 $\mathrm{grad}\,f(x_0)=f'(x_0)=\theta$，则称 x_0

是泛函 $f(x)$ 的一个临界点，$c=f(x_0)$ 称为 $f(x)$ 的一个临界值. 这里 θ 是从 $\mathscr{X}$ 到 R^1 的零映射. 设 Ω 是 n 维有界区域，$f\in L^2(\Omega)$，则 $\mathscr{X}=W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函

$$F(u)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|Du|^2-fu\right)\mathrm{d}x$$

有弗雷歇导数 $F'(u)$，此时

$$F'(u)\varphi=\int_\Omega(Du\cdot D\varphi-f\varphi)\mathrm{d}x\quad(\forall\varphi\in\mathscr{X}).$$

因此，F 的临界点为泊松方程狄利克雷问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f & (\text{在 }\Omega\text{ 中}),\\ u=0 & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上})\end{cases}$$

的弱解. 更一般地，设 $f(x,u)\in C^{0,1}(\Omega\times\mathrm{R})$ 且满足条件

$$|f(x,u)|\leqslant a+b|u|^r\quad(a>0,b>0),$$

其中 $r\geqslant1$，当 $n\geqslant3$ 时 $r\leqslant(n+2)/(n-2)$，

$$F(x,u)=\int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t,$$

则 $\mathscr{X}=W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函

$$I(u)=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|Du|^2-F(x,u)\right]\mathrm{d}x$$

有弗雷歇导数，且

$$I'(u)\varphi=\int_\Omega[Du\cdot D\varphi-f(x,u)\varphi]\mathrm{d}x\quad(\forall\varphi\in\mathscr{X}).$$

因此，泛函 I 的临界点是非线性椭圆型方程边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,u) & (\text{在 }\Omega\text{ 中}),\\ u=0 & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上})\end{cases}$$

的弱解. 以上例子说明，许多椭圆型方程边值问题弱解的存在问题可以化成相应泛函临界点的存在问题.

临界值(critical value)　见“临界点”.

PS 条件(Palais-Smale condition)　判断极大极小原理的一个重要条件. 设 $\mathscr{X}$ 是实巴拿赫空间，$f:\mathscr{X}\to\mathrm{R}^1$ 是 C^1 泛函. 如果 $\{x_n\}\subset\mathscr{X}$，$f(x_n)$ 有界与 $f'(x_n)\to\theta$ 蕴涵 $\{x_n\}$ 有收敛子序列，则称泛函 $f(x)$ 满足 PS 条件，此处 θ 是从 $\mathscr{X}$ 到 R^1 的零映射.

极大极小原理(minimax principle)　判定临界值存在的重要法则. 设 $\mathscr{X}$ 是实巴拿赫空间，$f:\mathscr{X}\to\mathrm{R}^1$ 是 C^1 泛函，满足 PS 条件. 又设 $\mathscr{F}=\{F\}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个子集族. 令

$$c=\inf_{F\in\mathscr{F}}\sup_{x\in F}f(x).$$

如果满足下列条件，那么，c 必是 f 的临界值，即必存在 $x_0\in\mathscr{X}$，使得 $f'(x_0)=\theta$，且 $f(x_0)=c$：

1. c 是一个有限数.

2. 存在 $\delta>0$，使得对于满足条件 $g(x)=x$，$\forall x\in f_{c-\delta}\triangleq\{x\in\mathscr{X}\mid f(x)\leqslant c-\delta\}$ 的任何连续映射 $g:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$，都有 $g(F)\in\mathscr{F}\ (\forall F\in\mathscr{F})$.

山路引理(mountain pass lemma)　证明非线性椭圆型方程边值问题有解的重要工具. 设 $\mathscr{X}$ 是实巴拿赫空间，$f:\mathscr{X}\to\mathrm{R}^1$ 是 C^1 泛函且满足 PS 条件. 如果 f 再满足条件：

1. $f(\theta)=0$ 且存在常数 $\rho,\alpha>0$，使得 $f|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$，其中 ∂B_ρ 表示 $\mathscr{X}$ 中以零元素 θ 为心，ρ 为半径的球面.

2. 存在一个元素 $x\in\mathscr{X}\backslash B_\rho$，使得 $f(x)\leqslant0$，则

$$c=\inf_{g\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]}f(g(t))$$

是 f 的临界值，且 $c\geqslant\alpha$，其中

$$\Gamma=\{g\in C([0,1],\mathscr{X})\mid g(0)=0,g(1)=x\}.$$

山路引理由意大利数学家阿姆布罗塞蒂(Ambrosetti, A.)和美国数学家拉比诺维茨(Rabinowitz, P. H.)于 1973 年证明.

多解定理(multiple solution theorem)　亦称三解定理. 给出至少有三个不同的解的一类半线性椭圆方程边值问题. 设 Ω 是 R^n 中有界的、边界光滑的开区域，$g:\mathrm{R}^1\to\mathrm{R}^1$ 满足：

1. $g\in C^1(\mathrm{R}^1)$，$g(0)=0$；

2. $|g'(t)|\leqslant c_1+c_2|t|^{\alpha-1}\left(\alpha<\dfrac{n+2}{n-2};n\geqslant3\right)$；

3. $G(t)=\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha_0u^2+\beta(2\alpha_0<\lambda_1,\beta$ 是常数)；

4. 对算子 $-\Delta$ 的特征值 $\lambda_1<\lambda_2\leqslant\cdots$，使得

$$\lambda_m<g'(0)<\lambda_{m+1}\quad(m\geqslant1)；$$

则半线性椭圆边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=g(u)(x\in\Omega),\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

至少有三个不同的解.

三解定理(triplesolution theorem)　即“多解定理”.

变分不等式(variational inequality)　经典变分问题的推广和发展. 将经典变分问题的约束条件放松为某些单边约束(即用不等式代替等式)的变分方法. 它是研究偏微分方程、最佳控制和其他领域的一个十分有用的工具，也是变分学的一个重要发展. 变分不等式的形式可以各种各样，以下的词条是其常见的形式.

R^n 空间中的变分不等式(variational inequality in R^n)　即欧氏空间中的变分不等式. 给定 R^n 中的闭凸集 $\mathscr{K}$ 和连续映射 $F:\mathscr{K}\to\mathrm{R}^n$，求 $x\in\mathscr{K}$ 使得 $\langle F(x),y-x\rangle\geqslant0$ 对每个 $y\in\mathscr{K}$ 成立. 此问题称为 R^n 中的变分不等式. 最简单的例子是在闭区间 $I=[a,b]$ 上求光滑实函数 $f(x)$ 的极小值，即求 $x_0\in I$ 使

$$f(x_0)=\min_{x\in I}f(x).$$

此问题归结为变分不等式：$f'(x_0)(x-x_0)\geqslant0$，对一

切 $x\in I$.

希尔伯特空间中的变分不等式(variational inequality in Hilbert space) 即抽象空间中的变分不等式.用 $a(u,v)$ 记希尔伯特空间 H 上的双线性型,H' 为 H 的对偶空间.考虑问题:设 $\mathscr{K}\subset H$ 是一闭凸集,$f\in H'$,求 $u\in\mathscr{K}$ 使 $a(u,v-u)\geqslant\langle f,v-u\rangle$ 对一切 $v\in\mathscr{K}$ 成立.此问题称为希尔伯特空间中的变分不等式.如果将 H 换为一般的巴拿赫空间,即可得到巴拿赫空间中的变分不等式.

障碍问题(barrier problem) 对容许函数有不等式条件限制的变分不等式问题.来源于边界固定的弹性薄膜在定义区域的某内部子域位于某给定物体(障碍)上方的平衡问题.算子

$$L=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

的障碍问题归结为如下的变分不等式:设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域,边界 $\partial\Omega$ 光滑,$a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$,$(a_{ij})$ 为正定矩阵.定义双线性型

$$a(u,v)=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}\mathrm{d}x\quad(u,v\in H^1(\Omega)),$$

并设 $\psi\in H^1(\Omega)$,且在 $\partial\Omega$ 上 $\psi\leqslant0$.定义 $H_0^1(\Omega)$ 的闭凸集 $K_\psi=\{v\in H_0^1(\Omega)\mid v\geqslant\psi\}$,求 $u\in K_\psi$ 使得对一切 $v\in K_\psi$ 成立 $a(u,v-u)\geqslant0$.以上所说的函数 ψ 就是给定障碍,u 为障碍问题的解.点集

$$E=\{x\in\Omega\mid u(x)=\psi(x)\}$$

称为重合集.重合集的边界是一个自由边界,因此障碍问题也是自由边界问题.

重合集(coincident set) 见"障碍问题".

拟变分不等式(quasi-variational inequality) 变分不等式的进一步推广,即有多个未知函数的变分不等式.许多物理问题虽不能归结为变分不等式,但可归结为所谓拟变分不等式,即在变分不等式中多出另一个未知函数.例如水坝渗流的浸润面问题,在稳态情形可归结为变分不等式,而在非稳定情形只能归结为一个拟变分不等式:求 $u\in W^{2,1}(Q)(u\geqslant0)$,满足:

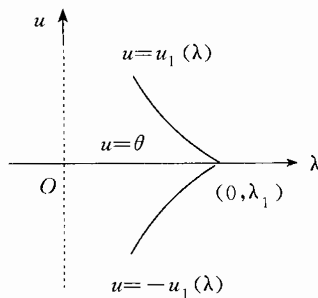
$$\left\langle\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u,v-u\right\rangle\geqslant\langle-1-\varphi_t,v-u\rangle$$
$$(u<\varphi(t,x)),$$
$$\left\langle\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u,v-u\right\rangle=0\quad(u\geqslant\varphi(t,x)),$$

对 $v\in L^2(Q)(v\geqslant0)$ 成立.在此变分不等式中除未知函数 u 外,还多了一个未知函数 $\varphi(t,x)$.

分歧(bifurcation) 物理(动力、电力、化学、生物及其他)系统的平衡态随参数变化而分裂成两个或多个的现象.在数学上,用泛函方程

$$F(u,\lambda)=0\qquad(1)$$

的解来描述系统的平衡态,其中 λ 为参数,u 属于某向量空间(例如某巴拿赫空间)E,而 F 是 E 到另一向量空间 H 的映射.设 $u=\theta$ 总满足(1),即 $F(\theta,\lambda)$



示意图

$\equiv0$.如果在点 (θ,λ_0) 的某邻域内(1)有两个或多个解的分支在 (θ,λ_0) 汇合,则称 (θ,λ_0) 为方程(1)的分歧点.举例如下:对 n 维有界区域 Ω,$W_0^{1,2}(\Omega)$ 上的泛函

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla u|^2-\lambda u^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{2^*}\int_\Omega|u|^{2^*}\mathrm{d}x$$
$$(2^*=2n/(n-2))$$

的临界点 u 满足方程

$$F(u,\lambda)\equiv I_\lambda'(u)=0,\qquad(2)$$

即对任意 $\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$,下列等式成立:

$$F(u,\lambda)\varphi\equiv I_\lambda'(u)\varphi$$
$$=\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla\varphi-\lambda u\varphi-|u|^{2^*-2}u\varphi)\mathrm{d}x=0.$$

此时 F 即(I_λ')是 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 到其对偶空间 $W^{-1,2}(\Omega)$ 的映射.显然 $F(\theta,\lambda)\equiv I_\lambda'(0)\equiv0$.设 λ_j 为 $-\Delta$ 的重数为 $m_j(m_j\geqslant1)$ 的特征值.已经证明:存在 λ_j 的左邻域 (λ_j^*,λ_j),使得对任意 $\lambda\in(\lambda_j^*,\lambda_j)$,泛函 I_λ 至少有 m_j 对非平凡临界点 $\{u_k(\lambda),-u_k(\lambda)\}(k=1,2,\cdots,m_j)$ 满足

$$\|u_k(\lambda)\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\to0\quad(\lambda\to\lambda_j).$$

这就说明,(θ,λ_j) 是方程(2)的分歧点;也就是说,对非线性椭圆方程边值问题

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u+|u|^{2^*-2}u=0 & (\text{在 }\Omega\text{ 中}),\\ u=0 & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上})\end{cases}$$

的弱解来说,(θ,λ_j) 是分歧点.正如对 $m_1=1$ 给出的示意图,在分歧点 $(0,\lambda_1)$ 处,当 λ 减小时,方程(2)的解分成三个分支 $u=u(\lambda)$,$u=\theta$,$u=-u(\lambda)$.由于许多实际问题中都出现分歧现象,分歧的数学理论受到人们的重视,已发展成一个独立的研究方向.

分歧点(bifurcation point) 见"分歧".

偏微分方程基本解法

分离变量法(separation of variables) 求偏微分方程定解问题显式解的基本方法.在解线性偏微分方程的混合问题或边值问题时,先求满足边界条

件的变量分离的特解，再利用叠加原理，做这些特解的线性组合，得到定解问题的解，这就是分离变量法．例如，解两端固定的弦振动齐次方程的混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t > 0),\\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l),\\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (t \geqslant 0).\end{cases}$$

1．设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入方程得到 $X(x)$，$T(t)$ 满足的常微分方程：$X''(x)+\lambda^2X(x)=0$；$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0$，$\lambda$ 为常数．

2．用上列两个常微分方程对应于同一 $\lambda=\lambda_n(n=1,2,\cdots)$ 的两个非零解 $X_n(x)$ 和 $T_n(t)$ 的乘积表示问题的特解

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n\cos\frac{an\pi t}{l} + B_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

此处 $X_n(x)=\sin(n\pi x/l)$ 是特征边值问题

$$\begin{cases}X''(x) + \lambda_n^2 X(x) = 0,\\ X(0) = X(l) = 0\end{cases}$$

的解，称为特征函数，$\lambda_n=n\pi/l$ 是其特征值，

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{an\pi t}{l} + B_n\sin\frac{an\pi t}{l}$$

是方程 $T''(t)+a^2\lambda_n^2T(t)=0$ 的通解．

3．叠加 $u_n(x,t)$，使得混合问题的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi t}{l}+B_n\sin\frac{an\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中系数 A_n, B_n 可利用初值函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 以及特征函数的正交性得到

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi,$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi.$$

若 $\varphi(x)\in C^3$，$\psi(x)\in C^2$ 且

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\psi(0)=\psi(l)=0,$$

则上述形式解是问题的正则解．

双曲型方程的特征问题(characteristic problem for hyperbolic equation)　亦称古尔萨问题或皮卡问题．是在矩形区域 $\{x_0\leqslant x\leqslant x_1, y_0\leqslant y\leqslant y_1\}$ 中研究拉普拉斯双曲型方程在两个边 $x=x_0$，$y=y_0$（均为特征线）上给定数据的定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y),\\ u|_{x=x_0}=\varphi_1(y), u|_{y=y_0}=\varphi_2(x)\\ \qquad (x_0\leqslant x\leqslant x_1, y_0\leqslant y\leqslant y_1),\end{cases}$$

其中 $a(x,y)$，$b(x,y)$，$c(x,y)$，$f(x,y)$ 为连续函数，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 连续可微且 $\varphi_1(y_0)=\varphi_2(x_0)$．令

$$\frac{\partial u}{\partial x}=v, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=w,$$

则古尔萨问题化为下面积分方程组的求解问题

$$\begin{cases}v(x,y) = \varphi_2'(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y}[f(x,y) - a(x,y)v\\ \qquad - b(x,y)w - c(x,y)u]\mathrm{d}y,\\ w(x,y) = \varphi_1'(x) + \displaystyle\int_{x_0}^{x}[f(x,y) - a(x,y)v\\ \qquad - b(x,y)w - c(x,y)u]\mathrm{d}x,\\ u(x,y) = \varphi_2(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} w\mathrm{d}y.\end{cases} \tag{1}$$

这个问题可用逐次逼近法求解．取 $v_0=\varphi_2'(x)$，$w_0=\varphi_1'(y)$，$u_0=\varphi_2(x)$．根据方程组(1)构造近似解的递推公式

$$\begin{cases}v_n = \varphi_2'(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y}[f(x,y) - a(x,y)v_{n-1}\\ \qquad - b(x,y)w_{n-1} - c(x,y)u_{n-1}]\mathrm{d}y,\\ w_n = \varphi_1'(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x}[f(x,y) - a(x,y)v_{n-1}\\ \qquad - b(x,y)w_{n-1} - c(x,y)u_{n-1}]\mathrm{d}x,\\ u_n = \varphi_2(x) + \displaystyle\int_{y_0}^{y} w_{n-1}\mathrm{d}y.\end{cases} \tag{2}$$

设 $|a(x,y)|+|b(x,y)|+|c(x,y)|\leqslant K$，且

$$|v_1-v_0|\leqslant A, \quad |w_1-w_0|\leqslant A, \quad |u_1-u_0|\leqslant A,$$

则由递推公式组(2)用数学归纳法可以证明

$$|v_n - v_{n-1}| \leqslant AK^{n-1}\frac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$|w_n - w_{n-1}| \leqslant AK^{n-1}\frac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$|u_n - u_{n-1}| \leqslant AK^{n-1}\frac{(x + y - x_0 - y_0)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

由此知序列 $\{v_n\}$，$\{w_n\}$，$\{u_n\}$ 在矩形 $\{x_0\leqslant x\leqslant x_1, y_0\leqslant y\leqslant y_1\}$ 上都是一致收敛的，设它们的极限分别是 v，w，u．在(2)中令 n 趋于无穷得出 $\{v_n\}$，$\{w_n\}$，$\{u_n\}$ 的极限函数 v，w，u 是方程组(1)的解．可以证明，方程组(1)的解是惟一的，因而 u 是原双曲型方程特征问题的惟一解．

古尔萨问题(Goursat problem)　即“双曲型方程的特征问题”．

皮卡问题(Picard problem)　即“双曲型方程的特征问题”．

逐次逼近法(successive approximation method)　根据方程构造其近似解序列的递推公式，再证明此序列的极限就是原方程的解(参见“双曲型方程的特征问题”)．

特征线法(characteristic method)　见“一阶非线性方程的柯西问题”．

黎曼函数(Riemann function)　双曲型方程的

一个特殊问题的解. 双曲型方程的特征问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \qquad +b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y),\\ u(x_0,y)=e^{\int_{y_0}^{y}a(x_0,y)dy},\\ u(x,y_0)=e^{\int_{x_0}^{x}b(x,y_0)dx}\end{cases} \tag{1}$$

有惟一解 $u(x,y)=u(x,y;x_0,y_0)$(参见"双曲型方程的特征问题"). $u(x,y;x_0,y_0)$称为双曲型方程(1)的黎曼函数.

广义柯西问题的黎曼方法(Riemann method of the generalized Cauchy problem)　利用伴随方程的黎曼函数求出广义柯西问题的解的方法. 对拉普拉斯双曲型方程的广义柯西问题

$$\begin{cases}Lu\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \qquad +c(x,y)u=f(x,y),\\ u|_{y=\mu(x)}=\varphi_1(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\mu(x)}=\varphi_2(x),\end{cases}$$

其中 $a,b,c,\varphi_1,\varphi_2,\mu$ 为连续可微函数，且 $\mu'(x)\neq 0$，而 f,φ_2 为连续函数. 设 $M(x_0,y_0)$不是 $y=\mu(x)$上的点，过点 M 做特征线 $x=x_0,y=y_0$ 分别交 $y=\mu(x)$于 P 及 Q，记曲边三角形 PMQ 为 D，在 D 上应用二阶偏微分算子的格林公式(参见"高阶偏微分方程"部分)，得

$$\begin{aligned}&\iint_D(vLu-uL^*v)dxdy\\ &=\frac{1}{2}(uv)\Big|_P^M+\frac{1}{2}(uv)\Big|_Q^M\\ &\quad+\int_P^M u\left(-\frac{\partial v}{\partial y}+av\right)dy+\int_Q^M v\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+bu\right)dx\\ &\quad+\int_Q^P\left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-buv\right]dx\\ &\quad-\left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-auv\right]dy,\end{aligned}$$

其中

$$L^*v=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}[a(x,y)u]-\frac{\partial}{\partial y}[b(x,y)v]+c(x,y)v$$

是 Lu 的伴随算子. 设 $v(x,y;\ x_0,y_0)$为下述古尔萨问题的解

$$\begin{cases}L^*v=0,\\ v(x_0,y;x_0,y_0)=e^{\int_{y_0}^{y}a(x_0,y)dy},\\ v(x,y_0;x_0,y_0)=e^{\int_{x_0}^{x}b(x,y_0)dx},\end{cases}$$

那么广义柯西问题的解可用下面的黎曼公式给出：

$$\begin{aligned}&u(x_0,y_0)\\ &=\frac{1}{2}(\varphi_1 v)_P+\frac{1}{2}(\varphi_1 v)_Q\\ &\quad-\int_Q^P\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\varphi_1\frac{\partial v}{\partial x}-v\varphi'_1+v\varphi_2\mu'\right)-b\varphi_1 v\right]dx\right.\\ &\quad\left.-\left[\frac{1}{2}\left(\varphi_1\frac{\partial v}{\partial y}-v\varphi_2\right)-a\varphi_1 v\right]dy\right\}\\ &\quad+\iint_D v(x,y;x_0,y_0)f(x,y)dxdy,\end{aligned}$$

式中 $v(x,y;x_0,y_0)$称为黎曼函数，这个方法称为黎曼方法.

黎曼公式(Riemann formula)　见"广义柯西问题的黎曼方法".

拉普拉斯变换(Laplace transform)　解偏微分方程定解问题常用的一种积分变换. 形如

$$L(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$
$$(s\text{ 是复数},s=\sigma+i\gamma)$$

的积分表达式，称为函数 $f(t)$的拉普拉斯变换. 拉普拉斯变换的反演公式是

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[L(s)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}L(s)e^{st}ds$$
$$(t\geqslant 0,\sigma\geqslant 0),$$

积分沿着任一直线 $\mathrm{Re}\,s=\sigma>a$ 进行，a 是 $f(t)$的增长指数，积分理解为主值意义下. 如果 $f(t)$满足下述三个条件，那么 $f(t)$的拉普拉斯变换存在，并且 $L(s)$在半平面$\mathrm{Re}\ s>a$上是解析函数：

1. 实变量的复值函数 $f(t)$和 $f'(t)$在 $t\geqslant 0$ 上除掉有第一类间断点(在任一有限区间上至多有有限多个)外连续.

2. 当 $t<0$ 时，$f(t)=0$.

3. $f(t)$是有限阶的，即可以找到常数 $a\geqslant 0$ 和 $A>0$，使得 $|f(t)|\leqslant Ae^{at}(t\geqslant 0)$，此处数 a 称为 $f(t)$的增长指数.

而反演公式在 $f(t)$的连续点处成立. 拉普拉斯变换有下述性质：

1. $\mathscr{L}[af(t)]=a\mathscr{L}[f(t)]$($a$ 是常数).

2. $\mathscr{L}[f(t)+g(t)]=\mathscr{L}[f(t)]+\mathscr{L}[g(t)]$.

3. $\mathscr{L}[f(t)*g(t)]=\mathscr{L}[f(t)]\cdot\mathscr{L}[g(t)]$，式中

$$\begin{aligned}&f(t)*g(t)\\ &=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

称 $f(t)*g(t)$为函数 $f(t)$和 $g(t)$的卷积.

傅里叶变换(Fourier transform)　解偏微分方程定解问题及偏微分方程理论研究中常用的积分变换. $f(x)$的傅里叶变换为

$$F[f(x)]=\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\xi x}dx,$$

傅里叶变换的反演公式为

$$f(x)=F^{-1}[\hat{f}(\xi)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

如果 $f(x)$ 连续且分段光滑并且在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对可积，那么它的傅里叶变换存在，且反演公式成立.

傅里叶变换的性质有：

1. $F[af+bg]=aF[f]+bF[g]$ (a,b 是常数).

2. $F[f*g]=F[f]\cdot F[g]$，其中 $f*g$ 表示 f 与 g 的卷积，由下式定义

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y.$$

3. $F[fg]=\frac{1}{2\pi}F[f]*F[g]$.

4. $F[f'(x)]=-\mathrm{i}\xi F[f(x)]$.

5. $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|F[f]|^2\mathrm{d}\xi$.

6. $F[f(x-x_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_0\xi}\hat{f}(\xi)$.

卷积(convolution)　见“拉普拉斯变换”及“傅里叶变换”.

积分变换方法(integral transform method)　利用积分变换把偏微分方程简化为常微分方程去求解. 把偏微分方程的某一独立变量视为参变量，做未知函数的积分变换，于是减少了原方程的独立变量的个数而将方程化简，求出简化方程的对应定解问题的解，并通过积分变换的反演就得到原定解问题的解. 这种求解方法称为积分变换法. 解偏微分方程定解问题通常使用的是傅里叶变换方法和拉普拉斯变换方法. 例如，用傅里叶变换解弦振动方程的柯西问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2},\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\end{cases}$$

把 t 视为参变量，做 $u(x,t)$ 关于 x 的傅里叶变换

$$F[u(x,t)]=\tilde{u}(p,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x.$$

原问题化为下面的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\tilde{u}}{dt^2}=-a^2p^2\tilde{u},\\ \tilde{u}|_{t=0}=F[\varphi(x)]=\tilde{\varphi}(p),\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解得 $\tilde{u}(p,t)=\tilde{\varphi}(p)\cos apt$. 做傅里叶逆变换得到原问题的解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=F^{-1}[\tilde{\varphi}(p)\cos apt]\\&=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)].\end{aligned}$$

差分法(difference method)　通过相应差分方程研究偏微分方程的方法. 在解偏微分方程时，用差商代替偏导数，得到相应的差分方程，解差分方程得到偏微分方程的近似解，通过证明差分方程解的收敛性得到偏微分方程解的存在性. 这种方法称为差分法. 例如，考虑拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0(\text{在 }\Omega\text{ 内}),\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y).\end{cases}$$

分别做平行于 x 轴和 y 轴的直线族：

$$\begin{cases}x=x_i=ih,\\ y=y_j=jh\end{cases}$$

$$(h>0,i,j=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n),$$

它形成一个正方形网格，其交点 (x_i,y_j) 称为节点，简记为 (i,j)，记 u 在节点 (i,j) 上的值 $u(x_i,y_j)$ 为 u_{ij}. 以 Ω_h 表示所有与 Ω 相交的正方形所成的多边形区域，在 Ω_h 内部节点 (i,j) 上分别用差商

$$\frac{u_{i-1,j}-2u_{ij}+u_{i+1,j}}{h^2},\quad\frac{u_{i,j-1}-2u_{ij}+u_{i,j+1}}{h^2}$$

代替偏导数

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad\frac{\partial^2u}{\partial y^2},$$

对应的差分方程为

$$u_{ij}=\frac{1}{4}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}).\quad(1)$$

在 Ω_h 的边界节点上取 $u_{ij}=\varphi(x_i^*,y_j^*)$，式中 (x_i^*,y_j^*) 是与节点 (i,j) 最接近的 $\partial\Omega$ 上的点. 于是得到了以所有 Ω_h 的内节点上 u_{ij} 的值为未知量的形如(1)的方程组成的线性代数方程组，未知量的个数与方程的个数都等于 Ω_h 的内节点的总数. 可以证明，这个方程组有惟一的解；且对任意 $\varepsilon>0$，把 h 充分缩小后可使得到的解 u_{ij} 与精确解 $u(x,y)$ 在点 (i,j) 上的值的差值小于 ε.

格林函数方法(Green function method)　通过格林函数求偏微分方程定解问题的解的方法. 见“格林函数”.

刘维尔定理(Liouville theorem)　在整个 $\mathbf{R}^n$ 中有上界或有下界的调和函数是常数. 在二维情形，若方程 $Lu=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=0$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上是一致椭圆的，而 u 是定义在全平面上的有上(下)界的解，则 u 是常数.

补法向微商(conormal derivative)　与散度形式的椭圆算子有关的方向微商. 给定区域 Ω 上的散度形式的椭圆算子 $Lu=-D_i(a_{ij}(x)D_ju+b_i(x)u)+c_i(x)D_iu+d(x)u$，设 ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，则

$$\frac{\partial u}{\partial\nu_L}=(a_{ij}(x)D_ju+b_i(x)u)|_{\partial\Omega}\nu_i$$

称为 u(关于算子 L)的补法向微商. 而向量 $(a_{i1}(x)\nu_i,a_{i2}(x)\nu_i,\cdots,a_{in}(x)\nu_i)$ 称为补法向量.

补法向量(conormal vector)　见“补法向微商”.

斜微商问题(oblique derivative problem)　求解满足斜微商边界条件的椭圆型方程的解的问题. 形如

$$Nu = a(x)u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i u = \varphi(x \in \partial\Omega)$$

的边界条件称为斜微商边界条件. 若向量 $b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的法向分量 b_ν 在 $\partial\Omega$ 上非零,则称上述条件为正则斜微商边界条件.

斜微商边界条件(oblique derivative boundary condition) 见"斜微商问题".

正则斜微商边界条件(regular oblique derivative boundary condition) 见"斜微商问题".

开尔文变换(Kelvin transform) 一种变量代换. 由等式

$$v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$

定义的 u 到 v 的变换称为开尔文变换. 它是论证二阶椭圆型方程的解在球上有全局正则性的重要工具.

亚历山德罗夫极大值原理(Aleksandrov maximum principle) 关于椭圆型方程强解最大值的估计. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界区域,

$$u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega),$$

满足

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u \geqslant f,$$

其中 $\mathscr{A} = [a_{ij}]$ 在 Ω 内是正定矩阵,记 $\mathscr{D}^* = (\det[a_{ij}])^{1/n}$,设 $\Lambda > \lambda > 0$ 是常数,

$$\lambda \leqslant \mathscr{D}^* \leqslant \Lambda, \quad |b|/\mathscr{D}^* \in L^n(\Omega),$$
$$f/\mathscr{D}^* \in L^n(\Omega), \quad c(x) \leqslant 0 \ (x \in \Omega),$$

则

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \| f/\mathscr{D}^* \|_{L^n(\Omega)}.$$

这一定理是由估计一个函数的上接触集的法映射的像的测度来证明的.

上接触集(upper contact set) 函数定义域的一个子集. 设 u 是区域 Ω 上的一个连续函数,则 $\Gamma^+ = \{y \in \Omega \mid \exists p = p(y) \in \mathbb{R}^n$, 使得 $u(x) \leqslant u(y) + p \cdot (x-y), \forall x \in \Omega\}$ 称为函数 u 的上接触集,即 Γ^+ 由这样的点组成:u 的图象位于过这些点的支撑平面的下方. 特别地,当 u 为凹函数时,$\Gamma^+ = \Omega$.

法映射(normal mapping) 连续函数的定义域 Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) 到 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集类的映射. 对 $u \in C^0(\Omega)$,记 $\chi(y) = \chi_u(y)$ 是在点 y 的支撑平面的斜率的集,即 $\chi(y) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \leqslant u(y) + p \cdot (x-y), \forall x \in \Omega\}$. $\chi: y \to \chi(y)$ 是由 Ω 到 $\mathbb{R}^n$ 的子集类的映射,称为由 u 所确定的法映射. 对上接触集 Γ^+ 当且仅当 $y \in \Gamma^+$,$\chi(y)$ 非空. 若 $u \in C^1(\Omega)$,则在 Γ^+ 上 $\chi(y) = Du(y)$,即 χ 是 u 在 Γ^+ 上的梯度向量场. 若

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}),$$

则

$$|\chi(\Omega)| = |\chi(\Gamma^+)| = |Du(\Gamma^+)| \leqslant \int_{\Gamma^+} |\det D^2 u| \mathrm{d}x.$$

玻尼极值原理(Bony maximum principle) $W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ 中的函数在一个点上达到最大值的条件. 设 $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$,$x_0$ 是 u 的一个极大值点,若 $p > n$,则

$$\liminf_{y \to x_0} \operatorname{ess} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} \leqslant 0,$$

其中 (a_{ij}) 是 Ω 内的一个非负定矩阵且 $a_{ij} \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$. 实际上,当 $p=n$ 时上述结论亦成立,且结论可改写为

$$\limsup_{y \to x_0} \operatorname{ess} \lambda(y) \leqslant 0, \liminf_{y \to x_0} \operatorname{ess} |Du(y)| = 0,$$

其中 $\lambda(y)$ 是 $(D^2 u(y))$ 的最大特征值.

窄区域极值原理(maximum principle in "narrow domains") 关于椭圆型方程在小区域内的解的极大值的定理. 设对二阶线性椭圆算子

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u,$$

存在常数 $\Lambda > \lambda > 0, d > 0, b > 0$,使得 $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,不等式

$$\lambda |\xi^2| \leqslant a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda |\xi^2|$$

在 Ω 上几乎处处成立,且

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \leqslant b, \quad |c| \leqslant b, \quad \operatorname{diam}\Omega \leqslant d.$$

若存在常数 $\delta > 0$,使当 $\operatorname{meas}\Omega = |\Omega| < \delta$ 时,只要 $u \in W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$ 满足 $Lu \geqslant 0$(在 Ω 内),且

$$\limsup_{x \to \partial\Omega} u(x) \leqslant 0,$$

则在 Ω 内 $u \leqslant 0$.

弗雷德霍姆二择一定理(Fredholm alternative theorem) 研究线性椭圆型方程的解存在问题的一个泛函分析定理. 在赋范空间中的这个定理表述为:设 V 是赋范线性空间,$A: V \to V$ 是一紧线性算子,则以下两种可能有一个且只有一个发生:

1. 存在 $x \in V$ ($x \neq 0$),使得 $x - Ax = 0$.

2. 对于任意 $y \in V$,存在惟一的 $x \in V$,使得 $x - Ax = y$. 在第二种情形下,$(I-A)^{-1}$ 是有界线性算子.

希尔伯特空间中的弗雷德霍姆二择一定理表述如下:设 H 是一个希尔伯特空间,$T: H \to H$ 是一个紧线性算子. 则存在一可数集 $\Lambda \subset \mathbb{R}$,$\Lambda$ 不含非零极限点,使得若 $\lambda \neq 0$,$\lambda \notin \Lambda$,则方程 $\lambda x - Tx = y$,$\lambda x - T^* x = y$,对每一 $y \in H$ 有惟一解,且逆算子

$$(\lambda I - T)^{-1}, \ (\lambda I - T^*)^{-1}$$

有界. 若 $\lambda \in \Lambda$,则算子 $\lambda I - T$ 和 $\lambda I - T^*$ 的零空间有正有限维数;当且仅当 y 正交于 $\lambda I - T^*$ 的零空间,上述第一个方程有解;而当且仅当 y 正交于 $\lambda I - T$

的零空间，第二个方程有解.

把这一定理用于散度形式的椭圆型方程的狄利克雷问题

$$\begin{cases} Lu+\mu u=-D_j(a_{ij}D_iu+d_ju) \\ \quad +b_iD_iu+cu+\mu u=f & (\text{在 }\Omega\text{ 内}), \\ u=g & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}). \end{cases} \quad (1)$$

则有如下结果：若 $a_{ij},b_i,c,d_j\in L^{\infty}(\Omega)$，且存在常数 $\Lambda>\lambda>0$，使得 $\lambda|\xi|^2\leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2(x\in\Omega,\forall\xi\in\mathbb{R}^n)$；又设 Ω 为使索伯列夫嵌入定理成立的有界区域，$f\in H^{-1}(\Omega)$，则问题(1)只有以下两种可能：

1. 对于任意 $f\in H^{-1}(\Omega)$，$g\in H^1(\Omega)$，问题(1)有惟一的弱解.

2. 存在非零的 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得 $Lu+\mu u=0$.

此外，使第二种情况成立的 μ 是离散的，只能以∞为极限点，对每一特征值 μ，相应的特征函数空间是有限维的.

散度形式二阶线性椭圆型方程的解(solution of second order linear elliptic equation of divergence form)　见“弗雷德霍姆二择一定理”.

先验估计(prior estimate)　近代研究偏微分方程的一种基本方法和技巧. 对偏微分方程定解问题，在解存在的假设下，通过方程系数、自由项及定解条件估计解在某个巴拿赫空间(一般是索伯列夫空间或连续可微函数空间)中的范数的上界的不等式，例子参见“绍德尔估计”、“解的 L^p 估计”. 利用先验估计来探讨偏微分方程定解问题解的存在、惟一及光滑等性质是近代偏微分方程研究的一个重要方法.

绍德尔估计(Schauder estimates)　对带赫尔德连续系数的二阶线性椭圆型方程的 $C^{2,\alpha}(\Omega)$ 范数的估计. 设 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$ 满足方程 $Lu=-a_{ij}D_{ij}u+b_iD_iu+cu=f$(在 Ω 内)，假设系数满足：存在常数 $\Lambda\geqslant\lambda>0$ 及 $\Lambda_\alpha>0$ 使得：

$$\lambda|\xi|^2\leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2\quad(\forall x\in\Omega,\xi\in\mathbb{R}^n),$$

$$\frac{1}{\lambda}\Big\{\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}|_{\alpha,\Omega}+\sum_{i=1}^n|b_i|_{\alpha,\Omega}+|c|_{\alpha,\Omega}\Big\}\leqslant\Lambda_\alpha,$$

则对任意 $\Omega'\subset\Omega$，有绍德尔内估计

$$|u|_{2,\alpha,\Omega'}\leqslant C\left(\frac{1}{\lambda}|f|_{\alpha,\Omega}+|u|_{0,\Omega}\right),$$

其中 C 只依赖于 $n,\alpha,\Lambda/\lambda,\Lambda_\alpha$ 以及 $\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)$.

设 L 的系数满足上述条件，又设 $\partial\Omega$ 属于 $C^{2,\alpha}$，$u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 满足上述方程与边条件 $u|_{\partial\Omega}=0$，则有绍德尔全局估计

$$|u|_{2,\alpha;\Omega}\leqslant C\left(\frac{1}{\lambda}|f|_{\alpha,\Omega}+|u|_{0,\Omega}\right),$$

其中 C 只依赖于 $n,\alpha,\Lambda/\lambda,\Lambda_\alpha$ 与 Ω.

绍德尔内估计与绍德尔全局估计统称绍德尔估计.

绍德尔内估计(Schauder interior estimates)　见“绍德尔估计”.

绍德尔全局估计(Schauder global estimates)　见“绍德尔估计”.

德·吉奥基-纳什估计(De Giogi-Nash estimates)　对带间断系数的散度形式二阶线性椭圆型方程的解的赫尔德系数的估计. 1957 年，德·吉奥基(De Giogi, E.)得到这一估计，1958 年，纳什(Nash, J. F.)对于抛物型方程独立地得到了类似估计. 设 $u\in H^1(\Omega)$ 是散度形式一致椭圆型方程 $Lu=-D_j(a_{ij}D_iu)+b_iD_iu+cu=0$ 的有界弱解，其系数满足条件：对常数 $\Lambda\geqslant\lambda>0$，有

$$\lambda|\xi|^2\leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2\quad(\forall x\in\Omega,\xi\in\mathbb{R}^n),$$

$$\sum_{i,j=1}^n\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}+\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\Lambda,$$

则存在 $C\geqslant0$，$0<\gamma<1$，使得对任意 $B_R(x)\subset\Omega$ 有

$$\operatorname*{ess\ osc}_{B_R(x)}u\leqslant C\left(\frac{R}{d_x}\right)^\gamma\operatorname*{ess\ osc}_{B_{d_x}(x)}u,$$

其中 $d_x=\operatorname{dist}\{x,\partial\Omega\}$，$C$ 与 γ 只依赖于 n 与 Λ/λ，

$$\operatorname*{ess\ osc}_A u=\operatorname*{ess\ sup}_A u-\operatorname*{ess\ inf}_A u.$$

由上可知，u 在 Ω 内连续(指几乎处处等于某一在 Ω 内的连续函数)，使得对于任意的 $x,y\in\Omega$，有

$$|u(x)-u(y)|\leqslant C\left(\frac{|x-y|}{d_{xy}}\right)^\gamma\|u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

其中 $d_{xy}=\min\{d_x,d_y\}$，C 与 γ 只依赖于 n 与 Λ/λ. 若 u 是非齐次方程 $-D_j(a_{ij}D_iu)+b_iD_iu+cu=f+D_if_i$ 的弱解，对于某个 $q>n$，$f\in L^{q_*}(\Omega)$，$f_i\in L^q(\Omega)$，其中 $q_*=nq/(n+q)$，则存在 $C>0$ 与 $0<\gamma<1$，使得对任意 $B_R(x)\subset\Omega$，都有

$$\operatorname*{ess\ osc}_{B_R(x)}u\leqslant C\left(\frac{R}{d_x}\right)^\gamma\Big[\operatorname*{ess\ osc}_{B_{d_x}(x)}u+d_x^\gamma\Big(\|f\|_{L^{q_*}(\Omega)}+\sum_{i=1}^n\|f_i\|_{L^q(\Omega)}\Big)\Big],$$

其中 C 与 γ 只依赖于 $n,\Lambda/\lambda$ 与 $\operatorname{diam}\Omega$. 若 Ω 具有一致外锥性质，$h>0$ 是一致外锥性质中的锥高. 设 u 是上述方程的弱解，

$$[u]_{\varepsilon_1,\partial\Omega}=\sup_{x,y\in\partial\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\varepsilon_1}}<+\infty,$$

则存在 $C>0$，$0<\gamma<1$，使得对任意 $x,y\in\Omega$，有

$$|u(x)-u(y)|\leqslant C|x-y|^\gamma\Big(|u|_{0;\Omega}+[u]_{\varepsilon_1,\partial\Omega}+\|f\|_{L^{q_*}(\Omega)}+\sum\|f_i\|_{L^q(\Omega)}\Big),$$

其中 C 与 γ 只依赖于 $n,\Lambda/\lambda,\ \varepsilon_1,q$ 与 Ω.

弱哈纳克不等式(weak Harnack inequality)　有界可测系数的散度形式的椭圆型方程的非负上解在一个球上的下确界控制它在同心倍球上的 L^p 范数的不等式. 设散度形式二阶线性椭圆算子 $Lu=$

$D_i(a_{ij}D_ju+b_i(x)u)+c_i(x)D_iu+d(x)u$ 的系数满足

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2\quad(\forall x\in\Omega,\xi\in\mathbb{R}^n),$$

$$\sum_{i,j}|a_{ij}(x)|^2\leqslant\Lambda^2,$$

$$\lambda^{-2}\sum_i(|b_i(x)|^2+|c_i(x)|^2)+\lambda^{-1}|d(x)|\leqslant v^2.$$

设 $u\in H^1(\Omega)$ 满足不等式 $Lu\leqslant g+D_if_i$ 且在球 $B_{4R(y)}\subset\Omega$ 内非负，其中对某一 $q>n,f_i\in L^q(\Omega),g\in L^{q/2}(\Omega)$. 设 $1\leqslant p<n/(n-2)$，则

$$R^{-n/p}\|u\|_{L^p(B_{2R}(y))}\leqslant C(\inf_{B_R(y)}u+k(R)),$$

其中 $C=C(n,\Lambda/\lambda,v,R,q,p),k(R)=\lambda^{-1}(R^\delta\|f\|_q+R^{2\delta}\|g\|_{q/2}),\delta=1-n/q$.

弱解的哈纳克不等式(Harnack inequality for weak solution)　调和函数的哈纳克不等式(参见“哈纳克不等式”)的推广. 设散度形式算子 L 满足“弱哈纳克不等式”词条中的有关系数的条件，$u\in H^1(\Omega)$ 是 $Lu=0$ 在 Ω 中的非负弱解，则对任意 $B_{4R}(y)\subset\Omega$，有

$$\sup_{B_R(y)}u\leqslant C\inf_{B_R(y)}u,$$

其中 $C=C(n,\Lambda/\lambda,v,R)$. 由此知对任意 $\Omega'\subset\Omega$，有

$$\sup_{\Omega'}u\leqslant C\inf_{\Omega'}u,$$

其中 $C=C(n,\Lambda/\lambda,v,\Omega',\Omega)$. 由哈纳克不等式可推导出弱解的德·吉奥基-纳什估计.

解的 L^p 估计(L^p estimates of solution)　二阶线性椭圆方程的解的 $W^{2,p}$ 范数估计. 设 $u\in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 在 Ω 上几乎处处满足方程 $Lu=-a_{ij}D_{ij}u+b_iD_iu+cu=f$，方程系数满足条件：存在常数 $\Lambda\geqslant\lambda>0$ 使得：

$$a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2\ (\forall x\in\Omega,\xi\in\mathbb{R}^n),$$

$$\sum_{i,j}\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}+\sum_i\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}+\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\Lambda$$

$$(a_{ij}\in C(\overline{\Omega});i,j=1,2,\cdots,n),$$

则对任意 $\Omega'\subset\Omega$，有 L^p 内估计

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')}\leqslant C\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|u\|_{L^p(\Omega)}\right),$$

其中 C 依赖于 $n,p,\Lambda/\lambda,\mathrm{dist}\{\Omega',\partial\Omega\}$ 以及 a_{ij} 的连续模. 若再设 $\partial\Omega$ 属于 $C^{1,1}$，$u\in W^{2,p}(\Omega)\cap W^{1,p}_0(\Omega)$，则有 L^p 全局估计

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant C\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|u\|_{L^p(\Omega)}\right),$$

其中 C 依赖于 $n,p,\Lambda/\lambda,\Omega$ 以及 a_{ij} 的连续模. 解的 L^p 内估计与解的 L^p 全局估计统称解的 L^p 估计.

解的 L^p 内估计(L^p interior estimates of solution)　见“解的 L^p 估计”.

解的 L^p 全局估计(L^p global estimates of solution)　见“解的 L^p 估计”.

克里洛夫-萨弗诺夫估计(Krylov-Safonov estimates)　非散度形式二阶线性椭圆方程的赫尔德模估计，它对于完全非线性方程的研究是不可缺的. 克里洛夫(Krylov,N. V.)与萨弗诺夫(Safonov,M. V.)的这一估计是基于亚历山德罗夫极值原理得到的. 设 $u\in W^{2,n}(\Omega)$ 满足 $Lu=a_{ij}D_{ij}u+b_iD_iu+cu=f$ (在 Ω 内)，其系数满足 $\lambda|\xi|^2\leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2,x\in\Omega,\xi\in\mathbb{R}^n,\Lambda>\lambda>0$ 为常数，

$$\frac{\Lambda}{\lambda}\leqslant\gamma,\ \left(\frac{|b|}{\lambda}\right)^2\leqslant v,\ \frac{|c|}{\lambda}\leqslant v,$$

则对任意球 $B_0=B_{R_0}(y)\subset\Omega$ 和 $R\leqslant R_0$，有

$$\operatorname*{osc}_{B_R(y)}u\leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha(\operatorname*{osc}_{B_0}u+\bar{k}R_0),$$

其中 $C=C(n,\gamma,v,R_0^2),\alpha=\alpha(n,\gamma,v,R_0^2)$ 是正数，而 $\bar{k}=\|f-cu\|_{n,B_0}$. 若 $u\in W^{2,n}(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 满足 $Lu=f$，在 $\partial\Omega$ 上 $u=\varphi$，$f\in L^n(\Omega),\varphi\in C^\beta(\overline{\Omega})(\beta>0)$，$\partial\Omega$ 满足一致外锥条件，则 $u\in C^\alpha(\overline{\Omega})$ 并且 $|u|_{\alpha,\Omega}\leqslant C$.

二阶完全非线性椭圆型方程(fully nonlinear elliptic equation of second order)　最一般的二阶椭圆型方程，即形如 $F(x,u,Du,D^2u)=0$ 的方程，其中 $F(x,z,p,r)$ 定义于 $\Gamma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathscr{S}^n$ 上，$\mathscr{S}^n$ 表示所有 n 阶对称矩阵组成的空间，且

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\right)$$

是正定矩阵. 设非线性函数 $F(x,z,p,r)$ 在 Γ 上满足以下结构条件：

1. 存在 $\lambda=\lambda(x,z,p),\Lambda=\Lambda(x,z,p)$，使在 Γ 上
$$\lambda I\leqslant\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\right)\leqslant\Lambda I,\ \lambda>0,\ \Lambda/\lambda\leqslant\mu_1(|z|).$$
2. $|F(x,z,p,0)|\leqslant\lambda\mu_2(|z|)(1+|p|^2)$.
3. $(1+|p|)^{-1}|F_x|+|F_u|+(1+|p|)|F_p|\leqslant\lambda\mu_3(|z|)(1+|p|^2+|r|)$.
4. $F(x,z,p,r)$ 关于 r 是凹的.
5. $F(x,z,p,0)\operatorname{sign}z\leqslant\lambda\bar{\mu}(1+|p|)$.
6. $F_z(x,z,p,r)\leqslant0$.

上面的 $\bar{\mu}$ 是常数，$\mu_i(t)(i=1,2,3)$ 是 $[0,+\infty]$ 上的非减非负函数，且 Λ 在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 上局部有界，则存在 $0<\alpha<1$，使得对于任意 $0<\beta<\alpha$，如果 $\partial\Omega\in C^{2,\beta},\varphi\in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$，则存在惟一解 $u\in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases}F(x,u,Du,D^2u)=0 & (\text{在 }\Omega\text{ 内}),\\ u=\varphi & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}),\end{cases}$$

其中 α 依赖于 $n,\mu_1,\mu_2,\mu_3,|\varphi|_2$ 以及 Ω，$|\varphi|_2$ 是 φ 在 $C^2(\overline{\Omega})$ 中的范数.

贝尔曼方程(Bellman equation)　控制论中提出来的一类完全非线性一致椭圆型方程. 设

$$L_ku=a_k^{ij}D_{ij}u+b_k^iD_iu+c_ku\quad(k=1,2,\cdots,N).$$

贝尔曼方程的狄利克雷问题是

$$\begin{cases}\inf\limits_{1\leqslant k\leqslant N}(L_ku-f_k)=0 & (\text{在 }\Omega\text{ 内}),\\ u=\varphi & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}).\end{cases}$$

假设系数满足以下条件：

1. 存在 $\Lambda \geqslant \lambda > 0$，使得在 Ω 上
$\lambda I \leqslant (a_k^{ij}) \leqslant \Lambda I,\ \Lambda/\lambda \leqslant \mu_1\ (k=1,2,\cdots,N)$，
其中 μ_1 是常数.

2. 存在常数 Λ_1，使得在 Ω 上
$$\sum_{i,j,k}|a_k^{ij}|_\beta+\sum_{i,k}|b_k^i|_\beta+\sum_k(|c_k|_\beta+|f_k|_\beta)\leqslant \Lambda_1.$$

3. 在 Ω 内，$c_k \leqslant 0$.

设存在 $\alpha=\alpha(n,\mu_1)$，使得当 $0<\beta<\alpha$ 时，$\partial\Omega\in C^{2,\beta}$，$\varphi\in C^{2,\beta}(\bar\Omega)$，则贝尔曼方程的狄利克雷问题有解 $u\in C^{2,\beta}(\bar\Omega)$. 上述方程由贝尔曼(Bellman, R.)建立，它在变分法中起着重要作用.

蒙日-安培方程(Monge-Ampère equation)　一类几何问题中提出来的完全非线性椭圆型方程，其形式是 $\det(D^2u)=f(x,u,Du)$. 当黑塞矩阵 D^2u 正定时这个方程才是椭圆型方程. 若 $f\in C^2(\bar\Omega\times \mathrm{R}\times \mathrm{R}^n)$是一个正函数，满足结构条件：

1. 存在非负函数 $g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}^n)$，$h\in L^1(\Omega)$和常数 N，使得
$$-f(x,z,p)\operatorname{sign} z\leqslant \frac{h(x)}{g(p)}$$
$$(\forall x\in\Omega,|z|\geqslant N,p\in\mathrm{R}^n).$$

2. $\int_\Omega h\mathrm{d}x<\int_{\mathrm{R}^n}g(p)\mathrm{d}p\equiv g_\infty$.

3. $0\leqslant f(x,z,p)\leqslant \mu(|z|)|p|^{n+1}$，$x$ 属于 $\partial\Omega$ 的一邻域 $\mathscr{N}$，$z\in\mathrm{R}$，$|p|\geqslant\mu(|z|)$，μ 是一个非减函数，且 $f_z\geqslant 0$.

又设 $\partial\Omega\in C^4$，Ω 是一致凸区域，则蒙日-安培方程的狄利克雷问题
$$\begin{cases}\det(D^2u)=f(x,u,Du) & (\text{在 }\Omega\text{ 内}),\\ u=\varphi & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上})\end{cases}$$
对任意 $0<\alpha<1$ 有解 $u\in C^{3,\alpha}(\bar\Omega)$.

极小曲面方程(minimal surface equation)　在固定边界上的具有最小面积的曲面所满足的方程. 设 R^{n+1}中的曲面方程为 $x_{n+1}=u(x)(x\in\Omega)$，则面积积分
$$S=\int_\Omega\sqrt{1+|Du|^2}\mathrm{d}x$$
的欧拉-拉格朗日方程
$$\mathscr{M}u=\frac{1}{n}D_i\left(\frac{D_iu}{1+|Du|^2}\right)^{1/2}=0$$
即是极小曲面方程. 这是一个熟知的拟线性椭圆型方程，它是更一般的指定平均曲率方程的特例. 若 Ω 是 R^n 中的有界 C^2 区域，则狄利克雷问题 $\mathscr{M}u=0$ (在 Ω 内)，$u=\varphi$(在 $\partial\Omega$ 上)对任意 $\varphi\in C^0(\partial\Omega)$有解的充分必要条件是边界 $\partial\Omega$ 的平均曲率处处非负.

指定平均曲率方程(prescribed mean curvature equation)　平均曲率为已知的曲面所满足的方程. 如果 R^{n+1}中的曲面 $x_{n+1}=u(x)$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega$ 的平均曲率为 $H(x)$，则函数 $u(x)$满足方程
$$\frac{1}{n}\left(D_i\left[\frac{D_iu}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right]\right)=H(x),$$
或
$$\mathscr{M}u=(1+|Du|^2)\Delta u-D_iuD_juD_{ij}u$$
$$=nH(1+|Du|^2)^{3/2},$$
称它为指定平均曲率方程. 以 ν 记曲面 $x_{n+1}=u(x)$ 的法向量，令
$$H_0=\sup_\Omega|H|,$$
$$H_1=\sup_\Omega(-\nu\cdot DH)^+\leqslant\sup_\Omega|DH|.$$
设 $u\in C^2(\Omega)$，$y'\in\Omega$，令 $d=\operatorname{dist}(y',\partial\Omega)$，则有梯度估计 $|Du(y')|\leqslant C_1\exp\{C_2\sup_\Omega(u-u(y'))/d\}$，其中 $C_1=C_1(n,dH_0,d^2H_1)$，$C_2=C_2(n,dH_0,d^2H_1)$.

设 Ω 是有界区域，$\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$，$0<\alpha<1$，$\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$. 平均曲率 $H\in C^1(\bar\Omega)$，$\partial\Omega$ 的平均曲率 H' 满足
$$H'(y)\geqslant\frac{n}{n-1}(H(y))\ (\forall y\in\partial\Omega).$$
又设存在 $\varepsilon_0>0$，使得
$$\left|\int_\Omega H\eta\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(1-\varepsilon_0)}{n}\int_\Omega|D\eta|\mathrm{d}x\ \ (\forall\ \eta\in C_0^1(\Omega)).$$
则狄利克雷问题 $\mathscr{M}u=nH(1+|Du|^2)^{3/2}$(在$\Omega$ 内)，$u=\varphi$(在 $\partial\Omega$ 上)有惟一解 $u\in C^{2,\alpha}(\bar\Omega)$. 若 $\varphi\in C^0(\partial\Omega)$，则有惟一解 $u\in C^0(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$.

索伯列夫空间的内插不等式(interpolation inequality of Sobolev space)　由高阶和低阶索伯列夫空间范数控制中间阶索伯列夫空间范数的不等式. 设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 具有一致锥性质，并且设 ε_0 是有限正数，则存在常数 $K=K(\varepsilon_0,m,p,\Omega)$，使对任意的 ε，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，任意的整数 $j(0\leqslant j\leqslant m-1)$，以及任意的 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，有
$$\|u\|_{j,p}\leqslant K\varepsilon\|u\|_{m,p}+K\varepsilon^{-j/(m-j)}\|u\|_{0,p}.$$
称该不等式为索伯列夫空间的内插不等式.

尼伦伯格不等式(Nirenberg inequality)　一种形式的索伯列夫空间内插不等式. 设 $\Omega\subset\mathrm{R}^n$ 是一个具有限锥性质的 n 维有界区域，记
$$\langle\nabla_lu\rangle_p=\|\nabla_lu\|_{L_p(\Omega)}$$
$$=\left(\int_\Omega\left(\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u(x)|^2\right)^{p/2}\right)^{1/p},$$
则
$$\langle\nabla_ju\rangle_q\leqslant C(\langle\nabla_lu\rangle_p+\langle u\rangle_r)^\tau\langle u\rangle_r^{1-\tau},\qquad(1)$$
其中 $p\geqslant1$，$r\geqslant1$，
$$\frac{1}{q}=\frac{j}{n}+\tau\left(\frac{1}{p}-\frac{l}{n}\right)+\frac{(1-\tau)}{r}\qquad(2)$$
$$\left(\tau\in\left[\frac{j}{l},1\right]\right),$$
除非 $1<p<+\infty$且 $l-j-n/p$ 是非负整数，当 $1<p$

$<+\infty$且 $l-j-n/p$ 为非负整数时(1)对 $\tau\in[j/l,1]$成立.

弗里德里希斯不等式(Friedrichs inequality) 关于函数与其梯度的 L^2 范数的不等式. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个使高斯-格林公式成立的区域,则称不等式

$$\int_\Omega u^2\mathrm{d}x \leqslant K\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u^2\mathrm{d}S\right)$$

为弗里德里希斯不等式.

庞加莱不等式(Poincaré inequality) 关于函数与其梯度的 L^p 范数的不等式. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 含于一个宽度为 h 的条形区域内,$u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, 则下列庞加莱不等式成立

$$\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x \leqslant h^p\int_\Omega |Du|^p\mathrm{d}x.$$

而不等式

$$\int_\Omega u^2\mathrm{d}x \leqslant K\int_\Omega |Du|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{|\Omega|}\left(\int_\Omega u\mathrm{d}x\right)^2$$

亦称为庞加莱不等式. 若集合 $N=\{x\in\Omega\,|\,u(x)=0\}$ 的 $\mathbb{R}^{n-1}$中的测度$|N|>0$,则

$$\int_\Omega u^2\mathrm{d}x \leqslant K\int_\Omega |Du|^2\mathrm{d}x.$$

李亚普诺夫曲面(Liapunov surface) 体积分及曲面积分相互转化的格林公式对任意连续可微函数都成立的一类区域的边界曲面. $\mathbb{R}^n$ 中的区域 Ω 的边界 S 如果满足下列条件,则称 S 为李亚普诺夫曲面:

1. S 被有限个 n 维区域覆盖,在每个区域内的点 $x\in S$ 有参数表示 $x_i=x_i(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})(i=1,2,\cdots,n)$,$x_i$ 定义在变量 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$的一个有界区域 $\mathscr{S}$ 内.

2. 函数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 建立了 $\overline{\mathscr{S}}$ 与 S 的对应部分之间的一一对应,$x_i\in C^{1,h}(\overline{\mathscr{S}})$.

3. 在 $\mathscr{S}$ 内

$$J=\left\{\sum\left[\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)}{\partial(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})}\right]^2\right\}^{1/2}>0.$$

4. 曲面 S 的外法线 ν 满足

$$\cos(\nu,x_i)=\frac{1}{J}\frac{\partial(x_{i+1},\cdots,x_n,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1})}{\partial(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

若 S 为李亚普诺夫曲面,$p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in C^{1,0}(\overline{\Omega})$,则有格林公式

$$\int_\Omega \operatorname{div}\, p\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega} p\cdot\nu\,\mathrm{d}S,$$

其中 ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向,$\mathrm{d}S=J\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_{n-1}$为面积微元.

单层位势(single layer potential) 通过基本解定义的一个曲面积分,也是拉普拉斯方程的一个特解. 设 $\Gamma(x,y)$是拉普拉斯算子在区域 Ω 上的基本解,函数

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\Gamma(x,y)\sigma(y)\mathrm{d}S_y$$

称为密度为 σ 的单层位势. 如果 $\partial\Omega$ 是李亚普诺夫曲面,则对任意 $x_0\in\partial\Omega$ 有

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial\nu(x_0)}=-\frac{1}{2}\sigma(x_0)+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Gamma(x_0,y)}{\partial\nu(x_0)}\sigma(y)\mathrm{d}S_y,\quad(1)$$

其中 $\nu(x_0)$是在 x_0 处的外法线,而

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial\nu(x_0)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in\Omega}}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu(x_0)}.$$

称(1)为单层位势的跃度关系. 根据(1)可将拉普拉斯方程诺伊曼问题

$$\begin{cases}\triangle u=0 & (\text{在 }\Omega\text{ 中}),\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\varphi & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上})\end{cases}$$

化为对 $\sigma(x)$解下列积分方程的问题

$$\sigma(x)=2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial\nu(x)}\sigma(y)dS_y-2\varphi(x).$$

单层位势导数的跃度关系(jump relation of derivatives of single layer potential) 见"单层位势".

双层位势(double layer potential) 通过基本解的法向导数定义的一个曲面积分,也是拉普拉斯方程的一个特解. 设$\Gamma(x,y)$是拉普拉斯算子在区域 Ω 上的基本解,函数

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial\nu(y)}\sigma(y)\mathrm{d}S_y$$

称为密度为 σ 的双层位势,其中 $\nu(x)$为在 x 处的外法线. 如果 $\partial\Omega$ 是李亚普诺夫曲面,则对任意 $x\in\partial\Omega$,有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in\Omega}}u(x)=\frac{1}{2}\sigma(x_0)+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Gamma(x_0,y)}{\partial\nu(x_0)}\sigma(y)\mathrm{d}S_y.$$

此式称为双层位势的跃度关系. 因此,可将拉普拉斯方程狄利克雷问题

$$\begin{cases}\triangle u=0 & (\text{在 }\Omega\text{ 中}),\\ u=\varphi & (\text{在 }\partial\Omega\text{ 上})\end{cases}$$

化为对 $\sigma(x)$解下列积分方程的问题

$$\sigma(x)=-2\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial\nu(y)}\sigma(y)\mathrm{d}S_y+2\varphi(x).$$

双层位势的跃度关系(jump relation of double layer potential) 见"双层位势".

撰 稿 王耀东 白东华 白其峥 汪明汉 陆文端 罗学波 胡玉英 唐志远 唐贤江

审 阅 丁伟岳 孙和生 沈尧天 陈庆益 姜礼尚 顾永耕 萧 玲 辜联昆

积 分 方 程

积分方程(integral equation)　积分号下出现未知函数的方程. 数学物理中的某些问题常可直接归结为积分方程. 早在 1823 年,阿贝尔(Abel,N. H.)研究重力场中质点运动轨道形状与落下时间的关系就得到被称为阿贝尔方程的积分方程. 刘维尔(Liouville,J.)自 1832 年起就解出一些特殊的积分方程并把微分方程的初值问题化为积分方程再用逐次代入法求解. 这些早期工作是零星的,直到 19 世纪最后几年积分方程理论才得到迅速发展,奠基性的贡献是由沃尔泰拉(Volterra,V.)、弗雷德霍姆(Fredholm,(E.)I.)以及稍后的希尔伯特(Hilbert,D.)给出的. 从此积分方程就发展成数学学科的一个独立分支.

沃尔泰拉是积分方程一般理论的第一个创立者. 1896－1897 年,他研究了后来被称为第二类沃尔泰拉方程的积分方程

$$f(x)=u(x)+\int_a^x k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad (1)$$

提供了求解的逐次逼近法,巧妙地证明其收敛性,从而得出解的存在性,并且指出第一类沃尔泰拉方程

$$f(x)=\int_a^x k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

均可化为第二类沃尔泰拉方程求解. 他注意到积分方程是线性方程组当未知数个数趋于无穷时的极限形式. 弗雷德霍姆继承了这一观点,他于 1900 年系统地研究了后来被称为第二类弗雷德霍姆积分方程的一般核的积分方程

$$f(x)=u(x)+\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad (2)$$

得到被称为弗雷德霍姆定理的积分方程的基本定理. 沃尔泰拉方程是(2)当 $k(x,\xi)=0(\xi>x)$ 的特例. 与沃尔泰拉方程不同,第一类弗雷德霍姆积分方程

$$f(x)=\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (3)$$

一般不能化为第二类弗雷德霍姆积分方程去解决. 这是因为(3)作为积分算子一般是某些函数空间上的紧算子,而紧算子除有限维外是没有有界逆的. 所以(3)是一种"病态方程",它的理论至今尚不完整.

希尔伯特于 1904－1912 年发表一系列积分方程的论文,将弗雷德霍姆定理在线性方程组理论的基础上严密地实现了极限过程,创立了对称核积分方程系统的谱理论(这工作后来由施密特(Schmidt,E.)简化,因此称为希尔伯特-施密特定理),为了排除连续谱,他引入了全连续的概念并且发现这是弗雷德霍姆方法成功的关键. 他的另一最有价值的成就是把微分方程的斯图姆-刘维尔边值问题化成积分方程,使积分方程成为解常微分方程和偏微分方程的一种重要方法. 希尔伯特对积分方程的贡献在现代分析中产生了十分深远的影响.

一个积分方程,如果弗雷德霍姆定理对于它不成立,或它的特征值有有限的极限点或有连续谱就称为奇异积分方程. 差不多紧接着弗雷德霍姆积分方程的理论的出现,庞加莱(Poincarè,(J.-)H.)和希尔伯特就开始研究带柯西核的奇异积分方程. 奇异积分方程的出现甚至可以追溯到更早,1782 年,拉普拉斯(Laplace,P.-S.)和 1811 年傅里叶(Fourier,J. B. J.)的工作中出现的后来称为拉普拉斯变换和傅里叶变换以及其他名称的各种积分变换,实质上就是奇异积分方程,求其逆变换就是解相应的奇异积分方程. 因为要求有逆变换,所以变换的积分方程不可能是第一类弗雷德霍姆方程. 1921 年,诺特(Noether,F.)提出指标概念,给出奇异积分方程的基本定理——诺特定理. 弗雷德霍姆定理是该定理中指标为零的特例. 奇异积分方程早期未受到重视,20 世纪 40 年代,苏联学者系统研究和发展了奇异积分方程的理论和应用,至今理论已臻于完善,原苏联学者穆斯赫利什维利(Мусхелишвили,Н. И.)的专著《奇异积分方程》就系统地总结了这方面的成果,它的应用范围也日益扩大,例如,在平面弹性理论中的应用已发展成为不可缺少的基本方法.

奇异积分方程另外有两种经典类型:一类是以维纳-霍普夫方程

$$u(x)-\int_0^{+\infty}k(x-\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x)$$
$$(0\leqslant x<+\infty)$$

为代表的卷积型方程. 1948 年,拉波波尔特(Рапопорт,И. М.)把上述方程化为黎曼边值问题去解决. 1958 年,克莱因(Klein,(C.)F.)与哥赫别格(Гохберг,И. Ц.)对卷积型方程建立了一般理论. 另一类型是对偶积分方程.

积分方程的抽象理论开端于里斯(Riesz,F.),他在 1907 和 1918 年的论文中引进了 L^p 空间($p>1$)和全连续算子即线性的紧算子,把

$$\mathscr{K}u(x)=\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

看成 L^p 上定义的算子,积分方程(1)可看做算子方程 $f=(I+\mathscr{K})u$(I 为恒等算子). 当 $\mathscr{K}$ 是全连续

算子时，他建立了这类算子方程的一般的弗雷德霍姆理论，这是泛函分析抽象算子理论的一个首创. 奇异积分方程理论的抽象化分别开端于 1962 年哥赫别格和 1964 年欣布罗特(Shinbrot, M.)，后来的发展称为一般维纳-霍普夫算子的理论. 抽象化的思想不仅用于研究线性积分方程，也大量应用于研究非线性积分方程. 现在积分方程这一分支已成为泛函分析算子理论的一个重要组成部分.

1930 年，哈默斯坦(Hammerstein, H.)建立了如下非线性积分方程

$$x(s) = \int_G k(s,t)f(t,x(t))\mathrm{d}t \quad (s \in G)$$

的求解理论，20 世纪 50 年代以后，这类被称为哈默斯坦方程的研究得到了迅速的发展，出现很多有效的研究方法，如拓扑方法、变分方法和凸锥方法等. 另一类重要的非线性积分方程是 1947 年桑德拉塞卡尔(Chandrasekher, S.)开始研究的所谓 H 方程：

$$H(x) = 1 + xH(x)\int_0^1 \frac{1}{x+t}\psi(t)H(t)\mathrm{d}t.$$

近 20 年来，这类方程的理论也有很快的发展.

非线性积分方程，以及研究历史更短的随机积分方程，积分-微分方程，其内容和范围还没有定型，有待人们去研究和发展.

线性积分方程(linear integral equation)　积分方程主要研究的对象. 若方程中未知函数包含在积分号下，这个方程称为积分方程. 当积分方程中的未知函数是一次时，就称为线性积分方程，它的一般形式是

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

其中 $\alpha(x)$, $f(x)$ 和 $k(x,\xi)$ 都是已知函数，λ 是参数，a, b 是常数，$u(x)$ 是未知函数，$f(x)$ 称为自由项. 如果 $f(x)\equiv 0$，则称该方程为齐次积分方程.

齐次积分方程(homogeneous integral equation)　见“线性积分方程”.

弗雷德霍姆积分方程(Fredholm integral equation)　一类最基本和重要的积分方程. 弗雷德霍姆积分方程的一般形式是

$$\alpha(x)u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

其中核 $k(x,\xi)$ 是连续核或对变量 x, ξ 是 $p(p\geqslant 1)$ 次绝对可积函数，$f(x)$, $u(x)$ 则在适当函数空间中考虑. 当 $\alpha(x)\equiv 0$ 时，上述方程成为

$$\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi = f_1(x),$$

这种方程称为第一类弗雷德霍姆积分方程.

当 $\alpha(x)$ 恒不为零时，方程可改写为下列形式：

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

这种方程称为第二类弗雷德霍姆积分方程. 这是理论上研究得最完善的一类方程. 当 $\alpha(x)$ 在 $[a,b]$ 中的某些点 x 取值为零时，相应的弗雷德霍姆积分方程的一般形式不再能改写为第二类，这种方程称为第三类弗雷德霍姆积分方程. n 维的弗雷德霍姆积分方程有如下形式

$$\alpha(P)u(P) = f(P) + \int_\Omega k(P,Q)u(Q)\mathrm{d}Q,$$

其中 Ω 是 R^n 中的区域，$P,Q\in\Omega$. $u(P)$ 是未知函数，$\alpha(P)$, $f(P)$ 和核 $k(P,Q)$ 是已知函数，并设核对于 P, Q 是 $p(p\geqslant 1)$ 次绝对可积函数. n 维的第二类弗雷德霍姆积分方程的理论和一维的情形没有本质上的不同.

一维的方程也可推广到曲线 L 上，若 L 是复平面上有限条互不相交的分段光滑的简单闭曲线或弧段，则弗雷德霍姆积分方程的一般形式是

$$\alpha(z)u(z) = f(z) + \int_L k(z,t)u(t)\mathrm{d}t \quad (z \in L),$$

其中 $u(z)$ 是 L 上的未知的复变量 z 的函数，$\alpha(z)$, $f(z)$ 及 $k(z,t)$ 是已知的复变量函数.

积分方程的核(kernel of integral equation)　指线性积分方程中积分号下的已知函数，它决定积分方程的特性. 函数 $k(x,\xi)$ 称为积分方程

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

的核. 如果

$$k(x,\xi) = \sum_{i=1}^m a_i(x)b_i(\xi)$$

时，它就称为退化核. 如果 $k(x,\xi)$ 关于 x, ξ 是对称函数，即 $k(x,\xi)=k(\xi,x)$，则称 $k(x,\xi)$ 是对称核. 如果 $k(x,\xi)$ 是复值函数，且 $k(x,\xi)=\overline{k(\xi,x)}$，则称 $k(x,\xi)$ 是埃尔米特核，其中 $\overline{k(\xi,x)}$ 表示 $k(\xi,x)$ 的复共轭函数. 如果 $k(x,\xi)$ 满足条件 $k(x,\xi)=-k(\xi,x)$，则称 $k(x,\xi)$ 为反对称核，此时如果 $k(x,\xi)$ 为实值函数，则 $\mathrm{i}k(x,\xi)$ 便是埃尔米特核.

对称核(symmetric kernel)　见“积分方程的核”.

埃尔米特核(Hermite kernel)　见“积分方程的核”.

反对称核(antisymmetric kernel)　见“积分方程的核”.

退化核的积分方程(integral equation with degenerate kernel)　一类简单的积分方程，它可以用代数方法求解. 退化核的积分方程是指方程

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \sum_{j=1}^m a_j(x)b_j(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中的 $a_j(x)$ 和 $b_j(\xi)$ 都可认为是线性无关的，它可

以直接化为线性方程组求解. 方程可写为

$$u(x) = f(x) + \lambda\sum_{j=1}^{m}a_j(x)c_j, \qquad (1)$$

其中

$$c_j = \int_a^b b_j(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (2)$$

是未定常数. 为确定 c_j，将方程(1)代入(2)式，即得确定 c_j 的线性方程组

$$c_i - \lambda\sum_{j=1}^{m}a_{ij}c_j = f_i \quad (i = 1,2,\cdots,m), \qquad (3)$$

其中

$$a_{ij} = \int_a^b b_i(x)a_j(x)\mathrm{d}x,\ \ f_i = \int_a^b b_i(x)f(x)\mathrm{d}x$$

是已知常数；若 λ 不是矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值，即

$$\det(I - \lambda A) \neq 0,$$

则方程组(3)有惟一解 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，代回方程(1)，即得积分方程的解 $u(x)$.

积分方程的特征值(characteristic value)　参数的特殊值，这些值使方程求解产生质的变化. 第二类弗雷德霍姆齐次方程

$$u(x) = \lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (a \leqslant \xi \leqslant b),$$

如果当 λ 取某值 λ_0 时，方程有不恒为零的解 $u(x)$，则称 λ_0 是积分方程的特征值，相应的 $u(x)$ 称为积分方程的特征函数. 当 $k(x,\xi)$ 不是退化核时，相应的积分方程一般有可数个特征值 $\lambda_n(n=1,2,\cdots)$，并且 λ_n 在复平面有界域内无聚点. 每个特征值 λ_k 可以对应至多有限个线性无关的特征函数. 当特征值 λ_k 只对应一个特征函数时，这个特征函数除一常数因子外完全被确定.

积分方程的特征函数(characteristic function)　见“积分方程的特征值”.

逐次逼近法(successive approximation method)　求积分方程解的一种方法. 设有连续核的积分方程

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其解可表成 λ 的幂级数

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x)\lambda + u_2(x)\lambda^2 + \cdots,$$

如果此级数在区间$[a,b]$上关于 x 是一致收敛的，那么把它代入积分方程，便可逐项积分，比较 λ 同次幂的系数便得到确定 $u_i(x)$ 的递推公式

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_i(x) = \int_a^b k(x,\xi)u_{i-1}(\xi)\mathrm{d}\xi \quad (i = 1,2,\cdots),$$

其中 $u_i(x)(i=1,2,\cdots)$ 都是连续函数. 若 $|\lambda|$ 充分小，则级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i u_i(x)$$

关于 x 绝对且一致收敛，于是当 $f(x)$ 连续时，此级数的和是连续函数并且是积分方程的解.

预解核(resolvent kernel)　用来给出积分方程解的一种积分表示，利用它可以研究积分方程的有关性质. 设 $k(x,\xi)$ 是积分方程

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

的连续核，则 $|k(x,\xi)|\leqslant M\ (a\leqslant x,\xi\leqslant b)$，由递推公式

$$k_1(x,\xi)=k(x,\xi),$$

$$k_n(x,\xi)=\int_a^b k_{n-1}(x,\eta)k(\eta,\xi)\mathrm{d}\eta\ (n=2,3,\cdots)$$

产生的 $k_n(x,\xi)$ 称为 $k(x,\xi)$ 的 n 次叠核. 它满足公式

$$k_{p+q}(x,\xi) = \int_a^b k_p(x,\eta)k_q(\eta,\xi)\mathrm{d}\eta,$$

当

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}k_n(x,\xi)\lambda^{n-1}$$

在 $a\leqslant x,\xi\leqslant b$ 上绝对且一致收敛，其和记为

$$R(x,\xi,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}k_n(x,\xi)\lambda^{n-1}.$$

此级数称为诺伊曼级数，$R(x,\xi,\lambda)$ 称为积分方程的预解核. 预解核是 λ 全平面上的半纯函数，它在任一有界域内只可能有有限个极点，每个特征值就是预解核的极点. 利用预解核，积分方程的解可表示为

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b R(x,\xi,\lambda)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\left(|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}\right).$$

这个结果在 L^2 空间也同样成立. 即设 $k(x,\xi)$ 和 $f(x)$ 都是平方可积函数，且

$$\int_a^b |k(x,\xi)|^2\mathrm{d}\xi \leqslant C^2,$$

记

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,\xi)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi = B^2$$

和

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = D^2,$$

则近似解序列

$$\tilde{u}_m(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{m}\lambda^n\int_a^b k_n(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

在 $|\lambda|<1/B$ 内绝对且一致收敛，其极限函数给出方程的惟一解.

诺伊曼级数(Neumann series)　见“预解核”.

弗雷德霍姆行列式(Fredholm determinant) 预解核中出现的行列式. 逐次逼近法建立的预解核表示式

$$R(x,\xi,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}k_{n+1}(x,\xi)\lambda^n$$

只对充分小的$|\lambda|$有效. 对一般的λ, 利用下面的弗雷德霍姆行列式$D(\lambda)$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}d_n,$$

其中

$$d_n=\int_a^b\cdots\int_a^b k\begin{pmatrix}t_1 & t_2 & \cdots & t_n\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n\end{pmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

行列式

$$k\begin{pmatrix}t_1 & t_2 & \cdots & t_n\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) & \cdots & k(t_1,t_n)\\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) & \cdots & k(t_2,t_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2) & \cdots & k(t_n,t_n)\end{vmatrix},$$

以及

$$d_n(x,\xi)=\int_a^b\cdots\int_a^b k\begin{pmatrix}x & t_1 & t_2 & \cdots & t_n\\ \xi & t_1 & t_2 & \cdots & t_n\end{pmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

就可得到预解核$R(x,\xi,\lambda)$在整个λ复平面的解析表达式

$$R(x,\xi,\lambda)=\frac{D(x,\xi,\lambda)}{D(\lambda)},$$

其中

$$D(x,\xi,\lambda)=k(x,\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}d_n(x,\xi),$$

它对所有λ都收敛. 预解核的这个表达式称为弗雷德霍姆公式. 这个公式显示预解核是λ的半纯函数, 并且可以证明, λ是齐次积分方程的特征值的充分必要条件为λ是$D(\lambda)$的零点.

弗雷德霍姆公式(Fredholm formula) 见"弗雷德霍姆行列式".

弗雷德霍姆定理(Fredholm theorems) 积分方程的基本定理. 设第二类弗雷德霍姆积分方程是

$$u(x)-\lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)d\xi=f(x). \tag{1}$$

将核的自变量x,ξ互换, 得到的积分方程

$$v(x)-\lambda\int_a^b k(\xi,x)v(\xi)d\xi=g(x)$$

称为方程(1)的转置方程. 弗雷德霍姆定理或者说弗雷德霍姆理论是指以下四个定理:

1. (二者择一定理)或者是非齐次方程(1)对任意给定的$f(x)$有惟一解, 或者是方程(1)的齐次方程有非零解, 二者必居其一.

2. 方程(1)的齐次方程和它的转置齐次方程有有限个相同个数的线性无关解.

3. 当λ_0是特征值时, 非齐次方程(1)有解的充分必要条件是已知函数$f(x)$满足条件

$$\int_a^b f(x)v_j(x)dx=0\quad(j=1,2,\cdots,m),$$

其中$v_j(x)$是转置齐次方程的线性无关解, 亦即$f(x)$与转置齐次方程关于λ_0的一切特征函数正交. 此时方程(1)的解取形式

$$u(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_i(x),$$

其中$u_0(x)$是方程(1)的任一特解, φ_i是方程(1)的齐次方程对应λ_0的m个线性无关的特征函数, c_i是任意常数.

4. 在λ复平面的任意有界区域内, 方程(1)的齐次方程只有有限个特征值.

弱奇性核(weak singularity kernel) 具有可积分的奇异性的核. 若积分方程的核不连续, 并且有形式

$$k(x,\xi)=\frac{h(x,\xi)}{|x-\xi|^{\alpha}}\quad(0<\alpha<1),$$

其中$h(x,\xi)$是有界函数, 则这样的$k(x,\xi)$称为弱奇性核. 对于弱奇性核的积分方程, 弗雷德霍姆定理同样成立.

对称核方程的性质(properties of equation with symmetric kernel) 对称核积分方程特有的性质. 设第二类弗雷德霍姆积分方程的核$k(x,\xi)$是对称核, 即$k(x,\xi)=k(\xi,x)$, 又$\{\lambda_k\}$是对应齐次积分方程

$$u(x)=\lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)d\xi$$

的特征值, $\{u_k(x)\}$是对应的特征函数, 则有性质:

1. 若$k(x,\xi)$不恒为零, 则齐次方程至少有一个特征值.

2. 对应不同特征值的特征函数是正交的, 即若$\lambda_k\neq\lambda_j$, 则相应的特征函数$\{u_j(x)\}$满足

$$\int_a^b u_k(x)u_j(x)dx=0.$$

3. λ_k都是实数.

由此可见, 对称核的一切特征函数序列可化为一个规范正交系. 埃尔米特核有与上述性质1和2完全类似的性质.

希尔伯特-施密特定理(Hilbert-Schmidt theorem) 对称核积分方程的主要定理. 设$k(x,\xi)$是对称核, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots$是齐次积分方程

$$u(x)=\lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)d\xi$$

的所有特征值, $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$是与这些特征值对应的所有特征函数组成的规范正交系. 其

次，设 $h(x)\in L^2[a,b]$，如果积分

$$\int_a^b |k(x,\xi)|^2 \mathrm{d}\xi < C \quad (C\text{ 为正常数}),$$

则函数

$$f(x) = \int_a^b k(x,\xi)h(\xi)\mathrm{d}\xi$$

可展为 $\{u_n(x)\}$ 的傅里叶级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} u_n(x),$$

其中

$$h_n = (h,u_n) = \int_a^b h(\xi)u_n(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

此级数在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛.

施密特公式(Schmidt formula) 给出对称核积分方程解的表达式的公式. 设弗雷德霍姆积分方程

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中 $k(x,\xi)$ 是定义在正方形 $R(a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant \xi\leqslant b)$ 上并在其上平方可积的对称核，$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的已知的连续函数，$u(x)$ 是未知函数，λ 是参数，则有施密特公式

$$u(x) = f(x) + \lambda\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} u_i(x) \quad (\lambda \neq \lambda_i).$$

当 λ 不是特征值时，上式右端的级数是绝对且一致收敛的，而且

$$f_i = \frac{\int_a^b f(x)u_i(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b u_i^2(x)\mathrm{d}x} \quad (i = 1,2,\cdots).$$

当 λ 是一个特征值 λ_i 时，解 $u(x)$ 可表为

$$u(x) = f(x) + c_i u_i(x) + \lambda\sum_{\substack{i=1\\ \lambda_i\neq\lambda}}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} u_i(x),$$

这里 c_i 是任意常数.

核的展开定理(expansion theorem of kernel) 给出方程的特征函数与方程核的关系的命题. 一个有对称核的第二类弗雷德霍姆积分方程，假设核是连续的或者

$$\int_a^b |k(x,\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leqslant C,$$

则它的核 $k(x,\xi)$ 可以利用它的特征函数组成的规范正交系展开为

$$k(x,\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(x)u_i(\xi)}{\lambda_i},$$

其中 λ_i 是齐次方程的特征值，$u_i(x)$ 是对应 λ_i 的标准化了的特征函数，此级数对 x 是平均收敛于 $k(x,\xi)$ 的，即对任意固定的 ξ，恒有

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b \left[k(x,\xi) - \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i(x)u_i(\xi)}{\lambda_i}\right]^2 \mathrm{d}x = 0.$$

默塞尔定理(Mercer theorem) 半正定对称核的展开定理. 设 $k(x,\xi)$ 是对称的，若对任意的 $\varphi(x)$ 均满足不等式

$$\int_a^b\int_a^b k(x,\xi)\varphi(x)\varphi(\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \geqslant 0,$$

则称 $k(x,\xi)$ 为半正定核. 特别地，若等号只限制在 $\varphi(x)\equiv 0$ 的情形成立，就把它称为正定核. 半正定核的特征值 λ_i 全是正的，并且有如下的默塞尔定理：如果 $k(x,\xi)$ 是半正定核，且对 (x,ξ) 是一致连续的，则级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(x)u_i(\xi)}{\lambda_i}$$

对 (x,ξ) 而言绝对且一致收敛于 $k(x,\xi)$，其中 λ_i 是 $k(x,\xi)$ 相应的弗雷德霍姆积分方程的特征值，$u_i(x)$ 是对应于 λ_i 的特征函数.

半正定核(semi-positive definite kernel) 见“默塞尔定理”.

正定对称核(positive definite symmetric kernel) 见“默塞尔定理”.

非对称核的积分方程(integrat equations with non-symmetric kernel) 对称核积分方程的一种推广. 设 $k(x,\xi)$ 是非对称的，但具有如下形式：

$$k(x,\xi) = r(\xi)g(x,\xi),$$

其中 $g(x,\xi)$ 是对称函数，$r(\xi)$ 是区间 (a,b) 内的不变号的连续函数，这时对应的积分方程有如下性质：

1. 对应于不同特征值 λ_k 和 λ_j 的两个特征函数 $u_k(x)$ 和 $u_j(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于权函数 $r(x)$ 是正交的，即

$$\int_a^b r(x)u_k(x)u_j(x)\mathrm{d}x = 0 \ (k \neq j).$$

2. $k(x,\xi)$ 的特征值都是实数.

3. 若非齐次第二类弗雷德霍姆方程有一个解，则此解为

$$u(x) = f(x) + \lambda\sum_{\substack{i=1\\ \lambda_i\neq\lambda}}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} u_i(x),$$

其中 λ_i 是 $k(x,\xi)$ 的特征值，$u_i(x)$ 是对应于 λ_i 的特征函数，式中

$$f_i = \frac{\int_a^b r(x)f(x)u_i(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b r(x)u_i^2(x)\mathrm{d}x} \quad (i = 1,2,\cdots).$$

埃尔米特核的积分方程(integral equation with Hermite kernel) 把实对称核积分方程的理论推广到复域. 具有埃尔米特核的积分方程称为埃尔米特核积分方程. 埃尔米特核积分方程具有以下性质：

1. 对应于不同特征值 λ_k 和 λ_j 的两个特征函数 $u_k(x)$ 和 $u_j(x)$ 在 $[a,b]$ 上是按埃尔米特意义正交的，即

$$\int_a^b u_k(x)\,\overline{u_j(x)}\mathrm{d}x = 0.$$

2. 埃尔米特核的特征值都是实的.

3. 如果具有埃尔米特核的非齐次第二类弗雷德霍姆方程有一个解,那么这个解可表为

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{\substack{i=1 \\ \lambda_i \neq \lambda}}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda} u_i(x),$$

其中 λ_i 是埃尔米特核的特征值,$u_i(x)$是对应于 λ_i 的特征函数,其中

$$f_i = \frac{\int_a^b f(x)\,\overline{u_i(x)}\mathrm{d}x}{\int_a^b u_i(x)\,\overline{u_i(x)}\mathrm{d}x} \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

反对称核的积分方程(integral equation with antisymmetric kernel) 某种意义下,其核与对称类型的相反的积分方程. 具有反对称核(即 $k(x,\xi) = -k(\xi,x)$)的积分方程称为反对称核的积分方程. 考虑具有反对称核的积分方程

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,\xi) u(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

如果以 $\mathrm{i}\lambda$ 代替 λ,则得到具有埃尔米特核的积分方程

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathrm{i} k(x,\xi) u(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

于是,具有反对称核的积分方程必有特征值,并且这些特征值均是纯虚数.

积分方程与微分方程的关系(relation between integral equations and differential equations) 关于积分方程与微分方程可以互相转化的问题. 由于微分和积分是互逆的运算,微分方程和积分方程也有深刻的内在联系. 许多关于微分方程的问题可化为积分方程. 如果积分方程的解具备一定的可微性,也可从积分方程导出相应的微分方程的问题. 例如,从二阶线性微分方程边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + \lambda u = 0, \\ u(0) = 0,\ u(a) = 0 \end{cases}$$

出发,可得第二类弗雷德霍姆积分方程

$$u(x) = \lambda \int_0^a k(x,\xi) u(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

其中

$$k(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\xi}{a}(a - x) & (0 \leqslant \xi \leqslant x), \\ \dfrac{x}{a}(a - \xi) & (x \leqslant \xi \leqslant a). \end{cases}$$

对积分方程求导两次,就可回到微分方程问题. 又如,设 Ω 是平面闭曲线 $c(\xi=\varphi(s), \eta=\psi(s), 0 \leqslant s \leqslant l)$所围的内部区域. 考虑狄利克雷问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad ((x,y) \in \Omega), \\ u|_c = F(s). \end{cases}$$

若令

$$u(x,y) = \int_0^l \mu(s) \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{r} \mathrm{d}s,$$

$$r^2 = (\varphi(s) - x)^2 + (\psi(s) - y)^2,$$

n 为 c 的内法线,则$\mu(s)$是积分方程

$$\mu(s) = f(x) - \int_0^l k(s,t) \mu(t) \mathrm{d}t$$

的连续解,其中

$$f(s) = \frac{F(s)}{\pi},$$

$$k(s,t) = \frac{1}{\pi} \frac{(\psi(s) - \psi(t))\varphi'(t) - (\varphi(s) - \varphi(t))\psi'(t)}{(\varphi(s) - \varphi(t))^2 + (\psi(s) - \psi(t))^2}.$$

一般地,二阶微分算子的边值问题在一定条件下,它的逆算子是对称核或埃尔米特核的积分算子.

第一类弗雷德霍姆积分方程(Fredholm integral equation of the first kind) 特殊的弗雷德霍姆积分方程. 第一类弗雷德霍姆积分方程是指方程

$$f(x) = \int_a^b k(x,\xi) u(\xi) \mathrm{d}\xi \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{1}$$

它与第二类有着本质的不同,它是典型的不适定的方程,即方程(1)的解一般说是不存在的,即使存在也会不惟一,而且即使它存在惟一的解,解也不具有稳定性,就是说当已知函数 $f(x)$有微小变化时,相应的解不一定也有微小的变化. 例如最简单的核 $k(x,\xi) \equiv 1$ 时,方程(1)变为

$$f(x) = \int_a^b u(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

它只限于已知函数 $f(x) \equiv C$(常数)时才有解,这时满足

$$\int_a^b u(\xi) \mathrm{d}\xi = C$$

的 u 都是它的解,故有无穷多个线性无关解. 解的不稳定性可由下面的分析得知,设在空间 L^2 上考察方程(1)的解,以 $u_1(x)$和 $u_2(x)$分别记对应于已知函数 $f_1(x)$和 $f_2(x)$的解,于是

$$u_2(x) = u_1(x) + N \sin \omega x$$

是积分方程

$$f_2(x) = \int_a^b k(x,\xi) u_2(\xi) \mathrm{d}\xi$$

的解,其中

$$f_2(x) = f_1(x) + N \int_a^b k(x,\xi) \sin \omega\xi \mathrm{d}\xi,$$

N, ω 是常数,对任意的 N, 当 ω 充分大时,

$$\| f_1 - f_2 \| = |N| \left\{ \int_a^b \left| \int_a^b k(x,\xi) \sin\, \omega\xi \mathrm{d}\xi \right|^2 \mathrm{d}x \right\}^{1/2}$$

可任意地小,但

$$\|u_1-u_2\|=|N|\left\{\int_a^b|\sin\omega\xi|^2\mathrm{d}\xi\right\}^{\frac{1}{2}}$$

对充分大的常数$|N|$可以任意地大.

第一类弗雷德霍姆积分方程的主要结果有下面的施密特-皮卡定理. 设$\lambda\neq0$, 若存在不恒为零的函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$, 使

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(x,\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b \overline{k(\xi,x)}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

则称λ是特征值, $\{\varphi(x),\psi(x)\}$是对应λ的相伴特征函数. 施密特-皮卡定理断言: 设$\{\lambda_i\}$和$\{\varphi_i(x),\psi_i(x)\}$是方程(1)的所有特征值和对应的规范正交相伴特征函数对的系, 又设规范正交系$\{\varphi_i(x)\}$是完备的, 则方程(1)有解的充分必要条件是级数

$$\sum_j\lambda_j^2|f_j|^2\quad(f_j=(f,\varphi_j))$$

收敛; 如果$\{\psi_i(x)\}$也是完备的, 则解是惟一的. 由于第一类弗雷德霍姆积分方程一般无解, 所以各类积分变换对应的积分方程都不是第一类弗雷德霍姆积分方程, 只能是奇异积分方程.

施密特-皮卡定理(Schmidt-Picard theorem)见"第一类弗雷德霍姆积分方程".

不适定问题(ill-posed problem) 不满足适定性条件的问题. 数学物理问题的适定性概念是由阿达马(Hadamard, J. (-S.))于1923年首次引入的. 它要求所论问题:

1. 存在解.

2. 解是惟一的.

3. 当已给的"原始资料"变动不大时, 解的变动也不大.

不满足上面条件之一的问题都称为不适定问题. 很多应用问题, 特别是要求数值解时常常是不适定的. 第一类弗雷德霍姆积分方程就是典型的不适定问题(参见"第一类弗雷德霍姆积分方程").

吉洪诺夫(Тихонов, А. Н.)等在其专著《不适定问题》中对它的理论和应用做了系统的研究.

沃尔泰拉积分方程(Volterra integral equation) 一类特殊的、重要的弗雷德霍姆积分方程. 形如

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

的积分方程称为第二类沃尔泰拉非齐次积分方程. 当$f(x)\equiv0$时, 称为齐次的第二类沃尔泰拉方程. 沃尔泰拉方程是核$k(x,\xi)=0$(当$\xi>x$时)的特殊弗雷德霍姆积分方程. 它的预解核$R(x,\xi_j,\lambda)$是整函数, 并且对任何λ有如下形式的惟一解:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x R(x,\xi;\lambda)f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

所以沃尔泰拉方程没有特征值, 即齐次方程

$$u(x)=\lambda\int_a^x k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

对任何λ只有平凡解$u(x)\equiv0$. 第一类沃尔泰拉积分方程形状如下:

$$f(x)=\int_a^x k(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

微分后, 它可变为第二类沃尔泰拉积分方程

$$u(x)=\tilde{f}(x)+\int_0^x\tilde{k}(x,\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中

$$\tilde{f}(x)=\frac{f'(x)}{k(x,x)},$$

$$\tilde{k}(x,\xi)=-\frac{1}{k(x,x)}\frac{\partial k(x,\xi)}{\partial x}$$

$$(k(x,x)\neq0).$$

阿贝尔积分方程(Abel integral equation) 一类特殊的沃尔泰拉积分方程. 阿贝尔积分方程是指方程

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{u(t)\mathrm{d}t}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x)$$

$$(a\leqslant x\leqslant b,\ 0<\alpha<1),$$

它是第一类的沃尔泰拉积分方程. 当$f'(x)$连续并且$f(a)=0$时, 它的解是

$$u(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(x-t)^\alpha}\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

上述方程可推广为

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{u(t)\mathrm{d}t}{[p(x)-p(t)]^{1-\alpha}}=f(x)$$

$$(a\leqslant x\leqslant b,0<\alpha<1),$$

其中$p'(x)$, $f'(x)$都在$[a,b]$上连续并且$f(a)=0$, 则方程的解是

$$u(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x\frac{p'(t)f(t)\mathrm{d}t}{[p(x)-p(t)]^\alpha}$$

$$(a\leqslant x\leqslant b).$$

阿贝尔积分方程的一般形式是

$$\int_a^x\frac{G(x,t)u(t)\mathrm{d}t}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x)$$

$$(a\leqslant x\leqslant b,\ 0<\alpha<1),$$

其中已知函数$G(x,t)$, $G_x'(x,t)$和$f'(x)$都是连续函数, 且$G(x,x)\neq0$.

阿贝尔积分算子(Abel integral operator) 由阿贝尔积分方程导出的算子. 下式

$$(J^\alpha u)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}u(t)\mathrm{d}t$$

$$(0\leqslant x<a)$$

称为阿贝尔积分算子, 它可写为卷积形式

$$(J^\alpha u)(x)=(h_\alpha*u)(x),$$

其中

$$h_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & (x>0),\\ 0 & (x<0).\end{cases}$$

在某些函数空间，例如 $u\in L^p(0,a)$，$1\leqslant p\leqslant 1/\alpha$ 时，J^α 是将 $L^p(0,a)$ 映射到 $L^s(0,a)(s=p/(1-p(\alpha-\varepsilon))$ 的有界算子. 算子 J^α 具有性质：

$$J^\beta J^\alpha u=J^{\beta+\alpha}u.$$

由于$u(x)$的 n 次累次积分

$$\int_0^x\cdots\int_0^{x_2}\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}u(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-t)^{n-1}u(t)\mathrm{d}t,$$

所以 J^α 可看做分数 α 阶的积分，它的逆算子则作为分数阶的微分算子

$$D^\alpha u(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J^{1-\alpha}u(x).$$

阿贝尔方程可写为 $J^\alpha u=f$，从而

$$u=D^\alpha f=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J^{1-\alpha}f(x).$$

对 $\alpha\geqslant 1$ 可定义

$$D^\alpha u=D^nJ^{n-\alpha}u\quad(n-1\leqslant\alpha<n).$$

斯蒂尔杰斯积分方程(Stieltjes integral equation) 一种特殊形式的积分方程. 斯蒂尔杰斯积分方程是指积分方程

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t+x}\quad(x\geqslant 0),\tag{1}$$

此方程可由斯蒂尔杰斯矩量问题导出. 做变量置换：令 $x=\mathrm{e}^\xi$，$y=\mathrm{e}^\eta$，$\psi(\xi)=\mathrm{e}^{\frac{\xi}{2}}f(\mathrm{e}^\xi)$，$\Phi(\xi)=\mathrm{e}^{\frac{\xi}{2}}\varphi(\mathrm{e}^\xi)$，方程(1)可化为卷积方程

$$\psi(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(\eta)\mathrm{d}\eta}{2\mathrm{ch}\,\dfrac{\xi-\eta}{2}}.$$

它在 $L^2(-\infty,+\infty)$内有解的充分必要条件是 $\psi(z)$ 在带域$-\pi<y=\mathrm{Im}z<\pi$ 内解析，并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x+\mathrm{i}y)|^2\mathrm{d}x<K\quad(-\pi<y<\pi).$$

解的表达式是

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{2\pi}[\psi(\xi+\mathrm{i}\pi)+\psi(\xi-\mathrm{i}\pi)],$$

即斯蒂尔杰斯积分方程的解是

$$\varphi(x)=\frac{i}{2\pi}[f(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})-f(x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})].$$

斯蒂尔杰斯积分方程实际上是对 $\varphi(t)$连续做两次拉氏变换的结果. 因为

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{e}^{-ut}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u(x+t)}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t+x}=f(x).$$

福克斯积分方程(Fox integral equation) 一种特殊形式的积分方程. 福克斯积分方程是指方程

$$\varphi(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}k(x+t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $k(x)\in L(-\infty,+\infty)$，$f(x)\in L^2(-\infty,+\infty)$ 是已知函数，它们的傅里叶变换分别记为 $K(\alpha)$和 $F(\alpha)$，若 $K(\alpha)$满足条件$1-K(\alpha)K(-\alpha)\neq 0$，则方程恒存在惟一的 L^2 中的解

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\alpha)-F(-\alpha)K(\alpha)}{1-K(\alpha)K(-\alpha)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha.$$

福克斯方程的原始形式其实是

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^{+\infty}k(ux)\varphi(u)\mathrm{d}u\quad(x\geqslant 0).$$

它可用梅林变换求解，它的解是

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{\mathscr{F}(s)+\mathscr{K}(s)\mathscr{F}(1-s)}{1-\mathscr{K}(s)\mathscr{K}(1-s)}x^{-s}\mathrm{d}s,$$

其中 $\mathscr{F}(s)$，$\mathscr{K}(s)$分别是 $f(\alpha)$和 $k(x)$的梅林变换.

拉东积分方程(Radon integral equation) 一类特殊的积分方程. 对于二元函数 $\varphi(x,y)$，$(x,y)\in\mathrm{R}^2$，$L_{p,\theta}$是平面上的直线

$$L_{p,\theta}=\{(x,y)\,|\,x\cos\theta+y\sin\theta=p\}\quad(0\leqslant\theta<2\pi,p>0).$$

拉东积分方程是指沿 $L_{p,\theta}$作线积分的积分方程

$$(R_L)(p,\theta)=\int_{L_{p,\theta}}\varphi(x,y)\mathrm{d}s=f(p,\theta).$$

由此积分方程确定的积分变换称为拉东变换. 拉东积分方程在断层扫描技术中有广泛应用.

拉东变换(Radon transformation) 见"拉东积分方程".

奇异积分方程(singular integral equation) 弗雷德霍姆积分方程的重要推广和发展，包括允许积分核有不可积的奇点，积分区间是无限区间等多种情形. 使弗雷德霍姆定理不成立的线性积分方程，通常称为奇异积分方程. 主要有以下三种新现象：

1. 特征值集有有限的极限点或有连续的谱.

2. 对应一个特征值可能有无穷多个特征函数.

3. 齐次方程和转置齐次方程的线性无关解的个数可能不相等. 例如，拉列斯库-皮卡(Lalescu-Picard)齐次方程

$$u(x)-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x-t|}u(t)\mathrm{d}t=0,$$

当 $\lambda=(1+\alpha^2)/2$，$\alpha\in\mathrm{R}^1$ 时，方程有非零解$u(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}$，所以所有大于 1/2 的实数 λ 都是特征值，即有连续谱. 又如，傅里叶正弦变换产生的积分方程

$$u(x)=\lambda\int_0^{+\infty}\sin(xt)u(t)\mathrm{d}t,$$

当 $\lambda=\pm\sqrt{2/\pi}$时有无穷多个线性无关解

$$u(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-ax}\pm\frac{x}{a^2+x^2}\quad(a>0).$$

奇异积分方程与弗雷德霍姆积分方程的本质差异在于前者出现在方程中的积分算子是有界算子甚至是有逆的，而后者只是相应函数空间中的紧算子，紧算子除有限维算子外是没有有界逆的，这就是弗雷德霍姆理论不能应用到奇异积分方程的根本原因. 奇异积分方程的基本定理是诺特定理，弗雷德霍姆定理是它当指标为零的特例. 也正因为奇异积分方程的积分算子不是紧算子，所以奇异积分方程一般不会出现如同第一类弗雷德霍姆方程与第二类那种本质差别.

最重要的三类奇异积分方程是：

1. 柯西核的奇异积分方程（包括希尔伯特核的奇异积分方程），这是研究得最早和最完整的一类方程（其特点是未知函数出现在发散的积分号下，该积分只在柯西主值下有意义），以及和它的特征方程有密切联系的黎曼问题（参见“柯西型核的奇异积分方程”）.

2. 以维纳-霍普夫方程为代表的带差核的积分方程（参见“维纳-霍普夫方程”）.

3. 对偶积分方程（参见“对偶积分方程”）.

人们在相当深入地研究了以上几类奇异积分方程，以及它们相应的离散形式、方程组、高维的情形和各种各样的推广以后就企图用统一的观点去处理它们. 统一的一个途径是把它们作为一般的维纳-霍普夫方程（参见“一般维纳-霍普夫方程”）.

奇异积分方程的蓬勃发展和它的应用的广泛性是分不开的，它已被广泛应用于弹性理论、薄壳理论、断裂力学、电磁波衍射、大气层辐射传输、中子迁移、控制论、随机过程的预测和人口理论等领域. 应用范围还在不断扩大.

柯西型积分(Cauchy type integral)　研究柯西核奇异积分方程和解析函数边值问题的主要工具. 在解析函数理论中，当 $\varphi(z)$ 在域 D^+ 解析并连续到边界 L，则有熟知的柯西积分公式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-z}=\begin{cases}\varphi(z) & (z\in D^+),\\ 0 & (z\in D^-).\end{cases}$$

若假设 $\varphi(t)$ 是只在 L 上定义的连续或可积函数，或者 L 是一条或多条逐段光滑的简单弧段或闭曲线，则称含参数 z 的积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-z}$$

为柯西型积分，$\varphi(t)$ 称为密度. 它具有性质：

1. $\Phi(z)$ 当 $z\notin L$ 时都是单值解析的，它的导数是

$$\Phi'(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{(t-z)^2}.$$

但当 z 从 L 的左、右侧分别趋于 L 上同一点 t_0 时，$\Phi(z)$ 的左、右极限 $\Phi^{\pm}(t_0)$ 是不相等的（除非 $\varphi(t_0)=0$），所以柯西型积分给出复平面上以 L 为间断曲线的分区单值解析函数，也称为分区全纯函数.

2. 柯西型积分当 L 只位于复平面有限部分内时，满足 $\Phi(\infty)=0$ 的条件.

柯西主值(Cauchy principal value)　使一些发散积分有意义的一种积分定义. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$中除点 $c(a<c<b)$ 的邻域外有界，c 是函数的无穷型间断点，$f(x)$ 在$[a,b]$上的广义积分的柯西主值定义为

$$\begin{aligned}&\mathrm{P.V.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right].\end{aligned}$$

P.V. 在积分方程中一般省略不写. 柯西型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-z},$$

当 $z=t_0\in L$ 时，积分是发散的，它的柯西主值定义如下：在 L 上以 t_0 为中心，ε 为半径作圆交 L 于 t_1,t_2 两点，以 L_ε 记由 L 去掉弧$\overset{\frown}{t_1t_0t_2}$后留下的部分，若

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{L_\varepsilon}\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-t_0}$$

存在，称此极限为柯西型积分的主值，记为

$$\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-t_0}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{L_\varepsilon}\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-t_0}.$$

按定义可求得

$$\int_{ab}\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}=\ln\left(\frac{b-t_0}{t_0-a}\right),$$

特别当 $a=b$ 即闭曲线时，

$$\int_L\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0}=\mathrm{i}\pi.$$

参见《数学辞海》第一卷《数学分析》同名条.

普莱姆利-索霍茨基公式(Plemeli-Sokhozki formula)　柯西型积分边界值的基本公式. 设 L 是一条光滑曲线，$\varphi(t)$ 在 L 上满足赫尔德条件，即

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant N|t_2-t_1|^{\alpha}\quad(t_1,t_2\in L,0<\alpha<1).$$

则柯西型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-z}$$

当 z 从曲线 L 的左侧或右侧趋于 L 上的点 t_0 时，$\Phi(z)$ 的左侧和右侧边界值 $\Phi^+(t_0)$ 和 $\Phi^-(t_0)$ 存在且满足赫尔德条件，并且成立公式

$$\begin{cases}\Phi^+(t_0)=\dfrac{1}{2}\varphi(t_0)+\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-t_0},\\[2ex]\Phi^-(t_0)=-\dfrac{1}{2}\varphi(t_0)+\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-t_0},\end{cases}\tag{1}$$

其中右端的积分理解为柯西主值. 公式(1)称为普莱

姆利-索霍茨基公式，此公式在研究柯西核奇异积分方程的理论起基本的作用. 此公式当 t_0 是曲线 L 的端点时也成立，但需要补充条件 $\varphi(t_0)=0$. 公式(1)经过两式相加、相减后成为等价形式：

$$\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)=\varphi(t_0),$$

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-t_0},$$

其中第二个公式可用以计算柯西型积分的主值. 第一个公式可由跳跃 $\varphi(t)$ 确定分区全纯函数 $\Phi(z)$，如要求无穷远为零，它的解答就是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-z};$$

如要求无穷远为有限阶 n，则一般解答是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\mathrm{d}t}{t-z}+P(z),$$

其中 $P(z)$ 是任一 n 次多项式.

普莱姆利-普里瓦洛夫定理(Plemeli-Privalov theorem) 刻画柯西主值连续特性的定理. 设柯西主值

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-t},$$

则有下面的普莱姆利-普里瓦洛夫定理：设 $\varphi(t)$ 在 L 上满足指数为 μ 的赫尔德条件 $H(\mu)$，则边界值 $\Phi^\pm(t)$ 和主值 $\Phi(t)$ 在 L 上除去使 $\varphi(t)\neq0$ 的端点的任意小邻域外，满足相同的赫尔德条件 $H(\mu)$(当 $\mu<1$)，或满足条件 $H(1-\varepsilon)$(当 $\mu=1$，ε 为任意小正数).

黎曼边值问题(Riemann boundary value problem) 亦称黎曼-希尔伯特问题，简称黎曼问题，一类与奇异积分方程有密切联系的解析函数的边值问题. 设

$$L=\sum_{i=1}^{p}L_i$$

表示有限条没有公共点并且互不包含的简单光滑曲线 L_i 的全体，按 L 的定向分复平面为 D^+，D^- 域. 下列问题称为黎曼边值问题：求在无穷远有界的分区全纯函数 $\Phi(z)$，使它在 L 两侧的边界值 $\Phi^\pm(t)$ 在 L 上满足条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t)\ \text{(非齐次问题)},$$

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)\qquad\text{(齐次问题)},$$

其中系数 $G(t)$ 和自由项 $g(t)$ 是在 L 上满足赫尔德条件的已知函数，并设 $G(t)$ 在 L 上处处不为零.

黎曼问题(Riemann problem) 即“黎曼边值问题”.

黎曼问题的指标(index of the Riemann problem) 黎曼问题和与它密切相关的奇异积分方程的一个重要概念，它是由诺特(Noether，F.)首先引入的. 设 D^+ 是由互不相交分段光滑简单闭曲线 L_0，$L_1,\cdots,L_p$ 所围成的单连通域，L_0 将其他边界包含在其内部，且 $L=\sum_{k=0}^{p}L_k$. 记

$$\lambda_k=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_k}\quad(k=0,1,\cdots,p),$$

其中 $[\cdot]_{L_k}$ 表示当 t 按正向绕 L_k 一周时，括号内函数的幅角的增量，由于 $G(t)$ 的连续性及 $G(t)\neq0$，故 λ_k 都是整数. 称整数

$$\kappa=\operatorname{Ind}G(t)=\sum_{k=0}^{p}\lambda_k=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{p}[\arg G(t)]_{L_k}$$

为黎曼问题或者函数 $G(t)$ 的指标.

齐次黎曼问题的典则函数(canonical function of homogeneous Riemann problem) 由齐次黎曼问题决定的一些函数，用以给出非齐次黎曼问题的一般解. 设坐标原点在 D^+ 内，在 $L_1,L_2,\cdots,L_p$ 所围成的区域 D_1^-，$D_2^-,\cdots,D_p^-$ 内分别任意取点 $a_1,a_2,\cdots,a_p$，记

$$\Pi(z)=(z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}\cdots(z-a_p)^{\lambda_p},$$

$$G_0(t)=t^{-\kappa}\Pi(t)G(t),$$

及

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G_0(t)}{t-z}\mathrm{d}t,$$

其中 κ 是黎曼问题的指标，

$$\kappa=\sum_{k=0}^{p}\lambda_k,$$

$$\lambda_k=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_{L_k}\quad(k=1,2\cdots,p),$$

则函数

$$X(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Pi(z)}e^{\Gamma(z)} & (z\in D^+),\\ z^{-\kappa}e^{\Gamma(z)} & (z\in D^-).\end{cases}$$

称为齐次黎曼问题的典则函数或典则解. 它在有限复平面处处不为零，在无穷远处有有限阶 $-\kappa$. 当指标 $\kappa\geqslant0$ 时，典则函数就是黎曼问题的解. 但当指标 $\kappa<0$ 时，典则函数在无穷远有 κ 阶的极点，这时它就不是黎曼问题的解.

齐次黎曼问题的一般解(general solution of homogeneous Riemann problem) 齐次黎曼问题一般解的表达式. 设 $X(z)$ 是齐次黎曼问题的一个典则解，则齐次黎曼问题

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)\quad(t\in L)$$

的一般解是：当指标 $\kappa\geqslant0$ 时，它有 $\kappa+1$ 个线性无关解，$\Phi(z)=X(z)P_\kappa(z)$，其中 $P_\kappa(z)$ 是任意一个复系数的 κ 次多项式. 当指标 $\kappa<0$ 时，齐次黎曼问题没有有界解. 在应用上，求齐次问题在无穷远为零的解特别重要. 这时当 $\kappa>0$ 时有 κ 个线性无关解

$$X(z),\ zX(z),\ \cdots,\ z^{\kappa-1}X(z).$$

当 $\kappa\leqslant0$ 时齐次问题只有零解.

非齐次黎曼问题的一般解(general solution of nonhomogeneous Riemann problem) 非齐次黎曼

题一般解的表达式. 设 $X(z)$ 是相应的齐次黎曼问题的典则解,则有

$$G(t)=\frac{X^{+}(t)}{X^{-}(t)}.$$

于是非齐次边界条件化为

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)}-\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}=\frac{g(t)}{X^{+}(t)},$$

从而由给定跳跃确定分区全纯函数即得到非齐次黎曼问题(在无穷远允许有极点)的一般解是

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(t)dt}{X^{+}(t)(t-z)}+X(z)P(z),$$

其中 $P(z)$ 是任意多项式. 在应用上,特别重要的是无穷远为零的解,它们是当指标 $\kappa\geqslant0$ 时

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(t)dt}{X^{+}(t)(t-z)}+X(z)P_{\kappa-1}(z),$$

其中 $P_{\kappa-1}(z)$ 是任意的 $\kappa-1$ 阶的多项式(在 $\kappa=0$ 时,$P_{\kappa-1}(z)\equiv0$). 当指标 $\kappa<0$ 时,非齐次问题可解的充分必要条件是

$$\int_{L}\frac{t^{k}g(t)}{X^{+}(t)}dt=0\ (k=0,1,\cdots,-\kappa-1),$$

当满足此条件时,非齐次问题的惟一解是

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(t)}{X^{+}(t)(t-z)}dt.$$

柯西核奇异积分方程(singular integral equation with Cauchy kernel) 一类最基本的奇异积分方程. 柯西核奇异积分方程是指方程

$$\mathscr{K}\varphi=a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{k(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=f(t)\quad(t\in L),\qquad(1)$$

其中 L 是有限条互不相交的简单光滑闭曲线. $a(t)$, $f(t)$, $k(t,\tau)$ 分别是在 L 和 $L\times L$ 上满足赫尔德条件的已知函数. 作用在 φ 上的算子 $\mathscr{K}$ 称为奇异积分算子. $k(t,\tau)/(\tau-t)$ 称为核. 分出核的含奇异性的主要部分,方程(1)可写为

$$\mathscr{K}\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{\pi i}\int_{L}k_{1}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t),\qquad(2)$$

其中

$$b(t)=k(t,t),\quad k_{1}(t,\tau)=\frac{k(t,\tau)-k(t,t)}{\tau-t}.$$

方程(2)中的

$$\mathscr{K}^{0}\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=g(t)\quad(3)$$

称为方程(2)的特征方程,$\mathscr{K}^{0}$ 称为特征算子. 系数 $a(t)$, $b(t)$ 要求满足正则性的充分必要条件:

$$a(t)+b(t)\neq0,\ a(t)-b(t)\neq0\ (t\in L).$$

特征方程(characteristic equation) 见"柯西核奇异积分方程".

特征算子(characteristic operator) 见"柯西核奇异积分方程".

柯西奇异积分算子(Cauchy singular integral operator) 一种最基本的奇异积分算子. 柯西核奇异积分方程的特征方程中的奇异积分算子

$$S\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}\ (t\in L)$$

称为柯西奇异积分算子. 当 L 是简单分段光滑闭曲线时,算子 S 是将 $\varphi\in L^{p}(p>1)$ 映到 L^{p} 的有界算子,并且范数满足不等式

$$\|S\varphi\|_{L^{p}}\leqslant A_{p}\|\varphi\|_{L^{p}},$$

其中系数 A_{p} 的最佳值是

$$A_{p}=\cot\frac{\pi}{2p}\ (1<p\leqslant2);$$

$$A_{p}=\tan\frac{\pi}{2p}\ (p\geqslant2).$$

算子 S 在 L^{p} 上有逆,逆算子就是它自身,即若

$$\psi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t},$$

则

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau-t}.$$

用算子记号即 S 满足 $S^{2}=I$(I 单位算子)

奇异积分方程的指标(index of singular integral equation) 刻画奇异积分方程特征的整数. 柯西核的奇异积分方程

$$\mathscr{K}\varphi=a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{\pi i}\int_{L}k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t),$$

整数

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right]_{L}=\operatorname{Ind}\left(\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right)=\operatorname{Ind}\left(\frac{D}{S}\right)$$

称为方程 $\mathscr{K}\varphi=f$ 或算子 $\mathscr{K}$ 的指标,其中 $D=a-b$, $S=a+b$, 符号 $[\cdot]_{L}$ 表示括号内的表达式当 t 正向绕 L 移动一周后所得到的幅角的增量. 指标 κ 只与特征方程或特征算子有关.

相联方程(adjoint equation) 在奇异积分方程理论中有着重要关系的一对方程的名称. 奇异积分方程

$$\mathscr{K}\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{k(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=f(t)$$

和

$$\mathscr{K}'\psi\equiv a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{k(\tau,t)}{\tau-t}\psi(\tau)d\tau=g(t)$$

互相称为相联的方程. 这两个方程中任一个是另一个将核 $k(t,\tau)/(\tau-t)$ 中的 t 和 τ 互换得出的. 对应的算子 $\mathscr{K}$ 和 $\mathscr{K}'$ 互相称为相联算子,相联算子的作用相当于共轭算子,不同在于 $d\tau$ 不是弧微分. 算

子 $\mathscr{K}$ 的特征算子是

$$\mathscr{K}^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

它的相联算子是

$$\mathscr{K}^{0\prime}\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)d\tau}{\tau - t}.$$

这里假设在 L 上处处有 $a(t)\pm b(t)\neq 0$. 但相联算子的特征算子 $\mathscr{K}'^0$则是

$$\mathscr{K}'^0\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

所以特征算子的相联算子 $\mathscr{K}^{0\prime}$和相联算子的特征算子 $\mathscr{K}'^0$一般是不相等的. 积分方程 $\mathscr{K}\varphi = f$ 有解的充分必要条件是

$$\int_L f\psi d\tau = 0,$$

其中 ψ 是齐次的相联方程 $\mathscr{K}'\psi = 0$ 的解.

相联算子(adjoint operator)　见“相联方程”.

奇异积分方程的正则化(regularization of singular integral equation)　将奇异积分方程转化为弗雷德霍姆方程的方法. 将奇异积分方程 $\mathscr{K}_1\varphi = f$ 乘以某奇异积分算子 $\mathscr{K}_2$,使得方程

$$\mathscr{K}\varphi \equiv \mathscr{K}_2\mathscr{K}_1\varphi = \mathscr{K}_2 f$$

化为第二类弗雷德霍姆积分方程,这种方法称为奇异积分方程的正则化. $\mathscr{K}_2$ 称为正则化算子. 设

$$\mathscr{K}_1\varphi \equiv a_1(t)\varphi(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi i}\int_L k_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t),$$

$$\mathscr{K}_2\omega \equiv a_2(t)\omega(t) + \frac{b_2(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{\pi i}\int_L k_2(t,\tau)\omega(\tau)d\tau.$$

记 $\mathscr{K}\varphi \equiv \mathscr{K}_2(\mathscr{K}_1\varphi) = \mathscr{K}_2\mathscr{K}_1\varphi$,一般地,$\mathscr{K}_2\mathscr{K}_1 \neq \mathscr{K}_1\mathscr{K}_2$,但由 $\mathscr{K}_2\mathscr{K}_1$ 的特征算子$(\mathscr{K}_1\mathscr{K}_2)^0$ 是

$$\mathscr{K}^0\varphi = (\mathscr{K}_2\mathscr{K}_1)^0\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

其中

$$a(t) = a_2(t)a_1(t) + b_2(t)b_1(t),$$
$$b(t) = a_2(t)b_1(t) + b_2(t)a_1(t),$$

可见$(\mathscr{K}_2\mathscr{K}_1)^0 = (\mathscr{K}_1\mathscr{K}_2)^0$, 即两个奇异积分算子之积的特征算子与乘积的次序无关(因此,$\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$互为正则化算子). 为了使方程

$$\mathscr{K}\varphi = \mathscr{K}_2\mathscr{K}_1\varphi = \mathscr{K}_2 f$$

是弗雷德霍姆方程,其充分必要条件是上式含奇异算子的系数 $b(t)\equiv 0$,即

$$a_2(t)b_1(t) + b_2(t)a_1(t) \equiv 0 \text{ (即 } S = D).$$

这个条件可以有无穷多种方式由$a_1(t)$,$b_1(t)$去确定$a_2(t)$,$b_2(t)$,最方便是取

$$a_2(t) = a_1(t),\ b_2(t) = -b_1(t),\ k_2(t,\tau) \equiv 0$$

(即 $S_2 = D_1$, $D_2 = S_1$),即取 $\mathscr{K}_1$ 的相联算子的特征算子 $\mathscr{K}_1'^0$ 作为正则化算子

$$\mathscr{K}_2\omega = \mathscr{K}_1'^0\omega = a_1(t)\omega(t) - \frac{b_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)d\tau}{\tau - t}.$$

如果 $\mathscr{K}_2$ 是 $\mathscr{K}_1$ 的正则化算子,将 $\mathscr{K}_2$ 作用到奇异积分方程

$$\mathscr{K}_1\varphi = f \tag{1}$$

的两端得到一个弗雷德霍姆方程

$$\mathscr{K}_2\mathscr{K}_1\varphi = \mathscr{K}_2 f. \tag{2}$$

显然,方程(1)的所有解都是方程(2)的解,但反之不真,因为方程(2)等价于方程

$$\mathscr{K}_1\varphi = f + \sum c_i\omega_i(t),$$

其中 $\omega_i(t)$是 $\mathscr{K}_2\omega = 0$ 的线性无关非零解. 但因方程(2)只有有限个线性无关解,所以奇异积分方程(1)也只有有限个线性无关的解.

正则化算子(regularization operator)　见“奇异积分方程的正则化”.

韦夸等价正则化定理(Vekya equivalent regularization theorem)　断言奇异积分方程在一定意义下均可等价于某一弗雷德霍姆方程的定理. 韦夸定理断言:奇异积分方程

$$\mathscr{K}\varphi = f \tag{1}$$

(在下面指出的意义下)一定等价于某个弗雷德霍姆方程. 具体地说:

1. 当 $\kappa > 0$ 时,必存在 $\mathscr{K}$ 的正则化算子 $\mathscr{M}$(例如 $\mathscr{K}'^0$或 $\mathscr{K}^{0\prime}$)且 $\mathscr{M}\omega = 0$ 只有零解,使得弗雷德霍姆方程

$$\mathscr{N}\varphi = \mathscr{M}\mathscr{K}\varphi = \mathscr{M}f$$

与方程(1)等价.

2. 当 $\kappa < 0$ 时,必存在 $\mathscr{K}$ 的正则化算子 $\mathscr{M}$(例如,也可取为 $\mathscr{K}^{0\prime}$或 $\mathscr{K}'^0$)使得方程

$$\mathscr{M}\psi = g \tag{2}$$

对任何满足赫尔德条件的 g 均可解. 做代换

$$\varphi = \mathscr{M}\psi,$$

其中 ψ 视为新的未知函数,则(1)式成为弗雷德霍姆方程

$$\mathscr{K}\mathscr{M}\psi = f. \tag{3}$$

方程(1)和(3)在下述意义下等价:

1. 方程(1)和(3)同时可解或同时不可解.

2. 在可解情形下,求解其中任何一个方程均可归结为求解另一个方程.

特征方程的解(solution of characteristic equation)　给出特征方程解的表达式. 设 $\varphi(t)$是特征方程

$$\mathscr{K}^0\varphi \equiv a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t - t_0}dt = f(t_0) \tag{1}$$

的解,其中 a,b,f 都满足赫尔德条件,引入未知的分

区全纯函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-z}dt.$$

由普莱姆利-索霍茨基公式，$\Phi(z)$是黎曼问题

$$\begin{cases}\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+\dfrac{f(t)}{a(t)+b(t)},\\ G(t)=\dfrac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\end{cases}\qquad(2)$$

在无穷远处为零的解. 反之，若$\Phi(z)$是问题(2)的解，则由

$$\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)\qquad(3)$$

确定的函数就是特征方程(1)的解. 所以方程(1)的解为

$$\begin{aligned}\varphi(t_0)=&\frac{X^+(t_0)+X^-(t_0)}{2[a(t_0)+b(t_0)]X^+(t_0)}f(t_0)\\&+\frac{X^+(t_0)-X^-(t_0)}{2\pi i}\\&\cdot\int_L\frac{f(t)}{[a(t)+b(t)]X^+(t)(t-t_0)}dt\\&+[X^+(t_0)-X^-(t_0)]Q_{\kappa-1}(t_0),\end{aligned}\qquad(4)$$

其中$X(z)$和κ分别是齐次希尔伯特问题

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)$$

的典则函数和指标(其表达式参看“齐次黎曼问题的典则函数”)，$Q_{\kappa-1}(z)$是不超过$\kappa-1$阶的多项式，当$\kappa\leqslant0$时$Q_{\kappa-1}(z)\equiv0$. 公式(4)对$\kappa\geqslant0$无条件成立，当$\kappa<0$时，当且仅当成立可解性条件

$$\int_L\frac{t^kf(t)}{[a(t)+b(t)X^+(t)]}dt=0$$
$$(k=0,1,\cdots,-\kappa-1)$$

时，问题(1)才有解且解由公式(4)给出.

希尔伯特变换(Hilbert transformation)　一类理论和应用上都重要的奇异积分变换. 解析函数$\Phi(z)=u+iv$，在域的边界上用其虚部表示其实部，和反过来表示的关系式称为希尔伯特变换对. 当域是上半复平面，希尔伯特变换及其逆变换是：

$$u(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(t)dt}{t-x}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

$$v(x)=\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)dt}{t-x}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

此变换在物理上称为色散变换. 当域是单位圆$|t|=1$，$t=e^{i\sigma}$时，希尔伯特变换及其逆变换是：

$$u(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+u_0\quad(0\leqslant s<2\pi),$$

$$v(s)=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+v_0\quad(0\leqslant s<2\pi),$$

其中$u_0+iv_0=\Phi(0)$. 此变换的积分核称为希尔伯特核. 积分是按柯西主值去理解的.

色散变换(disperse transformations)　见“希尔伯特变换”.

希尔伯特核(Hilbert kernel)　见“希尔伯特变换”.

希尔伯特边值问题(Hilbert boundary value problem)　一类重要的解析函数的边值问题. 希尔伯特边值问题是指下面的问题：在单位圆内求解析函数$\Phi(z)=u+iv$，它在圆周上满足边界条件：

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[(a-ib)\Phi(t)]&=au(s)+bv(s)\\&=c(s)\ (t=e^{is}),\end{aligned}\qquad(1)$$

其中$a=a(s)$，$b=b(s)$，$c(s)$是圆周上满足赫尔德条件的已知函数. 边值问题的指标是整数$\kappa=\mathrm{Ind}[a+ib]$. 希尔伯特边值问题的解答是：

1. 当$\kappa=0$时，方程(1)的解是

$$\Phi(z)=e^{i\gamma(z)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}d\sigma+i\beta_0\right].$$

2. 当$\kappa>0$时，方程(1)的解是

$$\Phi(z)=z^\kappa e^{i\gamma(z)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}d\sigma+Q(z)\right].$$

3. 当$\kappa<0$时，方程(1)当且仅当满足下面的可解条件

$$\int_0^{2\pi}e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)e^{-ik\sigma}d\sigma=0\quad(k=0,1,\cdots,-\kappa-1)$$

才有解，此时解是

$$\Phi(z)=z^ke^{i\gamma(z)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\omega_1(\sigma)}c(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}d\sigma.$$

上述各式中的

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\arctan\frac{b(\sigma)}{a(\sigma)}-\kappa\sigma\right]\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}d\sigma,$$

$$\omega_1(\sigma)=\mathrm{Im}\gamma(e^{i\sigma}),$$

$$Q(z)=i\beta_0+\sum_{k=1}^{\kappa}(C_kz^k-\bar{C}_kz^{-k}),$$

β_0是任意实常数，C_k是任意复常数.

希尔伯特核奇异积分方程(singular integral equation with Hilbert kernel)　一类重要的奇异积分方程. 奇异积分方程

$$\begin{aligned}\mathscr{H}u\equiv&a(s)u(s)-\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\\&+\int_0^{2\pi}k(s,\sigma)u(\sigma)d\sigma=f(s)\end{aligned}\qquad(1)$$

称为希尔伯特核奇异积分方程，其中$k(s,\sigma)$是弱奇性核，$a(s)$，$b(s)$，$f(s)$是满足赫尔德条件的已知函数，并且$a^2(s)+b^2(s)\neq0$. 不失一般性，设$a^2(s)+b^2(s)\equiv1$. 方程(1)中的

$$\mathscr{H}^0u\equiv a(s)u(s)-\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=f_1(s)\qquad(2)$$

称为(1)的特征方程. 整数$\kappa=\mathrm{Ind}[a(s)+ib(s)]$称为算子$\mathscr{H}$或者方程$\mathscr{H}u=f$的指标. 对方程(1)，诺特定理成立. 特征方程(2)当$a(s)$，$b(s)$分别是常数a，b时，它的解是

$$u(s)=af(s)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma.$$

$a(s)$，$b(s)$不是常数时，特征方程(2)可化为等价的希尔伯特边值问题：

$$a(s)u(s)+b(s)v(s)=\mathrm{Re}[(a-\mathrm{i}b)\Phi(t)]$$
$$=f(s)(t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}).$$

诺特定理(Noether theorems)　奇异积分方程的基本定理.它并不限于柯西型核的奇异积分方程.

定理1：奇异积分方程 $\mathscr{K}\varphi=f$ 可解的充分必要条件是成立关系式

$$\int_L f(t)\psi_i(t)\mathrm{d}t=0\ \ (i=1,2,\cdots,k'),$$

其中 $\psi_i(t)(i=1,2,\cdots,k')$ 是相联齐次方程 $\mathscr{K}'\psi=0$ 的线性无关解的完备系；

定理2：齐次方程 $\mathscr{K}\varphi=0$ 的线性无关解的个数 k 与相联齐次方程 $\mathscr{K}'\psi=0$ 的线性无关解的个数 k' 之差只与 $\mathscr{K}$ 的特征部分有关，它等于算子 $\mathscr{K}$ 的指标，即 $k-k'=\kappa$.

第二类弗雷德霍姆积分方程的弗雷德霍姆定理是柯西核奇异积分方程中 $b(t)=0$，即诺特定理 $\kappa=0$ 的特例.由此可见，对指标为零的奇异积分方程，弗雷德霍姆定理是成立的，这类方程称为拟弗雷德霍姆方程，其相应的奇异积分算子称为拟弗雷德霍姆算子.

拟弗雷德霍姆方程(quasi-Fredholm equation)　见“诺特定理”.

拟弗雷德霍姆算子(quasi-Fredholm operator)　见“诺特定理”.

卷积方程(convolution equation)　一种最常见的奇异积分方程.第二类卷积方程是指方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$
$$(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $k(x)\in L(-\infty,+\infty)$，当 $f(x)\in L^2(-\infty,+\infty)$，并且满足条件

$$1-\lambda K(\alpha)\neq 0\ \ (-\infty<\alpha<+\infty)$$

时，卷积方程可以直接利用傅里叶变换得到它在 L^2 中的解

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\alpha}}{1-\lambda K(\alpha)}\mathrm{d}\alpha$$
$$(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $F(\alpha)$，$K(\alpha)$ 分别是 $f(x)$ 和 $k(x)$ 的傅里叶变换.这个解也可以写为预解核的形式

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}h(x-t)f(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $h(x)$ 是 $K(\alpha)/(1-\lambda K(\alpha))$ 的傅里叶逆变换.第二类卷积方程的齐次方程可能有非零解 e^{ax}，只要 a 满足

$$\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}k(t)\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t=1,$$

因而对某些核，λ 会产生连续谱，所以卷积方程不是弗雷德霍姆积分方程.第一类卷积方程是指方程

$$\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x)$$
$$(-\infty<x<+\infty),$$

它与第二类卷积方程无本质区别，当 $F(\alpha)/K(\alpha)$ 属于 L^2 时，它的解是

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\alpha)}{K(\alpha)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha$$
$$(-\infty<x<+\infty).$$

卷积方程中的积分算子

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t=k*\varphi$$

称为卷积算子.当 $k\in L^2,\varphi\in L^2$ 时，卷积 $h(x)=k*\varphi$ 总是连续函数.当 $k\in L^1,\varphi\in L^p$ 时，恒有 $k*\varphi\in L^p$，并且有豪斯多夫-杨不等式：

$$\|k*\varphi\|_p\leqslant\|k\|_{L^1}\cdot\|\varphi\|_p.$$

在卷积方程中，作为特例，设 $f(x)=k(x)=\varphi(x)=0$，当 $x<0$，这时方程就变成有限区间的方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t\ \ (x\geqslant 0),$$

前面解的公式同样适用.

卷积算子(convolution operator)　见“卷积方程”.

维纳-霍普夫方程(Wiener-Hopf equation)　一种带差核的奇异积分方程.古典的维纳-霍普夫方程是指下述的带差核的奇异积分方程

$$\varphi(t)+\int_0^{+\infty}k(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(t)\qquad(1)$$
$$(0\leqslant t<+\infty),$$

其中 $k(u)\in L^1(-\infty,+\infty)$，$f(t)\in L^2[0,+\infty)$ 是已知函数，$\varphi(t)$ 是未知函数，$k(t-s)$ 称为积分方程的核.

方程(1)的研究开始于20世纪20年代初，早期著名例子是辐射传输理论中的米尔恩方程，后因1931年由维纳(Wiener,N.)和霍普夫(Hopf,E.)给出求解方法而得名.20世纪40年代以后，这种方程的理论在解析函数边值问题、调和分析和算子理论的基础上得到了系统的发展，20世纪60年代以后，抽象化为奇异积分方程的一种统一形式，即一般的维纳-霍普夫方程的理论.它的应用也扩展到许多其他领域，如中子迁移、电磁波衍射、控制论、多体问题以及人口理论等.

维纳和霍普夫为解方程(1)提出的方法后来被称为维纳-霍普夫技巧，又称为因子分解法.其基本思想是通过积分变换将原方程化为黎曼边值问题.技巧的核心是用函数因子分解的方法求得方程的解.下面以方程(1)求解为例加以说明.在 $x<0$ 处令 $\varphi(x)=f(x)\equiv 0$，将方程(1)延拓到整个实轴，得到

$$\varphi(t)+\int_{-\infty}^{+\infty}k(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(t)+\psi(t)\quad(2)$$
$$(-\infty<t<+\infty),$$

式中

$$\psi(t)=\begin{cases}0 & (t\geqslant 0),\\ \int_0^{+\infty}k(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s & (t<0)\end{cases}$$

也是未知函数. 若(2)中诸函数满足适当条件,例如存在 $h>0$ 使 $k(t)e^{h|t|}$, $\varphi(t)e^{ht}$ 和 $f(t)e^{ht}$ 均属于 $L^1(-\infty,+\infty)$,则由傅里叶变换可化为带域上的黎曼问题

$$(1+K(\lambda))\Phi^+(\lambda)=F^+(\lambda)+\Psi^-(\lambda)\quad(3)$$
$$(\lambda=\sigma+\mathrm{i}\tau,|\tau|<h),$$

其中大写字母表示用相应小写字母表示的函数的傅里叶变换. 上标+或-分别表示该函数在半平面 $\tau>-h$ 或 $\tau<h$ 上解析. 称 $\kappa=-\mathrm{Ind}[1+K(\lambda)]$ 为方程(1)的指标. 问题(3)求解的关键在于将函数

$$H(\lambda)=1+K(\lambda)$$

分解为如下的因子 $H(\lambda)=H^-(\lambda)H^+(\lambda)$,其中 $H^+(\lambda)$ 和 $H^-(\lambda)$ 分别在 $\tau>-h$ 和 $\tau<h$ 两半平面上解析并且在有限远处均恒不为零. 当 $H(\lambda)$ 满足条件:在 $|\lambda|<h$ 解析,无零点且一致有

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}H(\lambda)=r\neq 0$$

时,上述分解式是存在的,其中 $H^{\pm}(\lambda)$ 可由 $H(\lambda)$ 得出. 由所述条件利用柯西积分公式知 $F^+(\lambda)/H^-(\lambda)=C^-(\lambda)+C^+(\lambda)$, $C^{\pm}(\lambda)$ 可由 $F^+(\lambda)/H^-(\lambda)$ 来表示,因而由(3)式得到

$$H^+(\lambda)\Phi^+(\lambda)-C^+(\lambda)=\frac{\Psi^-(\lambda)}{H^-(\lambda)}+C^-(\lambda)$$

($|\tau|<h$). 由此式利用解析开拓和广义刘维尔定理可求出 $\Phi^+(\lambda)$,再由傅里叶逆变换即可求得 $\varphi(t)$. 维纳-霍普夫方程也满足诺特定理. 方程(1)的离散形式是

$$\varphi_k+\sum_{j=0}^{+\infty}a_{k-j}\varphi_j=f_k\ (k=0,1,2,\cdots),\quad(4)$$

其中

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|<+\infty,$$

$\{f_k\}$ 是属于 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$ 的已知序列. (4)式也称为特普利茨方程.

维纳-霍普夫技巧(Wiener-Hopf technique) 见"维纳-霍普夫方程".

米尔恩方程(Milne equation) 以米尔恩名字命名的方程,见"维纳-霍普夫技巧".

卷积型积分方程(convolution type integral equation) 亦称差核积分方程,是卷积方程的推广. 它是指以下的奇异积分方程:

$$\varphi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}k_1(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 k_2(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(t)\quad(1)$$
$$(-\infty<t<+\infty),$$

其中核 $k_1(t)$, $k_2(t)\in L^1(-\infty,+\infty)$,并且它们的傅里叶变换 $K_1(\alpha)$, $K_2(\alpha)$ 分别满足条件

$$1+K_1(\alpha)\neq 0,\quad 1+K_2(\alpha)\neq 0;$$

$f(t)$ 是 $L^p(-\infty,+\infty)$ $(p>1)$ 上的已知函数. 它的指标定义为

$$\kappa=\mathrm{Ind}\frac{1+K_2(\alpha)}{1+K_1(\alpha)}.$$

此类方程同样满足诺特定理. 它可通过傅里叶变换化为黎曼问题去解决. 为此,另设未知函数

$$\varphi_+(t)=\begin{cases}\varphi(t) & (t\geqslant 0),\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

及

$$\varphi_-(t)=\begin{cases}0 & (t>0),\\ \varphi(t) & (t\leqslant 0)\end{cases}$$

则 $\varphi(t)=\varphi_+(t)+\varphi_-(t)$,于是方程(1)变成

$$\varphi_++\varphi_-+k_1*\varphi_++k_2*\varphi_-=f,$$

做傅里叶变换,即得对应的黎曼问题

$$\Phi^+(\xi)=\frac{1+K_2}{1+K_1},\quad \Phi^-(\xi)=\frac{F}{1+K_1},$$

其中 $\Phi^{\pm}$, K_1, K_2, F 分别是 $\varphi_{\pm}$, k_1, k_2, f 的傅里叶变换.

差核积分方程(difference kernel integral equation) 即"卷积型积分方程".

对偶积分方程(dual integral equation) 一类重要的奇异积分方程. 奇异积分方程的另一典型类型是下面的对偶积分方程

$$\varphi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}k_1(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(t)$$
$$(0<t<+\infty),$$
$$\varphi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}k_2(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(t)$$
$$(-\infty<t<0),$$

其中 $\varphi(t)$ 是未知函数. 对偶积分方程常在偏微分方程的混合边界值问题中出现. 特别地,当 k_1, k_2 是卷积核,即 $k_i(t,s)=k_i(t-s)$ $(i=1,2)$ 时,它可化为黎曼边值问题去解决. 为此,在方程中引入新未知函数 $g(t)$ $(-\infty<t<+\infty)$ 以及

$$g_+(t)=\begin{cases}g(t) & (t>0),\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

与

$$g_-(t)=\begin{cases}0 & (t>0),\\ g(t) & (t<0).\end{cases}$$

将两方程都延拓到整个 t 轴,方程可改写为:

$$\varphi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}k_1(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(t)+g_-(t),$$

$$\varphi(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}k_2(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s=f(t)+g_+(t)$$

$$(-\infty<t<+\infty).$$

做傅里叶变换得到

$$[1+K_1(\alpha)]\Phi(\alpha)=F(\alpha)+G^-(\alpha),$$

$$[1+K_2(\alpha)]\Phi(\alpha)=F(\alpha)+G^+(\alpha),$$

其中 Φ,K_1,K_2,F,G^+,G^- 分别是 $\varphi,k_1,k_2,f,g_+,g_-$ 的傅里叶变换，上式消去未知函数 $\Phi(\alpha)$，即得到确定未知函数 $G^{\pm}(\alpha)$ 的黎曼问题：

$$G^+(\alpha)=\frac{1+K_2(\alpha)}{1+K_1(\alpha)}G^-(\alpha)+\frac{K_2(\alpha)-K_1(\alpha)}{1+K_1(\alpha)}F(\alpha)$$

$$(-\infty<\alpha<+\infty),$$

它的指标是

$$\kappa=\mathrm{Ind}\left[\frac{1+K_2(\alpha)}{1+K_1(\alpha)}\right].$$

解出 $G^{\pm}(\alpha)$ 后，原对偶积分方程的解 $\varphi(t)$ 可由

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\alpha)+G^-(\alpha)}{1+K_1(\alpha)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}\mathrm{d}\alpha$$

得出，可解情况讨论视指标 κ 而定.

它的离散形式是如下的对偶方程组

$$\varphi_j+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_{j-k}\varphi_k=f_j\ (j=0,1,\cdots),$$

$$\varphi_j+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_{j-k}\varphi_k=f_j\ (j=-1,-2,\cdots).$$

经典的含特殊函数的对偶积分方程是

$$\begin{cases}\int_0^{+\infty}y^{\alpha}f(y)J_{\nu}(xy)\mathrm{d}y=g(x) & (0<x<1),\\ \int_0^{+\infty}f(y)J_{\nu}(xy)\mathrm{d}y=0 & (x>1),\end{cases}$$

其中 J 是贝塞尔函数，$\alpha>0$. 它的解是蒂奇马什(Titchmarsh, E, Ch.)用梅林变换得到的，它是

$$f(x)=\frac{(2x)^{1-\frac{1}{2}\alpha}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}\int_0^1\mu^{1+\frac{1}{2}\alpha}J_{\nu+\frac{1}{2}\alpha}(\mu x)\mathrm{d}\mu\cdot\int_0^1 g(\rho\mu)\rho^{\nu+1}(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}\alpha-1}\mathrm{d}\rho.$$

特普利茨方程(Toeplitz equation) 一类理论上重要的奇异积分方程. 设已给函数 $a(t)\in L^{\infty}$，t 定义在单位圆周上，P 是 L^p 到哈代空间 H^p 的投影算子，对任一 $\varphi(t)\in H^p$，下面 H^p 到 H^p 的算子 $T_p(a)\varphi=P(a\varphi)$ 称为特普利茨算子，若 f 是 H^p 上的已知函数，对应的方程

$$T_P(a)\varphi=P(a\varphi)=f$$

称为特普利茨方程. 当 $a(t)\neq0$ 时，此类方程也满足诺特定理，其指标 $\kappa=\mathrm{Ind}\,a(t)$. 设 $a(t)$ 有傅里叶系数 $\{a_j\}(j=0,\pm1,\cdots)$，f,φ 的傅里叶系数分别为 $\{f_j\},\{\varphi_j\}(j=0,1,\cdots)$，$P$ 是 L^p 到 l_+^p 的投影，则特普利茨方程可改为离散形式

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_{j-k}\varphi_k=f_j\ (j=0,1,\cdots).$$

此类方程亦称离散的维纳-霍普夫方程.

特普利茨算子(Toeplitz operator) 见“特普利茨方程”.

带位移的奇异积分方程(singular integral equation with shift) 柯西核奇异积分方程的推广. 它是指下面的方程

$$K\varphi=a(t)\varphi(t)+b(t)\varphi[\alpha(t)]+\frac{c(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-t}+\frac{d(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-\alpha(t)}+\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=g(t)\ (t\in L),\tag{1}$$

其中 $a(t),b(t),c(t),d(t),g(t)$ 均为满足赫尔德条件的已知函数，$k(t,\tau)$ 是弱奇异核；位移 $\alpha(t)$ 是将闭曲线 L 保持或改变方向地同胚映射成它自身，$\alpha'(t)$ 满足赫尔德条件且恒不为零；还假设 $\alpha(t)$ 在 L 上满足卡莱曼条件：$\alpha[\alpha(t)]\equiv t$. 记

$$\Delta_1(t)=c_1(t)c_1[\alpha(t)]-d_1(t)d_2[\alpha(t)],$$

$$\Delta_2(t)=a_1(t)a_1[\alpha(t)]-b_1(t)b_1[\alpha(t)],$$

$$\Delta(t)=b_1(t)d_1[\alpha(t)]-c_1(t)a_1[\alpha(t)],$$

其中

$$a_1(t)=a(t)+c(t),\ b_1(t)=b(t)+d(t),$$

$$c_1(t)=c(t)-a(t),\ d_1(t)=d(t)-b(t),$$

则方程(1)使诺特定理成立的充分条件是：(A)如果 $\alpha(t)$ 保持方向及 $\Delta_1(t)\neq0,\Delta_2(t)\neq0$；(B)如果 $\alpha(t)$ 改变方向及 $\Delta(t)\neq0$. 此时指标是：

1. 如果 $\alpha(t)$ 保持方向，则

$$\mathrm{Ind}\,K=\frac{1}{4\pi}\mathrm{Ind}\left[\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)}\right]_L.$$

2. 如果 $\alpha(t)$ 改变方向，则

$$\mathrm{Ind}K=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Ind}[\Delta(t)]_L.$$

带位移的柯西核奇异积分方程已有较完整的理论，它在混合型偏微分方程的边值问题、正曲率曲面的无穷小变形理论、理想流体的空泡流动理论及各向异性弹性理论等应用上都有重要意义.

卡莱曼条件(Carleman condition) 见“带位移的奇异积分方程”.

高维奇异积分方程(singular integral equation in high dimension) 希尔伯特变换在高维的推广. 与弗雷德霍姆积分方程不同，对于奇异积分方程，高维和一维是需要加以区别的. 典型的高维奇异积分方程是指方程

$$a(x)u(x)+\int_{\mathrm{R}^n}\frac{f(x,\Theta)}{r^n}u(y)\mathrm{d}y=g(x)\quad(x\in\mathrm{R}^n),\tag{1}$$

其中的奇异积分算子是研究得最多的考尔德伦-赞格蒙-米赫林奇异积分算子

$$\mathscr{K}u=\int_{\mathrm{R}^n}\frac{f(x,\Theta)}{r^n}u(y)\mathrm{d}y,$$

这里 x,y 表示 n 维欧氏空间 R^n 中的点,

$$r=|y-x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2},$$

$$\Theta=\frac{y-x}{r}=\left\{\frac{y_1-x_1}{r},\cdots,\frac{y_n-x_n}{r}\right\},$$

$f(x,\Theta)$称为特征,设特征是有界的且对固定的 x 对 Θ 是连续的.还要假设 $f(x,\Theta)$满足使此奇异积分存在的充分必要条件(抵消条件)

$$\int_S f(x,\Theta)\mathrm{d}\sigma=0,$$

其中 S 是单位球面.在一定条件下,方程(1)是满足诺特定理的.但一般地,它的指标都等于零.

高维奇异积分算子(singular integral operator in high dimension) 见“高维奇异积分方程”.

里斯算子(Riesz operator) 一类重要的高维奇异积分算子.它是指下面的 m 个算子(参见《调和分析》同名条)

$$(R_mf)(x)=r_n\int_{\mathrm{R}^n}\frac{x_m-y_m}{|x-y|^{n+1}}f(y)\mathrm{d}y,$$
$$(1\leqslant m\leqslant n)$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是 n 维空间 R^n 的点,

$$|x-y|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2},$$

$$r_n=-\mathrm{i}\pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

里斯算子是将 $f\in L^2$ 映射到 L^2 的有界算子,对 $m=1,2,\cdots,n$,它们满足关系式:

$$\sum_{m=1}^{n}R_m^2=I\ (\text{恒等算子}).$$

里斯算子在双曲型偏微分方程的理论中有重要应用.

广义维纳-霍普夫方程(generalized Wiener-Hopf equation) 几类主要奇异积分方程的统一名称.多年来人们企图用统一观点去处理已经分别研究得相当深入的几类主要的奇异积分方程,即柯西核积分方程、黎曼边值问题(包括带位移)、维纳-霍普夫方程、对偶积分方程,以及它们相应的离散形式、方程组和高维的推广,统一的途径是把它们作为下面的广义的维纳-霍普夫方程的特例.设 A,B 是希尔伯特空间上的已知的线性算子.P 是投影算子,$P^2=P$, $Q=I-P$(I 恒等算子),以下三种方程

$$T_P(A)\varphi=PA|_{\mathrm{Im}P}\varphi=Pf,\qquad(1)$$

$$(AP+BQ+T)\varphi=f,\qquad(2)$$

$$(PA+QB+\widetilde{T})\psi=g\qquad(3)$$

均称为广义维纳-霍普夫方程,简称维纳-霍普夫方程.其中 $T,\widetilde{T}$ 是紧算子.方程(1)是最基本的,若算子 B 有逆且 $T=0$,则方程(2)不难归结为方程(1),方程(3)则是方程(2)的转置方程.具体形式如下:

1. 若记 $S\varphi=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-t}$, 及

$$P=\frac{1}{2}(I+S),\quad Q=\frac{1}{2}(I-S),$$

$$A\varphi=[a(t)+b(t)]\varphi,\quad B\varphi=[a(t)-b(t)]\varphi,$$

则柯西核积分方程

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-t}+T_\varphi=f$$

即为$(AP+BQ+T)\varphi=f$.

2. 若令 P 是 L^p 到哈代空间 H^p 的投影算子,$-B\varphi=G(t)\varphi(t)$,则单位圆上的黎曼边值问题$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t)$可记为$(P+BQ)\varphi=g$.

3. 若设 $P\varphi=\begin{cases}\varphi(t) & (t>0),\\ 0 & (t<0)\end{cases}$ 及

$$A\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty}k(t-s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

则维纳-霍普夫方程可记为

$$T_P(A)\varphi=PA|_{\mathrm{Im}P}\varphi=Pf.$$

4. 若设

$$P\varphi=\begin{cases}\varphi(t) & (t>0),\\ 0 & (t<0),\end{cases}$$

$$Q\varphi=\begin{cases}0 & (t>0),\\ \varphi(t) & (t<0).\end{cases}$$

$$A\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty}k_1(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

$$B\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty}k_2(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

则对偶积分方程可记为$(PA+QB)\varphi=f$.

5. 设函数 $a(t)\in L^\infty(|t|=1)$,算子 $A\varphi=a(t)\varphi(t)$,φ 属于哈代空间 H^p, P 是 L^p 到 H^p 的投影算子,已知函数 $f\in H^p$,则特普利茨方程可记为

$$T_P(a)\varphi=T_P(A)\varphi=f.$$

方程对应的算子 $T_P(A)$, $AP+BQ$, $PA+QB$ 称为维纳-霍普夫算子.

维纳-霍普夫算子(Wiener-Hopf operator) 见“广义维纳-霍普夫方程”.

维纳-霍普夫分解(Wiener-Hopf factorization) 算子的一种分解式.设 A 是希尔伯特空间 H 中的线性算子,P 是投影算子,A 的维纳-霍普夫分解是指分解式 $A=A_-A_+$, $A_\pm$是 H 中满足条件

$$R(A_+P)=R(P),\quad R(A_-Q)=R(Q)$$

的线性算子，$R(\cdot)$记算子的值域. 维纳-霍普夫分解与维纳-霍普夫算子的理论有密切联系，这由下面定理可看出. 定理：设 $A:H\to H$ 是有逆的有界线性算子，P 是任一投影算子，则以下三条件等价：

1. $T_P(A)$在 $R(P)$中可逆.

2. A 存在维纳-霍普夫分解.

3. 存在复数 λ_0，$|\lambda_0|=1$ 使 $\mathrm{Re}\lambda_0 R(A)>0$.

诺特算子(Noether operator)　亦称广义弗雷德霍姆算子. 为了使奇异积分方程理论一般化，将诺特定理成立的算子称为诺特算子，也简称 Φ 算子. 设 X,Y 是巴拿赫空间，算子 $A:X\to Y$. 以 $\ker A$ 记算子的核空间，$\mathrm{Coker}A=Y/\overline{\mathrm{Im}A}$称为 A 的协核空间. $\alpha(A)=\dim\ker A$，$\beta(A)=\dim\mathrm{Coker}A$.

设有界线性算子 $A:X\to Y$，如果：

1. 算子 A 的值域 $\mathrm{Im}A$ 是闭的；

2. 数 $\alpha(A)$和 $\beta(A)$都是有限的；

那么 A 称为诺特算子，并称整数

$$\mathrm{Ind}\,A=\alpha(A)-\beta(A)$$

为诺特算子 A 的指标. 诺特算子定义中的条件 1 可换为等价的

1′. 设算子 A 在豪斯多夫意义下是正规可解的.

广义弗雷德霍姆算子(generalized Fredholm operator)　即“诺特算子”.

算子的协核空间(cokernel space of operator)　见“诺特算子”.

半诺特算子(semi-Noether operator)　诺特算子的推广. 在诺特算子定义中的条件 2，若只设$\alpha(A)$是有限的，或 $\beta(A)$是有限的，则称 A 为半诺特算子，前者称为 Φ_+算子，后者称为 Φ_-算子(参见“诺特算子”).

代数算子方程(algebra operator equation)　算子满足一定代数关系式的算子方程. 奇异积分方程的理论也可以抽象为代数算子方程去研究. 代数算子 S 是指巴拿赫空间 X 到巴拿赫空间 Y 的、满足一定代数关系 $P(S)\equiv 0$ 的算子. P 通常是多项式

$$P(S)=\sum_{i=1}^{n}C_iS^i,$$

若 S 满足 n 次算子多项式

$$P(S)=\sum_{i=1}^{n}C_iS^i=0,$$

但不满足低于 n 次的多项式，则称 S 为 n 次代数算子. 例如

$$S\varphi=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-t},$$

L 是闭围线，则 $S:L^p\to L^p$ 满足方程 $S^2-I\equiv 0$，但 $S\pm I\neq 0$，故柯西奇异积分算子是二次代数算子. 又如，希尔伯特空间的投影算子 P，满足方程 $P^2-I\equiv 0$，但 $P\neq I$，$P\neq 0$，故它是二次代数算子. 再如，傅里叶积分算子

$$F\varphi=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

$F:L^2\to L^2$ 满足方程 $F^4-I\equiv 0$，但不满足低于四次的方程，它是四次代数算子.

利用拉格朗日插值多项式可由 n 次代数算子 S 构造出投影算子 $P_j(j=1,2,\cdots,n)$：

$$P_j=\frac{(S-x_1)\cdots(S\overset{\wedge}{-}x_j)(S-x_{j+1})\cdots(S-x_n)}{(x_j-x_1)\cdots(x_j\overset{\wedge}{-}x_j)(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)},$$

其中 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$表示 $P(x)=0$ 的 n 个单根，“$\wedge$”号表示缺少该项，则 P_j 满足：

$$P_jP_k=\begin{cases}P_j & (k=j),\\ 0 & (k\neq j);\end{cases}\qquad \sum_{j=1}^{n}P_j\equiv I.$$

由代数算子组成的下面方程

$$\sum_{j=0}^{n-1}(A_jS^j+T)\varphi=f$$

称为代数算子方程，其中 S 是 n 次代数算子，A_j 是满足一定条件的系数算子，T 是紧算子，f 是已知函数. 奇异积分方程可看做代数算子方程，例如，柯西奇异积分方程是$(a+bS+T)\varphi=f$，$S^2-I=0$，它是二次代数算子方程. 在满足一定条件下，代数算子也是诺特算子.

代数算子(algebra operator)　见“代数算子方程”.

局部化理论(theory of localization)　研究奇异积分方程的一种新方法，即局部化方法的理论，此方法对高维也很有价值. 算子 $A:L^p\to L^p$ 称为局部型算子，若对任意两个不相交的闭集 F_1,F_2，$P_{F_1}AP_{F_2}$是紧算子，其中

$$P_Mf(x)=\begin{cases}f(x) & (x\in M),\\ 0 & (x\notin M).\end{cases}$$

算子 A,B 称为在 x_0 局部等价并记为 $A\overset{x_0}{\sim}B$，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 x_0 的邻域 U，使得

$$\|\,|(A-B)P_U|\,\|<\varepsilon,$$
$$\|\,|P_U(A-B)|\,\|<\varepsilon,$$

其中

$$\|\,|A|\,\|=\inf_T\|A-T\|\ (T\text{ 是任一紧算子}).$$

如果

$$R_lAP_U\overset{x_0}{\sim}P_U\quad(P_UAR_r\overset{x_0}{\sim}P_U),$$

算子 $R_l(R_r)$称为算子 A 在 x_0 的局部左(右)正则化算子；如果 A 在 x_0 存在局部左和右正则化算子，算子 A 称为在 x_0 是局部诺特算子. 在此基础上主要得出以下两个基本定理：

1. 若 $A:L^p\to L^p$ 是局部型算子，则 A 是诺特算

子的充分必要条件是对任意 $x\in X$，它都是局部诺特算子.

2. A 存在左(右)正则化算子的充分必要条件是对任意 $x\in X$，它都存在局部左(右)正则化算子.

局部化理论是辛穆年科(Simonenko, I. B.)于1964年提出的.

局部型算子(operator of local type)　见"局部化理论".

局部诺特算子(local Noether operator)　见"局部化理论".

局部正则化算子(local regularization operator)　见"局部化理论".

非线性积分方程(nonlinear integral equation)　不具有线性性质的一类积分方程. 如果未知函数在积分号下是以非线性形式出现的，这种方程就称为非线性积分方程. 例如，

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y=f(x),$$

当 k 不是 φ 的线性函数时，就是非线性积分方程. 非线性积分方程也可以被分成多种类型，例如，弗雷德霍姆型、沃尔泰拉型、哈默斯坦型等.

由于自然界和工程技术中出现的大量问题都是非线性的，因此，在数学物理中研究过的一些线性方程，只能是在一定条件下对实际问题的近似描述. 为了更精确地刻画客观现象，就完全有必要研究非线性积分方程. 如果把积分方程中出现的函数看做是巴拿赫空间 X 中的元素，把原来的积分运算用算子 T 来代替，就将得到一个算子方程 $Tu=f$.

近年来非线性积分方程的研究已有很大的发展，但是还没有系统的理论. 即使是讨论可解性问题上也存在着不少困难，这主要是与线性积分方程的研究方法有着本质的不同. 这一理论的进一步发展在很大程度上依赖于现代泛函分析、算子理论以及绍德尔不动点原理等数学分支的发展.

非线性弗雷德霍姆积分方程(nonlinear Fredholm integral equation)　一类特殊的非线性积分方程. 这指的是方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y=f(x),\qquad(1)$$

其中 $f(x)\in L^2[a,b]$，a,b 是给定的有限(或无限)实数，若

$$\left\|\int_a^b k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y\right\|\leqslant M\|\varphi\|,$$

而且对任意的 z_1,z_2

$$|k(x,y,z_1)-k(x,y,z_2)|\leqslant N(x,y)|z_1-z_2|,$$

其中

$$\int_a^b\int_a^b N^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=N^2<+\infty,$$

这时，对 $|\lambda|<1/N$，方程(1)在 $L^2[a,b]$ 内一定存在着惟一解.

非线性沃尔泰拉积分方程(nonlinear Volterra integral equation)　积分上限变动的一类特殊的非线性方程. 这指的是如下方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y=f(x)\quad(a<x<b),\qquad(1)$$

其中 $f(x)\in L^2[a,b]$，a,b 是给定的有限(或无限)实数，若

$$\left\|\int_a^x k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y\right\|\leqslant M\|\varphi\|,$$

而且对任意的 z_1,z_2，有

$$|k(x,y,z_1)-k(x,y,z_2)|\leqslant N(x,y)|z_1-z_2|,$$

$$\int_a^b\int_a^b N^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty,$$

这时，对任意 λ，方程(1)在 $L^2[a,b]$ 内都存在着惟一解.

哈默斯坦方程(Hammerstein equation)　一类重要的非线性积分方程. 它指的是如下形式的积分方程：

$$\varphi(x)=\int_a^b k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y,$$

其中 $k(x,y)$，$f(y,u)$ 都是已知函数，$f(y,u)$ 关于 u 是非线性的. 这一方程是由哈默斯坦(Hammerstein, H.)于1930年提出来的，一直到最近仍有不少学者研究这种类型的方程，已经得到了不少很有意义的结果.

非线性奇异积分方程(nonlinear singular integral equation)　奇异积分方程之一. 如果一个奇异积分方程中的未知函数在积分号下面是以非线性形式出现的，这种方程就称为非线性奇异积分方程. 例如，把线性奇异积分方程的被积函数

$$\frac{k(x,y)}{x-y}\varphi(y)$$

换成更一般的函数

$$\frac{k(x,y,\varphi(y))}{x-y}$$

或者

$$\frac{k(x,y)f(y,\varphi(y))}{x-y},$$

就得到相应的非线性奇异积分方程. 考虑如下方程：

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b\frac{k(x,y,\varphi(y))}{x-y}\mathrm{d}y,\qquad(1)$$

λ 是参数. 只要在 $[a,b]\times[a,b]\times[-R,R]$ 上满足条件：

$$|k(x,y,t)-k(x_1,y_1,t_1)|\leqslant K[|x-x_1|^{\mu}+|y-y_1|^{\nu}+|t-t_1|]\quad(0<\mu,\nu\leqslant 1),$$

K 是常数,就可以用绍德尔方法证明方程(1)的解存在.

非线性积分算子(nonlinear integral operator) 如果把非线性积分方程中出现的函数看做巴拿赫空间中的元素,那么原来的积分运算就将构成一个非线性积分算子 T. 常见的非线性积分算子有:

1. 乌雷松算子

$$Tu=\int_a^b k(x,y,u(y))\mathrm{d}y,$$

其中 $k(x,y,t)$ 是 $[a,b]\times[a,b]\times\mathrm{R}^1$ 上的已知函数,它关于 t 是非线性的.

2. 沃尔泰拉算子

$$Tu=\int_a^x k(x,y,u(y))\mathrm{d}y,$$

其中 $k(x,y,t)$ 是 $[a,b]\times[a,b]\times\mathrm{R}^1$ 上的已知函数,它关于 t 是非线性的, $a<x<b$.

3. 哈默斯坦算子

$$Tu\equiv\int_a^b k(x,y)f(y,u(y))\mathrm{d}y,$$

其中 $k(x,y)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 上 p 幂可积函数, $f(y,t)$ 在 $[a,b]\times\mathrm{R}^1$ 上可测,并且对于固定的 y,关于 t 是连续的. 这样就可以与抽象空间中的算子理论研究结合起来.

桑德拉塞卡尔 H 方程(Chandrasekher H-equation) 一类重要的非线性积分方程. 桑德拉塞卡尔 H 方程是指以下的非线性积分方程:

$$H(x)=1+H(x)\int_0^1\frac{x}{x+t}\psi(t)H(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $\psi(t)$ 是 $[0,1]$ 上非负有界可测的已知函数, $H(x)$ 是未知函数,此方程在中子迁移理论和空气动力学中都有重要的应用.

积分微分方程(integral-differential equation) 一类未知函数同时出现在积分和微分号下的方程. 例如

$$u'(t)=g(t,u(t))+\int_{t_0}^{\varphi(t)}k(t,s,u(s))\mathrm{d}s$$

是以 $u(t)$ 为未知函数的非线性积分微分方程. 当 $\varphi(t)\equiv$ 常数的情形,称为弗雷德霍姆型积分微分方程,当 $\varphi(t)\equiv t$ 的情形,称为沃尔泰拉型积分微分方程. 类似于常微分方程,积分微分方程也可以提初值问题、边值问题或特征值问题.

弗雷德霍姆型积分微分方程(Fredholm integral-differential equation) 见"积分微分方程".

沃尔泰拉型积分微分方程(Volterra integral-differential equation) 见"积分微分方程".

积分微分方程的初值问题(initial value problem of integral-differential equation) 一类利用给定的初值条件定解积分微分方程的问题. 弗雷德霍姆型积分微分方程的初值问题是指问题:

$$\begin{cases}u'(t)=g(t,u(t))+\int_{t_0}^{t_1}k(t,s,u(s))\mathrm{d}s,\\ u(t_0)=u_0.\end{cases}$$

如果满足下列条件:

1. $g(t,y_1)-g(t,y_2)\leqslant L(t)(y_1-y_2)$
$(t\in(t_0,t_1],y_1\geqslant y_2,L(t)\in C^0(t_0,t_1])$.

2. $\int_{t_0}^{t_1}(k(t,s,w_1(s))-k(t,s,w_2(s)))\mathrm{d}s$
$\leqslant N(t)\int_{t_0}^{t_1}M(s)(w_1(s)-w_2(s))\mathrm{d}s,$

其中 $t\in[t_0,t_1],w_1,w_2\in C^0[t_1,t_2],w_1\geqslant w_2(t\in(t_0,t_1]),N,M\in C^0[t_0,t_1],N\geqslant 0,M\geqslant 0$.

3. $\int_{t_0}^{t}sM(s)\mathrm{d}s<+\infty\ (t\in(t_0,t_1])$.

4. $N(t)+tL(t)\leqslant 1+t^2M(t)\ (t\in(t_0,t_1])$,

那么初值问题在 $C^0[t_0,t_1]\cap C^1[t_0,t_1]$ 中的解是惟一的.

积分微分方程的边值问题(boundary value problem of integral-differential equation) 一类利用给定的边界条件定解积分微分方程的问题. 线性积分微分方程的边值问题是指方程

$$\begin{cases}(pu)'-qu+\lambda\left(\rho u+\int_G k(x,y)u(y)\mathrm{d}y\right)=0,\\ u=0\quad(x\in\partial G).\end{cases}$$

设

$$D(\varphi)=\int_G p\varphi'^2\mathrm{d}x+\int_G q\varphi^2\mathrm{d}x,$$

$$H(\varphi)=\int_G\rho\varphi^2\mathrm{d}x+\int_G\int_G k(x,y)\varphi(x)\varphi(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

于是上述边值问题可由在 $H(\varphi)=$ 常数的条件下使 $D(\varphi)$ 为极小的问题导出,对这个边值问题的正交条件由

$$\int_G\rho u_i(x)u_j(x)\mathrm{d}x+\int_G\int_G k(x,y)u_i(x)u_j(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}1&(i=j),\\0&(i\neq j)\end{cases}$$

给出.

普朗托积分微分方程(Prandtl integral-differential equation) 一类积分微分方程. 具有常速 V 的动翼翼幅上的环流分布 $\Gamma(y)$ 所满足的积分微分方程,即方程

$$\alpha(y)=\frac{\Gamma(y)}{\pi k(y)t(y)V}+\frac{1}{\pi V}\mathrm{P.V.}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\frac{\mathrm{d}\Gamma(y')}{y-y'}$$

称为普朗托积分微分方程,其中 b 是翼幅, y,y' 是与翼幅中央的距离, t 是机翼长, α 是从浮力为 0 的位置所测的倾角, $2\pi k$ 是浮力系数对倾角的曲线的斜率,P. V. 表示积分时取柯西主值.

特殊的函数方程(special functional equations) 一类函数方程. 所谓特殊函数方程是指不包含极限

运算的函数方程.这类函数方程没有统一的解法,通常把它们化为已知的标准型来求解.

加性函数方程(additive functional equation) 一类最简单的函数方程.所谓加性函数方程,是指形如

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

的方程.柯西(Cauchy,A.-L.)证明了方程(1)的连续解只有 $f(x)=cx$(c 是常数),即使只要求 f 在某点连续,在该点邻域有界或可测,也只有解 cx.但在非可测函数类中,哈默尔(Hamel,G.K.W.)和勒贝格(Lebesgue,H.L.)证明了除 cx 外还有无穷多个解.另一方面,奥斯特罗格拉茨基(Остроградский,M.В.)证明了,如果方程(1)的解 $f(x)$ 在一个正测度集合上不取两个相异值之间的值,则 $f(x)$ 必是连续的.以上结论可以推广到 n 个变量的情形.方程(1)的变形方程是

$$g(x+y)=g(x)g(y). \tag{2}$$

如果存在 ξ 使得 $g(\xi)=0$,则 $g(x)$ 恒为零.因此假定 $g(x)\neq 0$.取 $x=y$ 即可看出 $g(x)>0$,令 $f(x)=\log g(x)$,则方程(2)可化为方程(1).因此,方程(2)的连续解只有 $g(x)=\exp(cx)$.再考虑方程

$$g(u\cdot v)=g(u)g(v). \tag{3}$$

如果存在 $\xi\neq 0$ 使得 $g(\xi)=0$,则 $g(x)\equiv 0$,因此,假定 $u\neq 0$ 时 $g(u)\neq 0$.对于 $u>0,v>0$,令 $x=\log u$,$y=\log v$,于是方程(3)就化为方程(2).又在方程(3)中取 $v=-1$ 得到 $g(-u)=g(-1)g(u)$,所以 $g(-1)=\pm 1$.于是方程(3)的连续解是 $|u|^c$ 或 $(\operatorname{sign} u)|u|^c$.

一般加法定理(general addition theorem) 刻画一种特殊方程存在连续的非零解特征的一个定理.一般加法定理如下:如果方程

$$f(x+y)=F(f(x),f(y)) \tag{1}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 中存在连续的非常数解 $f(x)$,那么 $f(x)$ 必是严格单调函数,而 $F(u,v)$ 是关于 u,v($\alpha<u,v<\beta$)的严格单调递增连续函数,且 $\alpha<F(u,v)<\beta$.还存在一个 c,使得 $F(c,c)=c$,而且关于 (α,β) 中的任意的 u,v,w,成立恒等式

$$F(F(u,v),w)=F(u,F(v,w)).$$

反之,如果 F 是具有这些性质的函数,则(1)式存在在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的非常数解.而且若 $f(x)$ 是这样的一个解,则 $f(x)$ 就给出了其他的解.如果 $F(u,v)$ 还是连续可微的,则 $f(x)$ 就是微分方程

$$f'(x)=F_v(f(x),a)c,\ c=f'(0)$$

在初始条件 $f(0)=a$ 下所得到的解.

施罗德函数方程(Schröder functional equation) 一类函数方程.函数方程

$$f(\theta(x))=cf(x) \tag{1}$$

称为施罗德函数方程,其中 $\theta(x)$ 是已知函数,c 是常数.如果 $f_1(x)$ 是一特解($f_1\neq 0$),则其通解为 $f(x)=f_1(x)\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 是 $\varphi(\theta(x))=\varphi(x)$ 的通解.假设存在点 a 使得 $\theta(a)=a$,并且 $\theta(x)$ 和 $f(x)$ 在点 a 的邻域内可微,于是有 $f'(a)=0$ 或 $\theta'(a)=c$.考查 $\theta'(a)=c$ 的情形,若 $\theta(x)$ 在 $x=a$ 处二次可微,且 $|c|<1$,那么在 $x=a$ 的邻域中序列 $\{(\theta_n(x)-a)c^{-n}\}$ 一致收敛,$\theta_0(x)=x$,$\theta_n(x)=\theta(\theta_{n-1}(x))$ $(n=1,2,\cdots)$,它的极限 $f(x)$ 就是方程(1)的一个解.如果 $|c|>1$,则令 $\theta(x)=u$,那么在 $u=a$ 的邻域 $f(\theta^{-1}(u))=c^{-1}f(u)$,这就化为 $|c|<1$ 的情形了.

阿贝尔函数方程(Abel functional equation) 施罗德函数方程的一种变形.方程

$$f(\theta(x))=f(x)+1$$

称为阿贝尔函数方程.$\theta(x)$ 也是已知函数.如果令 $\exp f(x)=\varphi(x)$,则得到施罗德方程

$$\varphi(\theta(x))=e\varphi(x),$$

再考虑方程

$$f(x+1)=A(x)f(x)$$

($A(x)$ 是已知函数),如果令 $\log f(x)=\varphi(x)$,则得如下差分方程

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=\log A(x).$$

解此差分方程即可得到原方程的解.

撰 稿 赵 桢 容尔谦
审 阅 李明忠 侯宗义

动 力 系 统

动力系统(dynamical system)　一门有关系统演化规律的数学学科,着重于整体性和大范围的研究. 动力系统的研究来自常微分方程定性理论. 设常微系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=S(x), \tag{1}$$

其中 $x\in\mathrm{R}^n$, $S\in C^0(\mathrm{R}^n,\mathrm{R}^n)$. 若(1)满足解的存在与惟一性定理,且每一解 $f(t,x)$ 对所有实数 t 有定义,它在 R^n 中可以看成带有参数 t 的一条曲线((1)的轨道),它满足:

1. $f(0,x)=x$, $\forall x\in\mathrm{R}^n$(初值条件).

2. $f(t_1+t_2,x)=f(t_2,f(t_1,x))$, $\forall x\in\mathrm{R}^n$, $t_1,t_2\in\mathrm{R}$(群条件).

3. f 对 t 与 x 一并连续.

现在换一个观点来看,将 f 看做 $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ 的映射,它满足上述三个条件,就称为一个动力系统.

动力系统的研究开始于 19 世纪末,从 1881 年起的若干年里,庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)就开始研究常微分方程定性理论,讨论的课题(如稳定性、周期轨道的存在性及回归性等)以及所用的方法的着眼点,即为后来所说的动力系统的创始. 伯克霍夫(Birkhoff G. D.)从 1912 年起的若干年里,以三体问题为背景,扩展了动力系统的研究,包括他得出的遍历性定理. 伯克霍夫 1927 年的专著《动力系统》,标志着动力系统的正式诞生. 他的工作主要是拓扑动力系统与遍历性理论. 随后,从 1931 年起的若干年里,马尔可夫(Марков, A. A.)总结伯克霍夫理论,提出动力系统的抽象概念,进一步推动了动力系统的发展. 动力系统的研究着重在抽象系统而非具体方程的定性研究,其研究方法着眼于一族轨道间的相互关系,换句话说是整体性的. 1937 年,安德罗诺夫(Андронов, A. A.)和庞特里亚金(Понтрягин, Л. С.)就平面中某类常微分方程组提出了结构稳定性概念(当时称为粗系统). 1959 至 1962 年,佩克索托(Peixoto, M.)给出了紧二维流形上 C^1 动力系统结构稳定性的充分必要条件,并且证明结构稳定性的稠密性定理,引起数学界的重视. 因为紧二维流形上结构稳定系统不仅有较简单的相图结构,且任意一个 C^1 动力系统都可以由结构稳定系统任意地逼近. 在流形维数大于 2 时是否也有同样的结论,这个问题激发了人们对微分动力系统的研究. 后来才清楚在高维的情况下,结构稳定系统的相图一般很复杂,且稠密性定理不再成立. 从 20 世纪 60 年代开始,以斯梅尔(Smale, S.)为首的数学家们在微分动力系统研究方面做出了重要贡献,其影响历久不衰. 中国的廖山涛对此也做出了很大的贡献.

动力系统大致可分为拓扑动力系统、微分动力系统与遍历性理论. 从群作用的角度来看,又分为连续动力系统(亦称单参数变换群或连续流)和离散动力系统. 动力系统的严格定义为:设 M 是一个空间(拓扑空间、C^r 微分流形或测度空间等),G 是一个拓扑加群(实数加群 R 或整数加群 Z),$f:G\times M\to M$,满足:

1. $f(0,x)=x(\forall x\in M)$;

2. $f(t_1+t_2,x)=f(t_2,f(t_1,x))$ $(\forall t_1,t_2\in G, x\in M)$;

3. f 适合与 M 的结构对应的要求(见下文);

则称 (M,G,f) 是一个动力系统.

通常情况下,群 G 为实数加群 R 或整数加群 Z,此时就简单地说 f 是 M 上的动力系统,并且当 $G=\mathrm{R}$ 时,称 f 为连续动力系统;而当 $G=\mathrm{Z}$ 时,称 f 为离散动力系统. 当 M 为拓扑空间时,条件 3 要求 f 为连续的,此时称 f 为拓扑动力系统. 当 M 为 C^r 微分流形时,条件 3 要求 f 为 C^r 的,此时称 f 为 C^r 微分动力系统. 当 M 是测度空间时,条件 3 要求对每个 $t\in G$, $f(t,\cdot):M\to M$ 是保测变换,此时可从统计学角度对动力系统 f 进行研究,由此导致动力系统的遍历性理论. 上述三方面的研究各有其特点,但它们之间的联系十分密切,例如,当 M 是 C^r 微分流形同时又是测度空间,f 是 C^r 保测自同胚时,从统计学角度对动力系统 f 进行的研究导致微分遍历性理论.

拓扑动力系统

拓扑动力系统(topological dynamical system)　动力系统的一个组成部分. 所谓拓扑动力系统,是指拓扑空间(一般是度量空间)上的动力系统. 它通常包含流、离散动力系统、半流及离散半动力系统. 主要是从拓扑的观点研究系统的不变集的结构及其轨道的性质. 从 20 世纪 70 年代以来,由于微分动力系统研究的发展和深入,极大地推动了拓扑动力系统,特别是一维连续映射的研究,并取得了相当丰富和重要的成果(参见"动力系统").

离散动力系统(discrete dynamical system)　拓扑空间上自同胚所生成的动力系统. 当 M 是拓扑

空间时，$f:\mathrm{Z}\times M\to M$ 是离散动力系统. 令

$$f_1=T:M\to M,\ x\to T(x)=f(1,x),$$

显然，T 是 M 到自身的同胚. 此时，

$$f(2,x)=f(1,f(1,x))=T\circ T(x)=T^2(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f(n,x)=T^n(x)\ (\forall n\geqslant 0);$$

而 $f(-1,\cdot)$ 是 $f(1,\cdot)=T$ 的逆，即

$$T^{-1}=f(-1,\cdot).$$

因此，$f(-n,\cdot)=T^{-n}$，故人们常将由 M 到自身的同胚 $T:M\to M$ 生成的双边序列

$$\cdots,T^{-n},\cdots,T^{-2},T^{-1},T^0=\mathrm{id},T^1,T^2,\cdots,T^m,\cdots$$

称为是 M 上的离散动力系统，并简记为 (M,T)（参见“动力系统”）. 如果 M 是微分流形，T 是微分同胚，则称 (M,T) 为离散微分动力系统. 最初只是在遍历理论中研究离散动力系统. 后来，由于对流形上的常微系统研究的困难，斯梅尔(Smale,S.)等人从研究离散微分动力系统入手，试图将其结果再转移到流形上的常微分系统，这一研究也推动了一般离散动力系统的发展.

离散微分动力系统(discrete differential dynamical system)　见“离散动力系统”.

流(flow)　亦称连续动力系统、连续流或单参数变换群，一类动力系统. 所谓流，是指其所有变量都是按照随时间连续变化的值来定义的一个动力系统. 当 M 为拓扑空间时，$f:\mathrm{R}\times M\to M$ 是一个流（参见“动力系统”）. 对固定的 $t\in\mathrm{R}$，$f_t=f(t,\cdot):M\to M$ 是同胚. 由流的定义可知，M 到自身的同胚族 $\{f_t\}_{t\in\mathrm{R}}$ 在复合运算下形成群，故流又称为单参数变换群. 当 M 是微分流形，$f_t:M\to M(\forall t\in\mathrm{R})$ 是微分同胚时，流 f 称为光滑流. 已经知道，当 M 为紧致流形时，M 上的光滑流与 M 上的光滑向量场是一一对应的. 因此，人们通常又将 M 上给定的一个光滑流视为 M 上的一个光滑向量场或常微系统. 因为对每一个 $t\in\mathrm{R}$，$f_t:M\to M$ 是同胚，故 f_t 又生成 M 上的一个离散动力系统. 反之，给定一个同胚 $T:M\to M$，是否存在一个连续流 $f_t:M\to M$ 使得 $f_1=T$. 这在一般情况下是不可能的，但是通过扭扩，可使 T 导出高一维空间上的流. 因此，离散动力系统与流之间有着密切的联系，很多概念和结论是平行的，但在相应的讨论中，通常是在离散情形获得结论较易，然后再转而研究流，看是否有相应的结果.

连续动力系统(continuous dynamical system)　即“流”.

连续流(continuous flow)　即“流”.

单参数变换群(one-parameter transformation group)　即“流”.

光滑流(smooth flow)　见“流”.

离散半动力系统(discrete semi-dynamical system)　拓扑空间上连续自映射所生成的半动力系统. 设 M 是拓扑空间，$f:M\to M$ 是连续映射，对 $n\geqslant 0$，记

$$f^n=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n},$$

那么就称单边序列

$$f^0=\mathrm{id},\ f^1=f,\ f^2,\ \cdots,\ f^n,\ \cdots$$

为离散半动力系统. 当 M 是微分流形，f 为可微映射时，称离散半动力系统为微分半动力系统. 自然界大量存在的耗散系统是不可逆的，因此，半动力系统不但有深刻的理论意义，也有重要的实际背景. 但半动力系统十分复杂，一部分工作是研究动力系统的哪些概念和结果可以推广到半动力系统. 对于一维情形的研究，也可称之为一维自映射. 由于一维紧流形只有闭区间和单位圆周，因此，一维离散半动力系统就是闭区间的自映射与圆周的自映射的研究.

微分半动力系统(differential semi-dynamical system)　见“离散半动力系统”.

半流(semi-flow)　亦称连续半动力系统，指其所有变量都是按照随正向时间连续变化的值来定义的一个动力系统. 设 M 为一拓扑空间，记 $\mathrm{R}^+=[0,+\infty)$，设 $f:\mathrm{R}^+\times M\to M$ 是连续映射，若 f 满足条件：

1. $f(0,x)=x(\forall x\in M)$；
2. $f(t_1+t_2,x)=f(t_1,f(t_2,x))$
   $(\forall t_1,t_2\in\mathrm{R}^+,x\in M)$；

则称 f 为 M 上的半流. 由于对固定的 $t\in\mathrm{R}^+$，$f_t=f(t,\cdot):M\to M$ 为连续自映射，因而 f_t 生成 M 上的一个离散半动力系统. 反之，给定一个连续映射 $T:M\to M$，是否存在一个半流 $f:\mathrm{R}^+\times M\to M$ 使得 $f_1=T$，这在一般情况下是不可能的. 但是通过扭扩，可使 T 导出高一维空间上的半流. 因此，离散半动力系统与半流之间有着密切的联系.

连续半动力系统(continuous semi-dynamical system)　即“半流”.

时间 1 映射(time-one map)　连续流和离散动力系统之间联系的方式之一. 设 φ 是拓扑空间 M 上的连续流. 考虑 φ 在某些特殊的离散时间 t 上的流动，即对固定的 $t(\neq 0)$，考虑映射 $\varphi_t:M\to M$，φ_t 是 M 到自身的同胚，它在 M 上生成一个离散动力系统. 人们把 φ_t 称为流 φ 的时间 t 映射；特别地，称 φ_1 为流 φ 的时间 1 映射. 一般地，研究同胚 φ_1 所获得的信息，可以启发对 φ 作相应的讨论. 例如，流 φ 的回复点、不动点以及轨道的渐近极限等动力学性质都反映在 φ_1 生成的离散动力系统的相应性质中.

时间 t 映射(time-t map)　见“时间 1 映射”.

扭扩(suspension)　任意同胚与适当的流联系的方式. 它与庞加莱横截面的概念相呼应. 设 M 是

拓扑空间，$f:M\to M$ 是一同胚. 在 $\mathsf{R}\times M$ 上定义流 $\varphi_t(r,x)=(t+r,x)$. 考虑 $\mathsf{R}\times M$ 上的等价关系“～”：

$$(r,x)\sim(s,y)\Leftrightarrow r-s\in\mathsf{Z},\ y=f^{r-s}(x).$$

以等价关系“～”做 $\mathsf{R}\times M$ 的商空间

$$\widetilde{M}=\mathsf{R}\times M/\sim.$$

当 $(r,x)\sim(s,y)$ 时有

$$\varphi_t(r,x)=(t+r,x)\sim(t+s,y)=\varphi_t(s,y).$$

因而 φ_t 诱导出 $\widetilde{M}$ 上的一个连续流 $\tilde{\varphi}_t$，人们称 $\tilde{\varphi}_t$ 为 f 的扭扩，并称 $\widetilde{M}$ 为扭扩空间. 当 M 是 C^r 微分流形，f 是 C^r 微分同胚时，可赋予 $\widetilde{M}$ 中的 C^r 流形结构，使 $\widetilde{M}$ 是一个比 M 高一维的 C^r 流形，并且 $\tilde{\varphi}_t$ 是 $\widetilde{M}$ 的一个 C^r 流. 若将 M 与 $\widetilde{M}_0=\{0\}\times M/\sim$ 等同起来，f 可视为 $\widetilde{M}_0$ 上的 C^r 微分同胚，那么就称 $\widetilde{M}_0$ 是流 $\tilde{\varphi}_t$ 的一个横截面，而 f 恰是 $\tilde{\varphi}_t$ 在 $\widetilde{M}_0$ 诱导出的第一返回映射（或称庞加莱映射）. 对同胚及其扭扩的两方面研究可以相互提供信息，例如，同胚的可扩性等价于其扭扩的可扩性.

扭扩空间(suspension space)　见“扭扩”.

第一返回映射(first return map)　见“扭扩”.

庞加莱映射(Poincaré map)　即“第一返回映射”.

嵌入流(embedding in a flow)　离散动力系统与连续流之间的联系方式之一，它与时间 1 映射相对应. 设 $f:M\to M$ 是拓扑空间 M 的自同胚，φ 是连续流，如果 $f=\varphi_1$，就称 f 可嵌入流 φ. 如果 f 是连续自映射，φ 是连续半流，而且 $f=\varphi_1$，就称 f 可嵌入半流 φ. 在什么条件下，对给定的同胚或连续自映射 f 可嵌入 M 上的流或半流？这是就时间 1 映射而提出的反问题，称为嵌入问题. 由于对 M 上的任意连续流或连续半流 φ，φ_1 与 $\varphi_0=\mathrm{id}$ 同伦，因此，可嵌入流的同胚或可嵌入半流的连续自映射必同伦于恒同映射，所以对大多数的同胚或连续自映射，它们是不能嵌入流或半流的. 关于嵌入问题的研究，目前仅在区间和圆周情形得到彻底解决.

嵌入半流(embedding in a semi-flow)　见“嵌入流”.

嵌入问题(embedding problem)　见“嵌入流”.

轨道(orbit)　亦称轨线，动力系统研究的最基本的对象，动力系统的初始状态在系统作用下所呈现的全部状态的集合. 设 $G=\mathsf{R}$ 或 Z，$f:G\times M\to M$ 是一动力系统. 对于固定的 $x\in M$，点集 $\{f(t,x)\mid t\in G\}$ 称为过点 x 的轨道. 对于连续动力系统，轨道是连通集合；对于离散动力系统，轨道是由至多可数个点组成的集合. 对于离散半动力系统及半流，其轨道有类似的定义方式.

轨线(trajectory)　即“轨道”.

休止点(rest point)　亦称平衡点，又称临界点，动力系统最简单的轨道，此轨道仅由一个点（或说是一个状态）构成. 设 $f:\mathsf{R}\times M\to M$ 是流，若 $f(\mathsf{R},x)=x$，则点 $x\in M$ 称为休止点. 这时有 $\omega(x)=\alpha(x)=x$. 如果动力系统是由流形上的向量场（即流形上的常微系统）所导出的，休止点恰好对应向量场的奇点（即该点的切向量为零）.

平衡点(equilibrium point)　即“休止点”.

临界点(critical point)　即“休止点”.

奇点(singular point)　见“休止点”.

周期轨道(periodic orbit)　刻画动力系统的某种状态会一再重现的概念，也是描述现实世界中周期现象的一个数学模型. 设 f 是 M 上的流（离散动力系统），若存在 $T>0(N>0)$，使得

$$f(t+T,x)=f(t,x)\ (\forall t\in\mathsf{R}),$$

$$(f^{n+N}(x)=f^n(x)\quad(\forall n\in\mathsf{Z}))$$

成立，就称过 $x\in M$ 的轨道

$$\gamma_x=\{f(t,x)\mid t\in\mathsf{R}\}(\gamma_x=\{f^n(x)\mid n\in\mathsf{Z}\}$$

是一条周期轨道. 休止点是平凡的周期轨道. 对于非平凡的周期轨道，总存在满足上述条件的最小正数 T，称为周期轨道的周期. 对离散动力系统，若 $N>0$ 满足

$$f^{n+N}(x)=f^n(x)\ (\forall n\in\mathsf{Z}),$$

且当 $0<n<N$ 时 $f^n(x)\neq x$，那么 N 就称为这条周期轨道的周期，并且 x 称为 N 周期点. 特别地，当 $N=1$ 时，x 称为不动点. 对于半流或离散半动力系统，周期轨道及其周期可类似定义. 属于周期轨道的点称为周期点. 这里值得注意的是：对半动力系统，有可能出现点 $x\in M$ 不位于周期轨道上，然而存在 $t>0(n>0)$，使得

$$y=f(t,x)(y=f^n(x))$$

位于一周期轨道上，此时，常把 x 称为是准周期点或终于周期点.

不动点(fixed point)　见“周期轨道”.

周期轨道的周期(period of periodic orbit)　见“周期轨道”.

周期点(periodic point)　见“周期轨道”.

准周期点(quasi-periodic point)　见“周期轨道”.

局部截痕(local section)　揭示流在常点附近的局部性态所引进的概念，也是研究流的性质的一个有力的几何工具. 设 f 是度量空间 M 上的流，N 是 M 的任一集合，$T>0$，记

$$\Phi=f([-T,T],N)=\bigcup_{|t|\leqslant T}f(t,N),$$

人们把 Φ 称为时间长度为 $2T$ 的有限管. 设 S 是 Φ 内的闭集，若对点 $y\in\Phi$ 都存在惟一数值 t_y，$|t_y|\leqslant 2T$，使得 $f(t_y,y)\in S$，那么就称 S 是有限管 Φ 的局部截痕. 已经知道，对常点而言，总存在含该点的有

限管,使得它有含该常点的局部截痕存在,并由此得到,流在常点附近的轨弧与希尔伯特空间中一族平行线段同胚.特别地,对于流形上由向量场(即常微系统)产生的流,它在常点附近的轨弧同胚于欧氏空间的一族平行线段.此外,这种流在非平凡周期点处的局部截痕的存在,可使对流在这周期轨道附近性质的研究转化为对在这截痕上所导出的庞加莱映射的研究(参见"横截面").局部截痕是由惠特尼(Whitney,H.)于1932年引入的.

有限管(finite tube) 见"局部截痕".

不变集(invariant set) 动力系统中的重要概念之一.它是动力系统研究的重要对象.设 f 是 M 上的流(离散动力系统),M 的子集 A 是不变集当且仅当对任意 $t\in\mathsf{R}(n\in\mathsf{Z})$,有

$$f(t,A)\subset A(f^n(A)\subset A).$$

由此得出 $f(t,A)=A(f(A)=A)$.粗糙地说,不变集就是由整条轨道组成的子集.如果 $A\subset M$ 是一不变集,则 f 对 A 的限制也是一动力系统.对于半流及离散半动力系统 f,设 A 是 M 的子集,若对任意 $t\geqslant 0(n\geqslant 0)$ 有 $f(t,A)\subset A(f^n(A)\subset A)$(此时不一定有 $f(t,A)=A(f^n(A)=A)$),那么就称 A 是 f 的不变集.重要的不变集有 ω 极限集、α 极限集、非游荡集和链回归集等.

ω 极限集(ω limit set) 描述动力系统的初始状态在系统的正向作用下所能达到的最终结果.对于流 $f:\mathsf{R}\times M\to M$,设 $x\in M$,若存在时间 t 的序列 $\{t_n\},t_n\to+\infty$,使得

$$\lim_{n\to+\infty}f(t_n,x)=y,$$

则称 y 为 x 的一个 ω 极限点.全体 ω 极限点组成的集合称为 ω 极限集,通常记为 $\omega(x)$.显然,若 x' 在过 x 的轨道上,那么 $\omega(x')=\omega(x)$.因此也常说成是轨道的 ω 极限集.ω 极限集一定是闭的不变集,并且

$$\omega(x)=\bigcap_{t\geqslant 0}\overline{f([t,+\infty),x)}.$$

当 f 为离散动力系统时,设 $x\in M$,若存在递增的正整数序列 $\{n_k\},n_k\to+\infty$,使得

$$\lim_{k\to+\infty}f^{n_k}(x)=y,$$

则称 y 为 x 的 ω 极限点.ω 极限点的全体组成的集合称为 ω 极限集,记为 $\omega(x)$.$\omega(x)$ 与过 x 的轨道上的点的选取无关,且

$$\omega(x)=\bigcap_{n\geqslant 0}\overline{\{f^k(x)\mid k\geqslant n\}}.$$

ω 极限集是闭的不变集.对于半流及离散半动力系统的 ω 极限集有类似的定义和性质.

ω 极限点(ω limit point) 见"ω 极限集".

α 极限集(α limit set) 描述动力系统的初始状态在系统的负向作用下所能达到的最终结果.对流 $f:\mathsf{R}\times M\to M$,设 $x\in M$,若存在时间序列 $\{t_n\}$,$t_n\to-\infty$,且

$$\lim_{n\to+\infty}f(t_n,x)=y,$$

则称 y 为 x 的 α 极限点.全体 α 极限点组成的集合称为 α 极限集,记为 $\alpha(x)$.$\alpha(x)$ 与过 x 轨道上的点的选取无关,因而也常说成是轨道的 α 极限集.可见

$$\alpha(x)=\bigcap_{t\leqslant 0}\overline{f((-\infty,t),x)}.$$

同样,当 f 为离散动力系统时,有

$$\alpha(x)=\bigcap_{n\leqslant 0}\overline{\{f^k(x)\mid k\leqslant n\}}.$$

α 极限集是闭的不变集.

α 极限点(α limit point) 见"α 极限集".

泊松稳定轨道(Poisson stable orbit) 一种有别于周期轨道但又能够自身回复的轨道,即它的极限集包含轨道自身的轨道.设 f 是 M 上的流或离散动力系统,对 $x\in M$,记 γ_x 为 f 过 x 的轨道,若 $\gamma_x\cap\omega(x)\neq\varnothing(\gamma_x\cap\alpha(x)\neq\varnothing)$,则 γ_x 称为正向(负向)泊松稳定的(简称 $P^+(P^-)$ 稳定).如果轨道 γ_x 同时是 P^+ 和 P^- 稳定的,则称它为泊松稳定轨道(简称 P 式稳定).P 式稳定轨道有如下性质:

1. 轨道 γ_x 为 P^+ 稳定的当且仅当 $\gamma_x\subset\omega(x)$.
2. 轨道 γ_x 为 P^- 稳定的当且仅当 $\gamma_x\subset\alpha(x)$.
3. 轨道 γ_x 为 P 稳定的当且仅当
$$\gamma_x\subset\omega(x)\cap\alpha(x).$$
4. 周期轨道都是 P 式稳定的,称为平凡的 P 式稳定轨道.

对平面或球面上的流,它只有平凡的 P 式稳定轨道.环面上的无理流的每条轨道都是非平凡的 P 式稳定轨道,此时若在某一轨道上加入一个休止点 x(变成另一个流),则被 x 截断而成的两条轨道,一个 P^+ 稳定(其 ω 极限集为 x),另一为 P^- 稳定(其 α 极限集为 x).对于半流和离散半动力系统只有 P^+ 稳定轨道.泊松稳定轨道有时又称为回复轨道,特别是在离散情形,这种称谓更为多见(参见"回复轨道").泊松稳定轨道是庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)于1899年引入的.

正向泊松稳定轨道(positive Poisson stable orbit) 见"泊松稳定轨道".

负向泊松稳定轨道(negative Poisson stable orbit) 见"泊松稳定轨道".

***P* 式稳定轨道**(P-stable orbit) 见"泊松稳定轨道".

平凡 *P* 式稳定轨道(trivial P-stable orbit) 见"泊松稳定轨道".

渐近轨道(asymptotic orbit) 根据轨道集合与轨道的极限集合的相互关系对轨道进行分类的一类轨道.渐近轨道定义与泊松稳定轨道的定义相呼应,它是由涅梅茨基(Немыцкий,В.В.)引入的概念.具

体定义为：若 ω 极限集（α 极限集）不空，且正半轨（负半轨）与其 ω 极限集（α 极限集）的交为空集，则称该轨道为正（负）向渐近轨道.

正向渐近轨道(positive asymptotic orbit)　见"渐近轨道".

负向渐近轨道(negative asymptotic orbit)　见"渐近轨道".

域回归性(recurrence of domain)　刻画动力系统回复性态的一个概念，也是动力系统研究的一个重要性质. 设 f 是度量空间 M 上的流，若对任一域 $G\subset M$ 及任一数 T，都存在 $t>T$，使得

$$G\cap f(t,G)\neq\varnothing,$$

则称 f 具有域回归性；具有不变测度的动力系统具有域回归性；动力系统限制在其中心上具有域回归性；在一集合的极小吸引中心内有域回归性等. 它是由伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)引入的.

非游荡点(nonwandering point)　动力系统中最重要的概念之一，指其任意邻域具有域回归性的点. 设 f 是 M 上的流(离散动力系统)，若对于 x 的任意邻域 U 及任意 $T>0(N>0)$，存在 $t>T(n>N)$，使得

$$f(t,U)\cap U\neq\varnothing\quad(f^n(U)\cap U\neq\varnothing).$$

则点 $x\in M$ 称为非游荡点. 对于半流与离散半动力系统，非游荡点定义相同. 极限点、周期点以及 P 式稳定轨道上的点都是非游荡点. 不是非游荡点的点称为游荡点.

游荡点(wandering point)　见"非游荡点".

非游荡集(nonwandering set)　动力系统中的重要的不变集. 一个动力系统 f 的所有非游荡点的集合称为 f 的非游荡集，记为 $\Omega(f)$(参见"非游荡点"). 对于紧空间上的动力系统，非游荡集是非空的闭不变集，而且由于极限集属于非游荡集，因此所有的轨道，当时刻趋于无穷时将停留在非游荡集的任意邻域之中. 由此看到，非游荡集的结构在相当程度上决定着动力系统的整体行为，故弄清非游荡集的构造及扰动下的稳定性(即 Ω 结构稳定)都是十分重要的.

动力系统的中心(center of dynamical system)　亦称伯克霍夫中心，非游荡集中具有域回归性的不变子集，即它的每点在相对拓扑下都是非游荡点的集合. 设 f 是紧度量空间 M 上的动力系统，将 f 的非游荡集 M_1 看做新的动力系统空间(即 f 在 M_1 上的限制)，那么 M_1 是紧度量空间. 因此，在 M_1 上能确定出非空闭不变集合 M_2，M_2 是对 M_1 来说的非游荡集. 如此继续下去，便得到一个下降的闭集序列：

$$M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_n\supset\cdots.$$

若对某一整数 k，有 $M_k=M_{k+1}$，则 $M_k=M_{k+2}$，…，而集合 M_k 就称为动力系统的中心. 若每个 M_{k+1} 都是 M_k 的真子集，则定义

$$M_\omega=\bigcap_{k=1}^{\infty}M_k,$$

集合 M_ω 也是非空闭不变集. 用超限归纳法，这一步骤可继续到第二类序数的全部：若 $\alpha+1$ 是第一类数，且 M_α 已定义，则 $M_{\alpha+1}\subset M_\alpha$ 是运动空间 M_α 内的非游荡集；若 β 是第二类超限数，且所有 $M_\alpha(\alpha<\beta)$ 都已定义，则

$$M_\beta=\bigcap_{\alpha<\beta}M_\alpha,$$

于是便得到闭集的超限序列：

$$M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_\omega\supset\cdots\supset M_\alpha\supset\cdots.$$

由康托尔-贝尔定理，对某一第二类数 α 有 $M_\alpha=M_{\alpha+1}=\cdots$，集合 M_α 就是该动力系统的中心，并且称使得 $M_\alpha=M_{\alpha+1}$ 最小数 α 为中心的中心阶数或中心深度. 若 f 为流，那么，f 的 P 式稳定轨道上的点所成的集合闭包就是其中心. 对于闭曲面上的流来说. 其中心的阶数至多是 3. 此外，马依尔(Майер, А. Г.)于 $\mathbf{R}^3$ 中给出了一个流使其中心阶数超过任意给定的一个第二类超限数. 动力系统的中心是由伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)于 1926 年引入的.

伯克霍夫中心(Birkhoff center)　即"动力系统的中心".

中心阶数(order of the center)　亦称中心深度. 见"动力系统的中心".

中心深度(depth of the center)　即"中心阶数".

链回归集(chain recurrent set)　比非游荡集更广的一类不变集. 设(M,d)是度量空间，f 是 M 到自身的连续映射，$\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 是 f 的一个 α 伪轨. 如果存在整数 $n>0$，使得 $x_{i+n}=x_i(\forall i\in\mathbf{Z})$，则称 f 的 α 伪轨 $\{x_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 是周期的. 如果对任意 $\varepsilon>0$，都存在通过点 $x\in M$ 的周期 ε 伪轨，则称点 x 是 f 的链回归点. f 的所有链回归点组成的集合称为 f 的链回归集，记为 $\mathrm{CR}(f)$. 类似地可以给出 M 上的连续流的链回归集的定义. 链回归集较之非游荡集更容易处理，原因在于以下关系成立，当 M 紧致时有

$$\mathrm{CR}(f|\mathrm{CR}(f))=\mathrm{CR}(f).$$

但是，对于非游荡集，一般地，$\Omega(f\ |\Omega(f))$ 与 $\Omega(f)$ 并不一定相等. 此外，又因 $\Omega(f)\subset\mathrm{CR}(f)$，故对 $\mathrm{CR}(f)$ 的动力行为的研究引起重视.

链回归点(chain recurrent point)　见"链回归集".

准极小集(quasi-minimal set)　具有域回归性的不变集之一. 如果一个轨道是泊松式稳定的，并且该轨道的闭包位于紧致集合中，那么该轨道的闭包称为是准极小集. 准极小集是由希尔米(Хильми, Г. Ф.)于 1936 年引入的.

拉格朗日式稳定(Lagrange stable) 刻画连续流的轨道具有有界性特征的一个概念. 设 f 是度量空间 M 上的流,若

$$\overline{\{f(t,x)\mid t\geqslant 0\}}\quad(\overline{\{f(t,x)\mid t\leqslant 0\}})$$

是紧致的,则称 f 过 $x\in M$ 的轨道为拉格朗日式正(负)稳定的. 同时是正和负的拉格朗日式稳定的轨道称为是拉格朗日式稳定的. 显然,若 M 为紧致空间,则所有轨道都是拉格朗日稳定的. 此外,对拉格朗日正稳定的轨道,其 ω 极限集是连通的.

拉格朗日式正稳定(positive Lagrange stable) 见"拉格朗日式稳定".

拉格朗日式负稳定(negative Lagrange stable) 见"拉格朗日式稳定".

吸引中心(attractive center) 一种闭的不变集合,它使得过某些点的轨道在时间趋于无穷时其停留在这个集合任意邻域内的时间概率为 1. 设 f 是 M 上的流,$x\in M,E\subset M$ 为闭集,记 φ_E 是集 E 的特征函数,即

$$\varphi_E(y)=\begin{cases}1 & (y\in E),\\ 0 & (y\notin E).\end{cases}$$

对 $T>0$,令

$$\tau=\tau(x;T,E)=\int_0^T\varphi_E(f(t,x))\mathrm{d}t.$$

若

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\varphi_E(f(t,x))\mathrm{d}t=\lim_{T\to+\infty}\frac{\tau}{T}=P^+(f(t,x)\in E)$$

存在,则该极限称为在 $t\to+\infty$ 时,点 x 位于集 E 内的概率. 类似地可以定义在 $t\to-\infty$ 时,点 x 位于集 E 内的概率 $P^-(f(t,x)\in E)$. 设 E 为闭不变集,若对任意 $\varepsilon>0$,点 x 在 $B(E,\varepsilon)=\{y\in M\mid d(y,E)<\varepsilon\}$ (这里 d 为 M 上的度量)内的概率 $P^+(P^-)$ 等于 1,即

$$P^+(f(t,x)\in B(E,\varepsilon))=1$$
$$(P^-(f(t,x)\in B(E,\varepsilon))=1),$$

则称 E 为 $f(t,x)$ 在 $t\to+\infty(t\to-\infty)$ 的吸引中心. 如果集 E 中不存在闭的真子集也是吸引中心,则 E 称为极小吸引中心. 正(负)拉格朗日式稳定的运动,在 $t\to+\infty(t\to-\infty)$ 时存在极小吸引中心. 对任意不变集 $A\subset M$,若闭的不变集 E_A 对任意 $\varepsilon>0$ 及任意 $x\in A$ 都有

$$P^+(f(t,x)\in B(E_A,\varepsilon))=1,$$

那么就称 E_A 为集 A 在 $t\to+\infty$ 的吸引中心. 如果 E_A 中不存在闭的真子集也是 A 的吸引中心,那么它就称为 A 的极小吸引中心. 如不变集合上的所有轨道都是正拉格朗日式稳定的,则它必有极小吸引中心存在. 吸引中心和极小吸引中心是由希尔米(Хильми,Г. Ф.)于 1936 年引入的.

极小吸引中心(minimal attractive center) 见"吸引中心".

回复轨道(recurrence orbit) 亦称回复运动,一种特殊的泊松式稳定轨道. 设 f 是度量空间 M 上的流,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $T(\varepsilon)>0$,使得对任意 $t_0\in\mathsf{R}$,都有

$$f(\mathsf{R},x)\subset B(f([t_0,t_0+T],x),\varepsilon)$$
$$=\{y\in M\mid d(y,f([t_0,t_0+T],x))<\varepsilon\},$$

或等价地说,对任意 $u,v\in\mathsf{R}$,总存在 w,使得 $v<w<v+T$,且 $d(f(u,x),f(w,x))<\varepsilon$,其中 d 是 M 上的度量,则称 f 过点 $x\in M$ 的轨道为回复的. 显然,周期轨道是回复轨道. 环面上的无理流的每个轨道都是回复轨道. 紧致极小集上所有轨道是回复的. 回复轨道是由伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)于 1922 年引入的.

回复运动(recurrence motion) 即"回复轨道".

极小集(minimal set) 动力系统一个重要的不变集合. 设 f 是 M 上的一个动力系统,若 N 是 f 的非空的闭不变集,并且 N 中不存在真子集也具有这种性质,则集合 $N\subset M$ 称为极小集. 特别地,若 M 本身是极小集,那么该动力系统就称为是极小的. 判断一动力系统何时为极小的以及寻求一动力系统的极小集何时具有简单形式是动力系统研究的重要问题. 周期轨道是一个极小集. 对圆周上的 C^2 微分同胚,它的极小集或为一周期轨道或为整个圆周. 紧极小集上所有轨道都是回复的. 此外,完备空间中回复轨道的闭包是极小集. 任何紧空间上的动力系统都存在极小集. 极小集是由伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)于 1922 年引入的.

极小动力系统(minimal dynamical system) 见"极小集".

几乎周期轨道(almost periodic orbit) 亦称几乎周期运动,一种特殊的回复轨道. 设 f 是完备度量空间 M 上的流,$x\in M$,如果对任意 $\varepsilon>0$,存在数集$\{\tau_n\}$及 $L>0$,具有下述性质:

1. 对任意 $t\in\mathsf{R}$,区间$(t,t+L)$都至少含有此数集中的一个元素(此数集称相对稠密的).

2. 对任意 $t\in\mathsf{R}$,有

$$d(f(t,x),f(t+\tau_n,x))<\varepsilon,$$

则称 f 过点 $x\in M$ 的轨道为几乎周期的. 当 f 是 M 上的离散动力系统时,若对任意 $\varepsilon>0$,集合

$$\{n\in\mathsf{Z}\mid f^n(x)\in B(x,\varepsilon)\}$$

(这里 $B(x,\varepsilon)=\{y\in M\mid d(y,x)<\varepsilon\}$)具有性质:存在 Z 的有限子集 K 使得

$$\mathsf{Z}=\{n\in\mathsf{Z}\mid f^n(x)\in B(x,\varepsilon)\}+K$$

(集合$\{n\in\mathbf{Z}\mid f^n(x)\in B(x,\varepsilon)\}$通常称为连结集),则称$f$过点$x\in M$的轨道是几乎周期的.周期轨道一定是几乎周期轨道.若它的周期为τ,那么$\{n\tau\mid n\in\mathbf{Z}\}$组成一相对稠密集.对离散情形,若它的周期为$N$,那么$\{nN\mid n\in\mathbf{Z}\}$就是一个连结集,并且可取定义中的一个$K$为$\{0,1,2,\cdots,N-1\}$.所有的几乎周期轨道都是回复的.但其逆不真.紧度量空间上几乎周期轨道的闭包是一个紧极小集合.几乎周期轨道是由富兰克林(Franklin,P.)于1929年引入的.

几乎周期运动(almost periodic motion)　即"几乎周期轨道".

李亚普诺夫式稳定性(Liapunov stability)　微分方程稳定性理论中相应概念在抽象动力系统的推广,它描述了动力系统的两个初始状态如果很接近时,那么在其后或其前的状态也十分接近这一定性性质.依据马尔可夫(Марков,A.A.)给的定义如下:设f是度量空间M上的流,对点$x\in M$及集合$A\subset M$,若对任意$\varepsilon>0$,都存在$\delta>0$,使得对任意$y\in A$,如果$d(x,y)<\delta$,那么不等式

$$d(f(t,x),f(t,y))<\varepsilon$$

对一切正的(负的或全体实的)t值成立,则称f过点$x\in M$的轨道或点$x\in M$对集合$A\subset M$是正(负或双侧)李亚普诺夫式稳定的.双侧李亚普诺夫式稳定性常称为S性.李亚普诺夫式稳定性与几乎周期性有十分密切的联系.例如,一个回复轨道对其轨道是李亚普诺夫式稳定的,那么该轨道就是几乎周期的.完备度量空间上的几乎周期轨道对它自己的轨道来说是双侧李亚普诺夫式稳定的.

正李亚普诺夫式稳定性(positive Liapunov stability)　见"李亚普诺夫式稳定性".

负李亚普诺夫式稳定性(negative Liapunov stability)　见"李亚普诺夫式稳定性".

双侧李亚普诺夫式稳定性(two-side Liapunov stability)　见"李亚普诺夫式稳定性".

完全非稳定动力系统(completely unstable dynamical systems)　$\mathbf{R}^n$中与稳定系统相反的一类动力系统.如果一个系统的非游荡集是空集,即它的所有点是游荡的,则称该系统是完全非稳定的动力系统.对平面上的流来说,若它的每个轨道都是拉格朗日非稳定的,那么这个系统是完全非稳定的.此外,从定义可知,完全非稳定的动力系统的每个轨道都是拉格朗日非稳定的.完全稳定动力系统是由涅梅茨基(Немыцкий,B.B.)于1934年引入的.

非固有鞍点(improper saddle point)　在研究完全非稳定流的轨道与希尔伯特空间的一族平行直线是否能够同胚时引入的概念,它是$\mathbf{R}^n$中在无穷远处的鞍点定义的推广.若存在点列$\{x_n\}$和递增数列$\{\tau_n\}$,$\{t_n\}$,使得

$$0<\tau_n<t_n,\ \tau_n\to+\infty\ (n\to+\infty),$$

且

$$x_n\to x,\quad f(t_n,x_n)\to y,$$

然而$\{f(\tau_n,x_n)\}$不含有收敛的子列,则称流f具有非固有鞍点.如果完全非稳定流具有非固有鞍点,则它不能与平行直线族同胚.

拓扑传递(topological transitive)　亦称拓扑可迁,动力系统中的一个重要概念,也是动力系统常见的一个动力性质.设f是度量空间M上的一个系统(离散的或连续的),若对任意两个非空开集$U,V\subset M$,存在正整数n(正实数T),使得

$$U\cap f^n(V)\neq\varnothing\ (U\cap f(T,V)\neq\varnothing),$$

那么就称f为拓扑传递.拓扑传递性等价于存在f在M上的一条稠密的轨道.拓扑传递系统的简单例子是符号动力系统.特别地,马尔可夫子移位$\sigma|S_A$: $S_A\to S_A$是拓扑传递的当且仅当矩阵A是不可约的.

拓扑可迁(topological transitive)　即"拓扑传递".

链传递(chain transitive)　亦称链可迁,是比拓扑传递要弱的一个概念.设f是紧度量空间(M,d)上的连续自映射,若对任意$\varepsilon>0$及任意$x,y\in M$,都存在一个从x到y的ε链(即ε伪轨),即存在点$x_0=x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=y$,使得

$$d(f(x_i),x_{i+1})<\varepsilon\ (0\leqslant i\leqslant n-1),$$

就称f是链传递的.

链可迁(chain transitive)　即"链传递".

拓扑混合(topological mixing)　离散动力系统中的一个重要概念,也是比拓扑传递更强的一个动力性质.设f是度量空间M到自身的连续映射,若对任意两个非空开集$U,V\subset M$,存在$N>0$,使得对一切$n\geqslant N$,有$U\cap f^n(V)\neq\varnothing$,则称$f$是拓扑混合的.鲍恩(Bowen,R.)指出:对谱分解定理中基本集Ω_k来说,存在$n_k>0$及闭子集集合$C_0,C_1,\cdots,C_{n_k-1}$,使得:

1. $C_i\cap C_j=\varnothing\,(i\neq j)$, $f(C_i)=C_{i+1}$, $f^{n_k}(C_i)=C_i$.

2. $\Omega_k=\bigcup_{i=0}^{n_k-1}C_i$.

3. $f^{n_k}|C_i:C_i\to C_i$是拓扑混合的.

此外,易见拓扑混合系统必是拓扑传递系统.

链混合(chain mixing)　比拓扑混合要弱的一个动力性质.设f是紧度量空间M上的连续自映射,若对任意$\varepsilon>0$及任意$x,y\in M$,总存在一个正整数N,使得对任意$n\geqslant N$,总存在一个长度为n的从x到y的ε链(即ε伪轨),即存在点$x_0=x,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n=y$,使得

$$d(f(x_i),x_{i+1})<\varepsilon\ (0\leqslant i\leqslant n-1),$$

就称 f 是链混合的.

特殊性(specification) 动力系统的一个十分有用的概念. 设 f 是紧度量空间 M 到自身的同胚,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $N=N(\varepsilon)>0$,使得对任意有限点列 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in M$ 及满足 $a_j-b_{j-1}\geqslant N(2\leqslant j\leqslant k)$的任意整数 $a_1\leqslant b_1<a_2\leqslant b_2<\cdots<a_k\leqslant b_k$ 和任意 $p>N+(b_k-a_1)$,存在 $x\in \mathrm{Per}(f)$(这里 $\mathrm{Per}(f)$ 表示 f 的周期点集合),使得 $f^p(x)=x$,且

$$d(f^i(x),f^i(x_j))<\varepsilon\ (a_j\leqslant i\leqslant b_j,1\leqslant j\leqslant k)$$

(这里 d 为 M 上的度量),则称 f 具有特殊性. 若 f 可扩且有特殊性,那么 f 的拓扑熵

$$h(f)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\#P_n(f)$$

(这里 $\#P_n(f)$ 表示 f 具有以 n 为周期的周期点集合的基数). 若 f 有特殊性,那么 f 是拓扑混合的. 此外,由拓扑混合、可扩及伪轨跟踪性可得到特殊性. 对 f 为自映射的特殊性可类似定义. 特殊性是由鲍恩(Bowen,R.)于 1971 年引入的.

逆极限空间(inverse limit space) 由一个拓扑半动力系统所导出的拓扑空间,通过它能够将一个拓扑半动力系统转化为一个拓扑动力系统,并通过对后者的研究而获得前者的信息. 设 f 是紧度量空间 M 到自身的连续满射,记

$$M^{\mathsf{Z}}=\{(x_i)\mid x_i\in M,i\in\mathsf{Z}\}$$

是乘积拓扑空间,那么 M^{Z} 是紧致的. 设 d 是 M 上的度量,在 M^{Z} 上定义度量 $\widetilde{d}$ 为

$$\widetilde{d}((x_i),(y_i))=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{d(x_i,y_i)}{2^{|i|}},$$

并定义同胚 $\sigma:M^{\mathsf{Z}}\to M^{\mathsf{Z}}$ 为

$$\sigma((x_i))=(y_i),\ \ y_i=x_{i+1}\ \ (\forall i\in\mathsf{Z}),$$

σ 称为转移同胚. 现在令

$$M_f=\{(x_i)\mid x_i\in M,f(x_i)=x_{i+1},i\in\mathsf{Z}\}.$$

显然,M_f 是 M^{Z} 的闭子集,且 $\sigma(M_f)=M_f$. 空间 M_f 称为由 f 构造的逆极限空间,记为 $M_f=\varprojlim(M,f)$. 限制 $\sigma=\sigma|M_f:M_f\to M_f$ 称为是由 f 确定的转移同胚. 此外,容易验证 M_f 同胚于空间

$$M'_f=\{(x_i)_0^{\infty}\mid x_i\in M,f(x_{i+1})=x_i,\ i\geqslant 0\},$$

并且 σ 拓扑共轭于

$$\sigma':M'_f\to M'_f,(x_i)_0^{\infty}\mapsto(f(x_i))_0^{\infty}.$$

因此,有时人们也把 M'_f 称为是由 f 构造的逆极限空间,并把 σ' 称为是由 f 确定的转移同胚. 对每个 $i\in\mathsf{Z}$,令

$$p_i:M_f\to M,\quad (x_i)\mapsto x_i,$$

那么有 $p_i\circ\sigma=f\circ p_i$. 通过这一联系,可以得到 σ 和 f 有众多相同的动力性质. 例如,它们的拓扑熵相等,对于非游荡集等一些重要的不变集,它们满足

$$\Omega(\sigma)=\varprojlim(\Omega(f),f)$$

等诸如这些关系. 对于半流,仿照上述的思想也可以构造一个逆极限空间,并在此空间上得到一个由该半流所确定的流.

转移同胚(shift homeomorphism) 见“逆极限空间”.

可扩映射(expansive map) 一类重要的动力系统. 设(M,d)是一个度量空间,$f:M\to M$ 是一连续映射,如果存在常数 $\zeta>0$,使得对任意$x,y\in M$,$x\neq y$,存在 $n\geqslant 0$,满足 $d(f^n(x),f^n(y))\geqslant\zeta$,那么就称 f 是可扩映射. 这时,ζ 被称为是 f 的一个可扩常数. 该定义的等价说法之一是:如果存在常数$\zeta>0$,满足

$$d(f^n(x),f^n(y))<\zeta(\forall n\geqslant 0)\Rightarrow x=y,$$

那么就称 f 是可扩映射. 当 $f:M\to M$ 是同胚,而且允许上述定义的 n 在整数范围内取值时,就称 f 是可扩同胚. 扩张映射是可扩映射. 微分同胚在其双曲不变集上的限制是可扩同胚,特别地,安诺索夫微分同胚是可扩同胚.

可扩同胚(expansive homeomorphism) 见“可扩映射”.

可扩流(expansive flow) 针对离散动力系统中可扩同胚的概念,对连续流提出的概念,其定义也揭示了公理 A 流的一个动力性质. 设(M,d)是度量空间,φ 是 M 上的连续流,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得如果对点 $x,y\in M$ 及一连续映射 $S:\mathsf{R}\to\mathsf{R}$,$S(0)=0$,有$d(\varphi_t(x),\ \varphi_{s(t)}(y))<\delta(\forall t\in\mathsf{R})$,那么 $y=\varphi_t(x)$(其中$|t|<\varepsilon$),此时就称 φ 是可扩的. 安诺索夫流以及可扩同胚的扭扩流都是可扩流. 可扩流的一个明显特点是它的奇点是孤立点,因此有关可扩流动力行为的研究均假定它没有奇点. 可扩流是由鲍恩(Bowen,R.)于 1972 年引入的.

伪轨跟踪性质(pseudo-orbit tracing property) α 伪轨和 β 跟踪技术是在动力系统扰动理论等问题研究中的一种很有用的工具. 设(M,d)是度量空间,$f:M\to M$ 是同胚,$\alpha>0$,a 和 b 是整数,而且$-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$,如果点列$\{x_i\}_{i=a}^{b}\subset M$ 满足

$$d(f(x_i),x_{i+1})<\alpha\ \ (\forall i=a,\cdots,b-1),$$

则称 M 中的点列$\{x_i\}_{i=a}^{b}$是 f 的一个 α 伪轨. 如果对 $y\in M$,有

$$d(f^i(y),x_i)<\beta\ \ (i=a,\cdots,b),$$

则称 α 伪轨$\{x_i\}_{i=a}^{b}$被从 y 点出发的轨道 β 跟踪. 如果对任意 $\beta>0$,存在 $\alpha>0$,使得对 f 的每个 α 伪轨可被从某点出发的轨道 β 跟踪,则称 f 有伪轨跟踪性质.

如果 $\varphi:\mathsf{R}\times M\to M$ 是(M,d)上的连续流,$\alpha,T>0$,a 和 b 是整数,而且 $a<b$($a=-\infty$或 $b=+\infty$的情形是允许的),如果序列对

$$(\{x_i\}_a^b,\{t_i\}_a^b)\ (x_i\in M,t_i\in \mathbb{R})$$

满足 $t_i\geqslant T$，并且

$$d(\varphi(t_i,x_i),x_{i+1})\leqslant \alpha\ (a\leqslant i\leqslant b-1),$$

那么就称这序列对是流 φ 的一个(α,T)伪轨或(α,T)链. 对于数列$\{t_i\}$，令

$$S(n)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{n-1}t_i & (n\geqslant 0),\\ -\sum_{i=n}^{-1}t_i & (n<0),\end{cases}$$

这里

$$S(0)=\sum_{i=0}^{-1}t_i=0.$$

设$(\{x_i\}_a^b,\{t_i\}_a^b)$是$(\alpha,T)$伪轨，$y\in M$，若存在保向同胚 $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$\sigma(0)=0$，使得

$$d(\varphi(\sigma(t),y),\varphi(t-S_n,x_n))<\beta\ (t\geqslant 0),$$

且 $S_n\leqslant t\leqslant S_{n+1}(n=0,1,\cdots,b-1)$；

$$d(\varphi(\sigma(t),y),\varphi(t+S_{-n},x_{-n}))<\beta\ (t\leqslant 0),$$

且 $-S_{-n}\leqslant t\leqslant -S_{-n+1}(n=1,2,\cdots,a)$.

那么就称(α,T)伪轨$(\{x_i\}_a^b,\{t_i\}_a^b)$被过点 y 的轨道 β 跟踪. 如果对任意 $\beta>0$，存在 $\alpha>0$，使得 φ 的每个(α,T)伪轨可被过某点的轨道 β 跟踪，则称 φ 具有伪轨跟踪性质. 紧致微分流形 M 上的公理 A 系统在其非游荡集上具有伪轨跟踪性质. 符号动力系统也具有伪轨跟踪性质.

α 伪轨(α-pseudo-orbit)　见“伪轨跟踪性质”.

β 跟踪(β-tracing)　见“伪轨跟踪性质”.

(α,T)伪轨((α,T)-pseudo-orbit)　见“伪轨跟踪性质”.

(α,T)链((α,T)-chain)　见“(α,T)伪轨”.

拓扑双曲不变集(topological hyperbolic invariant set)　根据微分同胚在其双曲不变集上所具有的推广的可扩性及推广的伪轨跟踪性这两个重要的动力性质而直接引入到拓扑动力系统中的一类不变集. 设 $f:M\to M$ 是紧度量空间 M 到自身的同胚，$\Lambda\subset M$ 是 f 的闭不变集，若存在 Λ 的闭邻域 U，使得 f 在 U 内的极大不变集

$$\Lambda_0=\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty}f^n(U)$$

上是可扩的，并且对任意 $\beta>0$，存在 $\alpha>0$，使得在 Λ 中的任意 α 伪轨可被 M 中的一条轨道 β 跟踪，则称 Λ 是 f 的拓扑双曲不变集. 若 f 的链回归集 $CR(f)$ 是拓扑双曲的，那么 f 就称为是公理 A 同胚. 若整个空间 M 是拓扑双曲的，那么 f 就称为是安诺索夫同胚.

公理 A 同胚(axiom A homeomorphism)　见“拓扑双曲不变集”.

安诺索夫同胚(Anosov homeomorphism)　亦称具有双曲坐标的同胚或拓扑安诺索夫同胚. 见“拓扑双曲不变集”和“拓扑安诺索夫映射”.

具有双曲坐标的同胚(homeomorphism with hyperbolic coordinate)　即“安诺索夫同胚”.

拓扑安诺索夫同胚(topological Anosov homeomorphism)　即“安诺索夫同胚”.

拓扑安诺索夫映射(topological Anosov map)　根据微分动力系统理论中安诺索夫可微映射所具有的可扩性和伪轨跟踪性这两个重要动力性质而直接引入的一类拓扑半动力系统. 设 M 是紧致度量空间，$f:M\to M$ 是连续满射，若由 f 所确定的逆极限空间 M_f 及由 f 所确定的 M_f 上的转移同胚 $\sigma:M_f\to M_f$ 是可扩的，并且 f 有伪轨跟踪性，那么 f 就称为是拓扑安诺索夫映射. 特别地，当 f 是同胚时，f 是拓扑安诺索夫同胚. 安诺索夫可微映射是拓扑安诺索夫映射.

符号动力系统(symbolic dynamical systems)　动力系统的一种模型. 所谓符号动力系统，就是用若干符号表示的一类具有许多重要特征的离散动力系统，它的状态空间是由若干符号的双向序列组成. 例如，由 0，1 两个符号的双向序列组成的集合记为 $\sum(2)$. 对 $\sum(2)$ 中两点 A,B，其中

$$A=\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty},\ B=\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty},\ a_i,b_j\in\{0,1\},$$

定义度量

$$\rho(A,B)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{|n|}}|a_n-b_n|.$$

于是，$\sum(2)$是关于度量 ρ 的度量空间，现定义映射

$$\sigma:\textstyle\sum(2)\to\sum(2),$$

$$\sigma:A\mapsto\sigma(A)\ (\forall A\in\textstyle\sum(2)),$$

其中 σ 满足：当 $A=\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$时，$\sigma(A)=\{a_{n+1}\}_{-\infty}^{+\infty}$，即 $\sigma(A)$的第 n 个元素是 a_{n+1}. σ 是$\sum(2)$的自同胚. 通常称 σ 为两个符号的转移自同胚或转移自同构. σ 在$\sum(2)$上产生一个离散动力系统，称为符号动力系统. σ 有两个不动点$\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$及$\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$，其中 $a_n=0,b_n=1,\forall n\in\mathbb{Z}$. 符号动力系统具有简洁、明快的特点，而且又具有许多重要的性质，例如，σ 的周期点集在$\sum(2)$中稠密，σ 是拓扑传递的. 因此，在动力系统研究中，经常借助符号系统来进行研究. 当

$$\textstyle\sum^+(2)=\{\{a_n\}_0^{+\infty}|a_n=0\text{ 或 }1\}$$

是由单向序列组成时，在$\sum^+(2)$上定义度量 ρ 为

$$\rho(A,B)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{|n|}}|a_n-b_n|,$$

其中 $A=\{a_n\}_0^{+\infty},B=\{b_n\}_0^{+\infty}\in\sum^+(2)$. 现定义映射

$$\sigma:\textstyle\sum^+(2)\to\sum^+(2),$$

$$A\mapsto\sigma(A)\quad(\forall A\in\textstyle\sum^+(2)),$$

其中 σ 满足：当 $A=\{a_n\}_0^{+\infty}$ 时，$\sigma(A)=\{a_{n+1}\}_0^{+\infty}$，$\sigma$ 称为两个符号的转移自映射. 因 σ 是连续的，它在

$\Sigma^+(2)$上产生一个离散半动力系统，称为两个符号的半动力系统. 对 $n(\geqslant 2)$个符号有类似的定义.

转移自同胚(shift self-homeomorphism)　见"符号动力系统".

转移自同构(shift automorphism)　见"符号动力系统".

符号半动力系统(symbolic semi-dynamical system)　见"符号动力系统".

转移自映射(shift self-map)　见"符号动力系统".

有限型子移位(subshift of finite type)　亦称双边拓扑马尔可夫链，是符号动力系统中一个很有意义的子系统，其重要性在于它能够作为十分重要的微分同胚某不变集的模型. 设 $\sigma:\Sigma\to\Sigma$是由 k 个符号$\{1,2,\cdots,k\}$组成的双边符号动力系统，$A=(a_{ij})_{i,j=1}^{k}$是 $k\times k$ 矩阵，对一切 i,j 有 $a_{ij}\in\{0,1\}$，令

$$\Sigma_A=\{(x_n)_{-\infty}^{+\infty}\mid a_{x_nx_{n+1}}=1,\forall n\in\mathbf{Z}\}.$$

Σ_A 是Σ的一个闭子集，而且在 σ 下不变，即 $\sigma(\Sigma_A)=\Sigma_A$，因而 $\sigma|\Sigma_A:\Sigma_A\to\Sigma_A$ 是一个同胚. σ 与 Σ_A 称为由传递矩阵 A 所确定的有限型子移位或双边拓扑马尔可夫链. 对于符号半动力系统也可以类似地给出单边拓扑马尔可夫链的定义. 零维双曲不变集拓扑共轭于有限型子移位.

双边拓扑马尔可夫链(two-side topological Markov chains)　即"有限型子移位".

单边拓扑马尔可夫链(one-side topological Markov chains)　见"有限型子移位".

移位不变集(shift invariant set)　在拓扑共轭的意义下能够等同于符号动力系统(或符号半动力系统)的一种不变集. 设 M 是拓扑空间，$f:M\to M$ 是同胚(或连续自映射. $\Lambda\subset M$ 是 f 的紧致不变集，如果存在适当(例如 n 个符号)的双边(或单边)符号空间Σ以及同胚 $h:\Sigma\to\Lambda$，使得$f\circ h=h\circ\sigma$(这里 $\sigma:\Sigma\to\Sigma$是转移自同胚(或转移自映射))，即上图可交换，那么就称 Λ 是 f 的移位不变集. 借助移位不变集可以证明某些半动力系统的不变集结构稳定性.

$$\begin{array}{ccc}\Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma\\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h}\\ \Lambda & \xrightarrow[f]{} & \Lambda\end{array}$$

例如，对

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad x\mapsto -3x^2+\frac{4}{3},$$

$$\Lambda=\bigcap_{j=0}^{+\infty}f^{-j}([-1,1])$$

是 f 的紧不变集，那么 $f|_\Lambda$ 拓扑共轭于两个符号的符号半动力系统，即 Λ 是 f 的移位不变集. 由此可知，映射 f 的不变集 Λ 是结构稳定的.

一维动力系统

一维动力系统(one dimensional dynamical system)　区间上或圆周上的动力系统. 由于一维流或半流的结构十分简单，并且对同胚生成的离散动力系统的性质认识已相当深刻，因此，一维动力系统通常是指由连续自映射生成的离散半动力系统. 它具有广泛的应用背景. 例如，生物学中无世代交叠的虫口模型、物理学中的一维耗散系统等都是一维动力系统. 因为它是最简单的动力系统，并且呈现出高维系统所具有的丰富而复杂的动力性质，同时它又具有不同于高维情形的独特的规律，所以近 30 年来，其研究发展十分迅速，成为动力系统领域中不可忽视的一个重要分支(参见"动力系统").

逐段单调映射(piecewise monotone maps)　一类特殊的区间映射. 把区间 I 分成有限多个子区间:

$$I_1=[C_0,C_1],I_2=[C_1,C_2],\cdots,I_l=[C_{l-1},C_l],$$

使映射 $f:I\to I$ 限制在每个子区间 I_j 上是严格单调的，这里 $I=[C_0,C_l]$，$C_0<C_1<\cdots<C_l$，且每个子区间 I_j 是 f 的最大单调区间，此时称 f 为区间 I 上的逐段单调映射. 称子区间 I_j 为 f 的区段；$l=l(f)$为 f 的区段数；$C_1,C_2,\cdots,C_{l-1}$为 f 的回转点. 使用揉搓理论可以刻画逐段单调映射的许多动力学性质(参见"揉搓矩阵"、"揉搓函数").

区段(lap)　见"逐段单调映射".

区段数(lap number)　见"逐段单调映射".

回转点(turning point)　见"逐段单调映射".

增长数(growth number)　逐段单调映射 f 的一个拓扑共轭不变量. 若用 $S(f)$表示，那么它由下面的极限定义:

$$S(f)=\lim_{n\to\infty}[l(f^n)]^{\frac{1}{n}}$$

(这里 $l(f^n)$是 f^n 的区段数). 此极限恰为序列$[l(f^n)]^{\frac{1}{n}}$的下确界，因而增长数$S(f)\in[1,l(f)]$. 增长数的对数是 f 的另一个拓扑共轭不变量——拓扑熵，即 $\log S(f)=h(f)$.

不变坐标(invariant coordinate)　一类由点的迭代运动决定的形式序列或形式幂级数. 对于逐段单调映射 $f:I\to I$，以 $I_1,I_2,\cdots,I_l$ 记 f 的按自然顺序排列的全部区段，$C_1<C_2<\cdots<C_{l-1}$为 f 的全部回转点. 令

$$A(x)=\begin{cases}I_j & (x\in I_j\text{ 且 }x\text{ 不是回转点}),\\ C_j=\dfrac{I_j+I_{j+1}}{2} & (x\text{ 与 }C_j\text{ 重合}).\end{cases}$$

构造点 $x\in I$ 迭代运动的旅行图

$$A(f^*(x))=(A(x),A(f(x)),A(f^2(x)),\cdots),$$

或简记为 $A(f^*(x))=(A_0,A_1,A_2,\cdots)$. 规定符号

$$\varepsilon_n=\varepsilon(A_n)=\begin{cases}-1 & (A_n\text{ 为严格递减区段}),\\ 0 & (A_n=C_j),\\ +1 & (A_n\text{ 为严格递增区段}).\end{cases}$$

又令

$$\theta_0=A_0,\ \theta_1=\varepsilon_0A_1=\varepsilon(A_0)A_1,\cdots,$$
$$\theta_n=\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}A_n,$$

则称形式序列 $\theta(x)=(\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_n,\cdots)$ 或形式幂级数

$$\theta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n t^n$$

为联系于点 x 的 f 的不变坐标. $\varepsilon_0=\varepsilon(A(x))$ 恰为 f 在 x 点的局部映射度,而

$$\varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}=\varepsilon(A(x))\varepsilon(A(f(x)))\cdots\varepsilon(A(f^{n-1}(x))$$

则是映射 f^n 在 x 点的局部映射度.

揉搓矩阵(kneading matrix) 一类由联系于回转点的不变坐标决定的矩阵. 设 $f:I\to I$ 为逐段单调映射,以 $I_1,I_2,\cdots,I_l$ 记按自然顺序排列的全部区段,$c_1<c_2<\cdots<c_{l-1}$ 为 f 的全部回转点. 设 V 是有理数域 Q 上的 l 维向量空间,$I_1,I_2,\cdots,I_l$ 是其基底. 用 Q$[[t]]$表示有理系数幂级数环,Z$[[t]]$表示实系数幂级数环,$V[[t]]$表示以 V 中向量作系数的形式幂级数模,则 $V[[t]]$为环 Q$[[t]]$上的自由模,以 I_1,$I_2,\cdots,I_l$ 为基底. 每个点 $x\in I$ 的不变坐标均可表示成惟一形式的和

$$\theta(x)=\theta_1(x)I_1+\theta_2(x)I_2+\cdots+\theta_l(x)I_l,$$

其中 $\theta_i(x)\in$ Q$[[t]]$为向量空间 V 选择某种平移不变的线性次序,比如 Q 线性地嵌入 V 到实数,使得基向量满足 $I_1<I_2<\cdots<I_l$ 为形式序列或形式幂级数 θ 按字典排序:则 $x<y$ 意味着$\theta(x)\leqslant\theta(y)$. 赋予 $V[[t]]$形式幂级数拓扑,在此拓扑结构中,子模 $t^nV[[t]]$构成零点邻域的一个基,令

$$v_i=\theta(c_i+)-\theta(c_i-)$$
$$=\lim_{y\to c_i,y>c_i}\theta(y)-\lim_{y\to c_i,y<c_i}\theta(y),$$

则 $v_1,v_2,\cdots,v_{l-1}\in V[t]$,$v_1,v_2,\cdots,v_{l-1}$称为 f 的揉搓增量. $v_i=N_{i1}I_1+N_{i2}I_2+\cdots+N_{il}I_l(i=1,2,\cdots,l)$,这里 $N_{ij}\in$ Z$[[t]]$,矩阵$[N_{ij}]_{(l-1)\times l}$称为映射 f 的揉搓矩阵. 揉搓矩阵的 l 个列向量 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_l$ 线性相关,即

$$\Gamma_1(1-\varepsilon t)+\Gamma_2(1+\varepsilon t)+\cdots$$
$$+\Gamma_l(1+(-1)^l\varepsilon t)=0,$$

这里 $\varepsilon=\varepsilon(I_1)$. 用 $D_i=\det(\Gamma_1,\cdots,\hat{\Gamma}_i,\cdots,\Gamma_l)$表示从$[N_{ij}]_{(l-1)\times l}$删去第 i 列的矩阵的行列式,记

$$D=\frac{(-1)^{i+1}D_i}{(1-\varepsilon(I_i)t)},$$

那么 D 是 Z$[[t]]$中与 i 选取无关且首项为 1 的幂级数. D 被称为是映射 f 的揉搓行列式. 揉搓行列式是研究逐段单调映射动力学性质的重要工具. 例如,揉搓行列式与反映周期性态的修正 ζ 函数$Z(t)$(参见“修正 ζ 函数”)有简单的倒数关系

$$Z(t)=D(t)^{-1}.$$

揉搓增量(kneading increment) 见“揉搓矩阵”.

揉搓行列式(kneading determinant) 见“揉搓矩阵”.

揉搓函数(kneading function) 将逐段单调区间映射和符号系统建立联系的一类映射. 设 $f:I\to I$ 是逐段单调映射,$I_1,I_2,\cdots,I_l$ 为按自然顺序排列的全部区段,$c_1<c_2<\cdots<c_{l-1}$为所有回转点,规定 θ_*,$\theta^*:I\to\{1,2,\cdots,l\}$:

$$\begin{cases}\theta_*(x)=1 & (x\in[c_0,c_1]),\\ \theta_*(x)=k & (x\in(c_{k-1},c_k];k=2,\cdots,l)\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\theta^*(x)=k & (x\in[c_{k-1},c_k);k=1,\cdots,l-1),\\ \theta^*(x)=l & (x\in[c_{l-1},c_l]).\end{cases}$$

设$(\sum^l,\sigma)$为由 l 个符号元素形成的符号半动力系统,由

$$[J_*(f)(x)]_n=\theta_*(f^n(x))\ (n=0,1,2,\cdots)$$

和

$$[J^*(f)(x)]_n=\theta^*(f^n(x))\ (n=0,1,2,\cdots)$$

定义的两个映射 $J_*(f),J^*(f):I\to\sum^l$ 分别称为 f 的下揉搓函数和上揉搓函数,统称揉搓函数. 元素组

$$\{J_*(f)(c_k)\,|\,k=1,2,\cdots,l-1\}$$

和

$$\{J^*(f)(c_k)\,|\,k=1,2,\cdots,l-1\}$$

分别称为 f 的下揉搓组与上揉搓组,统称揉搓组. $J_*(f)(c_k)$和 $J^*(f)(c_k)(k=1,2,\cdots,l-1)$称为 f 的揉搓序列. 揉搓函数、揉搓序列等工具可用来刻画逐段单调映射的拓扑共轭等价性问题,因而进行分类研究,也可以用来研究吸引子(如洛伦茨吸引子)的结构以及讨论具正拓扑熵的逐段单调映射的遍历性问题. 揉搓概念由米尔诺(Milnor,J. W.)和瑟斯顿(Thurston, W.)于 1976 年引入,威廉姆(Williams,R. F.)、古肯亥默(Guckenheimer,J.)、克莱特(Collet,P.)和爱克曼(Eckmann,J. P.)等人先后发展和完善了揉搓理论,并用揉搓理论解决了许多动力系统问题.

上揉搓函数(co-kneading function) 见“揉搓函数”.

下揉搓函数(low-kneading function) 见“揉搓函数”.

上揉搓组(co-kneading group) 见“揉搓函数”.

下揉搓组(low-kneading group) 见“揉搓函数”.

揉搓组(kneading group)　上下揉搓组的统称.

揉搓序列(kneading sequence)　见"揉搓数".

修正ζ函数(modified zeta function)　由负型不动点生成的ζ函数. 设 $f:I\to I$ 是逐段单调映射, 若不动点 x 位于某个严格递减的区段内部,则不动点 x 称为负型的,以 $n(f)$ 记 f 的负型不动点数,并记 $N(f)=2n(f)-1$. 幂级数

$$z(t)=\exp\sum N(f^k)\frac{t^k}{k}$$

称为 f 的修正ζ函数.

负型不动点(negative fixed point)　见"修正ζ函数".

施瓦兹导数(Schwarzian derivative)　最先在1978年用于研究一维动力系统的一个工具. 设函数 f 有3阶导数, f 在 x 处的施瓦兹导数(通常记为 $sf(x)$)由下式给出:

$$sf(x)=\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2,$$

当 $f'(x)=0$ 时, $sf(x)$ 可以取值为 $+\infty$ 或 $-\infty$. 在确定吸引周期轨道个数的上界以及讨论动力系统如何从简单的动力性质过渡到混沌性态研究中,施瓦兹导数发挥了重要作用. 具有负的施瓦兹导数(此条件称为施瓦兹条件)的函数,在一维动力系统中特别重要. 例如,二次模型映射 $f_\mu(x)=\mu x(1-x)$ 具有负的施瓦兹导数的函数,其复合函数仍是具有负的施瓦兹导数.

施瓦兹条件(Schwarzian condition)　见"施瓦兹导数".

沙可夫斯基序(Sarkovskii order)　正整数的一种排法. 1964年,苏联数学家沙可夫斯基(Sarkovskii, A. N.)在研究区间上连续自映射的周期点性质时,把正整数排了一个顺序,这种新的顺序被称为是沙可夫斯基序. 若用"$\lhd$"表示这种顺序,那么它适合下列几条规则: p,q 记大于1的奇数, k,l 记非负整数,则:

$$\begin{cases}\lhd_1,\text{若 } n=p\cdot 2^k \text{ 而 } m=2^l,\text{则 } n\lhd m;\\ \lhd_2,\text{若 } n=p\cdot 2^k \text{ 而 } m=q\cdot 2^l, k<l,\text{则 } n\lhd m;\\ \lhd_3,\text{若 } n=p\cdot 2^k \text{ 而 } m=q\cdot 2^k, p<q,\text{则 } n\lhd m;\\ \lhd_4,\text{若 } n=2^k \text{ 而 } m=2^l, k<l,\text{则 } m\lhd n.\end{cases}$$

沙可夫斯基序揭示许多自然现象所遵循的顺序性规律,最著名的是区间映射的周期点的出现顺序,即沙可夫斯基定理(参见"沙可夫斯基定理"). 此外,还有单参数函数族超稳定周期轨出现顺序的沙可夫斯基定理,有关小扰动的沙可夫斯基定理,以及有关组合的某种排序的沙可夫斯基定理等.

沙可夫斯基定理(Sarkovskii theorem)　特指区间映射的周期点出现顺序遵从沙可夫斯基序的规律,它是由苏联数学家沙可夫斯基(Sarkovskii, A. N.)在1964年给出的. 设 f 为区间连续自映射, m 和 n 是两个正整数且按照沙可夫斯基序有 $m\lhd n$,若 f 有周期为 m 的周期点,则 f 必有周期为 n 的周期点. 沙可夫斯基用俄文发表了这一惊奇的定理,但在当时没有引起广泛的注意. 1975年,李天岩和约克(Yorke, J. A.)独立证明了定理的特款——若 f 有周期为3的周期点,则对任意非负整数 n, f 有以 n 为周期的周期点——这引起数学家的广泛关注,并发现了沙可夫斯基的俄文文献. 1977年,斯特凡(Stefan, P.)用英文详细介绍了沙可夫斯基定理并澄清了证明过程中若干含糊之处. 之后许多数学家相继给出这一定理的简化证明.

回复性定理(recurrence theorem)　表述几类回复性集合之间等价关系的定理. 设 f 为区间映射. $P(f)$, $\Omega(f)$, $R(f)$, $\mathrm{CR}(f)$, $\mathrm{AP}(f)$, $W(f)$, $H(f)$, $\mathrm{SH}(f)$, $\mathrm{PP}(f)$, $h(f)$ 分别表示 f 的周期点集、非游荡点集、回归点集、链回归点集、几乎周期点集、ω极限点集、异状点集、特殊异状点集、周期集、拓扑熵,则下列命题相互等价:

1. $\overline{P(f)}=P(f)$.
2. $\Omega(f)=P(f)$.
3. $\mathrm{CR}(f)=P(f)$.
4. $R(f)=P(f)$.
5. $W(f)=P(f)$.
6. $\mathrm{AP}(f)=P(f)$.
7. $\mathrm{SH}(f)=\varnothing$.
8. $H(f)=\varnothing$.
9. $h(f)=0$.
10. $\mathrm{PP}(f)=\{1,2,2^2,2^3,\cdots\}$.

李-约克混沌(Li-Yorke chaos)　一种表述系统紊乱的概念. 1975年,李天岩和约克(Yorke, J. A.)在研究区间上自映射时,首先使用了"混沌"一词,并给出了它的一个定义如下:设 $f:I\to I$ 为区间连续映射,若 f 满足下列条件,即存在不可数集 $C\subset I$,使得:

1. 对于任意 $x,y\in C, x\neq y$,
$$\liminf_n |f^n(x)-f^n(y)|=0,$$
$$\limsup_n |f^n(x)-f^n(y)|>0;$$
2. 对于任意 $x\in C$ 和任意 $y\in P(f)$.
$$\limsup_n |f^n(x)-f^n(y)|>0,$$

则称 f 是李-约克混沌的. 李天岩和约克在引入李-约克混沌的同时指出,若区间映射 f 有周期点以3为周期,则 f 是李-约克混沌的,换言之,周期3意味着混沌.

区间映射的伯克霍夫中心及中心深度(Birkhoff center and depth of the center for inter-

val maps)　对区间上自映射伯克霍夫中心研究的一个完整结果. 它指出：区间映射 f 的伯克霍夫中心是周期点集的闭包 $\overline{P(f)}$，而中心阶数不大于 2.

区间映射的 C^r 封闭引理(C^r-closing lemma on interval maps)　关于区间上 C^r 映射的一个回复性质的引理. 设 $f:I\to I$ 为 $r(r\geqslant 1)$ 次连续可微的映射，又设 $x\in\Omega(f)$，则在 f 的任意 C^r 邻近存在着 r 次连续可微的 $g:I\to I$ 使得 $x\in\overline{P(g)}$，此结论称为区间映射的 C^r 封闭引理. 杨赖杉在证明这一结论的同时指出，对于任意 r $(1\leqslant r\leqslant +\infty)$，在由 r 次连续可微的区间自映射组成的映射空间(带 C^r 拓扑)中，满足条件 $\overline{P(f)}=\Omega(f)$ 的映射构成一个处处稠密的开集.

区间映射周期轨道的结构(structure of periodic orbits for interval maps)　揭示区间上连续自映射周期轨道上的点在这区间上排列的相互关系. 设 $f:I\to I$ 为区间自映射，以 P 记 f 的一个周期轨道. 对于奇数 $S\geqslant 1$，如果具有周期为 S 的 P(简称 S 周期轨道 P)中 S 个点按通常实数顺序排列时，第 $(s+1)/2$ 个点 y(从左数到右或从右数到左)有

$$f^{s-1}(y)<\cdots<f^2(y)<y<f^1(y)<\cdots<f^{s-2}(y)$$

或

$$f^{s-2}(y)<\cdots<f^1(y)<y<f^2(y)<\cdots<f^{s-1}(y),$$

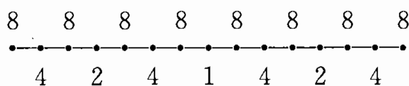
则称 S 周期轨道 P 为简单的. 归纳地，对于任意 $r\geqslant 1$ 以及任意奇数 $S\geqslant 1$，如果 2^rS 周期轨道 P 中 2^rS 个点按通常实数顺序排列，左边的 $2^{r-1}S$ 个点和右边的 $2^{r-1}S$ 个点各自都是 f^2 的简单 $2^{r-1}S$ 周期轨道，那么就称它是 f 的简单 2^rS 周期轨道. 按归纳原则，对于任意奇数 $n>0$，f 的简单 n 周期轨道都有定义. 对 f 的简单 2^rS 周期轨道 P(其中 $S>1$ 为奇数，$r\geqslant 0$)，如果将 P 中 2^rS 个点按通常实数顺序排列并记它的第 $is+(s+1)/2$ 个点为 C_i(从左数到右或从右数到左)，$0\leqslant i\leqslant 2^r-1$，那么下面的等式

$$\{c_0,c_1,\cdots,c_{2^r-1}\}=\{c_{i_0},f(c_{i_0})\cdots f^{2^r-1}(c_{i_0})\}$$

对于某一个 $i_0(0\leqslant i_0\leqslant 2^r-1)$ 成立，则称这个简单 2^rS 周期轨道 P 为 f 的极小 2^rS 周期轨道. 显然，所有简单 2^r 周期轨道和所有简单 S 周期轨道(其中 $S\geqslant 1$ 为奇数)都是极小周期轨道. 研究比如简单周期轨道、极小周期轨道等具有特定结构的周期轨道的存在性，即研究怎样的有限的有序集合的循环排列在何种线段映射下得以实现的问题，是区间映射的动力系统的一个重要课题. 从已经得到的结果看，对区间映射 f 来说，有 n 周期轨就有极小 n 周期轨；如果 f 的周期集合是沙可夫斯基序中的片断，假定片断最左端为 n，则 f 的任何一个 n 周期轨都是简单的；再若 $n=2^rS$，其中 $r>0$，S 为大于 3 的奇数，则 f 的任何 n 周期轨都是极小的. 人们还证明，区间映射 f 的每个 2^n 周期轨道都是简单的(极小的)当且仅当 f 的周期都是 2 的方幂，即 $\mathrm{PP}(f)=\{1,2,2^2,2^3,\cdots\}$. 当 f 的周期集为有限集时，比如

$$\mathrm{PP}(f)=\{1,2,2^2,2^3,\cdots,2^n\},$$

不同周期的周期轨道之间存在简单而有趣的关系：对 f 的任一个 2^m 周期轨道($m\leqslant n$)，必存在周期分别为 $1,2,2^2,\cdots 2^m$ 的 $m+1$ 个周期轨道，使得其中每个 2^k 周期轨道的 2^k 个周期点必定被 $f^{2^{k-1}}$ 的 2^k-1 个不动点所分隔，这里 $k=1,2,\cdots,m$. 当 $m=3$ 时，如图所示.



简单周期轨道(simple periodic orbit)　见"区间映射周期轨道的结构".

极小周期轨道(minimal periodic orbit)　见"区间映射周期轨道的结构".

微分动力系统

微分动力系统(differentiable dynamical system)　微分流形上由常微系统或微分同胚生成的动力系统. 研究的核心内容是结构稳定性和 Ω 稳定性的特征性质. 它起源于常微分方程结构稳定性的研究. 虽然 1937 年，安德罗诺夫(Андронов, А. А.)与庞特里亚金(Понтрягин, Л. С.)就提出此概念，但直到 1959 至 1962 年佩克索托(Peixoto, M.)得出二维闭曲面上 C^r 常微系统结构稳定的充分必要条件以及稠密性定理(参见"佩克索托定理")，结构稳定的研究才受到足够重视. 以斯梅尔(Smale, S.)为代表的西方学者们研究高维流形的 C^1 结构稳定系统与 Ω 稳定系统，由于该研究的复杂性，他们首先从流形上微分同胚生成的离散微分动力系统着手(这种系统通过扭扩可成为高一维流形上的常微系统)，主要是通过稳定流形理论与泛函分析方法. 以佩克索托对二维流形结构稳定系统的特征研究为蓝本，斯梅尔将其推广到一般流形上，称之为莫尔斯-斯梅尔系统，并证明其为结构稳定的. 但随后举出不属于这种系统的结构稳定系统，例如，托姆环面双曲自同构和安诺索夫微分同胚以及斯梅尔马蹄，它们的周期点都是无穷多的. 后来发现结构稳定系统一般不是稠密的. 1967 年，斯梅尔提出结构稳定性猜测和 Ω 稳定性猜测，这两个猜测对 C^1 微分同胚和常微系统已获解决. 中国数学家廖山涛于 20 世纪 60 年代初开始进行微分动力系统的开创性的研究工作，他以微分拓扑与黎曼几何为工具建立了典范方程组与阻碍集这两个概念为核心的微分动力系统的研究体系，直接将常微系统(即向量场)按积分曲

线上的活动标架展开为微分方程组加以研究，另辟一条研究微分动力系统的途径，取得许多重要成果. 微分动力系统的研究近年来逐渐涉及非稳定的课题，例如分岔和混沌等，有些研究与遍历性交叉，出现微分动力系统的遍历性理论. 微分动力系统又分为 C^r 流、离散微分动力系统和离散微分半动力系统(参见“动力系统”).

C^r 流(C^r flow) 指微分流形上的连续微分动力系统. 设 M 是 C^r 微分流形，若 $f:\mathbb{R}\times M\to M$ 是一个流(参见“流”)，并且 f 是 C^r 映射，就称 f 是 M 上的 C^r 流.

C^r 向量场(C^r vector field) 特殊的向量场. 设微分流形 M 上每一点给定一个向量，这种微分流形上向量的分布称为 M 上向量场. 若它是 C^r 的，则称它为 M 上 C^r 向量场或 C^r 常微系统，当 M 是紧致时，M 上 C^r 向量场生成一个 M 上的 C^r 流.

C^r 常微系统(C^r ordinary differentiable system) 见“C^r 向量场”.

离散微分动力系统(discrete differentiable dynamical system) 微分动力系统之一. 所谓离散微分动力系统，是指由微分流形上的微分同胚生成的离散动力系统. 如果该同胚是 C^r 微分同胚，那么就称其生成的动力系统为 C^r 微分动力系统(参见“离散动力系统”).

C^r 微分动力系统(C^r differentiable dynamical system) 见“离散微分动力系统”.

离散微分半动力系统(discrete differentiable semi-dynamical system) 一类微分半动力系统. 所谓离散微分半动力系统，是指由微分流形上的可微映射所生成的离散半动力系统. 如果该映射是 C^r 的，那么就称其生成的半动力系统为 C^r 微分半动力系统(参见“离散半动力系统”).

C^r 微分半动力系统(C^r differentiable semi-dynamical system) 见“离散微分半动力系统”.

通有性(generic property) 用来描述动力系统的一个性质是一空间上“大多数”动力系统所具有的性质的术语. 设 X 是一个拓扑空间，用 P 表示动力系统的某一个性质. 若 X 上具有性质 P 的动力系统的集合在 X 上全体动力系统所构成的空间中是一个剩余子集(通常称为贝尔子集)，那么就称性质 P 是通有的. 例如，设 M 是光滑黎曼流形，$\mathrm{Diff}^r(M)$ 表示 M 上全体 C^r 微分同胚所构成的空间(具有 C^r 拓扑). 如果具有性质 P 的 C^r 微分同胚的集合在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中是一个剩余子集，那么就称性质 P 是通有的. 动力系统的一个性质是否是通有的?这在动力系统理论的研究中是十分重要的内容. 目前所获得的一个重要的通有性质可参见“通有稠密性定理”.

双曲线性映射(hyperbolic linear map) 亦称双曲线性同构，是沿一个方向扩张，沿另一个方向收缩的可逆线性映射. 设$(E,\|\cdot\|)$是巴拿赫空间，$A:E\to E$是可逆线性映射. 如果 E 可分解为关于 A 不变的闭线性子空间 E^u 和 E^s 的直和：

$$E=E^u\oplus E^s,\ AE^u=E^u,\ AE^s=E^s,$$

并且存在常数 $C_1,C_2>0$ 和 $0<\lambda<1$，使得

$$\|A^k\xi\|\geqslant C_1\lambda^{-k}\|\xi\|\ (\forall\xi\in E^u,k=1,2,\cdots),$$

$$\|A^k\eta\|\leqslant C_2\lambda^k\|\eta\|\ (\forall\eta\in E^s,k=1,2,\cdots),$$

则称 A 为双曲线性映射，并称 E^u 为 A 的扩张子空间，E^s 为 A 的收缩子空间. 对可逆线性映射 $A:E\to E$，下面三条等价：

1. A 是双曲线性映射.

2. A 的谱集与复平面的单位圆不相交.

3. 存在关于 A 不变的 E 的直和分解 $E=E^u\oplus E^s$，$AE^u=E^n$，$AE^s=E^s$，及与 $\|\cdot\|$ 等价的范数 $|\cdot|$，使得

$$|A_u^{-1}|=|(A|E^u)^{-1}|<1,$$

$$|A_s|=|(A|E^s)|<1.$$

已经证明，双曲线性映射的集合是 $\mathscr{L}(E,E)$ 中的开集(这里 $\mathscr{L}(E,E)$ 是 $E\to E$ 的线性映射全体，具有算子范数拓扑)，这就是说，线性映射的双曲性经过小扰动之后不至于被破坏. 这一性质在动力系统结构稳定性的研究中起着重要的作用. 皮尤夫(Pugh,C.)于 1969 年进一步证明，对 A 的任意两个有界连续的李普希茨小扰动 $\varphi,\psi:E\to E$，$A+\varphi$ 与 $A+\psi$ 是拓扑共轭的. 这一结论成为哈特曼定理泛函分析方法证明的核心.

双曲线性同构(hyperbolic linear automorphisms) 即“双曲线性映射”.

扩张子空间(expansive subspace) 见“双曲线性映射”.

收缩子空间(contractive subspace) 见“双曲线性映射”.

双曲线性向量场(hyperbolic linear vertor fields) 线性场空间中结构稳定的一类线性向量场. 设$(E,\|\cdot\|)$是巴拿赫空间，$A:E\to E$ 是线性映射. 若 A 的谱集与复平面上的虚轴不相交，则称 A 为双曲线性向量场. 线性向量场 $A:E\to E$ 为双曲的当且仅当对任意实数 $t\neq0$，$\exp tA$ 是双曲线性映射. 双曲线性向量场产生的流称为双曲线性流. 在 E 为有限维时，线性向量场在线性场空间中结构稳定的充分必要条件是它为双曲的. 所有结构稳定线性向量场集合在线性场空间中是开稠的.

双曲线性流(hyperbolic linear flow) 见“双曲线性向量场”.

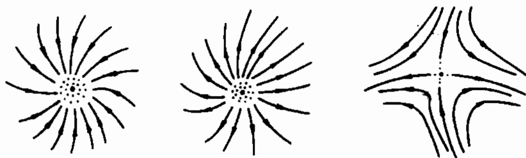
双曲不动点(hyperbolic fixed point) 可微映射具有局部结构稳定性质的不动点.它的常见定义是在一般黎曼流形上给出.设 U 是黎曼流形 M 的开集,$p\in U$ 是 $f\in C^1(U,M)$的不动点.若 $Df(p)$: $T_pM\to T_pM$ 是双曲线性映射,则称 p 是 f 的双曲不动点.在一般巴拿赫空间中,它的定义是:设$(E,\|\cdot\|)$是巴拿赫空间,$U\subset E$ 是开集,$p\in U$ 是 $f\in C^1(U,E)$的不动点.若 $Df(p):E\to E$ 是双曲线性映射,则称 p 是 f 的双曲不动点.在局部坐标卡下,前一定义是后一定义的特款.双曲不动点在 C^1 小扰动下不会消失的动力行为在结构稳定性研究中有着重要的作用,例如,在双曲不变集及安诺索夫系统的结构稳定性的证明中就是如此.紧流形上的不动点都是双曲的微分同胚集合在全体微分同胚空间中是开稠的.若 p 是 f 的周期为 k 的周期点,并且 p 是 f^k 的双曲不动点,则称 p 是 f 的双曲周期点.

双曲周期点(hyperbolic periodic point) 见"双曲不动点"和"双曲不变集".

λ 引理(λ-lemma) 亦称倾角引理,描述系统在双曲不动点邻近动力行为的几何属性.设 f 是 R^m 中 o 的一邻域 V 的 C^r 微分同胚,以 o 为双曲不动点.考虑双曲线性映射 $A=Df(o)$及不变的直和分解 $\mathrm{R}^m=E^s\oplus E^u$.由双曲不动点的稳定(不稳定)流形定理,可假定 f 的双曲不动点 o 的稳定(不稳定)流形是不动点在 f 的线性部分的稳定(不稳定)子空间的一邻域.设 $B^s\subset E^s$ 是包含在局部稳定流形 $W^s_{loc}(o)$中的一球,$B^u\subset E^u$ 是包含在局部不稳定流形 $W^u_{loc}(o)$中的一球,且 $V=B^s\times B^u$.考虑一点 $q\in W^s_{loc}(o)$以及一个维数为 $u=\dim E^u$ 且在 q 点与 $W^s_{loc}(o)$横截相交的圆盘 D^u.λ 引理指出:若 $q\in W^s_{loc}(o)\setminus\{o\}$,$D^u_n$ 是 $f^n(D^u)\cap V$ 的包含 $f^n(q)$的连通分支,则对任意 $\varepsilon>0$,存在 $n_0>0$,使得 $n>n_0$ 时,D^u_n 是 C^1-ε 接近 B^u.λ 引理的更一般的形式是在巴拿赫空间中给出,其陈述方式类似于上面对 R^m 情形的叙述.λ 引理在几何化证明哈特曼定理中起着重要的作用.

倾角引理(inclination lemma) 即"λ-引理".

双曲奇点(hyperbolic singularity) C^1 向量场有局部结构稳定性质的奇点,它的常见定义是在一般黎曼流形上给出.设 X 是黎曼流形 M 上的 C^1 向量场,$p\in M$ 是 X 的奇点.若 $DX(p):T_pM\to T_pM$ 是双曲线性向量场,则称 p 为双曲奇点.在一般巴拿赫空间中,它的定义是:设$(E,\|\cdot\|)$是巴拿赫空间,$U\subset E$ 是开集,$p\in U$ 是 U 上 C^1 向量场 X 的奇点.若 $DX(p):E\to E$ 是双曲线性场,就称 p 是 X 的双曲奇点.在局部坐标卡下,前一定义是后一定义的特款.在 $E=\mathrm{R}^2$ 是二维欧氏空间时,双曲奇点称



渊点　　　源点　　　鞍点

为渊、源或鞍点(如图).对双曲奇点,也有描述它的动力性质的等价性定义.例如,对流形 M 上的 C^1 向量场 X,其定义是:设 X 导出的流是

$$\varphi:\mathrm{R}\times M\to M,\ \Phi_t=D\varphi_t:TM\to TM,$$

p 是 X 的奇点,如果存在 T_pM 在 Φ_t 下不变的直和分解 $T_pM=E^u_p\oplus E^s_p$,$\Phi_tE^u_p=E^u_p$,$\Phi_tE^s_p=E^s_p$,而且存在常数 $c>0$,$\lambda<0$ 使得:

$$\|\Phi_t(\eta)\|\leqslant c\|\eta\|\exp(\lambda t)\ (\forall\eta\in E^s_p\text{ 及 }t\geqslant 0),$$

$$\|\Phi_t(\xi)\|\leqslant c\|\xi\|\exp(-\lambda t)\ (\forall\xi\in E^u_p\text{ 及 }t\leqslant 0),$$

这里$\|\cdot\|$是切向量就 M 上的黎曼度量的模,那么 p 就称为 X 的双曲奇点.紧致流形上的奇点都是双曲的 C^1 向量场集合(含设有奇点的 C^1 向量场)在全体 C^1 向量场空间中开稠.

渊点(sink point) 见"双曲奇点".

源点(source point) 见"双曲奇点".

鞍点(saddle point) 见"双曲奇点".

双曲周期轨(hyperbolic periodic orbit) 在小扰动下不会消失的一种周期轨道.设 X 是黎曼流形 M 上的 C^1 向量场,γ 是 X 的一周期轨,$\varphi:\mathrm{R}\times M\to M$ 是 X 导出的流.如果切丛 TM 在 γ 上的限制 $T_\gamma M$ 可表示为三个 $\Phi_t=D\varphi_t$ 不变子丛的惠特尼和 $T_\gamma M=E^u\oplus E\oplus E^s$,其中 E 是和 γ 相切的一维丛,而且存在常数$c>0$,$\lambda<0$,使得

$$|\Phi_t(\eta)|\leqslant c|\eta|\exp(\lambda t)\ (\forall\eta\in E^s\text{ 及 }t\geqslant 0),$$

$$|\Phi_t(\xi)|\leqslant c|\xi|\exp(-\lambda t)\ (\forall\in E^u\text{ 及 }t\leqslant 0),$$

这里$|\cdot|$是切向量就 M 上的黎曼度量的模,则称 γ 是 φ 的一双曲周期轨.双曲周期轨的这一定义揭示了它具有稳定性的动力学性质.然而,基于简单、直观,人们也用庞加莱映射在横截面上给出的局部微分同胚的不动点的双曲性来定义双曲周期轨.设 $p\in\gamma$,$\sum$是过 p 的局部横截面,于是存在包含 p 的开集 $V\subset\sum$,使得庞加莱映射 $f:V\to\sum$是局部微分同胚,且 $f(p)=p$,若 p 是 f 的双曲不动点,则称 γ 是 X 的双曲周期轨.γ 的双曲性的这一定义与点 $p\in\gamma$ 和 V 的选取无关.

初等不动点(elementary fixed point) 在其附近具有较简轨道结构的一类奇点.设 f 是微分流形 M 的微分同胚,$p\in M$ 是 f 的不动点.如果 1 不是 $Df(p):T_pM\to T_pM$的特征值,那么就称 p 是 f 的初等不动点.这一概念的一个等价形式可用横截相交来描述:p 是 f 的初等不动点的充分必要条件是映

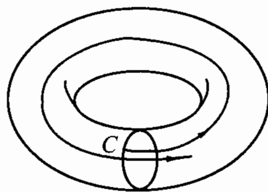
射$\tilde{f}: p \mapsto (p, f(p))$在 p 与对角线$\{(p,p) \in M \times M \mid p \in M\}$横截相交.相应地,若 $p \in M$ 是 M 上的 C^1 向量场 X 的一个奇点,而且 $DX(p): T_pM \to T_pM$ 没有零特征值,那么就称 p 是 X 的简单奇点.用横截相交来描述即是:p 是 X 的简单奇点的充分必要条件是从 M 到切丛 TM 的映射 $p \mapsto (p, X(p))$在 p 点与零截面横截相交.初等不动点(简单奇点)是孤立的.紧致微分流形上所有不动点(奇点)都是初等的(简单的),C^r 微分同胚(C^r 向量场)集合在全体 C^r 微分同胚(C^r 向量场)所成空间中开稠.

简单奇点(simple singularity)　见“初等不动点”.

横截面(cross-section)　通过它可以建立光滑流与微分同胚生成离散动力系统之间的联系.考虑环面上由微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \alpha \text{(其中 } \alpha \text{ 实数)}$$

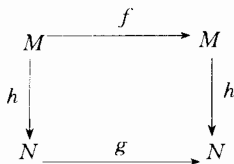
所确定的光滑流 φ.取环面上一个横截面 $C: \theta = \theta_0$(如图),φ的每条轨道都与 C 横截相交,从 C 上出发的轨道正向、负向都要与 C 相交.于是由 φ诱导出 C 上第一返回映射 $f: C \to C$,由 $f(x) = \varphi_{t_0}(x) = \varphi(t_0(x), x)$给出(其中 $x \in C$,$t_0(x) > 0$ 是使$\varphi_{t_0(x)}(x) \in C$ 成立的最小的 t 值),f 是 C 上的微分同胚.一般地,流形 M 上 C^r 流 φ(对应的向量场为 X)的横截面是一个余维为 1 的闭子流形 $\sum \subset M$,它满足:



1. $\sum$ 与 X 横截相交.
2. 从 $\sum$ 离开的φ的每条轨道其未来与过去都与 $\sum$ 相交.
3. φ的每条轨道都与 $\sum$ 相交.

设C^r 流 φ有横截面 $\sum$.如上可定义第一返回映射 $f: \sum \to \sum$,f 是C^r 微分同胚,因而具有横截面的 C^r 流在横截面上诱导了一个 C^r 微分同胚.但是,不是所有光滑流都有横截面,一个明显的必要条件是流不能有奇点(参见“扭扩”).横截面是由庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)引进的.

拓扑共轭(topological conjugacy)　对离散动力系统进行分类的一种方法.设 M,N 是拓扑空间,f,g 分别是 M,N 上的同胚,若存在一同胚$h: M \to N$,使得$h \circ f = g \circ h$,即右图可交换,就称 f 和 g 是拓扑共轭的.拓扑共轭这一关系是等价关系.拓扑共轭从拓扑的观点刻画出两个离散动力系统的轨道结构是相同的.因此,离散动力系统的结构稳定性是用拓扑共轭来揭示的.

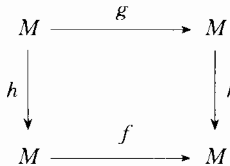


拓扑等价(topological equivalence)　对连续流进行分类的一种方法.设 φ,ψ 分别是拓扑空间 M,N 上的连续流,若存在同胚 $h: M \to N$,使得对任意 $x \in M$,h 把 φ 过$x \in M$的轨道保向地映射到 ψ 过 $h(x) \in N$ 的轨道上,就称 φ 和 ψ 是拓扑等价的.拓扑等价这一关系是一个等价关系.拓扑等价从拓扑的观点刻画出两个连续流的轨道结构是相同的.因此,连续流的结构稳定性是用拓扑等价来揭示的.

C^r 结构稳定性(C^r structural stability)　系统在 C^r 小扰动下轨道的拓扑结构保持不变的性质.设 M 是紧致 C^r 微分流形,$f: M \to M$ 是 C^r 微分同胚.若对于在 C^r 意义下充分接近 f 的任意 C^r 微分同胚 $g: M \to M$,f 和 g 是拓扑共轭的,就称 f 是 C^r 结构稳定的.

对微分流形上的 C^r 流而言,其定义如下:设 M 是紧致 C^r 微分流形,φ是 M 上的 C^r 流.若对于在 C^r 意义下充分接近 φ的任意 C^r 流 $\psi: \mathbb{R} \times M \to M$,$\varphi$和 ψ 是拓扑等价的,就称 φ是 C^r 结构稳定的.M 上结构稳定的 C^r 微分同胚(C^r 流)集合在 M 上全体 C^r 微分同胚(C^r 流)构成的空间中作成开集.C^1 结构稳定性通称为结构稳定性.紧致微分流形上的微分同胚(C^1 流)是结构稳定的充分必要条件是它满足公理 A 和横截条件.

拓扑稳定性(topological stability)　亦称半结构稳定性或半稳定性.通常是描述系统在 C^0 小扰动下的一个稳定性概念.设(M,d)是紧致度量空间,$f: M \to M$是同胚.若对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得对任意同胚$g: M \to M$,当$d(f,g) \leqslant \delta$ 时,存在连续满射 $h: M \to M$ 满足:



1. $h \circ g = f \circ h$,即上图可交换;
2. $d(h, \mathrm{id}_M) \leqslant \varepsilon$;

则称 f 是拓扑稳定的.

对度量空间上的连续流而言,其定义如下:设(M,d)是紧致度量空间,φ是 M 上的连续流.若对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得对任意连续流 $\psi: \mathbb{R} \times M \to M$及任 $t \in (0,1]$,当 $d(\varphi_t, \psi_t) \leqslant \delta$ 时,存在连续满射 $h: M \to M$ 满足:

1. 对任意$x \in M$,h 把 φ 过 x 的轨道映到 ψ 过 $h(x)$的轨道内;
2. $d(h, \mathrm{id}_M) \leqslant \varepsilon$;

则称 φ是拓扑稳定的.

对于自映射情形,也可给出拓扑稳定性的类似定义.微分流形上的安诺索夫系统是拓扑稳定的;扩

张映射是拓扑稳定的. 对微分同胚来说, 公理 A 和强横截条件蕴涵着拓扑稳定性.

半稳定性(semi-stability)　即"拓扑稳定性".

半结构稳定性(structural semi-stability)　即"拓扑稳定性".

Ω 共轭(Ω-conjugacy)　离散动力系统的比拓扑等价弱的一个概念. 它是限制在非游荡集上的拓扑共轭. 设 f, g 分别是拓扑空间 M, N 的自同胚, 若存在同胚 $h: \Omega(f) \to \Omega(g)$ (其中 $\Omega(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的非游荡集), 使得 $h \circ f|_{\Omega(f)} = g \circ h|_{\Omega(f)}$, 即下图可交换, 那么就称 f 和 g 是 Ω 共轭的. Ω 共轭这一关系是等价关系. 拓扑共轭的两个系统是 Ω 共轭的. Ω 共轭的两个系统在其非游荡集上的轨道具有相同的拓扑结构. 因此, 离散动力系统的 Ω 稳定性是用 Ω 共轭来揭示的.

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \longrightarrow & \Omega(f) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Omega(g) & \longrightarrow & \Omega(g) \end{array}$$

R 共轭(R-conjugacy)　离散动力系统的比拓扑共轭弱, 但又比 Ω 共轭稍强的一个概念. 它是限制在链回归集上的拓扑共轭. 其具体释意与 Ω 共轭完全类似(参见"Ω 共轭").

Ω 等价(Ω-equivalence)　连续流的比拓扑等价要弱的一个概念. 它是限制在其非游荡集上的拓扑等价. 设 φ, ψ 分别是拓扑空间 M, N 上的连续流, 若存在同胚 $h: \Omega(\varphi) \to \Omega(\psi)$ (其中 $\Omega(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的非游荡集), 使得对任意 $x \in \Omega(\varphi)$, h 把 φ 过 x 的轨道保向地映到 ψ 过 $h(x)$ 的轨道上, 那么就称 φ 和 ψ 是 Ω 等价的. Ω 等价这一关系是等价关系. 拓扑等价的两个流是 Ω 等价的. Ω 等价的两个流在其非游荡集上的轨道具有相同的拓扑结构, 因此, 连续流的 Ω 稳定性是用 Ω 等价来揭示的.

R 等价(R-equivalence)　连续流的比拓扑等价要弱, 但又比 Ω 等价稍强的一个概念. 它是限制在链回归集上的拓扑等价. 其具体释意与 Ω 等价完全类似(参见"Ω 等价").

局部拓扑共轭(local topological conjugacy)　从拓扑的观点刻画两个离散动力系统局部轨道结构是相同的. 设 f, g 分别是拓扑空间 M, N 的自同胚, $U \subset M, V \subset N$ 分别是 M, N 的开子集. 如果存在同胚 $h: U \cup f(U) \to V \cup g(V)$, 使得 $h(U) = V$, 而且 $h \circ f|_U = g \circ h|_U$, 那么就称 $f|_U$ 局部拓扑共轭于 $g|_V$. 设 $p \in M, q \in N$, 若存在 p 点的开邻域 U, q 点的开邻域 V, 使得 $f|_U$ 局部拓扑共轭于 $g|_V$, 而且共轭 h 把 p 点映到 q 点, 那么就称 f 在 p 点与 g 在 q 点是局部拓扑共轭的. 局部拓扑共轭这一关系是等价关系, 并且这一概念仅对不动点才是非平凡的. 离散动力系统的局部结构稳定性是用局部拓扑共轭来揭示的.

局部拓扑等价(local topological equivalence)　亦称局部流等价. 从拓扑的观点刻画两个连续流局部轨道结构是相同的. 设 φ, ψ 分别是拓扑空间 M, N 上的局部流, 若存在同胚 $h: M \to N$, 使得对任意 $x \in M$, h 把 φ 过 x 的轨道 $\varphi(D_x, x)$ 映射到 ψ 过 $h(x)$ 的轨道 $\psi(D_{h(x)}, x)$ 上(这里 $D_x, D_{h(x)}$ 分别是使得映射 $\varphi(\cdot, x), \psi(\cdot, h(x))$ 有定义的最大实数区间), 那么就称 φ 和 ψ 是拓扑等价的. 现设 φ, ψ 分别是拓扑空间 M, N 上的连续流, $U \subset M, V \subset N$ 分别是 M, N 的开子集, 如果作为局部流 $\varphi|_U$ 与 $\psi|_V$ 是拓扑等价的, 那么就称 $\varphi|_U$ 局部拓扑等价(或局部流等价)于 $\psi|_V$. 设 $p \in M, q \in N$, 若存在 p 点的开邻域 U, q 点的开邻域 V, 使得 $\varphi|_U$ 局部拓扑等价于 $\psi|_V$, 就称 φ 在 p 点与 ψ 在 q 点是局部拓扑等价的(或局部流等价的). 局部拓扑等价这一关系是等价关系. 连续流的局部结构稳定性是用局部拓扑等价来揭示的.

局部流等价(local flow equivalence)　即"局部拓扑等价".

保向共轭(conjugate with preserved orientation)　两个连续流之间不仅保持轨道的拓扑结构, 而且保持参数之间一定关系(相差一个同胚)的一种等价关系. 它是特殊的拓扑等价. 如果 φ, ψ 分别是拓扑空间 M, N 的连续流, 若存在同胚 $h: M \to N$ 及连续映射 $\sigma: M \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 使得:

1. 对任 $x \in M$, 映射 $\sigma(x, \cdot): \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 是保向同胚, 且 $\sigma(x, 0) = 0$;

2. 对任 $x \in M$ 及 $t \in \mathrm{R}$, 有

$$h \circ \varphi(x, t) = \psi(h(x), \sigma(x, t));$$

则称 φ 和 ψ 是保向共轭的. 特别地, 若存在常数 $\alpha > 0$, 使得映射 $\sigma: M \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 对任 $x \in M$ 及 $t \in \mathrm{R}$ 有 $\sigma(x, t) = \alpha t$, 则称 φ 和 ψ 是流等价的.

保向共轭的两个流是拓扑等价的; 若拓扑等价的两个流不含不动点, 那么它们是保向共轭的. 拓扑等价未必能保持的一些动力学性质有可能由保向共轭所保持, 例如, 伪轨跟踪性质等.

流等价(flow equivalence)　见"保向共轭".

半共轭(semi-conjugacy)　动力系统中比拓扑共轭(或拓扑等价)要弱的概念. 设 M, N 是拓扑空间, f, g 分别是 M, N 上的自同胚, 若存在连续满射 $h: M \to N$, 使得 $h \circ f = g \circ h$, 即下图可交换, 那么就称 f 和 g 是半共轭的, h 称为是 f 对 g 的半共轭, 并且称 g 为 f 的一个因子.

对拓扑空间上的连续流而言, 其定义如下: 设 M, N 是拓扑空间, φ, ψ 分别是 M 和 N 上的连续流. 若存在连续满射 $h: M \to N$, 使得对任意 $x \in M$, h 把 φ 过 x 的轨道保向地映到 ψ 过 $h(x)$ 的轨道上, 那么就称 ψ 半共轭于 φ. 最简单的半共轭的例子之一是:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

设 $g:S^1\to S^1$ 是单位圆周 S^1 上保向自同胚，$p:\mathrm{R}^1\to S^1$ 是由 $x\mapsto e^{2\pi i x}$ 确定的覆盖映射. 如果 $f:\mathrm{R}^1\to\mathrm{R}^1$ 是 g 的提升，则 $p\circ f=g\circ p$. 因此，p 就是 f 对 g 的半共轭. 两个系统的半共轭可以将其中一个系统的已知信息转告另一系统的某些信息. 在上述概念中，对 h 只是连续而不一定为满射的情形，一些拓扑动力学家也称 h 是半共轭. 这显然是更弱一些的定义.

因子(factor)　见"半共轭".

$C^r\Omega$ 稳定性($C^r\Omega$-stability)　描述系统在 C^r 小扰动之下非游荡集结构不改变的性质. 它比 C^r 结构稳定性稍弱一些. 设 M 是 C^r 黎曼流形，$f:M\to M$ 是 C^r 微分同胚. 如果对在 C^r 意义下充分接近 f 的任意 C^r 微分同胚 g，f 和 g 是 Ω 共轭的，那么就称 f 是 $C^r\Omega$ 稳定的，并且当 $r=1$ 时，简称 f 是 Ω 稳定的. 完全类似地，可定义链回归集 CR 的 C^rCR 稳定性及 CR 稳定性. 结构稳定的系统是 Ω 稳定和 CR 稳定的. 公理 A 和无环条件等价于 Ω 稳定. 链回归集的双曲性蕴涵着 CR 稳定. 对黎曼流形上的 C^r 流有类似的定义与相应的结论.

C^rCR 稳定性(C^rCR-stability)　描述系统在 C^r 小扰动下链回归集结构不改变的性质. 它是比 C^r 结构稳定稍弱，但又比 $C^r\Omega$ 稳定性稍强一点的概念. 具体释意可参见"$C^r\Omega$ 稳定性".

拓扑 Ω 稳定性(topological Ω-stability)　亦称 Ω 半稳定性. 通常是用来描述系统在 C^0 小扰动下非游荡集的稳定性质的. 设 M 是紧致度量空间，$f:M\to M$ 是同胚. 如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使对任一同胚 $g:M\to M$，只要 $d(f,g)\leqslant\delta$，就存在连续满射 $h:\Omega(g)\to\Omega(f)$(其中 $\Omega(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的非游荡集)，满足：

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{g} & \Omega(f) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \Omega(g) & \xrightarrow{f} & \Omega(g) \end{array}$$

1. $h\circ g|_{\Omega(g)}=f\circ h|_{\Omega(g)}$，即上图可交换；

2. $d(h(x),x)\leqslant\varepsilon(\forall x\in\Omega(g))$；

则称 f 是拓扑 Ω 稳定的.

对 M 上的连续流而言，其定义如下：设 φ 是 M 上的连续流，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 M 上任一连续流 ψ，只要对任意 $t\in[0,1]$，有 $d(\varphi_t,\psi_t)\leqslant\delta$，就存在连续满射 $h:\Omega(\psi)\to\Omega(\varphi)$，满足：

1. 对任 $x\in\Omega(\psi)$，h 将 ψ 过 x 的轨道映到 φ 过 $h(x)$ 的轨道上；

2. $d(h(x),x)\leqslant\varepsilon(\forall x\in\Omega(\psi))$；

则称 φ 是拓扑 Ω 稳定的. 公理 A 和无环条件蕴涵着拓扑 Ω 稳定性.

Ω 半稳定性(Ω semi-stability)　即"拓扑 Ω 稳定性".

绝对结构稳定(absolutely structurally stable)　在研究结构稳定性系统的特征的过程中提出的概念. 设 M 是紧致黎曼流形，$f:M\to M$ 是微分同胚. 如果对 f 的某邻域 $\mathscr{U}\subset\mathrm{Diff}^1(M)$ ($\mathrm{Diff}^1(M)$ 表示 M 上全体 C^1 微分同胚构成的空间，带有 C^1 拓扑)，存在一个映射 $\sigma:\mathscr{U}\to\mathrm{Homeo}(M)$ ($\mathrm{Homeo}(M)$ 表示 M 上全体同胚构成的空间，带有 C^0 拓扑)，使得：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle \sigma(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(g)} \\ M & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

1. $\sigma(f)=\mathrm{id}_M$；

2. 对任意 $g\in N$ 有，$\sigma(g)\circ f=g\circ\sigma(g)$，即上图可交换；

3. σ 在 f 处关于 C^0 度量 d 是李普希茨的，即对某 $K>0$ 和任意 $g\in\mathscr{U}$，有

$$d(\sigma(g),\mathrm{id}_M)\leqslant kd(g,f)；$$

则称 f 是绝对 C^1 结构稳定的(简称绝对结构稳定). 绝对结构稳定的系统是结构稳定的. 富兰克斯(Franks,J.)证明，系统的绝对结构稳定性等价于系统满足公理 A 和强横截条件. 绝对结构稳定是由富兰克斯于 1977 年引入的.

绝对 Ω 稳定(absolutely Ω-stable)　研究 Ω 稳定系统的特征时提出的概念. 设 M 是紧致黎曼流形，$\mathrm{Diff}^1(M)$ 是 M 上全体微分同胚的空间，具有 C^1 拓扑. $\mathrm{Homeo}(\Omega(f),M)$(其中 $\Omega(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的非游荡集)是从 $\Omega(f)$ 到其像集的同胚形成的空间，具有 C^0 拓扑(其中 $f\in\mathrm{Diff}^1(M)$). $i:\Omega(f)\to M$ 是包含映射. 如果存在 f 的邻域 $\mathscr{U}\subset\mathrm{Diff}^1(M)$ 及映射 $\sigma:\mathscr{U}\to\mathrm{Homeo}(\Omega(f),M)$，满足：

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{f|\Omega(f)} & \Omega(f) \\ {\scriptstyle \sigma(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(g)} \\ \Omega(g) & \xrightarrow{g|\Omega(g)} & \Omega(g) \end{array}$$

1. $\sigma(f)=i$；

2. 对任 $g\in\mathscr{U}$，$\sigma(g)\cdot(\Omega(f))=\Omega(g)$，且 $\sigma(g)\circ f=g\circ\sigma(g)$，即上图可交换；

3. 存在常数 $k>0$，使得对任意 $g\in\mathscr{U}$，有

$$d(\sigma(g),i)\leqslant kd(f,g),$$

这里

$$d(f,g)=\sup_{x\in M}d(f(x),g(x))；$$

则称 f 是绝对 Ω 稳定的.

绝对 Ω 稳定的系统是 Ω 稳定的. 系统的绝对 Ω 稳定性等价于系统满足公理 A 和无环条件. 绝对 Ω 稳定是由古肯亥默(Guckenheimer,J.)于 1972 年引入的.

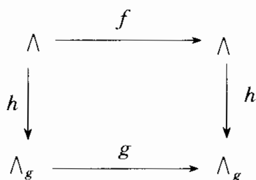
不变集的 C^r 结构稳定性(C^r structural stability

of invariant set)　微分动力系统研究的重要内容之一.指系统经过小扰动之后,其不变集不改变其轨道结构,仅仅是不变集各点的位置有微小移动.设 M 是一个 C^r 微分流形,$U\subset M$ 是一个开集,$f:U\to M$ 是 C^r 映射,$\Lambda\subset U$ 是 f 的一个紧致不变集,d 是与 M 的拓扑相容的任意一个距离.如果对任意 $\varepsilon>0$ 以及在 C^r 意义下充分接近 f 的任意 $g:U\to M$,存在关于 g 不变的子集 $\Lambda_g\subset U$ 和同胚 $h:\Lambda\to\Lambda_g$,满足:

1. $d(h(x),x)<\varepsilon(\forall x\in\Lambda)$;

2. $h\circ f|_\Lambda=g\circ h|\Lambda$,即下图可交换;

则称 f 在 Λ 上是 C^r 结构稳定的.当 $r=1$ 时,通常称为不变集是结构稳定的.如果 Λ 是 f 的扩张不变集,那么 Λ 是结构稳定的.如果 $f:U\to M$ 是 U 到像集 $f(U)$ 的微分同胚,并且 $\Lambda\subset U$ 是 f 的紧双曲不变集,那么 Λ 是结构稳定的.



关于 C^r 向量场的不变集的 C^r 结构稳定性定义如下:设 M 是紧致 C^r 黎曼流形,$\Lambda\subset M$ 是 M 上的 C^r 向量场 X 的闭不变集.如果对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得只要 C^r 向量场 Y 在 C^r 意义下 δ 接近 X,就存在 Y 的闭不变集 Λ_Y 及同胚 $h:\Lambda\to\Lambda_Y$,h 把 X 的每一个包含在 Λ 内的轨道映到 Y 的包含在 Λ_Y 的一轨道上,而且满足

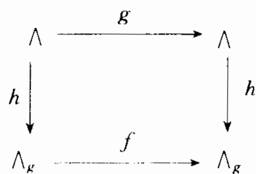
$$d(x,h(x))<\varepsilon\quad(\forall x\in\Lambda),$$

则称 X 在 Λ 上是 C^r 结构稳定的.当 $r=1$ 时,通常称不变集是结构稳定的.若 Λ 是 X 的紧双曲不变集,而且 Λ 不含奇点,那么 X 在 Λ 上是结构稳定的.

局部结构稳定性(local structural stability)　用来刻画动力系统在局部范围内轨道的拓扑结构在 C^r 小扰动下不发生变化的概念.设$(E,\|\cdot\|)$是巴拿赫空间,$U\subset E$ 是开集,$f:U\to E$ 是 U 到 $f(U)$ 的 C^r 微分同胚.$p\in U$,如果对于 p 点的任意邻域 $V\subset U$,只要映射 $g:U\to E$ 在 C^r 意义下充分接近 f,就有 g 在某点 $q\in V$ 与 f 在 p 点局部拓扑共轭,那么就称 f 在 p 点是局部结构稳定的.

对 C^r 向量场情形,其定义是:设 E,U 如上,$X:U\to E$ 是 C^r 向量场.$p\in U$,如果对于 p 点的任意邻域 $V\subset U$,只要向量场 $Y:U\to E$ 在 C^r 意义下充分接近 X,就有 Y 在某点 $q\in V$ 与 X 在 p 点局部拓扑等价,那么就称 X 在 p 点是局部结构稳定的.双曲不动点和双曲奇点都是局部结构稳定的.

不变集的半结构稳定性(structural semi-stability of invariant set)　描述动力系统的不变集在系统受到 C^0 小扰动后其不变集的拓扑结构应保持的程度.设 M 是黎曼流形,$U\subset M$ 是开集,$f:U\to M$ 是可微映射,$\Lambda\subset U$ 是 f 的紧不变集,如果对任意 $\varepsilon>0$,只要连续映射 $g:U\to M$ 在 C^0 意义下充分接近 f,就存在关于 g 的紧不变集 $\Lambda_g\subset U$ 和连续满射 $h:\Lambda_g\to\Lambda$,满足:



1. $d(h(x),x)<\varepsilon(\forall x\in\Lambda_g)$;

2. $h\circ g|_{\Lambda g}=f\circ h|_{\Lambda g}$,即上图可交换;

则称 Λ(关于 f 的 C^0 小扰动)是半结构稳定的.如果 $\Lambda\subset U$ 是 C^1 映射 $f:U\to M$ 的扩张不变集,那么 Λ 是半结构稳定的.

双曲不变集(hyperbolic invariant set)　双曲周期点概念的推广,是微分动力系统的一个极为重要的不变集.设 M 是黎曼流形,$U\subset M$ 是 M 的一个开集,$f\in C^1(U,M)$是从 U 到 $f(U)$ 的微分同胚,Λ 是 U 的紧致子集.如果:

1. Λ 关于 f 是不变的,即 $f(\Lambda)=\Lambda$;

2. $T_\Lambda M=(TM)|_\Lambda$ 分解为关于 Df 不变的连续的惠特尼和

$$T_\Lambda M=E^u\oplus^s E^s,$$
$$Df(E_x^u)=E_{f(x)}^u,$$
$$Df(E_x^s)=E_{f(x)}^s\quad(\forall x\in\Lambda);$$

3. 对于 M 的黎曼度量$\langle\cdot,\cdot\rangle$,存在常数 $C_1>0$,$C_2>0$ 和 $0<\lambda<1$,使得:

$$|Df^n(\zeta)|\geqslant C_1\lambda^{-n}|\zeta|\ (\forall\zeta\in E^u,n=1,2,\cdots),$$
$$|Df^n(\eta)|\leqslant C_2\lambda^n|\eta|\ (\forall\eta\in E^s,n=1,2,\cdots);$$

则称紧致子集 Λ 是 f 的一个双曲不变集,这里 $|\cdot|$ 是由黎曼度量给出的模.对于定义中的第 3 条已证明:存在与$\langle\cdot,\cdot\rangle$等价的黎曼度量《·,·》和常数 $0<\tau<1$,使得:

$$\|Df(\zeta)\|\geqslant\tau^{-1}\|\zeta\|\quad(\forall\zeta\in E^u),$$
$$\|Df(\eta)\|\leqslant\tau\|\eta\|\quad(\forall\eta\in E^s).$$

当双曲不变集 Λ 是 f 的一周期轨道组成,并且 $p\in\Lambda$,那么 p 就称为双曲周期点.这一定义等价于"双曲不动点"条目中所给的定义(参见"双曲不动点").当 M 紧致,微分同胚 $f:M\to M$ 以 M 为双曲不变集时,f 被称为安诺索夫微分同胚.系统的双曲不变集是结构稳定的;安诺索夫微分同胚是结构稳定的和拓扑稳定的.

安诺索夫微分同胚(Anosov diffeomorphism)　见"双曲不变集".

安诺索夫可微映射(Anosov differentiable map)　比安诺索夫微分同胚和扩张映射更广的一类离散微分半动力系统.设 M 是黎曼流形,f 是 M 到自身的 C^1 映射.若 f 是 C^1 的正则映射(即:对任意 $x\in M$,f 在 x 处的微分 $D_xf:T_xM\to T_{f(x)}M$ 是满射),并且存在常数 $C>0$ 及 $0<\mu<1$ 和 M 上的一个

黎曼度量$\|\cdot\|$，使得对M中的任意一个点列$\{x_n\}$，$f(x_n)=x_{n+1}(\forall n)$，存在分解

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T_{x_n}M=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} E^s_{x_n}\oplus E^u_{x_n}=E^s\oplus E^u.$$

满足：

1. $Df(E^\sigma)\subset E^\sigma(\sigma=s,u)$；
2. $\|Df^n(v)\|\leqslant c\mu^n\|v\|(\forall v\in E^s)$；
3. $\|Df^n(v)\|\geqslant C^{-1}\mu^{-n}\|v\|(\forall v\in E^u)$；

则称f是安诺索夫可微映射. 该定义是由波兹蒂斯基(Przytycki, F.)给出的. 安诺索夫可微映射与安诺索夫微分同胚及扩张映射有很多相似的重要性质，例如，它们都有伪轨跟踪性质等.

扩张不变集(expanding invariant set)　离散微分半动力系统中较之扩张映射更广泛的研究对象，是一个重要的不变集. 设M是黎曼流形，$U\subset M$是具有紧致闭包的开集，$\Lambda\subset U$是$f\in C^1(U,M)$的紧致不变集，如果存在M的黎曼度量$\langle\cdot,\cdot\rangle$和实数$\tau>1$，使得$|Df(\zeta)|\geqslant C|\zeta|(\forall\zeta\in T_\Lambda M)$，则称$f$在$\Lambda$上是扩张的，并且把$\Lambda$称为$f$的扩张不变集，这里$|\cdot|$是由$\langle\cdot,\cdot\rangle$引出的模. 如果$M$是紧致的，$f\in C^1(M,M)$在$M$上扩张，则称$f$是扩张映射. 任何微分流形上都存在着具有"复杂的"扩张不变集的自映射，并且已经证明，扩张不变集对f的C^1小扰动是结构稳定的，对于f的C^0小扰动是半结构稳定的.

扩张映射(expanding map)　撒布(Shub, M.)在1969年最先研究得到的一类结构稳定的半动力系统. 最简单的扩张映射的例子是复平面上由$z\mapsto z^2$定义的单位圆周的自映射. 一般定义是：设M是紧致黎曼流形，$f\in C^1(M,M)$，如果存在M上的黎曼度量$\langle\cdot,\cdot\rangle$和实数$\tau>1$，使得

$$|Df(\xi)|\geqslant\tau|\xi|\quad(\forall\xi\in TM),$$

则称f为扩张映射，这里$|\cdot|$是由$\langle\cdot,\cdot\rangle$引出的范数. 扩张映射是结构稳定的，并且具有有理的ζ函数. 因此，扩张映射是对微分同胚理论研究的推广. 在紧流形上扩张映射的存在对流形本身需要加以很强的限制，其欧拉示性数必须是零，其通用复迭空间必须微分同胚于$\mathbb{R}^n$，其基本群必须是无扭的等. 例如，在二维紧曲面中，只有环面和克莱因瓶才可以具有扩张映射.

流的双曲不变集(hyperbolic invariant set of a flow)　双曲周期轨概念的推广，是C^r流的一个重要的不变集. 设M是紧黎曼流形，X是M上的C^1向量场，X所导出的流是$\varphi:\mathbb{R}\times M\to M$，$\Lambda\subset M$是$\varphi$的不变集. 如果切丛$TM$在$\Lambda$上的限制$T_\Lambda M$可表示为$D\varphi_t$的三个不变子丛的惠特尼和

$$T_\Lambda M=E^u\oplus E\oplus E^s,$$

并且存在常数$C>0$，$\lambda<0$，使得：

$$|D\varphi_t(\zeta)|\leqslant C|\zeta|\exp(-\lambda t)\ (\forall\zeta\in E^u\text{ 及 }t\leqslant 0),$$
$$|D\varphi_t(\eta)|\leqslant C|\eta|\exp(\lambda t)\ (\forall\eta\in E^s\text{ 及 }t\geqslant 0),$$

则称Λ是φ的双曲不变集. 这里E是和流相切的一维丛，$|\cdot|$是M上的黎曼度量所给出的模. 上述定义本身表明Λ不含奇点，所以有时候也把Λ和一些双曲奇点的并称为双曲不变集. 当Λ是φ的一个周期轨道γ时，这就给出周期轨道双曲性的定义. 若$\Lambda=M$是φ的双曲不变集，流φ称为是安诺索夫流，对应的向量场称为安诺索夫向量场. 安诺索夫微分同胚的扭扩是安诺索夫流，安诺索夫流是结构稳定的，而且当非游荡集是整个空间时，周期轨道是稠密的.

安诺索夫流(Anosov flow)　见"流的双曲不变集".

安诺索夫向量场(Anosov vector field)　见"流的双曲不变集".

哈特曼定理(Hartman's theorem)　亦称哈特曼线性化定理，它指出：C^1微分同胚(C^1向量场)f在其双曲不动点(双曲奇点)p附近的动力学性质与其在p点的切映射T_pf的动力学性质一样. 具体地说，设V是巴拿赫空间E中O点的邻域，$f:V\to f(V)\subset E$是C^1微分同胚，O是f的双曲不动点，那么f的双曲不动点O局部拓扑共轭于T_0f的不动点O. 对C^1向量场也有类似结论，并称它为哈特曼-哥布曼定理. 具体到紧致黎曼流形M上，哈特曼定理断言：M上C^1微分同胚f的双曲不动点p局部拓扑共轭于$T_pf:T_pM\to T_pM$的不动点O. 对M上C^1向量场的陈述完全类似. 由哈特曼定理可得到双曲不动点(双曲奇点)的局部结构稳定性这个动力系统中十分重要的结论.

哈特曼线性化定理(Hartman's linearized theorem)　即"哈特曼定理".

哈特曼-哥布曼定理(Hartman-Grobman theorem)　见"哈特曼定理".

稳定流形(stable manifold)　微分动力系统的基本概念. 它是微分动力系统研究的重要内容. 稳定流形和不稳定流形在结构稳定性、Ω稳定性以及分歧理论等许多课题的研究中起着十分重要的作用. 稳定流形与不稳定流形的方法是当前研究微分动力系统结构稳定性等问题的三个主要方法(即泛函分析法、稳定流形法以及典范方程组法)之一. 稳定流形本身的理论也是微分动力系统研究的重要内容. 作为稳定流形推广的稳定集也在拓扑动力系统的研究中发挥着重要的作用. 所谓一点x的稳定流形，是指在同步意义下正半轨和过点x的正半轨具有相同的极限性质的那些点集，该点集构成系统所在相空间——微分流形的子流形. 设(M,d)是一度量空间，$f:M\to M$是同胚，对任意$x\in M$，集合

$$W^s(x;f)=\{y\in M\mid \lim_{n\to+\infty} d(f^n(y),f^n(x))=0\},$$
$$W^u(x;f)=\{y\in M\mid \lim_{n\to+\infty} d(f^{-n}(y),f^{-n}(x))=0\}$$
分别称为 f 在点 x 处的稳定集和不稳定集. 对任意 $\varepsilon>0$,集合

$$W^s_\varepsilon(x;f)=\{y\in M\mid y\in W^s(x;f),\ d(f^n(y),f^n(x))<\varepsilon, n=0,1,2,\cdots\}$$
$$W^u_\varepsilon(x;f)=\{y\in M\mid y\in W^u(x;f),\ d(f^{-n}(y),f^{-n}(x))<\varepsilon, n=0,1,2,\cdots\}$$
分别称为 f 在点 x 处(尺度为 ε 的)局部稳定集和局部不稳定集. 明显的有

$$W^s(x;f)=W^u(x;f^{-1}),$$
$$W^s_\varepsilon(x;f)=W^u_\varepsilon(x;f^{-1});$$
并且对任意 $\varepsilon>0$,有

$$W^s(x;f)=\bigcup_{i\geqslant 0} f^{-i}W^s_\varepsilon(x;f),$$
$$W^u(x;f)=\bigcup_{i\geqslant 0} f^{i}W^u_\varepsilon(x;f).$$

对于连续流,有类似的定义如下:设 $\varphi:\mathrm{R}\times M\to M$ 是 M 上的连续流,对任意 $x\in M$,集合

$$W^s(x;\varphi)=\{y\in M\mid \lim_{t\to+\infty} d(\varphi_t(y),\varphi_t(x))=0\}$$
称为 φ 在点 x 处的稳定集. 类似地,$W^u(x,\varphi)$,$W^s_\varepsilon(x,\varphi)$,$W^u_\varepsilon(x,\varphi)$分别称为 φ 在点 x 处的不稳定集、(尺度为 ε 的)局部稳定集和局部不稳定集.

记 $\gamma(x)$为 φ 过点 x 的轨道,集合

$$W^s(\gamma(x);\varphi)=\bigcup_{y\in\gamma(x)} W^s(y;\varphi),$$
$$W^u(\gamma(x);\varphi)=\bigcup_{y\in\gamma(x)} W^u(y,\varphi)$$
分别称为 φ 的过点 x 轨道的稳定集和不稳定集. 显然,若 $x\in M$ 是同胚 f(连续流 φ)的不动点,则 $W^s(x;f)$与$W^u(x;f)$ ($W^s(x;\varphi)$与$W^u(x;\varphi)$)分别是由以 x 为 ω 极限集和以 x 为 α 极限集的点组成;若 $\gamma(x)$ 是 φ 的周期轨道,则 $W^s(\gamma(x);\varphi)$ 和 $W^u(\gamma(x);\varphi)$分别是由以$\gamma(x)$为 ω 极限集和以$\gamma(x)$为 α 极限集的点组成.

设 M 是黎曼流形,$f:M\to M$ 是 C^r 微分同胚,$\Lambda\subset M$ 是 f 的紧致双曲不变集. 海尔士(Hirsch,M. W.)和皮尤夫(Pugh,C.)证明了重要的稳定流形及不稳定流形定理:若 $T_\Lambda M=E^s\oplus E^u$ 是由 Λ 的双曲性所决定的连续直和分解,则存在 $\varepsilon>0$,使得对任意的 $x\in\Lambda$,局部稳定集 $W^s_\varepsilon(x;f)$是与 E^s_x 切于 x 的 C^r 嵌入 k 维圆盘(这里 $k=\dim E^s_x$);局部不稳定集 $W^u_\varepsilon(x;f)$是与 E^u_x 切于 x 的 C^r 嵌入 l 维圆盘(这里 $l=\dim E^u_x$),并且,当 $x\in\Lambda$ 在 Λ 中变化时,这两族圆盘分别依 x 变化而连续变化. 该定理表明:局部稳定集 $W^s_\varepsilon(x;f)$和局部不稳定集 $W^u_\varepsilon(x;f)$都是 C^r 嵌入子流形,因而稳定集 $W^s(x,f)$和不稳定集 $W^u(x;f)$是 C^r 浸入子流形. 这样一来,就有理由称局部稳定集和局部不稳定集为局部稳定流形和局部不稳定流形. 对 M 上的 C^r 向量场情形,其稳定流形与不稳定流形定理的内容与 C^r 微分同胚情形完全类似. 作为特殊情况,当 Λ 仅由一个不动点(奇点)组成时,这就是双曲不动点(双曲奇点)的稳定流形与不稳定流形定理. 例如,设$(E,\|\cdot\|)$是巴拿赫空间,$A:E\to E$ 是双曲线性映射,$E=E^s\oplus E^u$ 是由 A 决定的直和分解,于是有

$$W^s(0;A)=E^s,\quad W^u(0;A)=E^u.$$
若令 $V=\{x\in E\mid \|x\|<\varepsilon\}$,则

$$W^s_\varepsilon(0;A)=V\cap E^s, W^u_\varepsilon(0;A)=V\cap E^u.$$

稳定集(stable set) 见“稳定流形”.

不稳定集(unstable set) 见“稳定流形”.

局部稳定集(local stable set) 见“稳定流形”.

局部不稳定集(local unstable set) 见“稳定流形”.

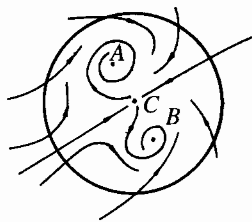
不稳定流形(unstable manifold) 见“稳定流形”.

局部稳定流形(local stable manifold) 见“稳定流形”.

局部不稳定流形(local unstable manifold) 见“稳定流形”.

稳定流形定理(theorem on stable manifold) 见“稳定流形”.

庞特里亚金-安德罗诺夫定理(Pontryagin-Andronov's theorem) 最早得到的有关结构稳定性的结果. 1937 年,庞特里亚金(Понтрягин, Л. С.)和安德罗诺夫(Андронов, А. А.)研究了平面圆盘 B^2 上结构稳定的常微系统 S,S 在 B^2 边界上向量场一致指向 B^2 的内部或外部. 他们指出:S 在 B^2 上结构稳定的充分必要条件是:



1. S 仅有有限个奇点和周期轨道,它们是双曲的.

2. S 不存在从鞍点到鞍点的连结轨道.

如图所示就是 B^2 上一个结构稳定系统,其中 A,B 为稳定的焦点(即渊点),C 为鞍点,它们组成系统的非游荡集.

在这个定理基础上,佩克索托(Peixoto,M.)于 1962 年得到二维流形上结构稳定的向量场的特征(参见“佩克索托定理”). 从此动力系统结构稳定性理论得到了迅速的发展.

莫尔斯-斯梅尔系统(Morse-Smale system) 最早得到的一类结构稳定系统. 这类系统有一特性:它的非游荡集仅由有限个数的周期元素组成. 对这

类系统的研究是从1937年获得的庞特里亚金-安德罗诺夫定理(参见"庞特里亚金-安德罗诺夫定理")的结论开始的.它的通常定义如下:设 M 是紧致黎曼流形,X 是 M 上的 C^r 向量场,如果:

1. X 有有限个奇点和周期轨道,它们都是双曲的;

2. 若 σ_1 和 σ_2 是 X 的奇点或周期轨道,那么 σ_1 与 σ_2 的稳定流形与不稳定流形是横截相交的;

3. 非游荡集 $\Omega(X)$ 恰是 X 的奇点和周期轨道;

则称 X 是莫尔斯-斯梅尔向量场.完全类似地可给出莫尔斯-斯梅尔微分同胚的定义.动力系统理论已经证明:任何紧致微分流形上都存在莫尔斯-斯梅尔系统.这个重要事实是由莫尔斯(Morse,H.M.)及斯梅尔(Smale,S.)得到的,故这一类系统通常就以他们的名字命名(参见"微分动力系统").

莫尔斯-斯梅尔向量场(Morse-Smale vector field) 见"莫尔斯-斯梅尔系统".

莫尔斯-斯梅尔微分同胚(Morse-Smale diffeomorphism) 见"莫尔斯-斯梅尔系统".

佩克索托定理(Peixoto's theorem) 定向闭曲面上 $C^r(r\geqslant 1)$ 向量场 X 结构稳定的特征性定理.该定理指出:X 是 $C^r(r\geqslant 1)$ 结构稳定的充分必要条件是 X 是莫尔斯-斯梅尔系统.具体地,莫尔斯-斯梅尔向量场内容陈述为:

1. X 仅有有限个奇点和周期轨道,它们都是双曲的.

2. X 过每一点轨线的 ω 极限集和 α 极限集都只能是奇点或周期轨道,但它们不同时都是鞍点.佩克索托定理是佩克索托(Peixoto,M.)于1962年得到的.佩克索托为了证明上述定理,还给出 C^r 稠密性定理,即:闭曲面上所有结构稳定系统在其上的全体 C^r 向量场空间中作成一稠密子集.

科普卡-斯梅尔定理(Kupka-Smale's theorem) 关于微分动力系统的一种通有稠密性定理.它由科普卡(Kupka,I.)和斯梅尔(Smale,S.)给出.该定理断言:设 M 是紧致 C^r 微分流形,$\mathrm{Diff}^r(M)$ 是 M 上全体 C^r 微分同胚形成的空间,具有 C^r 拓扑,那么存在一通有集 $\mathscr{Y}\subset\mathrm{Diff}^r(M)$,使得对任意 $f\in\mathscr{Y}$,f 的周期点是双曲的,且其稳定流形与不稳定流形横截相交.

通有稠密性定理(general density theorem) 微分动力系统的一类基本定理.这些基本定理指出在微分动力系统中具有某性质的子系统集是全体系统集合的无穷个开稠集的交集(即通有集).如科普卡-斯梅尔定理就是一个通有稠密性定理.又如,设 M 是紧致微分流形,$\mathrm{Diff}(M)$ 是 M 上全体 C^1 微分同胚形成的空间,具有 C^1 拓扑,那么存在一通有集 $\mathscr{Y}\subset\mathrm{Diff}(M)$,使得对任意 $f\in\mathscr{Y}$,f 的周期点是双曲的,它们在非游荡集 $\Omega(f)$ 中稠密,而且其稳定流形与不稳定流形是横截相交的.这个通有稠密定理由皮尤夫(Pugh,C.)给出.

线性横截条件(linear transversality condition) 向量场结构稳定的基本条件之一.其基本含意是:设 $f:M\to M$ 是紧致黎曼流形上的微分同胚.令

$$E^s=\{\zeta\in TM\mid \lim_{n\to+\infty}\|Tf^n(\zeta)\|=0\},$$

$$E^u=\{\eta\in TM\mid \lim_{n\to+\infty}\|Tf^{-n}(\eta)\|=0\},$$

$$E_x^s=E^s\cap T_xM,\ E_x^u=E^u\cap T_xM.$$

如果对任意 $x\in M$,有 $E_x^s\oplus E_x^u=T_xM$,则称 f 满足强横截条件.该定义是由罗宾(Robbin,J.)在研究微分同胚生成的离散动力系统结构稳定性时首先给出的.罗宾指出,对于公理 A 微分同胚来说,他所给出的这个强横截条件与通常所说的强横截条件(参见"强横截条件")是等价的.后来,廖山涛将罗宾所引的上述概念推广到常微系统,并且为了区别于通常的强横截条件而冠以"线性"这样的限定词,称为线性横截条件.与此同时,他对常微系统也得到了类似微分同胚情形的上述结果(参见"阻碍集").

强横截条件(strong transversality condition) 亦称几何式横截条件.结构稳定系统的基本条件之一.所谓强横截条件是指:当系统是由微分同胚生成时,它要求对任意两点 x,y,x 的稳定流形 $W^s(x)$ 与 y 的非稳定流形 $W^u(y)$ 是横截相交的;当系统是由 C^1 向量场生成时,它要求对任意两点 x,y,过 x 的轨道的稳定流形与过 y 的轨道的不稳定流形是横截相交的.强横截条件是由斯梅尔(Smale,S.)首先提出的.微分动力系统的研究指出:若系统满足公理 A 和强横截条件,则系统是结构稳定的.人们通常把这类系统称为是公理 A 结构稳定系统.现已得到:对微分同胚和向量场,结构稳定系统等价于公理 A 结构稳定系统.

几何式横截条件(geometric transversality condition) 即"强横截条件".

公理 A 结构稳定系统(axiom A structurally stable system) 见"强横截条件".

稳定性猜测(stability conjecture) 关于稳定性的两个猜测.它是微分动力系统理论研究的核心内容.斯梅尔(Smale,S.)总结了莫尔斯-斯梅尔系统、安诺索夫系统、斯梅尔马蹄等有关结构稳定性的若干结论后,在1967年,提出以下两个著名猜测:

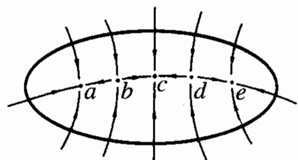
1. 结构稳定性$\Leftrightarrow$公理 A+强横截条件.

2. Ω 稳定性$\Leftrightarrow$公理 A+无环条件.

目前,对 C^1 微分同胚及 C^1 向量场已给出两猜测的正面回答.但对 $C^r(r\geqslant 2)$ 情形还有待解决.中国数学家廖山涛教授在微分动力系统理论于20世纪60年代初正式兴起时,即开始这方面的研究,他

建立了以典范方程组与阻碍集两个基本概念为核心的独特的研究体系，在解决这两个猜测的研究中做出了重要贡献，他给出了 $n=2,3$，C^1 微分同胚稳定性猜测必要性部分的证明，使得这个重要问题研究有了突破性进展(1980，1984)．随后，1987 年，巴西学者马芮(Mané，R.)解决了 C^1 微分同胚稳定性猜测的必要性部分．对流的 C^1 稳定性猜测，廖山涛对 C^1 流的稳定性的特征做了长期的系统的刻画与研究，1994 年，日本学者哈亚西(Hayashi，S.)给出 C^1 流的连结引理(Connecting lemma)，使得这一猜测的研究又有了突破．在这些基础上，中国学者文兰与日本学者哈亚西分别独立地给出了 C^1 向量场结构稳定性的必要性证明，从而对 C^1 情形解决了这个猜测．

类梯度微分同胚(gradient-like diffeomorphism)　莫尔斯-斯梅尔微分同胚的著名特例．假定 f 是莫尔斯-斯梅尔微分同胚，定义 f 的周期点的一个偏序：$p\leqslant q$，只要 q 的稳定流形 $W^s(q)$ 与 p 的不稳定流形 $W^u(p)$ 的交不空；其次，若 $p\leqslant q$，就有 $\dim W^s(p)<\dim W^s(q)$，那么 f 就是一个类梯度微分同胚．下图便是二维球面 S^2 上一个类梯度微分同胚的轨道结构，图中 b，d 是鞍点，a，c，e 是渊点．一般地，如果着眼于紧致微分流形上的莫尔斯函数(一切临界点是非退化的)，那么它的梯度向量场产生的流通有的以类梯度微分同胚作为它们的时间 1 映射．这就保证了在每个紧致微分流形上存在类梯度微分同胚．



C^1 封闭引理(C^1 closed lemma)　微分动力系统的一个基本引理．C^1 封闭引理由皮尤夫(Pugh，C.)于 1967 年提出，它的完全正确的证明是由廖山涛首先以十分简洁的方式给出的．实际上，他证明了以下推广的 C^1 封闭引理：设 M 是一个 n 维黎曼流形($n\geqslant 2$)，在 M 上定义了一个 C^1 常微系统 X(即 C^1 向量场)，如果 a 是 X 的一个非游荡常点，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 M 上的 C^1 常微系统 Y，这系统有一周期轨道经过 a 点，并且满足 $\|X-Y\|_1<\varepsilon$．

C^1 封闭引理是微分动力系统结构稳定性理论中许多问题研究的基础．例如，由 C^1 封闭引理可得，所有不含非闭 p 式稳定轨道的系统在全体 C^1 系统空间作成一个稠密子集．

C^r 封闭引理猜测(C^r closed lemma conjecture)　微分动力系统中至今还未完全解决的一个重要猜测．它是直接关系着微分动力系统 $C^r(r\geqslant 2)$ 结构稳定性理论进一步发展的一个重要问题．所谓 C^r 封闭引理猜测是指如下命题对任 $r\geqslant 2$ 是否成立：设 M 是紧致 n 维黎曼流形，F 是 M 上的 C^r 微分同胚(或 C^r 向量场)，$p\in M$ 是 F 的一个非游荡常点，对任意 $\varepsilon>0$，存在 M 上的 C^r 微分同胚(或 C^r 向量场)G，G 有一周期轨道经过 p 点，而且在 C^r 意义下，G 是 ε 接近 F 的．该猜测的验证显得十分困难，目前只是在对 M 或 F 作了某些限制的情形下得到验证．

安诺索夫封闭引理(Anosov closing lemma)　微分动力系统中的一个引理．所谓安诺索夫封闭引理，是指紧致光滑流形上的安诺索夫系统(微分同胚或流)是公理 A 系统．这一结论是可扩性与伪轨跟踪性质的直接应用．

公理 A 系统(axiom A system)　在微分动力系统结构稳定性和 Ω 稳定性的研究中，由斯梅尔(Smale，S.)提出的一个基本条件．满足公理 A 条件要求的系统被称为公理 A 系统．设 M 是紧致微分流形，$f:M\to M$ 是微分同胚．涉及 f 的以下条件称为公理 A 系统：

1. 非游荡集 $\Omega(f)$ 具有双曲结构．
2. 周期点在非游荡集中稠密．

对 M 上的 C^1 向量场 X 来说，设 φ 是 X 导出的流，若 $\Omega(\varphi)=F\cup\Lambda$，同时满足：

1. F 是 φ 的有限个双曲奇点的集合；
2. Λ 是 φ 的双曲不变集，而且 φ 的双曲周期轨在 Λ 中稠；
3. $F\cap\Lambda=\varnothing$；

则称 φ 为公理 A 流．

莫尔斯-斯梅尔系统以及安诺索夫系统都是公理 A 系统．斯梅尔正是在概括了这两个系统及其他结构稳定系统后提出公理 A 条件的．公理 A 系统的遍历性质及其非游荡集的结构等动力学性质的研究已取得丰富成果．

公理 A 流(axiom A flow)　见“公理 A 系统”．

谱分解(spectrum decomposition)　亦称基本集分解．刻画公理 A 系统非游荡集的一个拓扑性质．设 M 是紧致微分流形，微分同胚 $f:M\to M$ 满足公理 A．斯梅尔(Smale，S.)证明了如下定理：f 的非游荡集 $\Omega(f)$ 可分解为两两不相交的闭不变集之并

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_s,$$

而且 f 限制在每一个 Ω_i 之上是拓扑传递的．这个定理被称为谱分解定理．闭不变集 $\Omega_i(i=1,2,\cdots,s)$ 称为是 $\Omega(f)$ 的基本集．对公理 A 流也有类似的谱分解．公理 A 的谱分解性质在 Ω 稳定性的证明中起着重要的作用．对紧度量空间上具有伪轨跟踪的可扩同胚(可扩流)，其非游荡集也可以谱分解．

基本集分解(basic set decomposition)　即“谱分解”．

局部乘积结构(local product structure)　亦称典型坐标．刻画双曲不变集中局部稳定集与局部不

稳定集相互联系的几何属性. 设 M 是黎曼流形, $\Lambda \subset M$ 是微分同胚 $f:M\to M$ 的紧双曲不变集. 动力系统的研究得到, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $x, y\in\Lambda$, $d(x,y)<\delta$, 就可断定 $W_\varepsilon^u(x,f)$ 与 $W_\varepsilon^s(y,f)$ 具有惟一横截交点, 记为 $[x,y]$. 问题在于: 在怎样的条件下能有 $[x,y]\in\Lambda$? 如果存在 $\delta>0$, 使得当 $x,y\in\Lambda$, $d(x,y)<\delta$ 时, 必有 $[x,y]\in\Lambda$, 则称 f 在 Λ 上具有局部乘积结构. 对 M 上 C^1 流 φ, 局部乘积结构的定义如下: $\Lambda\subset M$ 是 φ 的紧双曲不变集, 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得如果 $x,y\in\Lambda$, $d(x,y)\leqslant\delta$, 则存在惟一的 $\tau=\tau(x,y)$, $|\tau|\leqslant\varepsilon$, 使得 $W_\varepsilon^s(\varphi_\tau(x))\cap W_\varepsilon^u(y)$ 非空, 而且是 Λ 中一个点, 则称 φ 在 Λ 上具有局部乘积结构. 公理 A 系统在其非游荡集上(更确切地说是在其谱分解的基本集上)具有局部乘积结构.

典型坐标(canonical coordinate) 即"局部乘积结构".

无环条件(no cycle condition) Ω 稳定性的基本条件之一, 描述了动力系统的不变集之间的关系. 设 M 是紧致流形, $f:M\to M$ 是同胚, $\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_l$ 是两两不相交的 f 的闭不变集. 在这些集合间定义如下所述的一种关系"$\succ$":

$\Lambda_i\succ\Lambda_j \Leftrightarrow (W^u(\Lambda_i)\setminus\Lambda_i)\cap W^s(\Lambda_j)\setminus\Lambda_j)\neq\varnothing$,

这里

$$W^s(\Lambda_j)=\{x\in M \mid \lim_{k\to+\infty} d(f^k x,\ \Lambda_j)=0\},$$

$$W^u(\Lambda_i)=\{x\in M \mid \lim_{k\to+\infty} d(f^{-k} x,\ \Lambda_i)=0\}.$$

$W^s(\Lambda_j)$ 和 $W^u(\Lambda_i)$ 分别称为 Λ_j 的稳定集和 Λ_i 的不稳定集. 如果存在两两不相同的 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ $(r\geqslant1)$, 使得

$$\Lambda_{i_1}\succ\Lambda_{i_2}\succ\cdots\succ\Lambda_{i_r}\succ\Lambda_{i_1},$$

则称 $\Lambda_{i_1},\Lambda_{i_2},\cdots,\Lambda_{i_r}$ 形成了一个环. 如果在 $\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_l$ 中不存在任何环, 则称关系"$\succ$"是无环的. 对 M 上的连续流 f 而言, 其无环性可如下说明: 如果 $\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_l$ 是两两不相交的 f 的闭不变集, 在这些集合间定义如下所述的一种关系"$\succ$": $\Lambda_i\succ\Lambda_j \Leftrightarrow$ 对某 $x\in M$ 有 $\alpha(x)\subset\Lambda_i$, $\omega(x)\subset\Lambda_j$. 于是, 如上可定义关系"$\succ$"的无环性. 通常所说公理 A 系统满足无环条件或具有无环性质是指: $\Omega(f)$ 的谱分解的基本集关于关系"$\succ$"是无环的, 即基本集满足无环条件. 在 Ω 稳定性研究中, 无环条件的提出是以 Ω 爆炸为其背景的. 已经证明: 满足公理 A 和无环条件的系统是 Ω 稳定和拓扑 Ω 稳定的, 并且 Ω 稳定蕴涵满足公理 A 和无环条件.

基本集(basic set) 动力系统研究的重要不变集之一. 它是根据公理 A 系统谱分解的基本集所具有的动力学性质而抽象出来的概念. 设 M 是微分流形, $f:M\to M$ 是微分同胚, 如果 f 的一个闭不变集 $\Lambda\subset M$, 满足:

1. Λ 是双曲的;
2. 周期点在 Λ 中稠密;
3. f 在 Λ 上是拓扑传递的;
4. 存在开集 $U\supset\Lambda$, 使得

$$\Lambda=\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(U);$$

则称 Λ 是基本集. 对 M 上的可微流 φ, 设 $\Lambda\subset M$ 是 φ 的闭不变集, 如果 Λ 是一个双曲奇点, 或者 Λ 满足:

1. Λ 是双曲的且不含奇点;
2. Λ 中周期轨道上的点在 Λ 中稠密;
3. φ 在 Λ 上是拓扑传递的;
4. 存在开集 $U\supset\Lambda$, 使得

$$\Lambda=\bigcap_{t\in\mathbb{R}}\varphi_t(U);$$

则称 Λ 是基本集. 在动力系统的研究中, 对基本集的理解一般认为它不是单独的一个双曲不动点(双曲奇点). 基本集的作用在于它在很大程度上确定了系统的轨道结构.

马尔可夫分割(Markov partitions) 深入认识基本集结构及动力系统在基本集上的动力行为的有力工具. 所谓马尔可夫分割, 是将基本集 Λ 分割为有限个内部不相交的"矩形", 在 f 的作用下, 这些矩形一些方向被"拉长", 可以覆盖它的像所在的矩形的对应方向, 而另一些方向被"压缩", 为它的像所在的矩形对应方向所包含. 这有限个矩形, 对应于序列空间的相空间的有限个元素, 矩形在 f 作用下产生的双边无穷序列 $\{f^i R_{a_i}\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 对应于序列空间的元素 $a=\{a_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, 而序列的交

$$\bigcap_{i=-\infty}^{+\infty} f^i R_{a_i}$$

至多包含 Λ 的一点, 于是这一对应就通过 Λ 上的分割建立起来, 从而与有限型子移位建立了联系. 马尔可夫分割的确切定义如下所述: 设 Λ 是微分同胚 f 的基本集. R 是 Λ 中直径很小的子集. 如果对任意 $x,y\in R$, x 的局部稳定流形 $W_\varepsilon^s(x)$ 与 y 的局部不稳定流形 $W_\varepsilon^u(y)$ 恰交于一点, 而且该交点在 R 中, 则称 R 为矩形. 如果 R 是闭的, 而且 R 作为 Λ 的子集有 $R=\overline{\mathrm{Int}\,R}$, 则称矩形 R 是正规的. 对于 $x\in R$, 令

$$W^s(x;R)=W_\varepsilon^s(x)\cap R,$$

$$W^u(x;R)=W_\varepsilon^u(x)\cap R,$$

这里 R 的直径与 ε 相比很小. Λ 上的马尔可夫分割是 Λ 上的正规矩形所组成的有限覆盖 $\mathscr{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_m\}$, 满足:

1. $\mathrm{Int}\,R_i\cap\mathrm{Int}\,R_j=\varnothing\ (i\neq j)$.
2. $f(W^u(x,R_i))\supset W^u(f(x),R_j)$ 而且,

$$f(W^s(x,R_i))\subset W^s(f(x),R_j),$$

其中 $x\in\mathrm{Int}\,R_i$, $f(x)\in\mathrm{Int}\,R_j$.

1978 年，鲍恩(Bowen,R.)证明：紧致的最大不可分解的双曲不变集 Λ 存在马尔可夫分割. 现定义 $m\times m$ 矩阵 $A=(A_{ij})_{i,j=1}^{m}$ 为

$$A_{ij}=\begin{cases}0 & (\mathrm{Int}\,R_i\cap f^{-1}(\mathrm{Int}\,R_j)=\varnothing),\\ 1 & (\mathrm{Int}\,R_i\cap f^{-1}(\mathrm{Int}\,R_j)\neq\varnothing).\end{cases}$$

若 $\sigma:\sum\to\sum$ 为 m 个符号 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的符号系统，$(\sum_A,\sigma)$ 是由传递矩阵 A 确定的有限型子移位. 对每个 $a\in\sum_A$，定义

$$\pi:\sum{}_A\to\Lambda,\quad \pi(a)=\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}f^{-j}R_{a_j}.$$

映射 π 是连续满射，且 $\pi\circ\sigma=f\circ\pi$，同时，在集合

$$\bigcap_{i\in\mathbf{Z}}f^{i}(\bigcup_{i=j}^{m}\mathrm{Int}\,R_j)\subset\Lambda$$

上，π 是一一对应的.

正规矩形(proper rectangle)　见“马尔可夫分割”.

滤子(filtration)　研究动力系统的一种技术性工具. 设 M 是紧度量空间，$f:M\to M$ 是同胚. 设

$$\mathscr{U}:\varnothing=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_l=M$$

是 M 的一列紧致集，如果 $\mathscr{U}$ 满足：

$$f(M_\alpha)\subset\mathrm{Int}\,M_\alpha\ (\alpha=1,2,\cdots,l-1),$$

其中 $\mathrm{Int}\,M_\alpha$ 表示 M_α 的内点集，则称 $\mathscr{U}$ 是 M 关于 f 的一个滤子. 对微分流形的 C^1 流而言，其滤子的定义如下：设 M 是微分流形，φ 是 M 上的 C^1 流. 设

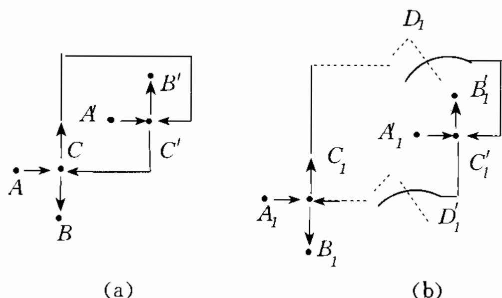
$$\mathscr{U}:\varnothing=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_l=M$$

是 M 的一列紧致集. 如果 $\mathscr{U}$ 满足：

1. $\dim M_i=n(\forall i\geqslant1$，这里 $n=\dim M)$；
2. $\varphi_t(M_i)\subset\mathrm{Int}\,M_i(\forall t>0)$；
3. 对每个 M_i，流 φ 横截于 M_i 的边界；

则称 $\mathscr{U}$ 是 M 关于 φ 的一个滤子. 当 g 在 C^0 意义下充分接近 f 时，$\mathscr{U}$ 也是关于 g 的一个滤子. 对 C^1 流也是如此. 满足无环条件的基本集，可以与一定的滤子结构相关联，因而可用滤子作为工具研究 Ω 稳定性.

Ω 爆炸(Ω-explosion)　微分动力系统中的一个概念. 指一个系统的非游荡集经过 C^1 小扰动之后，新增加了很多的非游荡点. 考虑平面区域上非游荡集仅由两个渊点、两个源点、两个鞍点组成的离散的微分动力系统，其动力性态如图(a)所示. 给这个



(a)　　　　(b)

系统一个小扰动，使扰动后的系统的不稳定流形 $W^u(C_1)$ 与稳定流形 $W^s(C_1')$ 横截相交于 D_1，不稳定流形 $W^u(C_1')$ 与稳定流形 $W^s(C_1)$ 横截相交于 D_1'(图 b). 过 D_1 和 D_1' 轨道上的点仍是横截交点，而且是非游荡点. 因而，扰动后的非游荡集是无穷集. 这种通过小扰动，从非游荡集有限的系统得到非游荡集无穷的系统，就称是发生了“Ω 爆炸”. 发生 Ω 爆炸的原因在于出现了某种形式的环：$c\succ c'\succ c$. 这导致 Ω 稳定性研究的无环性条件的提出. 设 M 是紧致微分流形，f 是 M 上的一个 C^r 系统(C^r 微分同胚或 C^r 向量场)，若对非游荡集 $\Omega(f)$ 的任意邻域 U，存在 f 在 M 上全体 C^r 系统组成的空间(具有 C^0 拓扑)中的邻域 $\mathscr{U}$，使得对任意 $g\in\mathscr{U}$ 有 $\Omega(g)\subset U$，则称 f 没有 C^0 Ω 爆炸.

当儒瓦-施瓦兹定理(Denjoy-Schwarz theorem)　刻画二维曲面上的 C^2 流极小集的特征的重要定理. 该定理断言：在二维曲面上的 C^2 流，其极小集或是一个奇点，或是一个周期轨道，或是到处稠密的，并且当极小集是到处稠密时，此二维曲面只能是环面. 这个定理最初由当儒瓦(Denjoy,A.)在 1932 年先对环面给出，1963 年，施瓦兹(Schwarz,A.J.)将当儒瓦的结果推广到任意二维曲面上. 由该定理可得到：一个轨道的 ω 极限集或是一个奇点，或是一个周期轨道，或是整个环面. 因而，这个定理被视为是庞加莱-本迪克松定理的推广.

ζ 函数(ζ-function)　用来刻画系统周期点性态的函数. 设 M 是微分流形，$f:M\to M$ 是可微映射，对 $m=1,2,\cdots$，记 $N_m=N_m(f)$ 为 f^m 的不动点数目. 假设 $N_m<+\infty$，$m=1,2,\cdots$，如下形式的幂级数

$$\zeta_f(t)=\exp\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)N_m t^m$$

称为 f 的 ζ 函数. ζ 函数最早由阿廷(Artin,E.)和马祖尔(Mazur,B.)于 1965 年给出. 它是一个共轭不变量，因而可记 $\zeta_f(t)$ 为 $\zeta(t)$. 在什么条件下 $\zeta(t)$ 是有理函数?这是动力系统研究的重要问题. 现已证明：公理 A 微分同胚以及扩张映射的 ζ 函数是有理的. 对 M 上可微流 φ 的 ζ 函数是由斯梅尔(Smale,S.)给出的，其形式为无穷积：

$$\zeta(t)=\prod_{\gamma\in\Gamma}\prod_{k=0}^{\infty}\{1-[\exp\zeta(\gamma)]^{-t-k}\},$$

这里 Γ 是 φ 的除奇点外的周期轨道的集合，$\zeta(\gamma)$ 是周期轨道的周期.

奇点指标(index of a singularity)　描述孤立奇点拓扑性态的一个量. 设 X 是微分流形 M 上的连续向量场，$p\in M$ 是 X 的孤立奇点. 设 $V\subset M$ 是含 p 的拓扑 n 维球，这里 $n=\dim M$，要求 V 中除 p 外不含 X 的其他奇点. 令 S^{n-1} 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 $n-1$ 维单位球面，$g:S^{n-1}\to V$ 是从 S^{n-1} 到 V 的保向嵌入，$g(S^{n-1})$ 是以 p 为心的小球面. 定义映射 $\theta:S^{n-1}\to$

S^{n-1}为

$$\theta(x)=\frac{X(g(x))}{|X(g(x))|},$$

那么 p 的指标(记为 $\operatorname{Ind}p$)定义为 θ 的映射度 $\deg\theta=\operatorname{Ind}p$. $\operatorname{Ind}p$ 是仅与孤立奇点 p 的拓扑形式有关的数. 双曲奇点的指标为 $(-1)^m$(这里 m 是 p 点稳定流形的维数). 由此可知,平面上的鞍点指标为 -1,而渊和源的指标为 1. 现已知道,紧致微分流形上连续向量场奇点指标和等于该流形的欧拉示性数,而与向量场本身无关. 这个结论最初由庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)首先对二维情形给出,而后霍普夫(Hopf,E.)给出一般 n 维情形的证明. 因此,人们把它称为"庞加莱-霍普夫指标定理". 根据这个定理,二维球面上任何连续向量场必有奇点;二维环面和克莱因瓶上存在不含奇点的连续向量场等.

庞加莱-霍普夫指标定理(Poincaré-Hopf index theorem) 见"奇点指标".

旋转数(rotation number) 圆周上动力系统的一个拓扑共轭不变量. 设 $f:S^1\to S^1$ 是圆周 S^1 的保向自同胚. 在覆盖映射 $p:\mathsf{R}\to S^1, p:x\mapsto e^{2\pi i x}$下,$f$ 可提升为严格单增的连续函数 $F:\mathsf{R}\to\mathsf{R}$,它满足:

$$F(x+1)-F(x)=1\quad(\forall x\in\mathsf{R}).$$

从任意一点 $\zeta\in S^1$ 出发的轨道 $\zeta,f(\zeta),f^2(\zeta),\cdots$上相邻两点所张的角度可用 $x,F(x),F^2(x),\cdots$(其中 $p(x)=\zeta$)中相邻两点之间的线段长度作为相应的角度的量度. 能够证明:极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)-x}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)}{n}$$

存在且与 x 无关,因而记

$$\rho(F)=\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)}{n}.$$

$\rho(f)=\rho(F)(\operatorname{mod}Z)$就称为 f 的旋转数. 旋转数是庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)在研究圆周上同胚的动力学时引进的.

对于二维环面上不含奇点的连续向量场 X 也有旋转数的概念,其定义如下所述. 由于不含奇点,易知对 X 存在横截面,它是一个拓扑圆 C,X 在 C 上诱导的庞加莱映射 $f:C\to C$ 是一保向同胚. 设 $h:C\to S^1$ 是从 C 到单位圆周 S^1 的保向同胚,于是

$$g=h\circ f\circ h^{-1}:S^1\to S^1$$

是 S^1 的保向同胚,把 g 的旋转数就定义为 X 的旋转数,记为 $\rho(X)$. 动力系统的研究指出:旋转数为有理数的充分必要条件是它有周期点;当旋转数为无理数时,从任一点出发的轨道的极限点集或是无处稠密的,或是整个空间,前一种情形称为奇异情形,而后一种情形称为遍历情形.

奇异情形(singular) 见"旋转数".

遍历情形(ergodic) 见"旋转数".

当儒瓦流(Denjoy flow) 由当儒瓦(Denjoy,A.)在二维环面上给出的具有非平凡极小集,但这极小集又不是整个环面的 C^1 向量场的例子. 在单位圆周 C 上给定康托尔集 F,设它的相邻区间为$\{(\alpha_n,\beta_n)\}(n=0,1,2,\cdots)$. 令 μ 是无理数,考虑辅助单位圆周 Γ 上的点集$\{k\mu\}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 首先建立区间族$\{(\alpha_n,\beta_n)\}$与点集$\{(k\mu)\}$之间 1—1 的保序对应. 将$\{k\mu\}$排列如下:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\ \Phi\ } & \Gamma \\ \downarrow{\scriptstyle T_1} & & \downarrow{\scriptstyle T_1} \\ C & \xrightarrow[\ \Phi\ ]{} & \Gamma \end{array}$$

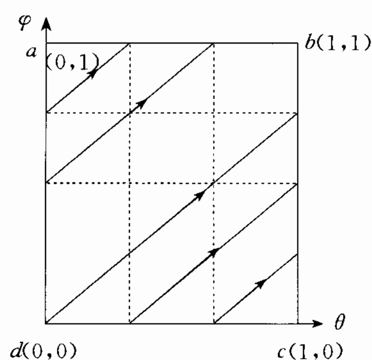
$$0,(\mu),(-\mu),(2\mu),(-2\mu),\cdots,$$
$$(k\mu),(-k\mu),((k+1)\mu),\cdots$$

令点 0 与区间$(\alpha_0,\beta_0)=(\alpha^0,\beta^0)$对应,点$(\mu)$与区间$(\alpha_1,\beta_1)=(\alpha^{(1)},\beta^{(1)})$对应,点$(-\mu)$与$(\alpha_0,\beta_0)$和$(\alpha_1,\beta_1)$之间的顺序和 $0,(\mu),(-\mu)$三点在 Γ 上的巡回顺序完全相同而且下标 n 为最小的$(\alpha_n,\beta_n)=(\alpha^{(-1)},\beta^{(-1)})$相对应,如此归纳地做下去便得到所要的对应. 定义从 C 到 Γ 的映射 Φ 如下:

$$\Phi([\alpha^{(k)},\beta^{(k)}])=(k\mu),$$

而对 F 的第二类点 θ_0,它作出$\{(\alpha_n,\beta_n)\}(n\neq0)$内的一个分割,依据保序要求,相应的点集$\{(k\mu)\}(k\neq0)$内的一个分割,它确定某点 $\zeta_0\in\Gamma$,于是令 $\Phi(\theta_0)=\zeta_0$. 设 T_1 是 Γ 转动一个弧(μ)的旋转. 建立 C 到 C 的变换 T_1,使得上图可交换. 在 C 上,T_1 将$[\alpha^n,\beta^n]$线性同胚地映到$[\alpha^{(n+1)},\beta^{(n+1)}]$上,并且对 F 的第二类点 θ_0,若 $\theta_0=\Phi^{-1}(\zeta_0)$,则$T_1(\theta_0)=\Phi^{-1}(\zeta_0+\mu)$. 这样建立的映射 $T_1:C\to C$ 是 C^1 微分同胚. 最后,通过对 $T_1:C\to C$ 的扭扩得到环面上的 C^1 向量场,这就是当儒瓦流.

环面上的无理流(irrational flow on torus) 二维环面上每条轨道都在其上到处稠密的一类常微系统(即向量场). 设 T^2 表示一个环面. T^2 可用如下方式得到:把平面上的单位正方形 $D=abcd$ 的对边 ab 与 dc,ad 和 bc,以点$(\theta,1)$与点$(\theta,0)$、点$(0,\varphi)$与点$(1,\varphi)$等同的方式粘合(如图). 环面上点的坐标记为(θ,φ),考虑环面 T^2 上的常微分方程:

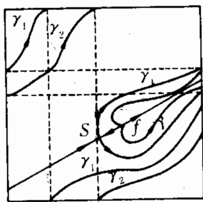


$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=\alpha,\\[2mm] \dfrac{d\theta}{dt}=1.\end{cases}$$

该方程的每条轨道是在 D 上的一条斜率为 α 的直线，它被 D 截成了若干段. 当 α 为无理数时，系统的每条轨道遍历了 D，因此，每条轨道都是 P 式稳定轨道. 称这样的系统为无理流. 实际上，上述方程组所确定的 T^2 上的无理流可以直接通过周长为 1 的圆周上的无理旋转(即把圆周上的点旋转无理数 α 弧长所确定的圆周自同胚)的扭扩而得到. 对于无理流，过任一点 $p\in T^2$ 的轨道的极限集有

$$\omega(p)=T^2=\alpha(p).$$

查瑞流(Cherry flow)　查瑞(Cherry, T. M.-F.)在二维环面 T^2 上给出的具有非平凡回复轨道和源点的 C^∞(甚至是解析的)向量场的例子. 它是科普卡-斯梅尔系统，并且可被具有鞍点联结的向量场逼近. 利用这个例子可说明在不同于球面、射影平面和克莱因瓶的二维曲面上，科普卡-斯梅尔向量场不是开的. 查瑞流的构造比较复杂，扼要地描述如右下图所示. 用对边等同的平面上的正方形来表示环面 T^2，查瑞向量场 X 有一个源点 f 以及一个鞍点 S，这个鞍点的非稳定分界线 γ_1 与 γ_2 是正向回复的. 实际上，γ_1 的 ω 极限集包含 γ_1 与 γ_2，而且 X 没有周期轨道.



托姆环面双曲自同构(Thom's hyperbolic toral automorphism)　最早发现的非游荡集为无限的结构稳定系统. 在高维流形 $M(\dim M\geqslant 2)$上的结构稳定系统可能具有无穷多个周期轨道，即它可以不是莫尔斯-斯梅尔系统，这方面典型的例子是托姆的环面双曲自同构. 对二维环面来说，它的定义如下：在平面 $\mathbb{R}^2$ 上给出一个线性映射 $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$，$A$ 的矩阵为

$$(A)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

A 有如下特征：

1. 在 A 或 A^{-1}的作用下，平面 $\mathbb{R}^2$ 上有理格点(即它的两个坐标均为有理数)被映到有理格点.

2. (A)的特征值 λ_1,λ_2 都是无理数，且 $\lambda_1\cdot\lambda_2=1$，所以 A 是双曲线性映射.

利用环面 $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$，那么 A 诱导出 T^2 上的自同构 $f:T^2\to T^2$. 由于特征 1 对应于 $\mathbb{R}^2$ 上有理格点的 T^2 上的点是 f 的周期点，又因有理格点在 $\mathbb{R}^2$ 上稠密，因此，f 的周期点在 T^2 上亦稠密，从而 f 的非游荡集 $\Omega(f)=T^2$. 由于特征 2，f 在整个 T^2 上是双曲的. 由此，f 被称为是环面双曲自同构. 在 n 维环面 T^n 上，可类似地给出环面双曲自同构的例子. 动力系统理论已经证明：环面双曲自同构是结构稳定的，但它有无穷多周期点，故它不是莫尔斯-斯梅尔系统. 托姆(Thom, R.)的这个例子是 T^2 上的一个离散动力系统. 利用扭扩方法，可以在 $T^2\times S^1$ 上定义光滑流 $\varphi_t(t\in\mathbb{R})$，使得 $\varphi_1=f$，φ_t 是结构稳定的，且周期轨道在 $T^2\times S^1$ 上稠密. 托姆环面双曲自同构是安诺索夫微分同胚的特例.

环面自同态(toral endomorphism)　环面双曲自同构的扩充. 它是环面上一个特殊的离散微分半动力系统. 考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性映射

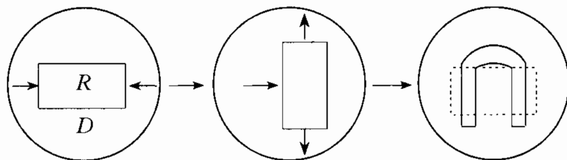
$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,$$

其中 a,b,c,d 均为整数，那么 A 诱导出环面 $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上的一个可微映射 $f_A:T^2\to T^2$. 若

$$\det(A)=ad-bc\neq 0,$$

那么 f_A 就称为一个环面自同态. 显然，当 $\det(A)=\pm 1$ 时，f_A 就是一个环面双曲自同构.

斯梅尔马蹄(Smale's horseshoe)　由斯梅尔(Smale, S.)构造的形状类似于马蹄的结构稳定的



离散动力系统. 这个系统对高维结构稳定系统的特征提供了一个具体模型，并说明高维结构稳定系统具有复杂的拓扑结构和动力行为. 例如，它们的非游荡集是一个康托尔集，而不像环面双曲自同构是整个环面. 斯梅尔马蹄是定义在平面圆盘 D 上的一个同胚，它是使 D 中的一长方形 R 经过“压缩”、“伸长”而后“弯曲”成一个“马蹄形”后仍放在 R 上的一个形如“马蹄”块的映射. 这个过程，在数学上可以用一个 D 上同胚 H 去实现. 这是由斯梅尔得到的，通常称它为斯梅尔马蹄. 它的非游荡集是由一个康托尔集Σ和一个不动点组成. 已经证明 H 在Σ上的限制和两个符号动力系统拓扑共轭，因此，斯梅尔马蹄在Σ上的动力行为与符号动力系统相同.

恩龙映射(Hénon map)　斯梅尔马蹄的一个具体的例子. 设 F 是二维平面内的方块 $Q:-R\leqslant x\leqslant R,-R\leqslant y\leqslant R$ 上的映射，若$(x_1,y_1)=F(x,y)$，F 的解析表示式如下：

$$\begin{cases}x_1=A+By-x^2,\\ y_1=x,\end{cases}$$

其中参数 $A>0,0<B<1$. 由于

$$\frac{D(x_1,y_1)}{D(x,y)}\quad\begin{vmatrix}-2x & B\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-B\neq 0,$$

所以 F 是双方单一连续可微的. 在映射 F 之下，直线 $x=k$ 与 $y=k$ 分别映为直线 $y_1=k$ 与抛物线 $x_1=A+Bk-y_1^2$；$y>0$ 的部分被映到抛物线 $x_1=A-y_1^2$ 的右边. 已经证明，在参数 A,B 适合关系式

$A > 4 + (B+1)^2 + (B+1)\sqrt{4+(B+1)^2}$
时，它就构成斯梅尔马蹄. 这个例子是由法国当代天文学家恩龙(Hénon, M.)给出. 目前，关于恩龙映射的动力学性质是人们所关心的研究内容.

横截相交(transversal intersection) 描述两个子流形相处位置的微分拓扑概念. 设 M 是一个微分流形，$N_1, N_2 \subset M$ 是 M 的两个子流形，$p \in N_1 \cap N_2$. 如果在 p 点处，N_1 的切空间 T_pN_1 和 N_2 的切空间 T_pN_2 张成 M 的切空间 T_pM，即 $T_pM = T_pN_1 + T_pN_2$，那么就称 N_1 与 N_2 在 p 点处为横截相交，通常当 $N_1 \cap N_2 = \varnothing$ 时，也称 N_1 与 N_2 横截相交. 在动力系统的研究中，横截相交是用来刻画结构稳定系统的特征性质之一的概念(参见"稳定性猜测").

典范方程组(standard systems of equations) 由廖山涛独创的分析式定量估计方法. 用它来研究流是十分有效的，这一套方法被概括为典范方程组. 基本思想是把微分流形上的常微系统的相空间经过适当途径把它化为欧氏空间上的常微分方程组来讨论. 设 M 是紧致 n 维黎曼流形，S 是 M 上的 C^1 常微系统(即 C^1 向量场). 令 φ_t 是 S 在 M 上产生的流，这个流在切丛 TM 上诱导出一个单参数变换群

$$\mathrm{d}\varphi_t : TM \to TM \quad (t \in \mathsf{R}).$$

从而在正交 p 标架丛 $\mathscr{F}_p (1 \leqslant p \leqslant n)$ 上诱导出一个单参数变换群

$$\chi_t : \mathscr{F}_p \to \mathscr{F}_p \quad (t \in \mathsf{R}),$$

以 Proj_k 表示 p 标架向第 k 个基向量的投射. 对任何一个 $\beta \in \mathscr{F}_p$，函数

$$\zeta_{\beta,k}(t) = \| \mathrm{Proj}_k \chi_t(\beta) \|$$

对 $t \in \mathsf{R}$ 连续可微，因而在正交 p 标架丛 $\mathscr{F}_p$ 上可定义函数

$$\omega_k(\beta) = \left.\frac{\mathrm{d}\| \mathrm{Proj}_k \chi_t(\beta) \|}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \quad (k = 1, 2, \cdots, p).$$

它被称为 S 的示性函数. 规范正交 p 标架丛 $\mathscr{F}_p^{\#}$ 是 $\mathscr{F}_p$ 的子丛，$\chi_t(\beta)$ 和 $\omega_k(\beta) (k=1,2,\cdots,p)$ 在 $\mathscr{F}_p^{\#}$ 上自然也有定义. 将 $\chi_t(\beta)$ 规范化又可得到 $\chi_t^{\#}(\beta)$. 这样又诱导了一个 $\mathscr{F}_p^{\#}$ 上的流

$$\chi_t^{\#} : \mathscr{F}_p^{\#} \to \mathscr{F}_p^{\#} \quad (t \in \mathsf{R}).$$

任给 $\beta \in \mathscr{F}_n^{\#}$，由于对任意 $b \in M$，$\chi_t^{\#}(\beta(b))$ 和 $\mathrm{d}\varphi_t(\beta(b))$ 都是 $T_{\varphi_t(b)}M$ 的基底，故可写成

$$\mathrm{d}\varphi_t(\beta) = \chi_t^{\#}(\beta) C_\beta(t),$$

其中 $C_\beta(t)$ 是三角式矩阵，其对角线系数顺序是 $\| \mathrm{Proj}_k \chi_t(\beta) \| (k=1,2,\cdots,n)$，对角线下面的系数都是 0. $C_\beta(t)$ 对 $t \in \mathsf{R}$ 连续可微，且满足方阵方程

$$\frac{\mathrm{d}C_\beta(t)}{\mathrm{d}t} = R_\beta(t) C_\beta(t) \quad (t \in \mathsf{R}).$$

记 $R_\beta(t)^{tr}$ 是矩阵 $R_\beta(t)$ 的转置. 线性常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y R_\beta(t)^{tr} \quad (t \in \mathsf{R}, y \in \mathsf{R}^n) \qquad (R_\beta)$$

称为 S 以 β 为基的线性化方程组. 廖山涛把导出线性化方程组 (R_β) 的手续称为大范围线性化. 对 $\beta \in \mathscr{F}_n^{\#}$，按以下方式定义一个从 R^{n+1} 到 M 的 C^∞ 映射 $\mathscr{P}_\beta$：

$$\mathscr{P}_\beta(t, y) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} y^k \mathrm{Proj}_k \chi_t^{\#}(\beta) \right),$$

这里 $t \in \mathsf{R}$，$y = (y^1, y^2, \cdots, y^n) \in \mathsf{R}^n$，exp 是黎曼流形 M 的指数映射. 记 $\mathscr{P}_{\beta,t}(y) = \mathscr{P}_\beta(t, y)$，对于 M 上的向量场 S，可惟一确定 $\overline{S}(t,y)$ 和 $\overline{\overline{S}}_\beta(t,y)$ 满足条件

$$\mathrm{d}\mathscr{P}_{\beta,t}(\overline{S}_\beta(t,y)) = S(\mathscr{P}_\beta(t,y)),$$

$$\mathrm{d}\mathscr{P}_{\beta,t}(\overline{\overline{S}}_\beta(t,y)) = \mathrm{d}\mathscr{P}_\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(t,y)} \right).$$

记 $S_\beta(t,y) = \overline{S}_\beta(t,y) - \overline{\overline{S}}_\beta(t,y)$，廖山涛把向量场 S 表示为方程组

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = S_\beta(t, y), \qquad (S_\beta)$$

它称为向量场 S 的典范方程组. 典范方程组可以用来研究向量场在 C^1 扰动下的性态. 例如，应用典范方程组可以对推广的 C^1 封闭引理及双曲不变集半结构稳定性给出证明等.

向量场的示性函数(characteristic function of vector field) 见"典范方程组".

阻碍集(obstruction set) 在稳定性猜测的研究过程中，由廖山涛对流形上的向量场所建立的概念. 设 M 是紧致光滑 n 维黎曼流形，S 是 M 上的 C^1 向量场，以 N 表示 S 的常点集. 考虑 TM 中与 S 正交的子丛(底空间为 N)$\mathscr{D}$ 以及 $\mathscr{D}$ 在 TM 中的闭包 $\overline{\mathscr{D}}$. 若 $\varphi_t : M \to M (t \in \mathsf{R})$ 是 S 产生的流，那么 $\mathrm{d}\varphi_t$ 在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上诱导出一个单参数变换群 $\Psi_t : \overline{\mathscr{D}} \to \overline{\mathscr{D}}$. 向量场 S 的阻碍集定义为

$$Ob(S) = \{ x \in M \mid \text{存在 } \zeta \in \overline{\mathscr{D}} \cap T_xM, \text{ 使得 } \|\zeta\| = 1 = \inf_{t \in \mathsf{R}} \|\Psi_t(\zeta)\| \}.$$

借助于阻碍集，微分动力系统研究中若干重要的概念可以表示为集合运算的式子. 例如，沿用以上记号，若记 $I(S) = M \backslash \overline{N}$，那么 S 的一个奇点 x_0 为双曲的充分必要条件是 $x_0 \notin I(S) \cup Ob(S)$；$S$ 的一条周期轨道 Γ 为双曲的充分必要条件是 $\Gamma \cap Ob(S) = \varnothing$. 设 $\Lambda \subset M$ 是关于 φ_t 不变的非空闭子集，如果

$$\Lambda \cap (I(S) \cup Ob(S)) = \varnothing,$$

则 Λ 称为 S 的正常集. 如果对任何 $x \in \Lambda$，$\zeta \in T_xM$，存在分解式

$$\zeta = \zeta_s + \lambda_\zeta S(x) + \zeta_u,$$

这里 $\lambda_\zeta \in \mathsf{R}$，$\zeta_s \in T_xM$，$\zeta_u \in T_xM$，而且

$$\lim_{t \to \infty} \| \mathrm{d}\varphi_t(\zeta_s) \| = 0, \quad \lim_{t \to -\infty} \| \mathrm{d}\varphi_t(\zeta_u) \| = 0,$$

则称 S 在 Λ 上满足线性横截条件. 特别地，如果 S 在 $\Lambda = M$ 上满足线性横截条件，就简称 S 满足线性横截条件. 廖山涛证明：S 在 Λ 上满足线性横截条件

等价于 Λ 是 S 的正常集;线性横截条件等价于公理 A+强横截条件.

正常集(normal set) 见"阻碍集".

常微系统族$\mathscr{X}^*$(the family $\mathscr{X}^*$ of ordinary differential systems) 为研究结构稳定性与 Ω 稳定性而考虑的一类常微系统. 设 M 是紧致 n 维黎曼流形,以 $\mathscr{X}=\mathscr{X}(M)$表示 M 上全体 C^1 向量场(即 C^1 常微系统)形成的空间,具有 C^1 拓扑. 常微系统族 $\mathscr{X}^*$是由满足以下条件的 $X\in\mathscr{X}$ 组成:X 的某个 C^1 邻域中所有的向量场 Y 都至多有可数个周期轨道与有限个奇点,或等价地说,Y 的所有奇点和所有周期轨道都是双曲的. 显然,$\mathscr{X}^*$ 在 $\mathscr{X}$ 中为开集. $\mathscr{X}^*$ 的重要性在于它包含了所有 Ω 稳定和所有结构稳定的系统,因此,它可以给出稳定性特征的等价形式. 例如,考虑 $\mathscr{X}^*$ 中的具有如下性质的 $X\in\mathscr{X}^*$作成的 $\mathscr{X}^*$ 的开子集 $\mathscr{X}^{**}$:存在 X 在 $\mathscr{X}^*$ 中的邻域 $\mathscr{U}$,而且对于 X 来说,存在 M 的开子集 G, $W_0,\cdots,W_{n-1}$(这里 $n=\dim M$),它们在 M 中的闭包彼此互不相交;同时满足:如果 $Y\in\mathscr{U}$,则 Y 的每一奇点都在 G 中,而且它的每一个具有$\mathrm{Ind}_y(\Gamma)=K$的周期轨道 Γ 都包含在 W_k 内(这里($\mathrm{Ind}_y(\Gamma)$表示 T_pM 中线性子空间$\{\zeta\in T_0M\,|\lim\limits_{t\to\infty}\|\mathrm{d}\varphi_{y,t}(\zeta)\|=0,p\in\Gamma,\varphi_{y,t}$是 Y 产生的流$\}$的维数). 廖山涛指出,$X\in\mathscr{X}^{**}$等价于 X 满足公理 A 及无环条件.

常微系统族$\mathscr{X}^{**}$(The family $\mathscr{X}^{**}$ of ordinary differential systems) 见"常微系统族 $\mathscr{X}^*$".

混杂的非游荡点(chaotic nonwandering point) 在研究 Ω 稳定性的过程中引进的概念. 设 M 是紧致 n 维黎曼流形,$\mathscr{X}$ 表示 M 上全体 C^1 向量场空间,具有 C^1 拓扑. 对 $X\in\mathscr{X}$,令 $\varphi_{X,t}(t\in\mathbb{R})$是 X 产生的流. 设 $\gamma=\{\varphi_{X,t}(a)\,|\,t\in\mathbb{R},a\in M\}$,记 $\mathrm{Ind}_X(\gamma)$表示 T_aM 中线性子空间

$$\{\zeta\in T_aM\,|\,\lim_{t\to\infty}\|\mathrm{d}\varphi_{X,t}(\zeta)\|=0\}$$

的维数,并记

$$I_X(\nu)=\mathrm{Ind}_{(-X)}(\nu)-\mathrm{Ind}_X(\nu).$$

设 $a\in M$ 是 X 的非游荡点,如果对任意 $\varepsilon>0$,存在 $X_1,X_2\in\mathscr{X}$,使得 X_i 有奇点或周期轨道 γ_i 满足:

1. $\|X_i-X\|_1<\varepsilon$,且点 a 的 ε 邻域与 γ_i 相交($i=1,2$);

2. $I_{X_1}(\gamma_1)\neq I_{X_2}(\gamma_2)$;

则称点 a 为混杂的非游荡点. 廖山涛证明:X 不具有混杂非游荡点等价于 X 满足公理 A 和无环条件.

歧变集(rambling set) 廖山涛在研究稳定性时引进的一类不变集. 设 M 是紧致黎曼流形,X 是 M 上的 C^1 向量场. 如果 Λ 是 M 中的闭集,而且在 X 产生的流 $\varphi_t(t\in\mathbb{R})$下不变,同时 Λ 与 X 的阻碍集 $Ob(x)$的交集不空,那么就称子集 $\Lambda\subset M$ 为歧变集. 如果它的每一个真子集都不是歧变集,则歧变集 Λ 称为是极小的. 如果极小歧变集 Λ 不含 X 的常点,或者 $\Lambda\cap Ob(x)$至少包含一个常点 a,使得 $\omega(a)$及 $\alpha(a)$都是 Λ 的真子集,那么就称 Λ 是简单的. 每一歧变集都至少包含一极小歧变集. 结构稳定的系统不存在简单极小歧变集.

极小歧变集(minimal rambling set) 见"歧变集".

简单极小歧变集(simply minimal rambling set) 见"歧变集".

复动力系统

复动力系统(complex dynamical systems) 现代数学的一个重要分支. 它着重研究由复解析函数迭代生成的动力系统的分析性质、几何性质及拓扑性质等,并由此可描绘出一些美妙的图形. 对此领域的研究已诞生了多位菲尔兹奖获得者.

复动力系统研究的萌芽起始于 19 世纪末. 20 世纪 20 年代,法国数学家法图(Fatou,P. J. L.)和茹利亚(Julia,G. M.)对有理函数动力系统和整函数动力系统的性质进行了深入的研究. 在其后的五六十年间,这方面的研究没有什么突出的进展. 20 世纪 80 年代初,美国数学家芒德布罗(Mandelbrot,B.)将计算机技术有效地运用于这一领域,沙利文(Sullivan,D. P.)等数学家将拟共形映射和泰希米勒(Teichmüller,O.)空间等理论应用于这一领域,取得了突破性进展,从而使此领域的研究重新获得了生机.

复动力系统的研究与分形几何、混沌理论、分歧理论等领域有着紧密的联系,引起了数学界和其他领域的巨大兴趣.

法图集(Fatou set) 复动力学中的最基本概念. 设 $f(z)$为复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数. 取 $U=\mathbb{C},\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\},\overline{\mathbb{C}}$ 分别对应于 f 为超越整函数、亚纯函数 f 以 $z=0$ 为极点和皮卡例外值、其他的亚纯函数. 法图集 $F(f)$(或简记为 F)定义为:$F(f)=\{z\in U\,|\,z$ 是正规点$\}$. 茹利亚集 $J(f)$(或简记为 J)定义为:$J(f)=U\setminus F(f)$.

法图集是开集,茹利亚集是非空完全集. 对有理函数 $R(z)$而言,法图集和茹利亚集是完全不变集,即 $R(J)=J=R^{-1}(J),R(F)=F=R^{-1}(F)$. 对超越亚纯函数 f,华歆厚和杨重骏证明了下述不变结果:

$$F=f^{-1}(F)=f(F)\cup\{PV(f)\cap F\},$$

其中,$PV(f)$为 f 的皮卡例外值集.

茹利亚集(Julia set) 见"法图集".

乘子(multiplier) 复动力学中用来对周期点进行分类的一个数. 对亚纯函数 $f(z)$, 若 z_0 是 $f(z)$ 的周期为 n 的周期点, 那么就称 $\lambda=(f^n)'(z_0)$ 为 z_0 的乘子. 当 $|\lambda|>1$, $|\lambda|=1$, $|\lambda|<1$ 时, z_0 分别称为斥性周期点、中性周期点、吸性周期点.

早在 20 世纪 20 年代, 法图(Fatou, P. J. L.)和茹利亚(Julia, G. M.)就已证明了 $J(R)$ 是斥性周期点集的闭包, 其中 R 是非线性有理函数. 直到 1968 年, 关于超越函数的相应结果才由英国数学家贝克(Baker, I. N.)证明, 在证明中他引用了阿尔福斯(Ahlfors, L. V.)的覆盖曲面理论.

斥性周期点属于茹利亚集, 吸性周期点属于法图集, 中性周期点的情况相当复杂. 可将中性周期点分为两类: 有理中性周期点(即乘子为单位根)和无理中性周期点. 有理中性周期点属于茹利亚集. 对于无理中性周期点 z_0, 其乘子 $\lambda=\exp(2\pi i\theta)$, θ 是无理数. 如果 θ 是丢番图数, 即无法被有理数较好地逼近, 则此种 z_0 被称为西格尔点, 它属于法图集; 否则 z_0 被称为克莱姆点, 它属于茹利亚集.

对于二次多项式, 布鲁姆(Brjumo, A. D.)(1965)和约考兹(Yoccoz, J. C.)给出了判定 θ 的精确条件.

斥性周期点(repelling periodic points) 见"乘子".

中性周期点(indifferent periodic points) 见"乘子".

吸性周期点(attracting periodic points) 见"乘子".

西格尔点(Siegel point) 见"乘子".

克莱姆点(Cremer point) 见"乘子".

芒德布罗集(Mandelbrot set) 复动力学中一个非常有趣而又典型的集合. 对于二次多项式 $P_w(z)=z^2+w$, 芒德布罗集 M 定义为

$$M=\{w \mid |P_w^n(0)|\leqslant 2, n\text{ 为正整数}\}$$
$$=\{w \mid J(P_w)\text{ 是连通集}\}.$$

M 是闭集且有关系式

$$\left[-2,\frac{1}{4}\right]\cup\{w \mid |1-\sqrt{1-4w}|\leqslant 1\}$$
$$\subset M\subset\{w \mid |w|\leqslant 2\}.$$

M 的所有分支都是单连通区域, M 的余集是一个区域. 杜瓦地(Douady, A.)和胡巴特(Hubbard, J. H.)于 1982 年证明了集合 M 是连通集. 最近, 富仓光宏(Shishikura, M.)证明了 M 集的边界具有豪斯多夫维数 2.

关于芒德布罗集, 仍有一些重要的问题未能解决. 例如, 芒德布罗集是否为局部连通? 是否 M 的每一个分支都是双曲的(即是否每个分支中存在参数 w, 使得 $P_w(z)$ 有吸性周期点)?

法图分支(Fatou component) 一种连通分支. 所谓法图分支, 是指法图集的每一个连通分支. 有时也称之为稳定域. 法图分支可分为两类: 游荡分支及预周期分支.

稳定域(stable domain) 即"法图分支".

游荡分支(wandering component) 一类无回复性的法图分支. 设 D 是一个法图分支, 即 $F(f)$ 的一个连通子集. 如果 $D, f^1(D), f^2(D), \cdots, f^n(D), \cdots$ 是一个互不相交的序列, 则称 D 是一个游荡分支. 当 f 是有理函数 R 时, 20 世纪 20 年代, 法国数学家法图(Fatou, P. J. L.)猜测: $F(R)$ 没有游荡分支. 这个猜想已由沙利文(Sullivan, D. P.)于 1985 年成功地证明了, 被称之为沙利文定理.

但超越函数的情形却截然不同. 1976 年, 贝克(Baker, I. N.)构造了一个具有游荡分支的超越整函数. 贝克-库塔斯(Kotus, J.)-吕以辇于 1990 年构造了具有游荡域的超越亚纯函数.

预周期分支(pre-periodic component) 具有类似回复性的一种法图分支. 设 D 是函数 f 的一个法图分支. 如果存在正整数 $m, n(m>n)$, 使得 $f^m(D)$ 与 $f^n(D)$ 相交, 则称 D 为预周期分支. 此时有 $f^m(D)\subset f^n(D)$. 进一步地, 如果对某正整数 m 有 $f^m(D)$ 与 D 相交, 则称 D 为周期分支, m 称为周期; 特别地, 如果 $f(D)$ 与 D 相交, 则称 D 为不变分支.

对于周期分支 D, 有且仅有下列五种情形之一发生(分类定理):

1. 如果 D 中含有吸性周期点 E_0, 则 D 被称为 E_0 的直接吸性盆. 此时其乘子 λ 满足 $|\lambda|<1$. 如果 $0<|\lambda|<1$, 则 D 被称为施罗德域; 如果 $\lambda=0$, 则 D 被称为布确域.

2. 如果 D 的边界含有周期为 m 的周期点 z_0, 使得 $f^{nm}(z)\to z_0$ 当 $n\to\infty$ 时对任意 $z\in D$ 成立, 则 D 被称为利玉域或抛物域.

3. 如果 $f^m(z)$ 共轭于无理旋转 $l(z)=e^{2\pi i\alpha}z$, 其中 m 为 D 的周期, α 为无理数, 则 D 被称为西格尔圆. 即存在解析同胚 $\varphi: D\to$ 单位圆, 使得 $\varphi\cdot f^m\cdot\varphi^{-1}(z)=e^{2\pi i\alpha}z$. 此时 D 为单连通的且含有中性周期点.

4. 如果 D 是二连通的且 f^m 共轭于旋转, 此时 D 被称为阿诺尔德-霍曼环.

5. 如果 $f^{mn}(z)\to z_0\in D$, D 称为贝克域(或无法图分支), 其中 m 为 D 的周期, $f^m(z)$ 在 z_0 处不是全纯的. 特别地, 如果 $m=1$, 则惟一的情形是 $z_0=\infty$. 对于有理函数, 上述第 5 种情形不存在.

如果 D 为周期 m 的周期分支, 则

$$D,\ f^1(D),\ f^2(D),\ \cdots,\ f^{m-1}(D)$$

被称为一个周期循环. 设 $R(z)$ 是阶为 d 的有理函

数，则周期循环的个数与 d 有关. 沙利文(Sullivan, D. P.)于 1982 年证明了 $R(z)$ 的周期循环个数 $\leqslant 8d-8$，他并且猜测其准确值为 $2d-2$. 此猜测被富仓光宏(Shishikura, M.)于 1987 年证实.

周期分支(periodic component)　见"预周期分支".

不变分支(invariant component)　见"预周期分支".

直接吸收盆(immediate attractive basin)　见"预周期分支".

施罗德域(Schröder domain)　见"预周期分支".

布确域(Böttcher domain)　见"预周期分支".

利玉域(Leau domain)　见"预周期分支".

抛物域(parabolic domain)　见"预周期分支".

西格尔圆(Siegel disc)　见"预周期分支".

阿诺尔德-霍曼环(Arnold-Herman ring)　见"预周期分支".

贝克域(Baker domain)　见"预周期分支".

周期循环(periodic cycle)　见"预周期分支".

临界点(critical point)　复动力学中的一个重要概念. 设 f 为亚纯函数，$f'(z)=0$ 的点 z 以及 $f(z)$ 的重极点统称为 f 的临界点. 上述点构成的集合称为 f 的临界点集，记为 $C=C_f$. 临界点的像称为临界值. $O^+(C_f)$ 的极限点集称为临界极限集，记为 $C^+=C_f^+$，其中

$$O^+(C_f)=\bigcup_{z\in C_f}O^+(z),$$

而 $O^+(z)=\{z,f(z),f^2(z),\cdots\}$ 为点 z 的前向轨道. 对有理函数 R，其阶为 d，临界点集的个数不超过 $2d-2$.

临界点集(critical points)　见"临界点".

临界值(critical value)　见"临界点".

临界极限集(critical limit set)　见"临界点".

渐近值(asymptotic value)　与函数增长速度有关的复数值. 设 f 为亚纯函数，如果存在趋于 ∞ 的曲线 Γ，使得当 z 沿着 Γ 趋于 ∞ 时，$f(z)\to a$，则称 a 为 f 的一个渐近值. 对增长比较慢的函数，其渐近值也相应地比较少. 特别地，任何有理函数至多只有一个渐近值.

奇异点(singular point)　在复动力学中起着重要作用的一类点. 它与周期域有着密切的联系. 临界值、渐近值以及它们的极限点统称奇异点. 上述点所形成的集合称为奇异点集. 函数 f 的奇异点集通常记为 $\mathrm{sing}(f^{-1})$. 奇异点集的前向轨道的闭包称为超奇异集，记为 $\overline{E}=\overline{E}(f)$.

设 f 是亚纯函数，如果 $\overline{E}\cap J(f)=\varnothing$，则称 f 是双曲的；如果 $d(\overline{E},J(f))>0$，则称 f 是次扩张的；如果 $\overline{E}$ 是紧集，并且 f 是双曲的，则称 f 为扩张的. 对扩张整函数 f，有

$$|(f^n)'(z)|\geqslant c|f^n(z)|\log|f^n(z)|\ (c\text{ 为常数}),$$
$$|(f^n)'(z)|\to\infty\ (n\to\infty;\forall z\in J(f)).$$

对扩张有理函数 $R(z)$，存在 $c>0$ 及 $d>1$，使得

$$|(R^n)'(z)|\geqslant cd^n\ (z\in J(R)).$$

布确域循环中至少含有一个奇异点，施罗德域循环及利玉域循环中含有无穷多个奇异点，而西格尔圆及霍曼环的边界整个地位于 $\overline{E}$.

奇异点集的性态亦限定了函数列在法图分支上的极限状况. 例如，对于超越整函数 f，如果 $\overline{E}$ 的内部为空集并且 $\overline{E}$ 的余集连通，则所有极限函数都是常数.

奇异点集(singular points set)　见"奇异点".

超奇异集(post-singular set)　见"奇异点".

双曲亚纯函数(hyperbolic meromorphic function)　见"奇异点".

次扩张亚纯函数(subextension meromorphic function)　见"奇异点".

扩张亚纯函数(expanding meromorphic function)　见"奇异点".

法图分支的有界性(boundedness of Fatou components)　关于法图分支有界性的问题. 探讨什么样的函数的法图分支都有界是一个有趣的问题，这也是有理动力系统与超越动力系统的一个区别所在. 对多项式而言，∞ 的一个邻域必是一个法图分支，故必存在无界法图分支. 但超越函数的情形却不一样. 贝克(Baker, I. N.)于 1981 年证明了：当超越整函数 f 的增长满足

$$\log M(r,f)=(\log r)^P$$

时，所有法图分支有界，其中 P 为正整数，$M(r,f)$ 为最大模.

康托尔集(Cantor set)　实分析中著名康托尔三分集的拓扑推广. $\overline{\mathbb{C}}$ 中任一个闭的、完备的、非空的、完全不连通的子集称为康托尔集. 对超越整函数 f，由于 $J(f)$ 必含有非退化的连续统，故 $J(f)$ 不可能是康托尔集. 但确实有一些茹利亚集是康托尔集. 例如，$J(\lambda\tan z)$ 当 $0<|\lambda|<1$ 时是康托尔集.

孤立若尔当弧(isolated Jordan arc)　研究茹利亚集的结构时引入的术语. 对 $J(f)$ 中的一个若尔当弧，如果存在一个包含此弧的开集，使得其中除了含有此弧及其端点外，不含有 $J(f)$ 的其他点，那么就称这个若尔当弧在 $J(f)$ 中是孤立的. 对超越整函数 f 而言，这种现象不可能出现. 但当 f 为亚纯函数时，此现象可能发生. 例如，

$$J(\tan^2\sqrt{z})=(0,+\infty),$$
$$J(\lambda\tan z)=\text{实轴}\ (|\lambda|>1\text{ 或 }\lambda=1).$$

一个有趣的问题是：对怎样的亚纯函数 f，$J(f)$ = 实轴？贝克（Baker，I. N.）和库塔斯（Kotus，J.）以及吕以辇于 1991 证明了：如果 $J(f)$ = 实轴，则

$$f(z)=D\{cz+d+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\frac{1}{a_n-z}-\frac{1}{a_n})\},\quad(1)$$

其中 $D=\pm1,c,d,c_n,a_n$ 是实数，

$$0<c<+\infty,\ c_n>0,\ \sum_{n=1}^{\infty}c_na_n^{-2}<+\infty;$$

反之，如果 $f(z)$ 形如(1)式，则 $J(f)$ = 实轴或者 $J(f)$ 是康托尔集.

茹利亚集的测度(measure of Julia set)　关于没有内点的茹利亚集的测度问题. 人们知道，茹利亚集非空. 当茹利亚集有内点时，它必为整个平面. 一个有趣的问题是：当茹利亚集没有内点时，其测度是否为零？对于超越函数而言，这个问题的回答是否定的. 麦克缪伦(McMullen，C.)于 1987 年证明了：$f(z)=a\cos z+b$ 的茹利亚集的测度大于零. 但对于有理函数，即使是二次多项式，这个问题的研究都是很困难的.

爆炸性(explosion)　复动力系统中茹利亚集的一个动力性质，它出现在带参数的亚纯函数族. 设 $f_\lambda(z)$ 是带参数 λ 的亚纯函数族，若参数 λ 到达某点 λ_0 时，茹利亚集从无处稠密集变为整个复平面，则称这种现象为爆炸性，并称 λ_0 为爆炸点. 典型的函数族是指数函数族 $f_\lambda(z)=\lambda e^z$. 法图(Fatou，P. J. L.)曾猜想：$J(e^z)=\mathbf{C}$. 此猜想于 1981 年为米约维奇(Misiurewicz，M.)所证实. 后来，德瓦内(Devaney，R. L.)于 1985 年证明了：当 $\lambda>1/e$ 时，$J(\lambda e^z)=\mathbf{C}$，而当 $\lambda\leqslant1/e$ 时，$J(\lambda e^z)$ 是无处稠密集. 一个未解决的问题是：集合

$$\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,J(\lambda e^z)=\mathbf{C}\}$$

是否有内点？其测度是否为正？周建莹-李忠于 1989 年证明了此集合在实轴上没有内点. 对于亚纯函数

$$f(z)=\frac{1}{\lambda+e^{-2z}},$$

$\lambda=0$ 是一个爆炸点.

豪斯多夫维数(Hausdorff dimension)　分维数之一. 它是刻画图形占领空间规模和整体复杂性的一种量度. 在动力系统的研究中，常用豪斯多夫维数来量度动力系统所产生的分形集的“不规则”程度. 茹利亚集的豪斯多夫维数的研究是复动力系统中的一个重要课题，对非线性亚纯函数 $f(z)$，有

$$0<\dim_HJ(f)\leqslant2,\qquad(1)$$

其中 $\dim_HJ(f)$ 表示 $J(f)$ 的豪斯多夫维数. 加伯(Garber，V.)于 1978 年证明了(1)式对有理函数成立，斯托拉德(Stallard，G. M.)于 1994 年证明了(1)对超越亚纯函数成立. 上述估计式中的上下界都是精确的. 当 $J(f)=\mathbf{C}$ 时，自然有(1)的上界. 对于(1)的下界，斯托拉德于 1994 年证明了

$$\dim_HJ((2m)^{-m}\tan z\prod_{j=1}^{m}(z-j\pi))\geqslant\frac{4}{m}.$$

对于超越整函数 f，由贝克(Baker，I. N.)于 1975 年的一个结果可知，

$$1\leqslant\dim_HJ(f)\leqslant2.$$

上界自然是精确的，但下界能否达到仍是未知问题. 人们猜测：$\dim_HJ(f)>1$. 一个有趣的问题是芒德布罗集 $\mathscr{M}$ 的边界的豪斯多夫维数，富仓光宏于 1998 年证明了其维数为 2.

可测动力学(measurable dynamics)　遍历理论研究的对象. 在复动力系统中主要体现在循环、遍历性及稳定性等方面. 设 $f(z)$ 为亚纯函数，z_1,z_2 是两个复数，如果存在非负整数 n 和 m，使得 $f^n(z_1)=f^m(z_2)$，则称 z_1 和 z_2 等价. 一个等价族被称之为 f 的一个大轨道. 设 E 为平面上的一个集合，如果 E 与 f 的每一个大轨道至多相交于一点，则称 E 是 f 的一个交叉集.

如果 f 没有含于 $J(f)$ 的具正测度的交叉集，则称 f 在 $J(f)$ 上是循环. 如果由 $J(f)$ 中的大轨道构成的任何可测集具零测度或全测度(即测度为 2)，则称 f 在 $J(f)$ 上是遍历的. 典型例子是：$f(z)=e^z$ 在 $J(f)$ 上是循环.

设 f 是一个亚纯函数，如果 f 的超奇异集 $\overline{E}(f)$ 满足：对几乎所有 $z\in J(f)$，有

$$\lim_{n\to\infty}d(f^n(z),\ \overline{E}(f)\cup\{\infty\})=0,$$

那么就称 f 为拟扩张的. 由包克(Bock，H.)于 1996 年的结果知，拟扩张的非线性整函数及其迭代都是遍历的. 作为例子，函数

$$f(z)=P(e^z)+Q(e^{-z})$$

在 $J(f)$ 上不是遍历的，其中 P,Q 为同阶非常数多项式.

两个函数 f 和 g 称为拓扑等价的，是指存在两个同胚映射 $\varphi,\psi:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 使得 $\psi(g)=f(\varphi)$. 对给定的函数 g，全体与 g 拓扑等价的函数族记为 $T(g)$. $f_\circ|_{J(f_\circ)}$ 和 $f|_{J(f)}$ 被称为拓扑共轭的，如果存在同胚 $h_f:J(f_\circ)\to J(f)$，使得

$$h_f(f_\circ(z))=f(h_f(z))\quad(z\in J(f_\circ)).$$

设 $f_\circ\in T(g)$，如果对任意充分靠近 $f_\circ$ 的 $f\in T(g)$，有：$f_\circ|_{J(f_\circ)}$ 与 $f|_{J(f)}$ 拓扑共轭，且 h_f 连续依赖于 f，$h_{f_\circ}=\mathrm{id}$，h_f 在 $T(g)$ 中解析，那么就称 $f_\circ$ 是 J 稳定的.

如果对所有充分靠近 $f_\circ$ 的 $f\in T(g)$，f 和 $f_\circ$ 在全平面上是拓扑共轭的，且共轭同胚连续依赖于 f，那么就称 $f_\circ$ 在 $T(g)$ 中结构稳定. 典型的例子有：$e^z\in T(\lambda e^z)$ 不是结构稳定的(德瓦内(Devaney，R. L.)(1985)). 周建莹-李忠进一步证明了 $\lambda e^z(\lambda>1/$

e)都不是结构稳定的．杨德贵-好志峰-华歆厚于1998年证明了

$$f_\mu(z) = ze^{z+\mu}$$

当 $\mathrm{Re}\,\mu<0$ 或者 $|\mu-1|<1$ 时是结构稳定的．

等价族(equivalent class)　见“可测动力学”．

大轨道(large orbit)　见“可测动力学”．

交叉集(cross set)　见“可测动力学”．

拟扩张亚纯函数(pseudo-expanding meromorphic function)　见“可测动力学”．

J 稳定(J-stable)　见“可测动力学”．

结构稳定(structural stable)　见“可测动力学”．

可交换函数(permutable function)　动力系统中研究的一个很有意义的内容．设 f 和 g 都是亚纯函数，如果有 $f\circ g=g\circ f$，那么就称 f 和 g 是可交换的．法图(Fatou，P. J. L.)于早期曾指出，两个可交换的有理函数具有相同的茹利亚集，反之不真．关于超越函数，有下述未解决的问题(即法图问题)：如果 f 和 g 为可交换的超越整函数，那么是否必有 $J(f)=J(g)$？目前仅在一些特殊情形下给出正面回答．

牛顿方法(Newton method)　寻找亚纯函数根的一个有效办法．设 g 是一个亚纯函数，考虑它的牛顿函数

$$f(z) = z - \frac{g(z)}{g'(z)}.$$

当 g 为有理函数时，$f(z)$ 亦为有理函数；当 g 为超越函数时，f 亦为超越函数，除了 $g(z)=R(z)e^{p(z)}$，其中 $R(z)$ 为有理函数，$p(z)$ 为多项式．容易看出，如果 w 是 $g(z)$ 的零点，则 w 必是 $f(z)$ 的吸性不动点，从而 $w\in F(f)$；反之亦真．

有趣的课题是：什么样的 z 使得 $f^n(z)$ 收敛到 g 的零点？当 g 是多项式时，如果对 g'' 的任意零点 z_0 使得 $g'(z_0)\neq 0$，都有 $f^n(z_0)$ 收敛，则对任意点 $z\in F(f)$，$f^n(z)$ 必收敛到 g 的零点．上述相应的结果对某些超越整函数亦成立．例如，伯格维诺(Bergweiler，W.)于1993年证明了

$$g(z) = \int_0^z p(t)e^{q(t)}dt + C \quad (g(z) \neq e^{az+b})$$

具有上述性质，其中 p 和 q 是多项式，C 为常数．

松弛牛顿法(relaxed Newton method)　牛顿法的推广．松弛牛顿函数定义为

$$f_h(z) = z - h\,\frac{g(z)}{g'(z)},$$

其中 h 为复数并且 $|h-1|<1$．松弛牛顿函数有着很多与牛顿函数类似的性质．设 w 为 g 的零点，阶为 m，则

$$f'_h(w) = 1 - \frac{h}{m},$$

从而 w 为 f_h 的吸性不动点．令 $D(h,w)$ 为 $F(f_h)$ 中含有点 w 的分支(称为 f_h 的关于 w 的直接吸性盆)，记

$$A(h,w) = \left\{z \,\middle|\, \lim_{n\to\infty}\int_h^n f_h(z)dz = w\right\},$$

称为 f_h 的吸性盆．显然，$D(h,w)\subset A(h,w)$．如果 g 为多项式，则对一些小的 h 有

$$\mathrm{mes}(\overline{\mathbb{C}}\setminus \bigcup_{\{w|g(w)=0\}} A(h,w)) = 0$$

(弗列克梭-申腾内克(Flexor-Sentenac)1989)．对一般的有理函数 g，当 h 为实数时，有

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{mes}(\overline{\mathbb{C}}\setminus \bigcup_{\{w|g(w)=0\}} D(h,w)) = 0. \qquad (1)$$

当 g 是超越函数时，如果 $\mathrm{sing}(g^{-1})$ 是一个离散集并且 0 不是渐近值，伯格维诺(Bergweiler，W.)、哈斯诺(Häseler，F.)、克内特(Kriete，H.)、梅约(Meier，H. G.)、托格莱茵(Terglane，N.)等人于1993年证明了(1)仍然成立．一个未知问题是：条件“$\mathrm{sing}(g^{-1})$ 是离散集”是否能去掉？

吸性盆(basin of attraction)　见“松弛牛顿法”．

重正规化(renormalization)　复动力系统的一个概念，它在二次多项式的研究中很有用．设 $f:U\to V$ 是圆盘之间的真映射．如果 $\overline{U}$ 是 V 的紧子集，则称 f 为类多项式映射．显然，此时 U 和 V 都不是全平面．杜瓦地(Douady，A.)、胡巴特(Hubbard，J. M.)于1985年引进填充茹利亚集 $K(f)$ 定义为：

$$K(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V).$$

容易验证，$J(f)$ 就是 $K(f)$ 的边界．设 $f(z)=z^2+C$(其他的二次多项式可通过共轭变换化为此标准形式)．如果存在开圆盘 U 和 V，$z=0\in U$，使得 $f^n:U\to V$ 是类二次多项式映射，并且 $J(f)$ 连通，则称 f^n 可重正规化，其中 (U,V) 称为 f^n 的一个重正规化．重正规化是惟一的，即 f^n 的任何两个重正规化具有相同的填充茹利亚集，记为 K_n．令

$$r(f) = \{n>0 \,|\, f^n \text{ 可重正规化}\}.$$

若 $r(f)$ 为无穷集，则称 f 可无限重正规化．约考兹(Yoccoz，J. C.)于1994年证明了：如果 f 在 $J(f)$ 上具有不变线域，则 f 必是可无限重正规化的．麦克缪伦(McMullen，C.)于1994年证明了：强无限重正规化二次多项式在其茹利亚集上没有不变线域．

类多项式映射(polynomial-like map)　见“重正规化”．

填充茹利亚集(filled Julia set)　见“重正规化”．

无限重正规化(infinitely renormalization)　见“重正规化”．

遍历性理论

遍历性理论(ergodic theory) 从统计学角度来研究一个系统在长时间内演化性质的一个数学分支. 遍历理论研究的基本课题可参见"动力系统"、"遍历性"、"保测变换的同构"、"熵"、"李亚普诺夫指数"等条目.

保测变换(measure-preserving transformation) 遍历性理论研究的基本变换,代表一个系统的保持某种信息量的随时间的演化. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$,$(Y,\mathscr{B},\nu)$为测度空间,$T:X\to Y$ 为一个映射. 若 $T^{-1}B\in\mathscr{A}$ $(\forall B\in\mathscr{B})$,则称 T 为可测变换. 若 T 是可测变换且 $\mu(T^{-1}B)=\nu(B)$ $(\forall B\in\mathscr{B})$,则称 T 为保测变换. 若 T 保测、可逆且 T^{-1}亦为保测变换,则称 T 为可逆保测变换. 保测变换的例子是大量存在的. 例如,物理学中由哈密顿方程

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ \ (i=1,2,\cdots,n)$$

的解 $X_t(p,q)$(初值为$(p,q)\in\mathrm{R}^{2n}$)决定的系统

$$\{T_t:\mathrm{R}^{2n}\to\mathrm{R}^{2n},(p,q)\mapsto X_t(p,q)\mid t\in\mathrm{R}\}$$

中,每个 $T_t:(\mathrm{R}^{2n},\mathscr{B},\mu)\to(\mathrm{R}^{2n},\mathscr{B},\mu)$均为可逆保测变换,此处$(\mathrm{R}^{2n},\mathscr{B},\mu)$为通常的勒贝格空间. 判断 T 的可测性与保测性有如下简单方法:设$(X,\mathscr{A},\mu)$,$(Y,\mathscr{B},\nu)$为 σ 有限的测度空间,且 $\mathscr{B}_0$ 为生成 $\mathscr{B}$ 的子代数,若对$\forall B\in\mathscr{B}_0$,有 $T^{-1}B\in\mathscr{A}$,则 T 是可测的;若进一步有 $\mu(T^{-1}B)=\nu(B)$,则 T 是保测的(参见本卷《测度论》同名条).

可测变换(measurable transformation) 见"保测变换".

可逆保测变换(invertible measure-preserving transformation) 见"保测变换".

伯努利移位(Bernoulli shift) 一类典型的保测变换. 设 $Y=\{0,1,\cdots,n-1\}$,$(Y,\mathscr{B},\nu)$是概率空间,这里 $\mathscr{B}=2^Y$(即 Y 的全体子集集合形成的 σ 代数),ν 是由概率向量 $p=(p_0,p_1,\cdots,p_{n-1})$,即 $\nu(\{i\})=p_i\geqslant 0(i=0,1,\cdots,n-1)$,且

$$\sum_{i=0}^{n-1}p_i=1$$

所给定的概率测度. 令

$$X=\prod_{i=-\infty}^{\infty}X_i$$

(这里对任意 $i\in\mathrm{Z}$ 有 $X_i=Y$),$\mathscr{A}$ 是由 X 的柱集(即形如$\{x=(x_i)\in X\mid x_{i_1}=j_1,\cdots,x_{i_k}=j_k\}$的集合)生成的 σ 代数. 在柱集上定义测度 μ 如下:

$$\mu(\{x=(x_i)\in X\mid x_{i_1}=j_1,\cdots,x_{i_k}=j_k\})=p_{j_1}p_{j_2}\cdots p_{j_k},$$

则 μ 可惟一延拓为 $\mathscr{A}$ 上的概率测度. $(X,\mathscr{A},\mu)$上的左移变换 $\sigma:X\to X,(x_i)\mapsto(y_i)$(其中 $y_i=x_{i+1},\forall i\in\mathrm{Z}$)就称为伯努利移位. 它是$(X,\mathscr{A},\mu)$上的保测变换.

马尔可夫移位(Markov shift) 一类用途广泛的保测变换. 设 $Y=\{0,1,\cdots,n-1\}$,

$$X=\prod_{i=-\infty}^{\infty}X_i,$$

这里 $X_i=Y,\forall i\in\mathrm{Z}$. $\mathscr{A}$ 是由 X 的柱集(即形如$\{x=(x_i)\in X\mid x_{i_1}=j_1,\cdots,x_{i_k}=j_k\}$的集合)生成的 σ-代数,$p=\{p_0,p_1,\cdots,p_{n-1}\}$为概率向量(参见"伯努利移位"),$A=(a_{ij})$为 $n\times n$ 随机矩阵(即 $a_{ij}\geqslant 0,\forall i,j\in\{0,1,\cdots,n-1\}$且 A 的每行各项之和为 1),并设 p,A 满足

$$\sum_{i=0}^{n-1}p_ia_{ij}=p_j,$$

即 $pA=p$(由佩龙-弗罗贝尼乌斯定理,这可以实现). 在柱集上定义测度 μ_A 如下:

$$\mu_A(\{x=(x_i)\in X\mid x_i=j_0,x_{i+1}=j_1,\cdots,x_{i+k}=j_k\})=p_{j_0}a_{j_0j_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k},$$

则 μ_A 可惟一延拓为$(X,\mathscr{A})$上的概率测度. $(X,\mathscr{A},\mu_A)$上的左移变换 $\sigma:X\to X,(x_i)\mapsto(y_i)$(其中 $y_i=x_{i+1},\forall i\in\mathrm{Z}$)就称为马尔可夫移位. 它是$(X,\mathscr{A},\mu_A)$上的保测变换.

庞加莱回归定理(Poincaré recurrence theorem) 庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)在遍历理论的第一个定理,由庞加莱获得. 他研究了下列方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x),\tag{1}$$

其中,$f\in C^1(U,\mathrm{R}^m)$,$U\subset\mathrm{R}^m$ 为开集,且:

1. 对$\forall p\in U$,(1)以 p 为初值的解 $x(p,\cdot):\mathrm{R}\to U$ 存在.

2. 记 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$,则

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p)=0\ \ (\forall p\in U).$$

3. U 的勒贝格测度有限.

庞加莱发现,对依勒贝格意义下的几乎所有 $p\in U$,有

$$\liminf_{t\to\infty}\|x(p,t)-p\|=0.$$

由此导致他证明了下述庞加莱回归定理:设 T 为概率空间$(X,\mathscr{A},\mu)$上的保测变换,对任意 $A\in\mathscr{A}$,令 $A_0=\{x\mid x\in A$,且存在无限多个 $n\in\mathrm{Z}^+$,使 $T^n(x)\in A\}$,则 $A_0\in\mathscr{A}$ 且 $\mu(A_0)=\mu(A)$. 根据上述定理,当 X 为可分度量空间,$\mathscr{A}$ 为其波莱尔 σ 代数时,则 $\mu(\{x\mid x\notin w(x)\})=0$,即几乎所有点都是回归的.

伯克霍夫遍历定理(Birkhoff ergodic theorem) 遍历论第一个重要结果. 设$(X,\mathscr{A},\mu,T)$是一个保

测系统(即 T 为保测变换),一个可测函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 代表对系统的一种测量,$\{f(x),f(Tx),\cdots\}$ 给出了轨道 $\{x,Tx,\cdots\}$ 的一种信息. 在统计力学、信息论中,一个重要问题就是 f 随时间的平均值的极限

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}f(T^k x)$$

是否存在. 伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)针对此问题证明了下述定理,即伯克霍夫遍历定理:设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为概率空间,$T:X\to X$ 为保测变换,则有如下结论:

1. 若 $f\in L^1(X)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(T^j(x))$$

μ 几乎处处存在.

2. 若 $f\in L^p(X)$,$1\leqslant p\leqslant+\infty$,则

$$\tilde{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(T^j(x))$$

亦属于 $L^p(X)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\|\tilde{f}-\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f\circ T^j\|_p=0,$$
$$\tilde{f}(T(x))=\tilde{f}(x),\ \mu\text{-a. e.}.$$

3. 对任意 $f\in L^p(X)$,有

$$\int_X\tilde{f}\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}\mu.$$

遍历性(ergodicity) 描述点的轨道在空间的分布状态. 遍历论的一个重要研究课题就是相对保测系统 $(X,\mathscr{A},\mu,T)$,每个 $f\in L^1(X)$ 的时间平均值

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}f(T^jx)$$

是否几乎处处等于它的相平均值 $\int_X f\mathrm{d}\mu$. 当上述条件满足时,称 $(X,\mathscr{A},\mu,T)$ 是遍历的,简称 T 是遍历的. 可以证明以下条件等价:

1. T 是遍历的.

2. 对任意 $A\in\mathscr{A}$,若 $T^{-1}A=A$,则 $\mu(A)=0$ 或 $\mu(A)=1$.

3. 对任意 $E,F\in\mathscr{A}$,若 $\mu(E)>0$,$\mu(F)>0$,则存在 $n>0$,使 $\mu(T^{-n}E\cap F)>0$.

4. 对任意 $A\in\mathscr{A}$,若 $\mu(A)>0$,则

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-n}A)=1.$$

5. 对任意 $A\in\mathscr{A}$,令

$$\tau_A(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{0\leqslant j\leqslant n-1\,|\,T^j(x)\in A\},$$

则 $\tau_A(x)=\mu(A)$,μ-a. e..

6. 对任意 $A,B\in\mathscr{A}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(T^{-i}A\cap B)=\mu(A)\mu(B).$$

7. 对任意可测函数 f,若 $f\circ T=f$,μ-a. e.,则 f 几乎处处为常数.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}(U_T^if,g)=(f,1)(1,g)$,$\forall f,g\in L^2(X)$,其中 $U_T:L^2(X)\to L^2(X)$,$f\mapsto f\circ T$.

从上述结论还可看出,遍历性意味着 (X,μ) 相对 T 的不可分解性. 比遍历性更强的一个回归条件就是强混合性:对任意 $A,B\in\mathscr{A}$,

$$\lim_{n\to\infty}\mu(T^{-n}A\cap B)=\mu(A)\mu(B),$$

即 $\forall A,B\in\mathscr{A}$ 且 $\mu(B)>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu(T^{-n}A\cap B)}{\mu(B)}=\mu(A).$$

这说明最终 T 均匀地将 A 分布于整个空间. 可以证明以下条件等价:

1. T 是强混合的.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(T^{-n}A\cap A)=[\mu(A)]^2(\forall A\in\mathscr{A})$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(U_T^nf,g)=(f,1)(1,g)\ (\forall f,g\in L^2(X))$.

弱混合是介于二者之间的回归性质:对任意 $A,B\in\mathscr{A}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}|\mu(T^{-i}A\cap B)-\mu(A)\mu(B)|=0.$$

下述条件是等价的:

1. T 是弱混合的.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|(U_T^if,g)-(f,1)(1,g)|=0$,$\forall f,g\in L^2(X)$.

3. 对任意 $A,B\in\mathscr{A}$,存在 $\mathbf{Z}^+$ 稠度为零的子集 J,使

$$\lim_{n\to\infty,n\notin J}\mu(T^{-n}A\cap B)=\mu(A)\mu(B).$$

4. U_T 的特征函数是常数.

从定义可以看到:强混合⇒弱混合⇒遍历,但反之不成立. 如单位圆周上的无理旋转是遍历而不是弱混合的. 另外,柴肯(Chacon,R. V. S.)在 1969 年给出了一个弱混合而不是强混合的例子,此例可见皮特森(Petersen,K.)著的《Ergodic Theory》.

强混合(strong mixing) 见“遍历性”.

弱混合(weak mixing) 见“遍历性”.

惟一遍历性(unique ergodicness) 遍历理论研究的一个重要内容. 设 X 为紧致度量空间,$\mathscr{B}$ 为其波莱尔 σ 代数,$T:X\to X$ 为连续映射. $\mathscr{M}(X,T)$ 表示 X 上对 T 不变的波莱尔概率测度组成的集合,则可证明 $\mathscr{M}(X,T)\neq\varnothing$,当 $\mathscr{M}(X,T)$ 只含一个元素时,称 T 是惟一遍历的,且如下条件等价:

1. T 是惟一遍历的.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}f(T^jx)$ 存在,$\forall x\in X$,$\forall f\in C^0(X)$,且上述极限与 x 无关.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}f(T^jx)$ 一致收敛到一常数,

$\forall f\in C^0(X)$.

当 T 是惟一遍历映射时，$\mathscr{M}(X,T)$ 中惟一元素 μ 的支集是一极小集，且 T 相对 μ 是遍历的. 但存在例子表明，极小映射未必是惟一遍历的.

不变测度的遍历分解(ergodic decomposition of invariant measures) 反映了不变测度与遍历不变测度之间的关系. 设 T 为勒贝格空间 $(X,\mathscr{B},\mu)$ 上的保测变换，$\mathscr{T}(T)$ 表示子 σ-代数 $\{B\in\mathscr{B}\mid T^{-1}B=B\}$，则存在 X 的一个可测分割 $\zeta=\{C_\alpha\mid\alpha\in\mathscr{F}\}$ 满足：$\mathscr{B}(\zeta)\doteq\mathscr{T}(T)$（此处 $\mathscr{B}(\zeta)$ 表示由 ζ 生成的 σ-代数；$\doteq$ 表示对 $\forall C\in\mathscr{B}(\zeta)$，存在 $C'\in\mathscr{T}(T)$，使 $\mu(C\triangle C')=0$，且反之亦然），

$$X=(\bigcup_\alpha C_\alpha)\cup C_0,\quad \mu(C_0)=0,$$

对 $\forall\alpha\in\mathscr{F}$，$TC_\alpha\subset C_\alpha$，且存在集中于 C_α 上的概率测度 μ_α，使 $T|_{C_\alpha}$ 相对 μ_α 是遍历的，并且 μ 可分解为遍历测度 $\{\mu_\alpha\mid\alpha\in\mathscr{F}\}$ 的平均和，即存在 $\mathscr{M}(X,T)$ 上集中于 $\{\mu_\alpha\mid\alpha\in\mathscr{F}\}$ 上的概率测度 γ，使

$$\mu(A)=\int_{\mathscr{M}(X,T)}\mu_\alpha(A)\mathrm{d}\gamma(\mu_\alpha)\quad(\forall A\in\mathscr{B}).$$

以上分解 $\{\mu_\alpha\mid\alpha\in\mathscr{F}\}$ 本质上是惟一的，称之为 μ 的遍历分解，C_α 称为遍历分支.

遍历分支(ergodic component) 见“不变测度的遍历分解”.

概率空间的同构(isomorphism of probability spaces) 测度空间之间的一种结构等价关系. 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 和 $(Y,\mathscr{B},\nu)$ 是概率空间，若存在 $A\in\mathscr{A}$，$B\in\mathscr{B}$，满足 $\mu(A)=\nu(B)=1$ 及存在可逆保测变换 $T:(A,\mathscr{A}|_A,\mu)\to(B,\mathscr{B}|_B,\nu)$，则称 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 和 $(Y,\mathscr{B},\nu)$ 是同构的.

勒贝格空间(Lebesgue space) 一类十分重要的测度空间. 若概率空间 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 同构于 $([0,s]\cup\{y_1,y_2,\cdots\},\mathscr{B},m)$，其中 $\mathscr{B}$ 是包含 $\{A\cup\{y_i\}\mid A\subset[0,s]$ 为勒贝格可测集，$i\in\mathbb{N}\}$ 的最小 σ 代数，$m(y_i)=p_i>0,i\in\mathbb{N}$，$m(A)=l(A)$（$l$ 为 $[0,s]$ 上的勒贝格测度），

$$s=1-\sum_{i=1}^{\infty}p_i,$$

此处 $\{y_1,y_2,\cdots\}$ 可为有限集或 $\varnothing$，那么就称 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为勒贝格空间. 可以证明，若 X 为完备可分的度量空间，则波莱尔概率空间 $(X,\mathscr{B}(X),\mu)$ 的完备化为勒贝格空间.

保测变换的同构(isomorphism of measure-preserving transformations) 保测变换之间的一种等价关系. 遍历论的一个重要研究课题就是保测变换的分类问题. 分类主要有如下两种方式：

1. 保测变换的同构：设 T,S 分别为概率空间 $(X,\mathscr{A},\mu)$，$(Y,\mathscr{B},\nu)$ 上的保测变换，若存在零测集 $X_0\subset X,Y_0\subset Y$ 及可逆保测变换 $\Phi:X\backslash X_0\to Y\backslash Y_0$，使 $\Phi\circ T=S\circ\Phi$ 在 $X\backslash X_0$ 上成立，则称 T 和 S 是同构的.

2. 保测变换的谱同构：设 T,S 如上，若存在同构 $L:L^2(X)\to L^2(Y)$，使 $L\circ U_T=U_S\circ L$，则称 T 和 S 是谱同构的.

易证：同构⇒谱同构，但反之不然. 例如，所有伯努利移位都是谱同构的，但并不都是同构的. 研究两个变换是否同构（谱同构）的一种典型方法就是寻找同构（谱同构）不变量. 若 T 具有性质 P，S 与 T 同构（谱同构），则 S 也具有性质 P，那么就称性质 P 为同构（谱同构）不变量. 事实上，遍历、强混合、弱混合均为谱同构不变量，T 的（测度）熵 $h_\mu(T)$ 是同构不变量，而且对伯努利移位是完全不变量，这就是奥恩斯坦(Ornstein，D.)的著名结果——奥恩斯坦定理：两个伯努利移位同构的充分必要条件是它们具有相同的熵.

保测变换的谱同构(spectral isomorphism of measure-preserving transformations) 见“保测变换的同构”.

谱同构不变量(spectral isomorphism invariant) 见“保测变换的同构”.

奥恩斯坦定理(Ornstein theorem) 见“保测变换的同构”.

保测变换的共轭(conjugacy of measure-preserving transformations) 保测变换分类的一种方法. 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为概率空间，在 $\mathscr{A}$ 上引入等价关系：$A\sim B\Leftrightarrow\mu(A\triangle B)=0\ (\forall A,B\in\mathscr{A})$. 令 $\widetilde{\mathscr{A}}=\{\widetilde{A}\mid\widetilde{A}$ 为 A 的等价类，$A\in\mathscr{A}\}$，将 $\mathscr{A}$ 中的并、交、差、补、对称差、包含关系自然延拓到 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 上，并定义 $\widetilde{\mu}(\widetilde{A})=\mu(A)$，此时称 $(X,\widetilde{\mathscr{A}},\widetilde{\mu})$ 为 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 的测度代数. 若存在一一在上的映射 $F:\widetilde{\mathscr{A}}\to\widetilde{\mathscr{B}}$，使

$$F(\widetilde{A}\triangle\widetilde{B})=F(\widetilde{A})\triangle F(\widetilde{B}),$$
$$\widetilde{\mu}(\widetilde{A})=\widetilde{\nu}(F(\widetilde{A})),$$

则称两个测度代数 $(X,\widetilde{\mathscr{A}},\widetilde{\mu})$，$(Y,\widetilde{\mathscr{B}},\widetilde{\nu})$ 是同构的. 对保测系统 $(X,\mathscr{A},\mu,T)$，令

$$\widetilde{T}:\widetilde{\mathscr{A}}\to\widetilde{\mathscr{A}},\widetilde{A}\to T^{-1}(A)\quad(\forall A\in\mathscr{A}).$$

设 T,S 分别为 $(X,\mathscr{A},\mu)$，$(Y,\mathscr{B},\nu)$ 上的保测变换，若存在同构 $F:\widetilde{\mathscr{A}}\to\widetilde{\mathscr{B}}$，使 $\widetilde{F}\circ\widetilde{T}=\widetilde{S}\circ\widetilde{F}$，则称 T 和 S 是共轭的. 容易证明，同构⇒共轭⇒谱同构，但反之未必成立. 在一定条件下，例如，当 X,Y 为完备可分度量空间，$(X,\mathscr{A},\mu)$，$(Y,\mathscr{B},\nu)$ 为波莱尔概率空间时，同构与共轭是等价的.

测度代数(measure algebra) 见“保测变换的共轭”.

测度代数的同构(isomorphism of measure algebras) 见"保测变换的共轭".

可测分割(measurable partition) 勒贝格空间条件测度理论的基础. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为概率空间,X的一族互不相交且并等于X的非空子集就称为X的一个分割. 设ζ为X的一个分割,若$A\subset\mathscr{A}$可以表示成ζ中若干个元素的并,则称A为ζ集. 设$\{A_\nu|\nu\in\mathscr{T}\}$是$X$中可列个$\zeta$集,如果它能分离$\zeta$的任意两个元素,即对任意$C,C'\in\zeta$,存在$\nu\in\mathscr{T}$,使$C\subset B_\nu$,$C'\not\subset B_\nu$或$C\not\subset B_\nu$,$C'\subset B_\nu$,那么就称这可列个$\zeta$集为分割$\zeta$的基. 如果$\zeta$有一个基,则分割$\zeta$称为是可测的. 由可测分割$\zeta$的$\zeta$集构成的$\sigma$代数称为$\zeta$生成的$\sigma$代数. 可测分割最重要的性质之一就是它可被有限分割逼近.

ζ集(ζ-set) 见"可测分割".

分割ζ的基(basis of partition ζ) 见"可测分割".

分割ζ生成的σ代数(σ-algebra generated by partition ζ) 见"可测分割".

典型条件测度族(canonical system of conditional measures) 测度论中一个十分重要的概念. 它的存在性是勒贝格空间可测分割的一个重要性质,利用它人们可以用一般的可测分割来讨论熵,这尤其对讨论熵与李亚普诺夫指数等的关系十分重要. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为勒贝格空间,ζ为X的一个可测分割. 定义X相对ζ的因子空间$(X/\zeta,\mu_\zeta)$如下:X/ζ由ζ的元素组成,对X/ζ的子集E,若$\bigcup_{C\in E}C\in\mathscr{A}$,则称$E$可测并定义$\mu_\zeta(E)=\mu(\bigcup_{C\in E}C)$. 在上述条件下,存在惟一(在$\mu_\zeta$几乎处处相等的意义下)一族概率测度$\{\mu_C\}_{C\in\zeta}$,满足:

1. $(C,\mathscr{A}|_C,\mu_C)$对μ_ζ-a. e. C是一个勒贝格空间.

2. 对任$A\in\mathscr{A}$,$\mu_C(A\cap C)$是X/ζ上的可测函数,且

$$\mu(A)=\int_{X/\zeta}\mu_C(A\cap C)d\mu_\zeta(C).$$

上述$\{\mu_C\}_{C\in\zeta}$称为μ相对于ζ的典型条件测度族.

测度熵(measure-theoretic entropy) 亦称柯尔莫哥洛夫-西奈不变量. 简称熵. 遍历理论的重要概念之一. 熵这一概念来源于信息论. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一概率空间,$\zeta=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$为$X$的一个有限可测分割,

$$H(\zeta)=-\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i)\ln\mu(A_i)$$

(当$u=0$时,定义$u\ln u=0$)就称为分割ζ的熵. 它是从信息论角度反映分割复杂程度的量. 设ζ,η为两个有限可测分割,$\zeta\vee\eta$表示分割$\{A\cap B|A\in\zeta,B\in\eta\}$. 设$T$为$(X,\mathscr{A},\mu)$上的保测变换,对上述$\zeta$,令

$$\zeta^{(n)}=\zeta\vee T^{-1}\zeta\vee\cdots\vee T^{-n+1}\zeta,$$

则

$$h(T,\zeta)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\zeta^{(n)})$$

就称为T相对ζ的熵(可证明上述极限存在),它是ζ随时间演变的信息增加率.

$$h(T)=\sup_{\zeta\text{为}X\text{的有限分割}}h(T,\zeta)$$

就称为T的熵. 有时用$h_\mu(T)$表示$h(T)$对μ的依赖关系. 勒贝格空间上保测变换的熵可由一般可测分割定义(参见"条件熵"). 它是从信息论角度反映X中的点在T作用下运动复杂程度的量. 对于满足一定条件的连续时间的保测系统$(X,\mathscr{A},\mu,T^t)$ $(t\in\mathsf{R}^+)$,可对每个固定t_0,定义$h(T^{t_0})$且有关系式

$$h(T^{t_0})=t_0h(T^1).$$

关于熵,对$\forall m\in\mathsf{N}$,有$h(T^m)=mh(T)$. 当T可逆时,$h(T^{-1})=h(T)$. 熵的重要性可参见"保测变换的同构",熵的计算可参见"柯尔莫哥洛夫-西奈定理",熵与李亚普诺夫指数的关系可参见"柏森熵公式". 测度熵是由柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)于1958年引入的.

柯尔莫哥洛夫-西奈不变量(Kolmogorov-Sinai invariant) 即"测度熵".

条件熵(conditional entropy) 一个从信息论角度反映一个分割相对另一个分割复杂程度的量. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为概率空间,$\zeta=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$,$\eta=\{B_1,B_2,\cdots,B_l\}$为$X$的两个分割,

$$H(\zeta|\eta)=-\sum_{j=1}^{l}\mu(B_j)\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)}\ln\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)}$$
$$=-\sum_{i,j}\mu(A_i\cap B_j)\ln\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(B_j)}$$

就称为ζ在条件η下的熵. 它从信息论角度反映了ζ相对η的复杂程度. 更一般地,若$(X,\mathscr{A},\mu)$为勒贝格空间,ζ,η为X的两个可测分割,则ζ相对η的条件熵定义为

$$H(\zeta|\eta)=-\int\ln\mu_{\eta(x)}(\zeta(x)\cap\eta(x))\mathrm{d}\mu(x),$$

其中$\eta(x)$表示η包含x的元素,$\mu_{\eta(x)}$为μ在$\eta(x)$上的条件测度(参见"典型条件测度族"). 对于勒贝格空间$(X,\mathscr{A},\mu)$上的保测变换T,T的(测度)熵可等价地由下式给出

$$h(T)=\sup_\zeta H(\zeta|\bigvee_{n=1}^{+\infty}T^{-n}\zeta),$$

其中sup表示对X的所有可测分割ζ取上确界.

熵映射(entropy map) 遍历理论的重要概念之一. 设X为紧致度量空间,$T:X\to X$为连续映射,$\mathscr{M}(X,T)$为T-不变的波莱尔概率测度构成的空间(赋予弱收敛拓扑). 从$\mathscr{M}(X,T)$到$[0,+\infty]$的映射$\mu\mapsto h_\mu(T)$称为T的熵映射. 当T可扩时,T的熵

在这里定义 1 适用于一般紧致拓扑空间. 拓扑熵是一个拓扑共轭不变量,它和测度熵类似,主要反映状态空间上映射的动力学行为的复杂性,不同点在于它是从拓扑的角度来进行描述的. 拓扑熵与测度熵有密切的关系(参见"变分原理"). 拓扑熵是由爱德勒(Adler, Roy L.)、康黑姆(Konheim, A. G.)和梅恩德瑞(MeAndrew, M. H.)于 1965 年引入的.

(n,ε)分离集((n,ε) separated set) 见"拓扑熵".

(n,ε)支架集((n,ε) spanning set) 见"拓扑熵".

拓扑压(topological pressure) 遍历理论的重要概念之一,也是拓扑熵概念的推广. 设 X 为紧致度量空间,$T:X\to X$ 为连续映射. 用 $C(X,\mathbb{R})$表示 X 上的所有实值连续函数构成的巴拿赫空间,每个 $f\in C(X,\mathbb{R})$可视为 X 上的一个观测函数,记

$$(S_nf)(x)=\sum_{i=0}^{n-1}f(T^ix).$$

有下述四种等价方式来定义拓扑压:

1. 对 $f\in C(X,\mathbb{R})$, $n\geqslant 1$, X 的有限开覆盖 α,令

$$q_n(T,f,\alpha)=\inf_\beta\left\{\sum_{B\in\beta}\inf_{x\in B}\mathrm{e}^{(S_nf)(x)}\,|\,\beta \text{ 为 } \bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\alpha \text{ 的有限子覆盖}\right\},$$

$$P(T,f)=\lim_{\delta\to0}\left[\sup_\alpha\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln q_n(T,f,\alpha)\,|\,\alpha \text{ 为 } X \text{ 的有限开覆盖且 } \operatorname{diam}(\alpha)\leqslant\delta\}\right].$$

映射 $P(T,\cdot):C(X,\mathbb{R})\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $f\mapsto P(T,f)$称为 T 的拓扑压.

2. 将 1 中的 $q_n(T,f,\alpha)$重新定义为

$$q_n(T,f,\alpha)=\inf_\beta\left\{\sum_{B\in\beta}\sup_{x\in B}\mathrm{e}^{(S_nf)(x)}\,|\,\beta \text{ 为 } \bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}\alpha \text{ 的有限子覆盖}\right\},$$

其余陈述相同.

3. 对 $f\in C(X,\mathbb{R})$, $n\geqslant 1$ 及 $\varepsilon\geqslant 0$,令

$$Q_n(T,f,\varepsilon)=\inf\left\{\sum_{x\in F}\mathrm{e}^{(S_nf)(x)}\,|\,F \text{ 为 } T \text{ 的}(n,\varepsilon)\text{ 支架集}\right\},$$

$$P(T,f)=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln Q_n(T,f,\varepsilon).$$

映射 $P(T,\cdot):C(X,\mathbb{R})\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$称为 T 的拓扑压.

4. 对 $f\in C(X,\mathbb{R})$, $n\geqslant 1$ 及 $\varepsilon\geqslant 0$,令

$$P_n(T,f,\varepsilon)=\sup\left\{\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{(S_nf)(x)}\,|\,E \text{ 为 } T \text{ 的}(n,\varepsilon)\text{ 分离集}\right\},$$

$$P(T,f)=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P_n(T,f,\varepsilon).$$

$P(T,\cdot):C(X,\mathbb{R})\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$称为 T 的拓扑压.

从上述定义易见 $P(T,0)=\operatorname{ent}(T)$. $P(T,\cdot)$的一个重要性质就是它可以决定 $\mathscr{M}(X,T)$中的元素,此处 $\mathscr{M}(X,T)$表示波莱尔测度空间$(X,\mathscr{B}(X))$上 T 不变的概率测度所组成的集合,此性质可见下述结论:设 T 为紧致度量空间 X 上的连续映射, $\operatorname{ent}(T)<+\infty$, μ 为$(X,\mathscr{B}(X))$上带符号的有限测度,则 μ 是 T 不变的充分必要条件是

$$\int f\mathrm{d}\mu\leqslant P(T,f)\ (\forall f\in C(X,\mathbb{R})).$$

拓扑压的另一重要应用可参见"平衡状态". 拓扑压理论的思想来源于统计力学,这一概念最初是由吕埃尔(Ruelle, D.)于 1973 年引进的,它是通过由状态空间上的观测函数所获得的信息量来反映状态空间上一个映射的动力学行为的复杂性. 拓扑压与测度熵的关系可参见"变分原理".

变分原理(the variational principle) 揭示拓扑压和熵的关系,进而揭示拓扑熵和熵的关系. 压的变分原理:设 X 为紧致度量空间,$T:X\to X$ 为连续映射,则

$$P(T,f)=\sup\left\{h_\mu(T)+\int f\mathrm{d}\mu\,|\,\mu\in\mathscr{M}(X,T)\right\}.$$

令 $f=0$,便得到熵的变分原理:在上述条件下,有

$$\operatorname{ent}(T)=\sup\{h_\mu(T)\,|\,\mu\in\mathscr{M}(X,T)\}.$$

平衡状态(equilibrium state) 遍历理论的一个概念,这一概念在统计力学中占有十分重要的地位. 设 T 为紧致度量空间 X 上的连续映射. 变分原理提供了一条在$\mathscr{M}(X,T)$中发现特殊元素的自然途径. 对$f\in C(X,\mathbb{R})$,若$\mu\in\mathscr{M}(X,T)$使等式

$$P(T,f)=h_\mu(T)+\int f\mathrm{d}\mu$$

成立,则称 μ 为 f(相对 T)的一个平衡状态,简称平衡态. 关于平衡态的存在惟一性已有许多结论. 例如,当 T 为可扩同胚时,$\forall f\in C(X,\mathbb{R})$都有平衡态. 西奈(Sinai, J. G.)与吕埃尔(Ruelle, D.)最早将平衡态理论应用于微分动力系统的研究,并有如下典型结果:设 M 为紧致光滑流形,$T:M\to M$ 为公理 A 微分同胚,则存在 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r\in\mathscr{M}(M,T)$,满足:

1. 对每个 j, $1\leqslant j\leqslant r$,

$$B_j=\left\{x\in M\,|\,\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{T^ix}\to\mu_j\right\}$$

具有正勒贝格测度且 $M\setminus\bigcup_{j=1}^{r}B_j$ 的勒贝格测度为零.

2. 存在一个自然的 $\varphi\in C(M,\mathbb{R})$,使$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r\}$恰好为 φ 在 T 的吸引基本集上的平衡态. 条件

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{T^ix}\to\mu_j$$

意味着对每个 $f\in C(M,\mathrm{R})$，有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(T^ix)\to\int f\mathrm{d}\mu_j.$$

这说明几乎所有点的轨道渐近行为的统计学性质由 $\mu_j(1\leqslant j\leqslant r)$ 决定.

西奈-吕埃尔-鲍恩测度(Sinai-Ruelle-Bowen measure) 简称 SRB 测度，是公理 A 微分同胚在其吸引子上的一个具有物理意义的不变测度. 设 M 为紧 C^∞ 流形，$T:M\to M$ 为 C^2 公理 A 微分同胚，Λ 为 T 的一个拓扑传递的吸引子，西奈(Sinai，J. G.)，吕埃尔(Ruelle，D.)，鲍恩(Bowen，R.)证明在 Λ 上存在惟一的不变测度 μ，满足：

1. $h_\mu(T)=\int\sum_{\lambda^{(i)}(x)>0}\lambda^{(i)}(x)m^{(i)}(x)\mathrm{d}\mu$，

此处 $\lambda^{(i)}(x)$，$m^{(i)}(x)$ 为 f 在 x 点的李亚普诺夫指数及相应的重数.

2. μ 在不稳定流形上有绝对连续的条件测度.

3. $M_\Lambda=\left\{x\mid\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varphi(T^kx)=\int\varphi\mathrm{d}\mu,\ \forall\varphi\in C(M,\mathrm{R})\right\}$

是一个开集(忽略掉一个勒贝格测度为零的集).

4. μ 在小随机扰动下稳定，即粗略地说，对任意 $x\in M_\Lambda$，若得到的不是 $T(x)$ 的精确值而是 $B(Tx,\varepsilon)$ 上的一个一致分布，μ_ε 为这一过程的不变测度，则

$$\mu_\varepsilon\to\mu\quad(\varepsilon\to0).$$

上述各条是相互等价的. 此 μ 就称为 f 在 Λ 上的 SRB 测度. 运用对应于李亚普诺夫指数的不稳定流形理论及勒贝格空间的条件测度理论，SRB 测度的定义可推广至一般非双曲动力系统.

次可加遍历定理(the subadditive ergodic theorem) 伯克霍夫遍历定理的推广. 在微分动力系统遍历论的研究中，一个有意义的问题就是研究流形上微分同胚所导出的切空间上变换的渐近行为，即对紧黎曼流形 M 上的微分同胚 T，研究 $|DT^n(x)v|$ $(v\in T_xM)$ 随 n 的变化关系. 首先注意到

$$|DT^{n+k}(x)|\leqslant|DT^n(x)||DT^k(T^nx)|,$$

若令 $f_m(x)=\ln|DT^m(x)|$，则 $f_{n+k}\leqslant f_n+f_k\circ T^n$，即 $\{f_m\}$ 满足次可加条件. 为研究类似于极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|DT^n(x)|$$

的存在性问题，金曼(Kingman，J. F. C.)证明了如下定理(次可加遍历定理)：设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为一概率空间，$T:X\to X$ 为保测变换，$\{f_n:X\to\mathrm{R}\cup\{-\infty\}\}_1^{+\infty}$ 为一列可测函数，满足：

1. $f_1^+\in L^1(X)$.

2. 对任意 $n,k\geqslant1$，$f_{n+k}\leqslant f_n+f_k\circ T^n$ μ-a.e.，则存在可测函数 $f:X\to\mathrm{R}\cup\{-\infty\}$，满足：

$$f^+\in L^1(X),f\circ T=f\ \mu\text{-a.e.},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f_n=f\ \mu\text{-a.e.},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int f_n\mathrm{d}\mu=\inf_n\frac{1}{n}\int f_n\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\mu.$$

对 $g\in L^1(X)$，令

$$f_n=\sum_{k=0}^{n-1}g(T^kx),$$

则由上述定理即得伯克霍夫遍历定理. 还可得到下述推论：设 T 为紧黎曼流形 M 上的 C^1 映射，则存在 $B\in\mathscr{B}(M)$ 及可测函数 $\chi:M\to\mathrm{R}\cup\{-\infty\}$，使得 $TB\subset B$，$\mu(B)=1(\forall\mu\in\mathscr{M}(M,T))$，且对任意 $x\in B$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|DT^n(x)|=\chi(x),$$

$$\chi(Tx)=\chi(x),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\ln|DT^n|\mathrm{d}\mu=\inf_n\frac{1}{n}\int\ln|DT^n|\mathrm{d}\mu=\int\chi\mathrm{d}\mu\quad(\forall\mu\in\mathscr{M}(M,T)).$$

为了研究 $|DT^n(x)v|$ $(v\in T_xM)$ 随 n 的变化规律，奥谢列杰茨(Оселедец，В. И.)进一步证明了著名的乘法遍历定理，此定理已成为动力系统光滑遍历论的奠基石. 该定理内容如下：设 T 为紧致 C^∞ 黎曼流形 M 上的 C^1 映射，则存在 $B\in\mathscr{B}(M)$ 满足 $TB\subset B$，$\mu(B)=1$ $(\forall\mu\in\mathscr{M}(M,T))$，对任意 $x\in B$，存在可测依赖于 x 的数 $-\infty\leqslant\lambda^{(1)}(x)<\lambda^{(2)}(x)<\cdots<\lambda^{(s(x))}(x)<+\infty$ 及可测依赖于 x 的 T_xM 的线性子空间 $\{0\}=V^{(0)}(x)\subset V^{(1)}(x)\subset\cdots\subset V^{(s(x))}(x)=T_xM$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|DT^n(x)v|=\lambda^{(i)}(x),$$

$\forall v\in V^{(i)}(x)\backslash V^{(i-1)}(x)$，$1\leqslant i\leqslant s(x)$. 若 T 为 M 上的 C^1 微分同胚，则存在 $B\in\mathscr{B}(M)$，满足 $TB\subset B$，$\mu(B)=1$ $(\forall\mu\in\mathscr{M}(M,T))$. 且对任意 $x\in B$，存在可测依赖于 x 的数 $-\infty<\lambda^{(1)}(x)<\lambda^{(2)}(x)<\cdots<\lambda^{(s(x))}(x)<+\infty$ 及可测依赖于 x 的 T_xM 的直和分解 $T_xM=E^{(1)}(x)\oplus E^{(2)}(x)\oplus\cdots\oplus E^{(s(x))}(x)$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|DT^{\pm n}(x)v|=\pm\lambda^{(i)}(x)$$

$\forall v\in E^{(i)}(x)$，$v\neq0$，$1\leqslant i\leqslant s(x)$. 上述 $\lambda^{(i)}(x)$ 就称为 T 在点 x 的李亚普诺夫特征指数，

$$m^{(i)}(x)=\dim V^{(i)}(x)-\dim V^{(i-1)}(x)$$

或

$$m^{(i)}(x)=\dim E^{(i)}(x)$$

就称为 $\lambda^{(i)}(x)$ 的重数. 对一个遍历的 $\mu\in\mathscr{M}(M,T)$ 而言，$s(x)$，$\lambda^{(i)}(x)$ 与 $m^{(i)}(x)$ 对 μ-a.e. x 为常数.

乘法遍历定理(the multiplicative ergodic theorem) 见“次可加遍历定理”.

李亚普诺夫特征指数(Liapunov characteristic

exponent） 微分动力系统遍历论的一个重要概念.在微分动力系统遍历论的研究中，对流形上微分同胚导出的切空间上的线性变换的渐近行为的研究有助于了解流形上非线性变换的渐近行为. 1965 年，奥谢列杰茨（(Оселедец, В. И.)）证明了广泛被人们采用的乘法遍历定理并由此将李亚普诺夫特征指数的概念引入微分动力系统. 事实上，早在 1963 年，廖山涛已证明了正规标架丛上的乘法遍历定理（它蕴涵状态流形上的一般形式的乘法遍历定理），并引入李亚普诺夫特征指数的概念. 对 $v\in T_xM, x\in M$，若

$$\lambda(x,v)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|DT^n(x)v|$$

存在，则称之为 T 在 x 点的一个李亚普诺夫特征指数，此处，M 为紧致 C^∞ 黎曼流形，$T\in C^1(M,M)$. 奥谢列杰茨的乘法遍历定理解决了其存在性问题. 这一概念刻画了切向量在 T 的切映射作用下的指数变化率，在微分动力系统遍历论中起着十分重要的作用. 关于李亚普诺夫特征指数研究的最著名的结果是柏森理论. 柏森理论用关于李亚普诺夫特征指数的条件来代替微分动力系统中的双曲条件，将双曲动力系统的几何结果的很大一部分推广到任意可微系统，其中典型的结果如柏森（Pesin, Ya. B.）的稳定流形理论. 此理论的另一个著名结果是柏森熵公式. 从某种程度上说，李亚普诺夫指数也反映了流形上无穷小体积元在流形映射作用下的变化规律，而熵亦与体积变化密切相关，因此，可以预测二者是有一定关系的. 柏森熵公式建立了二者之间的确切关系. 定理（柏森熵公式）：设 M 为紧致 C^∞ 黎曼流形，$T:M\to M$ 为 C^2 微分同胚，$\mu\in\mathscr{M}(M,T)$. 若 μ 相对 M 的勒贝格测度绝对连续，则

$$h_\mu(T)=\int_{M\lambda^{(i)}(x)>0}\sum\lambda^{(i)}(x)m^{(i)}(x)\mathrm{d}\mu.$$

若没有“μ 相对 M 的勒贝格测度绝对连续”这一条件，则结论变为

$$h_\mu(T)\leqslant\int_{M\lambda^{(i)}(x)>0}\sum\lambda^{(i)}(x)m^{(i)}(x)\mathrm{d}\mu.$$

这是吕埃尔（Ruelle, D.）首先得到的，称之为吕埃尔不等式. 最后指出，$\lambda^{(i)}(x)$ 虽然是 x 的可测函数，但一般是不连续的.

柏森熵公式（Pesin entropy formula） 见“李亚普诺夫特征指数”.

柏森理论（Pesin theory） 见“李亚普诺夫特征指数”.

吕埃尔不等式（Ruelle inequality） 见“李亚普诺夫特征指数”.

稳定流形（stable manifold） 由在映射作用下相互距离趋于零的相空间中的点组成的集合. 设 M 为一个紧致 C^∞ 黎曼流形，T 为 M 上的 $C^r(r\geqslant 2)$ 微分同胚，$\mu\in\mathscr{M}(M,T)$. 对 μ-a.e. $x\in M$，设 $\lambda^{(1)}(x)<\lambda^{(2)}(x)<\cdots<\lambda^{(p)}(x)<0$ 为 T 在点 x 的所有负李亚普诺夫指数. 对每个 $1\leqslant i\leqslant p$，定义

$$W^{s,i}(T,x)=\{y\in M|\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln d(T^ny,T^nx)\leqslant\lambda^{(i)}(x)\},$$

则可以证明 $W^{s,i}(T,x)$ 为 M 的一个

$$\sum_{k=1}^{i}m(k)(x)$$

维 C^{r-1} 浸入子流形（实际上为 $\sum_{k=1}^{i}\bigoplus E^{(k)}(x)$ 在一个单的 C^{r-1} 浸入映射下的像）. 称 $W^{s,i}(T,x)$ 为 T 在点 x 对应 $\lambda^{(i)}(x)$ 的稳定流形. 称

$$\begin{aligned}W^s(T,x)&=\left\{y\in M|\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln d(T^ny,T^nx)<0\right\}\\&=\left\{y\in M|\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln d(T^ny,T^nx)\leqslant\lambda^{(p)}(x)\right\}\end{aligned}$$

为 T 在点 x 的稳定流形. 若设 $0<\lambda^{(q)}(x)<\cdots<\lambda^{(s(x))}(x)$ 为 T 在点 x 的所有正李亚普诺夫指数，对每个 $q\leqslant j\leqslant s(x)$，定义

$$W^{u,j}(T,x)=\{y\in M|\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln d(T^{-n}y,T^{-n}x)\leqslant-\lambda^{(j)}(x)\},$$

则可证明 $W^{u,j}(T,x)$ 为 M 的一个

$$\sum_{k=q}^{j}m^{(k)}(x)$$

维的 C^{r-1} 浸入子流形（实际上为 $\sum_{k=q}^{j}\bigoplus E^{(k)}(x)$ 在一个单的 C^{r-1} 浸入映射下的像）. 称 $W^{u,j}(T,x)$ 为 T 在点 x 对应 $\lambda^{(j)}(x)$ 的不稳定流形. 称

$$\begin{aligned}W^u(T,x)&=\left\{y\in M|\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln d(T^{-n}y,T^{-n}x)<0\right\}\\&=\left\{y\in M|\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln d(T^{-n}y,T^{-n}x)\leqslant-\lambda^{(q)}(x)\right\}\end{aligned}$$

为 T 在点 x 的不稳定流形.

微分动力系统遍历论的稳定流形理论主要由柏森（Pesin, Ya. B.）建立，它是乘法遍历定理关于李亚普诺夫指数的线性理论的非线性版本. 这一理论的建立为微分动力系统遍历论的发展铺平了道路，起到了里程碑的作用.

撰　稿　华歆厚　刘培东　刘新和　孙文祥　何连法　陈藻平　董镇喜

审　阅　吕以辇　麦结华　杨重骏　董镇喜

特　殊　函　数

特殊函数(special function)　初等函数以外常用的各种超越函数(特殊情况下也可能是代数函数)的总称.它包括伽马函数、超几何函数和汇合型超几何函数、椭圆函数、拉梅函数、马蒂厄函数以及正交多项式等.这些函数都定义在复数域上,是一定区域内的解析函数.

通常从下列几个主要方面研究特殊函数：

1.特殊函数的积分表示.多数特殊函数都有一定的积分表达式,甚至在不同的条件下有不同的积分表达式.有些特殊函数,例如伽马函数、贝塔函数和不完全伽马函数等,最常用的定义就是它们的积分表达式.而椭圆函数则是通过椭圆积分的反函数来定义的.积分表达式的优点是适用区域一般较大,易于推广和作解析延拓,且便于讨论渐近展开.例如,由超几何函数的积分表达式(相差一常系数)

$$\int \zeta^a(\zeta-1)^b(\zeta-z)^c \mathrm{d}\zeta$$

的形式就容易推广到广义超几何函数

$$\int (\zeta-a_1)^{b_1}(\zeta-a_2)^{b_2}\cdots(\zeta-a_n)^{b_n}(\zeta-z)^c \mathrm{d}\zeta$$

或二变量超几何函数

$$\int \zeta^a(\zeta-1)^b(\zeta-x)^c(\zeta-y)^d \mathrm{d}\zeta.$$

2.特殊函数作为微分方程的解.例如,超几何函数和汇合型超几何函数(包括作为它们的特殊情形的球函数、柱函数以及各种正交多项式)就是超几何方程和汇合型超几何方程的解.拉梅函数和马蒂厄函数也都是相应的常微分方程的解.通过常微分方程的幂级数解法或积分解法,可以得到这些特殊函数的级数表达式或积分表达式.

根据常微分方程的解析理论,这些方程可以按照其正则奇点和非正则奇点的个数加以分类,从而建立起特殊函数之间的联系.例如,超几何方程具有三个正则奇点(0,1 和∞),勒让德方程也具有三个正则奇点(±1 和∞).将超几何方程的两个奇点汇合,即可得到汇合型超几何方程,它具有一个正则奇点(0)和一个非正则奇点(∞).贝塞尔方程和拉盖尔方程等也都具有一个正则奇点(0)和一个非正则奇点(∞).

更进一步,这些常微分方程又多是一定偏微分方程(例如拉普拉斯方程、亥姆霍兹方程或具有特定位势的薛定谔方程)在一定坐标系(例如球坐标系、柱坐标系、椭球坐标系等)下分离变量的结果.

3.母函数.这也是特殊函数的常用定义方法之一.各种正交多项式都可以通过相应的母函数定义.欧拉多项式和伯努利多项式也都是用各自的母函数定义的.根据特殊函数的母函数展开式,又可以方便地得到特殊函数的微商表示.

4.正交关系.各种正交多项式均构成相应希尔伯特空间上的正交完备函数系.反之,在一定区间上给定函数内积的定义,根据正交性的要求就可以得到相应的正交多项式(相差一常系数,可由最高项系数或特殊值确定).

5.递推公式.递推公式既是特殊函数的重要基本性质之一,也是定义某些特殊函数(例如柱函数)的特殊手段.

由于同一特殊函数可以出现在多种数学物理问题中,因此,既可能同一特殊函数却有不止一种名称,也可能同一特殊函数而有不完全一致的定义(例如相位因子的规定不同),甚至还可能两个完全不同的函数使用同一名称(例如韦伯函数).这在应用中应该特别注意.

伽马函数(gamma function)　常用的特殊函数之一.由欧拉(Euler,L.)引入,而由勒让德(Legendre,A.-M.)命名.通常用第二欧拉积分

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}z>0)$$

定义.对于任意复数 z,则有下列表达式：

1.汉克尔围道积分

$$\Gamma(z)=-\frac{1}{2\mathrm{i}\sin z}\int_{\infty}^{(0+)} \mathrm{e}^{-t}(-t)^{z-1}\mathrm{d}t \quad (|\arg(-t)|<\pi),$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\infty}^{(0+)} \mathrm{e}^{-t}(-t)^{-z}\mathrm{d}t \quad (|\arg(-t)|<\pi),$$

其中的积分路径是从正实轴上的无穷远处($t=\infty$,$\arg(-t)=-\pi$)出发,正向绕原点一周,再回到 $t=\infty$,$\arg(-t)=\pi$.前一表达式不适用于 z 为整数时.

2.欧拉无穷乘积

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right\}.$$

除极点 $z=-n(n=0,1,2,\cdots)$外,此乘积在全平面解析,故可用作伽马函数的普遍定义.

3.外尔斯特拉斯无穷乘积

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-z/n}\right\},$$

其中 γ 为欧拉常数.此公式表明 $\Gamma(z)$的奇点为一阶极点 $z=0,-1,-2,\cdots$,而且没有零点.此公式亦可

用作伽马函数的普遍定义.

伽马函数具有下列基本性质:

1. 在 $z=-n(n=0,1,2,\cdots)$ 处有一阶极点,留数为 $(-1)^n/n!$;除此之外,$\Gamma(z)$ 在全平面解析.

2. $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. 特别是 $\Gamma(n+1)=n!$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 因此,伽马函数可以看成是非负整数阶乘的推广,$\Gamma(z+1)$ 亦可写作 $z!$,称为阶乘函数.

3. $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$.

4. $\Gamma(z)$ 在全平面无零点.

(参见《数学辞海》第一卷同名条).

阶乘函数(fractorial function) 见“伽马函数”.

伽马函数的欧拉无穷乘积公式(Euler infinite product formula of gamma function) 见“伽马函数”.

伽马函数的外尔斯特拉斯无穷乘积公式(Weierstrass infinite product formula of gamma function) 见“伽马函数”.

欧拉常数(Euler's constant) 基本的数学常数之一. 定义为

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln m\right\}$$
$$=0.577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\cdots,$$

在伽马函数理论中经常要用到. 虽然猜想它是超越数,但至今还不知道它是不是无理数. 1980 年,布伦特(Brent, R. P.)等已计算到 30100 位小数(参见《数学辞海》第一卷同名条).

斯特林公式(Stirling's formula) 伽马函数在 $z\to\infty(|\arg z|<\pi)$ 时的渐近展开式

$$\Gamma(z)\sim e^{-z}z^{z-1/2}(2\pi)^{1/2}\left[1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+\cdots\right],$$

$$\ln\Gamma(z)\sim\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_n}{2n(2n-1)}z^{-(2n-1)},$$

其中 B_n 为伯努利数.

实际上,在斯特林(Stirling, J.)之前,棣莫弗(de Moivre, A.)于 1730 年已经给出了 $n!$ 的近似公式(参见《数学辞海》第一卷同名条).

贝塔函数(beta function) 常用的特殊函数之一. 最早由沃利斯(Wallis, J.)讨论过,1781 年,欧拉(Euler, L.)定义为

$$B(p,q)=\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du$$
$$(\mathrm{Re}\,p>0,\mathrm{Re}\,q>0),$$

(勒让德(Legendre, A.-M.),称之为第一类欧拉积分). 由关系式

$$B(p,q)=B(q,p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

可将 B 函数解析延拓到复变量 p 和 q 的全平面上.

$1/B(p,q)$ 可以看成是二项式系数

$$\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

对于一般非整数 N 和 n 的推广(参见《数学辞海》第一卷同名条).

普西函数(psi function) 亦称双伽马函数. 它是 Γ 函数的对数微商,

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

最常用表达式为

$$\psi(z)=\int_0^{\infty}\left[\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right]dt\ (\mathrm{Re}\,z>0).$$

除 $z=-n(n=0,1,2,\cdots)$ 外,$\psi(z)$ 在全平面解析;$z=-n$ 是 $\psi(z)$ 的一阶极点,留数均为 -1.

双伽马函数(bigamma function) 即“普西函数”.

多伽马函数(polygamma function) 普西函数的各阶导数

$$\psi^{(n)}(z)=\frac{d^n}{dz^n}\psi(z)$$

统称为多伽马函数. 最常用表达式为

$$\psi^{(n)}(z)=(-1)^{n+1}\int_0^{\infty}\frac{t^n e^{-zt}}{1-e^{-t}}dt\ (\mathrm{Re}\,z>0).$$

除 $n+1$ 阶极点 $z=-m(m=0,1,2,\cdots)$ 外,$\psi^{(n)}(z)$ 在整个复平面上单值解析.

$\psi'(z)$ 称为 3-Γ 函数,$\psi''(z)$ 称为 4-Γ 函数,$\psi'''(z)$ 称为 5-Γ 函数,$\psi^{(4)}(z)$ 称为 6-Γ 函数,依此类推,$\psi^{(n-2)}(z)(n\geqslant 3)$ 称为 n-Γ 函数.

黎曼 ζ 函数(Riemann zeta function) 基本的特殊函数之一. 与伽马函数有密切的联系,定义为

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ (\mathrm{Re}\,s>1).$$

通过积分表示

$$\zeta(s)=-\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{\infty}^{(0+)}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz$$
$$(|\arg(-z)|<\pi)$$

可延拓到全 s 平面,其中积分围道由 ∞ 出发,绕 $z=0$ 正向一周,再回到 ∞,围道内不含

$$z=2n\pi i\ (n=\pm1,\pm2,\cdots).$$

在历史上,欧拉(Euler, L.)最早研究过 s 为实变量的情形,1859 年,由黎曼(Riemann, (G. F.)B.)成功地将 s 推广为复变量,故名.

$\zeta(s)$ 在全平面只有一个奇点,即一阶极点 $s=1$,

留数为 1. $s=-2m(m=1,2,\cdots)$是 $\zeta(s)$的零点，而其余的零点只能分布在 $0\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant 1$ 的区域内. 黎曼猜想，这些零点全位于 $\mathrm{Re}s=1/2$ 线上，但至今尚未得到完全的证明或否定. 截至 1982 年，布伦特(Brent, R. P.)等证明了在

$$0\leqslant \mathrm{Re}s\leqslant 1,\ 0\leqslant \mathrm{Im}s\leqslant 81702130.19$$

的矩形中，共有 200000001 个零点，全都位于 $\mathrm{Re}s=1/2$ 的直线上. $\zeta(s)$的其他特殊值有

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},$$

$$\zeta'(0)=-\frac{1}{2}\ln(2\pi),$$

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}B_m,$$

$$\zeta(1-2m)=\frac{(-1)^m}{2m}B_m.$$

其中 $m=1,2,3,\cdots$, B_m 为伯努利数. 1999 年，中国数学家蓝以中教授给出了 $\zeta(2m+1)$的极限表达式.

1978 年 6 月，阿比黎(Apery, R.)在法国马赛数学会议上宣布证明了 $\zeta(3)$是无理数.

黎曼 ζ 函数在数论中有重要应用，它和素数有密切的联系. 例如

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\quad(\mathrm{Re}s>1),$$

其中 p 遍及所有素数(参见本卷《复变函数论》同名条).

广义 ζ 函数(generalized zeta function)　亦称胡尔维茨 ζ 函数. 黎曼 ζ 函数的推广. 定义为

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}$$

$$(\mathrm{Re}s>1, a\neq 0,-1,-2,\cdots).$$

通过积分表示

$$\zeta(s,a)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{(0+)}\frac{z^{s-1}\mathrm{e}^{az}}{1-\mathrm{e}^z}\mathrm{d}z$$

$$(|\arg z|<\pi, \mathrm{Re}a>0)$$

可延拓到全 s 平面，其中积分围道由 $-\infty$ 出发，经负实轴绕 $z=0$ 正向一周，再回到 $-\infty$，围道内不含

$$z=2n\pi\mathrm{i}\ (n=\pm1,\pm2,\cdots).$$

$\zeta(s,a)$在全平面只有一个奇点，一阶极点 $s=1$，留数为 1. 当 s 为负整数时，

$$\zeta(-n,a)=-\frac{B_{n+1}(a)}{n+1},$$

其中 $B_{n+1}(a)$为伯努利多项式.

胡尔维茨 ζ 函数(Hurwitz zeta function)　即"广义 ζ 函数".

默比乌斯函数(Möbius function)　一种数论函数(即自变量为正整数 n 的函数). 它可以通过黎曼 ζ 函数定义：

$$\frac{1}{\zeta(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^z}\quad(\mathrm{Re}z>0),$$

其中

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & n=1,\\ (-1)^r & n\text{ 是 } r \text{ 个不同质因子的乘积},\\ 0 & n\text{ 中含有重复的质因子}\end{cases}$$

它的前几个函数值是

$$\begin{aligned}&\mu(1)=1, && \mu(2)=-1,\\ &\mu(3)=-1, && \mu(4)=0,\\ &\mu(5)=-1, && \mu(6)=1,\\ &\mu(7)=-1, && \mu(8)=0,\\ &\mu(9)=0, && \mu(10)=1,\\ &\mu(11)=-1, && \mu(12)=0,\\ &\mu(13)=-1, && \mu(14)=1,\\ &\mu(15)=1, && \cdots\end{aligned}$$

(参见《数学辞海》第一卷《初等数论》同名条).

默比乌斯变换(Möbius transform)　数论函数的一种变换. 设 $f(n)$是一个数论函数，则

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d)=\sum_{d|n}f(nd)$$

称为 f 的默比乌斯变换，其中的 $\sum\limits_{d|n}$ 表示对 n 的所有因子 d(包括 1 和 n 本身)求和.

默比乌斯变换的反演是

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right),$$

其中的 $\mu(d)$就是默比乌斯函数(参见"默比乌斯函数").

默比乌斯反演(Möbius inversion)　见"默比乌斯变换".

修正的默比乌斯变换(modified Möbius transform)　默比乌斯变换对于(数学分析中的)一般连续函数的推广. 即

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{x}{n}\right).$$

相应地，修正的默比乌斯反演是

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)g\left(\frac{x}{n}\right).$$

其他形式的修正的默比乌斯变换及其反演还有

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f(nx),$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)g(nx).$$

甚至更一般地，

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f(n^a x),$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)g(n^a x).$$

这些修正的默比乌斯变换及其反演公式，在一些数论著作中已经(或者实际上已经)出现过，但长期以来并未得到充分的重视与应用. 1990 年，中国的陈

难先院士首次成功地应用于讨论临聚态物理中的两个重要问题：声子态密度和黑体辐射的反问题，出人意料、然而恰到好处地给出了问题的精确解，开辟了应用纯粹数学工具解决物理问题的新途径，引起了国内外数学界和物理学界的广泛注意与强烈反响.

修正的默比乌斯反演(modified Möbius inversion)　见“修正的默比乌斯变换”.

富克斯型方程(Fuchsian equation)　所有奇点都是正则奇点的线性常微分方程. 例如，拉梅方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{1}{2}\left\{\sum_{r=1}^{3}\frac{1}{\zeta-a_r}\right\}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}-\frac{n(n+1)\zeta+h}{4}\left\{\prod_{r=1}^{3}\frac{1}{\zeta-a_r}\right\}u=0$$

是具有四个正则奇点(a_1,a_2,a_3,∞)的富克斯型方程；广义拉梅方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2}+\frac{1}{2}\left[\sum_{r=1}^{4}\frac{1-4\alpha_r}{\zeta-a_r}\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}+\left\{\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{4}\frac{\alpha_r(2\alpha_r+1)}{(\zeta-a_r)^2}+(A\zeta^2+2B\zeta+C)\left[\prod_{r=1}^{4}\frac{1}{\zeta-a_r}\right]\right\}u=0$$

则是具有五个正则奇点(a_1,a_2,a_3,a_4,∞)的富克斯型方程.

黎曼微分方程(Riemann differential equation)　具有三个正则奇点a,b,c的富克斯型方程. 当a,b,c均为有限值时，标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\left[\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-a}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-b}+\frac{1-\gamma_1-\gamma_2}{z-c}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left[\frac{\alpha_1\alpha_2(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta_1\beta_2(b-c)(b-a)}{z-b}+\frac{\gamma_1\gamma_2(c-a)(c-b)}{z-c}\right]\frac{w}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0,$$

而若$c=\infty$，则为

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\left[\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{z-a}+\frac{1-\beta_1-\beta_2}{z-b}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+\left[\frac{\alpha_1\alpha_2(a-b)}{z-a}+\frac{\beta_1\beta_2(b-a)}{z-b}+\gamma_1\gamma_2\right]\frac{w}{(z-a)(z-b)}=0,$$

其中(α_1,α_2)，(β_1,β_2)和(γ_1,γ_2)分别是在三个正则奇点a,b,c处的指标，应满足

$$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=1.$$

黎曼微分方程在三个正则奇点处的解可以用P符号(称为黎曼P方程)一览无遗地表示出来，

$$w(z)=P\begin{Bmatrix}a & b & c & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1; & z\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix},$$

在自变量的分式线性变换

$$\zeta=\lambda\frac{z-\mu}{z-\nu}$$

之下，黎曼微分方程的形式不变：三个正则奇点相应地改变，但指标不变. 相应地，微分方程的解可以用P方程的变换关系表示，

$$P\begin{Bmatrix}a & b & c & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1; & z\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1; & \zeta\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}.$$

若作因变量变换

$$w_1=\begin{cases}\left(\dfrac{z-a}{z-c}\right)^k\left(\dfrac{z-b}{z-c}\right)^l w & a,b,c\text{ 均为有限},\\ (z-a)^k(z-b)^l w & c=\infty,\end{cases}$$

则w_1仍满足黎曼方程，奇点不变，但指标变为(α_1+k,α_2+k)，(β_1+l,β_2+l)和$(\gamma_1-k-l,\gamma_2-k-l)$. 当$a,b,c$均为有限值时，相应的黎曼$P$方程变换为

$$\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^k\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^l P\begin{Bmatrix}a & b & c & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1; & z\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}a & b & c & \\ \alpha_1+k & \beta_1+l & \gamma_1-k-l; & z\\ \alpha_2+k & \beta_2+l & \gamma_2-k-l & \end{Bmatrix}.$$

而当c为∞时，黎曼P方程的变换关系则为

$$(z-a)^k(z-b)^l P\begin{Bmatrix}a & b & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1; & z\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}a & b & \infty & \\ \alpha_1+k & \beta_1+l & \gamma_1-k-l; & z\\ \alpha_2+k & \beta_2+l & \gamma_2-k-l & \end{Bmatrix}.$$

黎曼 *P* 方程(Riemann P equation)　见“黎曼微分方程”.

超几何方程(hypergeometric equation)　具有三个正则奇点$0,1,\infty$的富克斯型方程，

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0,$$

在三个正则奇点处的指标分别为$(0,1-\gamma)$，$(0,\gamma-\alpha-\beta)$和(α,β). 任何一个具有三个正则奇点的富克斯型方程均可以通过自变量和因变量的变换而化为超几何方程.

超几何方程在三个正则奇点处的解均可用超几何级数表示.

超几何级数(hypergeometric series)　亦称高斯级数. 超几何方程在单位圆内$|z|<1$的第一解，

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{n!\ \Gamma(\gamma+n)}z^n.$$

此级数在单位圆$|z|<1$内对所有α,β,γ值均收敛；在单位圆上$|z|=1$，则对$\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<0$收敛．特别当$\gamma\neq-n(n=0,1,2,\cdots)$时，

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

当α或β为负整数$-n(n=0,1,2,\cdots)$时，$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$截断为n次多项式(参见《数学辞海》第一卷同名条)．

高斯级数(Gauss series)　即"超几何级数"．

超几何函数(hypergeometric function)　亦称超比函数．超几何级数在沿枝点$z=1$与$z=\infty$切开的复平面上的解析延拓，仍用$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$表示．

$$\begin{aligned}&F(\alpha,\beta;\gamma;z)\\&=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}\mathrm{d}t\\&\qquad(\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0,|\arg(1-z)|<\pi)\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(\gamma+t)}(-z)^t\mathrm{d}t\\&\qquad(|\arg(-z)|<\pi,\alpha,\beta\neq0,-1,-2,\cdots).\end{aligned}$$

后一个积分称为巴恩斯积分，积分路线的选取需使$\Gamma(-t)$的极点在其右侧，$\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)$的极点在其左侧．

超比函数(hypergeometric function)　见"超几何函数"．

巴恩斯积分(Barnes integral)　见"超几何函数"．

不完全贝塔函数(incomplete beta function)　概率函数的一种．定义为

$$B_\alpha(p,q)=\int_0^\alpha t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t,$$

它可用超几何函数表示，

$$B_\alpha(p,q)=p^{-1}\alpha^pF(p,1-q;p+1;\alpha).$$

另外，还有归一化的不完全贝塔函数

$$I(p,q,\alpha)=\frac{B_\alpha(p,q)}{B(p,q)},$$
$$I(p,q,1)=1,$$
$$I(p,q,\alpha)=1-I(q,p,1-\alpha).$$

托玛级数(Thomae series)　超几何级数在更多参量情形下的一种推广．1870年，由托玛(Thomae, L. J.)提出，定义为

$$\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_m)_n}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n\cdots(\beta_m)_n}z^n,\quad(\lambda)_n=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}.$$

它满足m阶常微分方程

$$\begin{aligned}&[(1-z)\delta^m+(A_1-B_1z)\delta^{m-1}\\&\qquad+(A_2-B_2z)\delta^{m-2}\\&\qquad+\cdots+(A_m-B_mz)]w=0,\end{aligned}$$

其中

$$\delta\equiv z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z},A_1,B_1,\cdots,A_m,B_m$$

为常数．超几何级数是托玛级数的特殊情形($m=2$，$\beta_1=1$)．

广义超几何级数(generalized hypergeometric series)　超几何级数在更多参量情形下的另一种推广．即

$$\begin{aligned}&{}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p;\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_q;z)\\&=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_p)_n}{n!(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n\cdots(\gamma_q)_n}z^n.\end{aligned}$$

当$p\leqslant q$时，此级数对任何z值均收敛；当$p>q+1$时，除非它截断为多项式($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$中至少有一个为0或负整数)，否则对任何$z\neq0$均发散；当$p=q+1$时，级数在单位圆内$|z|<1$收敛，并且当

$$s=\mathrm{Re}(\gamma_1+\gamma_2+\cdots\gamma_q-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{q+1})>0$$

时，在圆周$|z|=1$上处处收敛，当$-1<s\leqslant0$时，在$|z|=1$上除$z=1$点外收敛，而当$s\leqslant-1$时，在$|z|=1$上处处发散．引进简化记号$\delta\equiv z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$，则

$${}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p;\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_q;z)$$

满足的微分方程(可能不是富克斯型方程)为

$$\begin{aligned}&\{\delta(\delta+\gamma_1-1)(\delta+\gamma_2-1)\cdots(\delta+\gamma_q-1)\\&\quad-z(\delta+\alpha_1)(\delta+\alpha_2)\cdots(\delta+\alpha_p)\}w=0.\end{aligned}$$

此级数的记号是由波赫哈默尔(Pochhammer, L.)提出，并经巴恩斯(Barnes, E. W.)修正的，故常将由此级数定义的函数称为巴恩斯广义超几何函数．显然，

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=F(\alpha,\beta;\gamma;z),$$
$${}_0F_0(x)=\mathrm{e}^x,$$
$${}_1F_0(\alpha,x)=(1-x)^{-\alpha}.$$

另外，还可以将超几何函数的定积分表示式

$$\int\zeta^a(\zeta-1)^b(\zeta-z)^c\mathrm{d}\zeta$$

推广为

$$\int(\zeta-a_1)^{b_1}(\zeta-a_2)^{b_2}\cdots(\zeta-a_n)^{b_n}(\zeta-z)^c\mathrm{d}\zeta,$$

波赫哈默尔也将由此种类型的积分定义的函数称为广义超几何函数．

巴恩斯广义超几何函数(Barnes generalized hypergeometric function)　见"广义超几何函数"．

二变量超几何函数(hypergeometric function of two variables)　超几何函数在多变量情形下的推广．即由二重幂级数

$$\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\left\{\prod_i\frac{\Gamma(a_i+u_im+v_in)}{\Gamma(a_i)}\right\}R(m,n)(ax)^m(by)^n$$

所定义的函数，其中a_i是任意常数，u_i,v_i是任意整数，$R(m,n)$是m,n的有理函数，a和b为常数．此定义是霍恩(Horn, J.)于1889年给出的．在此之前，阿佩尔(Appell, P.-É.)已经引进了四个特殊的二变

量超几何函数，即阿佩尔二变量超几何函数.

阿佩尔二变量超几何函数（Appell's hypergeometric function of two variables） 四个特殊的二变量超几何函数. 1880 年，由阿佩尔（Appell，P.-É.）定义：

$$F_1(\alpha;\beta,\beta';\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{m!\ n!\ (\gamma)_{m+n}}x^m y^n\quad(|x|<1,|y|<1);$$

$$F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{m!\ n!\ (\gamma)_m(\gamma')_n}x^m y^n\quad(|x|+|y|<1);$$

$$F_3(\alpha,\alpha';\beta,\beta';\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{m!\ n!\ (\gamma)_{m+n}}x^m y^n,\quad(|x|<1,|y|<1);$$

$$F_4(\alpha;\beta;\gamma,\gamma';x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{m+n}}{m!\ n!\ (\gamma)_m(\gamma')_n}x^m y^n\quad(|x|^{1/2}+|y|^{1/2}<1).$$

两个超几何级数相乘时可以出现这些函数. 它们分别满足偏微分方程

$$F_1:\begin{cases}x(1-x)r+y(1-x)s+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p\\ \quad-\beta yq-\alpha\beta F=0,\\ y(1-y)t+x(1-y)s+[\gamma-(\alpha+\beta'+1)y]q\\ \quad-\beta' xp-\alpha\beta' F=0;\end{cases}$$

$$F_2:\begin{cases}x(1-x)r-xys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p\\ \quad-\beta yq-\alpha\beta F=0,\\ y(1-y)t-xys+[\gamma'-(\alpha+\beta'+1)y]q-\beta' xp\\ \quad-\alpha\beta' F=0;\end{cases}$$

$$F_3:\begin{cases}x(1-x)r+ys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p\\ \quad-\alpha\beta F=0,\\ y(1-y)t+xs+[\gamma-(\alpha'+\beta'+1)y]q\\ \quad-\alpha'\beta' F=0;\end{cases}$$

$$F_4:\begin{cases}x(1-x)r-y^2t-2xys+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]p\\ \quad-(\alpha+\beta+1)yq-\alpha\beta F=0,\\ y(1-y)t-x^2r-2xys+[\gamma'-(\alpha+\beta+1)y]q\\ \quad-(\alpha+\beta+1)xp-\alpha\beta F=0.\end{cases}$$

其中

$$p=\frac{\partial F}{\partial x},q=\frac{\partial F}{\partial y},r=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},s=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},t=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

当 $y=0$ 时，F_1,F_2,F_3,F_4 都成为超几何函数 $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$. 当 $\beta'=0$ 时，F_1,F_2,F_3 也都成为 $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$.

矩阵变量的超几何函数（hypergeometric function of matrix argument） 超几何函数的推广. 其变量为矩阵，1955 年，赫茨（Herz，C. S.）按下列递推方式定义：

$${}_0F_0(\Lambda)=\operatorname{etr}\Lambda,$$

$${}_{p+1}F_q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p,\gamma;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q;Z)=\frac{1}{\Gamma_m(\gamma)}\times\int_{\Lambda>0}{}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_p;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q;\Lambda Z)\times\operatorname{etr}(-\Lambda)(\det\Lambda)^{\gamma-p}\mathrm{d}\Lambda,$$

$${}_pF_{q+1}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_p;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q,\gamma;\Lambda)=\frac{\Gamma_m(\gamma)}{(2\pi\mathrm{i})^{m(m+1)/2}}\times\int_{\operatorname{Re}Z=X_0>0}{}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q;\Lambda Z^{-1})\times\operatorname{etr}Z(\det Z)^{-\gamma}\mathrm{d}Z,$$

其中 Λ 和 Z 都是 m 阶对称矩阵，$\Lambda>0$ 表示 Λ 为正定矩阵，$\operatorname{etr}Z=\exp(\operatorname{tr}Z)$，$\operatorname{tr}Z$ 为 Z 的迹，

$$\Gamma_m(\gamma)=\pi^{m(m-1)/4}\Gamma(\gamma)\Gamma\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\gamma-\frac{m-1}{2}\right),$$

$$\mathrm{d}\Lambda=\mathrm{d}\lambda_{11}\mathrm{d}\lambda_{12}\cdots\mathrm{d}\lambda_{mm},$$

$$\mathrm{d}Z=\mathrm{d}z_{11}\mathrm{d}z_{12}\cdots\mathrm{d}z_{mm}.$$

当 $\operatorname{Re}\gamma>p-1$ 时，${}_{p+1}F_q$ 中的积分对 $Z<0$ 收敛；当 $\operatorname{Re}\gamma$ 充分大时，适当取 X_0，${}_pF_{q+1}$ 中的积分在 Λ 空间的某个区域内收敛. 它们都是复对称矩阵空间上某一区域内的解析函数.

许多特殊函数及有关公式都可以推广到矩阵变量的情形.

连带勒让德方程（associated Legendre equation） 数学物理中常见的常微分方程之一. 其形式为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0.$$

作变换

$$z=\cos\theta,\quad w(z)=\Theta(\theta),$$

又可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(1-z^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]w=0.$$

此方程有三个奇点（$\pm1,\infty$），且均为正则奇点，故可化为超几何方程.

在球坐标系下将拉普拉斯方程或亥姆霍兹方程分离变量时，可出现连带勒让德方程.

勒让德方程（Legendre equation） 连带勒让德方程的特殊情形. 即

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right]+\nu(\nu+1)\Theta=0,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(1-z^2)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+\nu(\nu+1)w=0.$$

勒让德函数（Legendre function） 勒让德方程的基本解，可以表为

$$P_\nu(z)=F\left(\nu+1,-\nu;1;\frac{1-z}{2}\right)$$

和

$$Q_\nu(z)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}(2z)^{-\nu-1}$$
$$\times F\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu}{2}+1;\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right),$$

其中 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 为超几何函数. $P_\nu(z)$ 和 $Q_\nu(z)$ 分别称为 ν 次第一类和第二类勒让德函数,它们分别在除去半实轴$(-\infty,-1)$和$(-\infty,1)$的 z 平面上解析. 当 ν 为正整数 n 时,$P_n(z)$即为 n 次勒让德多项式.

第一类勒让德函数(Legendre function of the first kind) 见"勒让德函数".

第二类勒让德函数(Legendre function of the second kind) 见"勒让德函数".

球函数(spherical function) 通常指连带勒让德方程的解,亦即连带勒让德函数. 有时也把面调和函数称为球函数. 在球坐标系中用分离变量法解拉普拉斯方程或亥姆霍兹方程时可出现这些函数.

在现代数学中,球函数及其推广已被广泛应用于拓扑群的酉表示.

连带勒让德函数(associated Legendre function) 连带勒让德方程的解. 包括第一类连带勒让德函数

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}$$
$$\times F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)$$
$$(|\arg(z\pm1)|<\pi)$$

和第二类连带勒让德函数

$$Q_\nu^\mu(z)=\frac{e^{i\pi\mu}\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}(z^2-1)^{\mu/2}z^{-\nu-\mu-1}$$
$$\times F\left(\frac{\nu+\mu+1}{2},\frac{\nu+\mu}{2}+1;\nu+\frac{3}{2};z^{-2}\right)$$
$$(|\arg(z\pm1)|<\pi,\ |\arg z|<\pi),$$

它们都是在沿半实轴$(-\infty,1)$割开的 z 平面上的单值解析函数. 一般地,$P_\nu^\mu(z)$和 $Q_\nu^\mu(z)$在割缝上是不连续的. 而对于常常要用到的实数$-1<x<1$ 情形,通常把$P_\nu^\mu(x)$和 $Q_\nu^\mu(x)$定义为

$$P_\nu^\mu(x)=e^{i\pi\mu/2}P_\nu^\mu(x+i0)=e^{-i\pi\mu/2}P_\nu^\mu(x-i0)$$
$$=\frac{1}{2}[e^{i\pi\mu/2}P_\nu^\mu(x+i0)+e^{-i\pi\mu/2}P_\nu^\mu(x-i0)]$$
$$=\frac{i}{\pi}[e^{-i\pi\mu/2}Q_\nu^\mu(x+i0)-e^{i\pi\mu/2}Q_\nu^\mu(x-i0)],$$
$$Q_\nu^\mu(x)=\frac{1}{2}e^{-i\pi\mu}[e^{-i\pi\mu/2}Q_\nu^\mu(x+i0)+e^{i\pi\mu/2}Q_\nu^\mu(x-i0)].$$

当 μ 为非负整数 m 时,

$$P_\nu^m(z)=\frac{1}{m!}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{m/2}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}$$
$$\times F\left(-\nu,\nu+1;1+m;\frac{1-z}{2}\right)$$
$$=(z^2-1)^{m/2}\frac{d^mP_\nu(z)}{dz^m},$$
$$P_\nu^{-m}(z)=\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(z),$$
$$Q_\nu^m(z)=(z^2-1)^{m/2}\frac{d^mQ_\nu(z)}{dz^m},$$
$$Q_\nu^{-m}(z)=\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}Q_\nu^m(z),$$

其中 $P_\nu(z)$和 $Q_\nu(z)$分别是第一类和第二类勒让德函数.

以上采用的是霍布森(Hobson,E. W.)的定义. 另有费勒斯(Ferrers,N. M.)的定义,相因子的规定不同.

连带勒让德函数亦称球函数.

第一类连带勒让德函数(associated Legendre function of the first kind) 见"连带勒让德函数".

第二类连带勒让德函数(associated Legendre function of the second kind) 见"连带勒让德函数".

***m* 阶 *l* 次连带勒让德函数**(associated Legendre function of order m and degree l) 特殊的连带勒让德函数. 连带勒让德方程(m 为非负整数)

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

在有界条件$|y(\pm1)|<\infty$下的解,

$$y(x)=P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_l(x)}{dx^m},$$

称为 m 阶 l 次第一类连带勒让德函数(其中 $P_l(x)$为 l 次勒让德多项式),相应的本征值

$$\lambda=l(l+1)\ (l=m,m+1,m+2,\cdots),$$

连带勒让德方程的另一解

$$Q_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mQ_l(x)}{dx^m},$$

称为 m 阶 l 次第二类连带勒让德函数(其中 $Q_l(x)$为第二类勒让德函数),当 $x=\pm1$ 时无界.

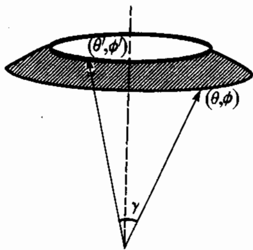
$P_l^m(x)$和 $Q_l^m(x)$都是普遍的连带勒让德函数 $P_\nu^\mu(z)$和 $Q_\nu^\mu(z)$的特殊情形,但需注意自变量为实数 x 或复数 z 时的不同相位规定.

***m* 阶 *l* 次第一类连带勒让德函数**(associated Legendre function of the first kind of order m and degree l) 见"m 阶 l 次连带勒让德函数".

***m* 阶 *l* 次第二类连带勒让德函数**(associated Legendre function of the second kind of order m and degree l) 见"m 阶 l 次连带勒让德函数".

双轴球面函数(biaxial spherical surface function) 在坐标系中改变极轴方向时出现的球函数. 设空间两点的直角坐标为(x,y,z)和(x',y',z'),相应的球坐标为$(r,\theta,\varphi,)$和(r',θ',φ'). (θ,φ)方向与(θ',φ')方向的夹角为 γ(如图),

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'),$$



图(θ,φ)，(θ',φ')方向及其夹角γ

则

$$P_n(\cos\gamma)=(-1)^n\frac{r^{n+1}}{n!}\left(\frac{x'}{r'}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y'}{r'}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{z'}{r'}\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\frac{1}{r}$$

为双轴球面函数，即以(θ',φ')方向为极轴时(θ,φ)方向的球面函数. 它可以用两各别方向的球面函数表示：

$$\begin{aligned}&P_n(\cos\gamma)\\&=\sum_{m=-n}^{n}(-1)^m P_n^m(\cos\theta)P_n^{-m}(\cos\theta')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi-\varphi')}\\&=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\\&\quad\times P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi').\end{aligned}$$

这个公式又称为勒让德多项式的加法定理.

勒让德多项式的加法定理(addition theorem of Legendre polynomials) 见“双轴球面函数”.

面调和函数(surface harmonics) 有时亦称球函数. 即拉普拉斯方程齐次多项式解的角向部分. 将拉普拉斯方程在球坐标系(r,θ,φ)下的解写成$r^nY_n(\theta,\varphi)$的形式(n为正整数)，$Y_n(\theta,\varphi)$即为n次面调和函数.

$Y_n(\theta,\varphi)$满足偏微分方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y_n=0,$$

共有$2n+1$个线性无关的解：

$$Y_n^m(\theta,\varphi)=P_n^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$
$$(m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n),$$

其中$P_n^m(\cos\theta)$为m阶n次连带勒让德函数. 在量子力学中，$Y_n^m(\theta,\varphi)$是角动量算符的本征态，同时又是转动群的不可约表示的基.

n次面调和函数也可以取为实函数$P_n(\cos\theta)$和$P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$，$P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi(m=1,2,\cdots,n)$. 由于勒让德多项式$P_n(\cos\theta)$在单位球面的$n$条纬度线上为0，故称为带调和函数；$P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$，$P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$，当$0<m<n$时，在$n-m$条纬度线和$2m$条经度线上为0，故称为田形调和函数，当$m=n$时，在$2m=2n$条经度线上为0，故称为瓣状调和函数.

带调和函数(zonal harmonics) 见“面调和函数”.

田形调和函数(tesseral harmonics) 见“面调和函数”.

瓣状调和函数(sectoral harmonics) 见“面调和函数”.

立体调和函数(solid harmonics) 拉普拉斯方程在直角坐标系下的n次齐次函数解. 对于正整数n，存在$2n+1$个线性无关的n次立体调和函数. 在球坐标系中写出，即为$r^nY_n(\theta,\varphi)$，其中$Y_n(\theta,\varphi)$为n次面调和函数.

格根鲍尔函数(Gegenbauer function) 连带勒让德函数的特殊情形之一. 格根鲍尔方程

$$(z^2-1)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+(2\nu+1)z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha(\alpha+2\nu)w=0$$

的第一解，即函数

$$\begin{aligned}C_\alpha^\nu(z)&=\frac{\Gamma(\alpha+2\nu)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\nu)}\\&\quad\times F\left(\alpha+2\nu,-\alpha;\nu+\frac{1}{2};\frac{1-z}{2}\right)\\&=\pi^{1/2}2^{(1-2\nu)/2}\frac{\Gamma(\alpha+2\nu)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu)}\\&\quad\times(z^2-1)^{(1-2\nu)/4}P_{\alpha+\nu-1/2}^{(1-2\nu)/2}(z),\end{aligned}$$

当α为非负整数n时，$C_\alpha^\nu(z)$截断为n次多项式，即格根鲍尔多项式$C_n^\nu(z)$.

格根鲍尔方程的第二解是

$$\begin{aligned}D_\alpha^\nu(z)&=\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha+2\nu)}{2^{1+\alpha}\Gamma(\alpha+\nu+1)}\\&\quad\times F\left(\frac{\alpha}{2}+\nu,\frac{1+\alpha}{2}+\nu;\nu+\alpha+1;z^2\right).\end{aligned}$$

圆锥函数(conical function) 在锥形区域中解某些边值问题时出现的一类特殊函数. 即微分方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}\right)-\left[p^2+\frac{1}{4}+\frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right]w=0$$

的解

$$P_{-1/2+\mathrm{i}p}^{\mu}(\cos\theta),\quad Q_{-1/2+\mathrm{i}p}^{\mu}(\cos\theta).$$

它们是连带勒让德函数$P_\nu^\mu(z)$和$Q_\nu^\mu(z)$的特殊情形.

圆环函数(ring function or toroidal function) 圆环坐标系下求解拉普拉斯方程时出现的一类特殊函数，即微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{\cosh\eta}{\sinh\eta}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta}-\left(n^2-\frac{1}{4}+\frac{m^2}{\sinh^2\eta}\right)u=0$$

的解

$$P_{n-1/2}^{m}(\cosh\eta),\quad Q_{n-1/2}^{m}(\cosh\eta).$$

它们是连带勒让德函数$P_\nu^\mu(z)$和$Q_\nu^\mu(z)$的特殊情形. 圆环坐标系(η,θ,φ)和直角坐标系之间的关系是

$$x=\frac{c\sinh\eta\cos\varphi}{\cosh\eta-\cos\theta},$$

$$y=\frac{c\sinh\eta\sin\varphi}{\cosh\eta-\cos\theta},$$

$$z=\frac{c\sin\theta}{\cosh\eta-\cos\theta}.$$

超球微分方程(hyperspherical equation) 数学物理中常见的常微分方程之一.形式为

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}z^2}-2(\mu+1)z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}z}+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)\omega=0$$

连带勒让德方程经因变量变换后,可以得到超球微分方程;勒让德方程和格根鲍尔方程都是它的特殊情形.

超球函数(hyperspherical function) 超球微分方程的两个基本解.即函数

$$P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}2^{\mu}(z^2-1)^{-\mu/2}P_{\nu}^{\mu}(z),$$

$$Q_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}2^{\mu}(z^2-1)^{-\mu/2}Q_{\nu}^{\mu}(z),$$

其中 $P_{\nu}^{\mu}(z)$ 和 $Q_{\nu}^{\mu}(z)$ 分别是第一类和第二类连带勒让德函数.

显然,$\mu=0$ 时,$P_{\nu}^{(0,0)}(z)$ 和 $Q_{\nu}^{(0,0)}(z)$ 就是 $P_{\nu}(z)$ 和 $Q_{\nu}(z)$.而当 $\nu-\mu$ 为正整数 n 时,$P_n^{(\mu,\mu)}(z)$ 成为多项式,即格根鲍尔多项式 $C_n^{\mu+1/2}(z)$.

汇合型超几何方程(confluent hypergeometric equation) 亦称库默尔方程.常见的一种汇合型常微分方程,标准形式为

$$z\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+(\gamma-z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha w=0.$$

在超几何方程中作代换 $t=z/b$,并令 $b=\beta\to\infty$(其结果是使超几何方程的两个奇点 $t=1$ 及 ∞"汇合")即得.合流型超几何方程有两个奇点,0 和 ∞;前者为正则奇点,后者为非正则奇点.

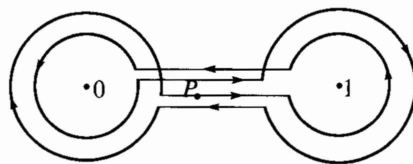
库默尔方程(Kummer's equation) 即"汇合型超几何方程".

汇合型超几何函数(confluent hypergeometric function) 汇合型超几何方程的基本解.即函数

$$\begin{aligned}F(\alpha;\gamma;z)&={}_1F_1(\alpha;\gamma;z)\\&=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(n+\gamma)}z^n\\&\qquad(\gamma\neq0,-1,-2,\cdots)\\&=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma+\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\gamma}}{(2\pi\mathrm{i})^2}\\&\quad\times\int_P^{(1^+,0^+,1^-,0^-)}\mathrm{e}^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$U(\alpha;\gamma;z)=\frac{\pi}{\sin\pi\gamma}\left[\frac{F(\alpha;\gamma;z)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}-z^{1-\gamma}\frac{F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\gamma)}\right],$$

其中的积分路线称为波赫哈默尔围道(见上图),起点 P 在实轴上,$\arg t=\arg(1-t)=0$,分别绕 $t=1$ 和 $t=0$ 正向一周后,再分别绕 $t=1$ 和 $t=0$ 逆向一周,最后回到 P 点.



波赫哈默尔围道

$F(\alpha;\gamma;z)/\Gamma(\gamma)$ 是 α,γ,z 的单值解析函数.

$F(\alpha;\gamma;z)$ 亦称库默尔函数.

库默尔函数(Kummer's function) 即"汇合型超几何函数".

波赫哈默尔围道(Pochhammer contour) 见"汇合型超几何函数".

惠特克方程(Whittaker's equation) 汇合型超几何方程的另一种重要形式.其标准形式为

$$W''+\left[-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{1-4m^2}{4z^2}\right]W=0.$$

对汇合型超几何方程作因变数的变换,化去一阶导数项,即得到惠特克方程.

惠特克函数(Whittaker's function) 解惠特克方程时出现的几个特殊函数.当 $2m$ 不是整数时,惠特克方程在 $z=0$ 的两个线性无关解可取为

$$M_{k,m}(z)=\mathrm{e}^{-z/2}z^{1/2+m}F\left(\frac{1}{2}+m-k;1+2m;z\right),$$

$$M_{k,-m}(z)=\mathrm{e}^{-z/2}z^{1/2-m}F\left(\frac{1}{2}-m-k;1-2m;z\right).$$

$M_{k,\pm m}(z)$ 一般是多值函数,通常规定 $|\arg z|<\pi$.当 $2m$ 是整数时,$M_{k,\pm m}(z)$ 中有一个失去意义.这时,惠特克方程的两个线性无关解可取为

$$\begin{aligned}W_{k,m}(z)&=-\frac{\mathrm{e}^{-z/2}z^k}{2\pi\mathrm{i}}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)\\&\quad\times\int_{\infty}^{(0+)}\mathrm{e}^{-t}(-t)^{-k-1/2+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-1/2+m}\mathrm{d}t\\&\qquad(k-m+1/2\neq0,-1,-2,\cdots;\\&\qquad|\arg z|<\pi,|\arg(-t)|\leqslant\pi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{-k,m}(-z)&=-\frac{\mathrm{e}^{z/2}(-z)^{-k}}{2\pi\mathrm{i}}\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}-m\right)\\&\quad\times\int_{\infty}^{(0+)}\mathrm{e}^{-t}(-t)^{k-1/2+m}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-k-1/2+m}\mathrm{d}t\\&\qquad(-k-m+1/2\neq0,-1,-2,\cdots;\\&\qquad|\arg(-z)|<\pi,|\arg(-t)|\leqslant\pi).\end{aligned}$$

当 $k-m+1/2=0,-1,-2,\cdots$ 时,

$$W_{k,m}(z)=\frac{\mathrm{e}^{-z/2}z^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+m\right)}\times\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{-k-1/2+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-1/2+m}\mathrm{d}t,$$

当 $-k-m+1/2=0,-1,-2,\cdots$ 时,

$$W_{-k,m}(-z)=\frac{\mathrm{e}^{z/2}(-z)^{-k}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+m\right)}$$

$$\times \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{k-1/2+m} \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{-k-1/2+m} dt.$$

$M_{k,\pm m}(z)$和$W_{\pm k,m}(\pm z)$均称为惠特克函数.

韦伯方程(Weber equation)　一种特殊的汇合型二阶常微分方程.标准形式为

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z^2\right) w = 0.$$

在抛物柱面坐标系(ξ,η,z)

$$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \quad y = \xi\eta, \quad z = z$$

下将拉普拉斯方程或波动方程分离变量时会出现韦伯方程.量子力学中一维谐振子的薛定谔方程也是韦伯方程.

抛物线柱函数(parabolic cylinder function)　亦称韦伯函数,韦伯方程的一个解,可用惠特克函数$W_{k,m}$表示:

$$D_\nu(z) = 2^{\nu/2+1/4} z^{-1/2} W_{\nu/2+1/4,-1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

韦伯方程的另一解为$D_{-\nu-1}(iz)$或$D_{-\nu-1}(-iz)$.当ν为非负整数n时,称

$$H_n(z) = 2^{n/2} e^{z^2/2} D_n(\sqrt{2}\, z)$$

为n次埃尔米特多项式.

韦伯函数$D_\nu(z)$(Weber function $D_\nu(z)$)　即“抛物线柱函数”.

不完全伽马函数(incomplete gamma function)　汇合型特殊函数之一.由第二类不完全欧拉积分定义:

$$\gamma(\nu,z) = \int_0^z u^{\nu-1} e^{-u} du,$$

$$\Gamma(\nu,z) = \int_z^{+\infty} u^{\nu-1} e^{-u} du = \Gamma(\nu) - \gamma(\nu,z),$$

其中$\mathrm{Re}\,\nu > 0$,$|\arg z| < \pi$.它们可表示为汇合型超几何函数$F(\alpha;\gamma;z)$或惠特克函数$W_{k,m}(z)$:

$$\gamma(\nu,z) = \nu^{-1} z^\nu e^{-z} F(1;1+\nu;z) = \nu^{-1} z^\nu F(\nu;1+\nu;-z),$$

$$\Gamma(\nu,z) = e^{-z/2} z^{(\nu-1)/2} W_{(\nu-1)/2,\nu/2}(z).$$

指数积分、对数积分、正弦积分、余弦积分、误差函数和菲涅耳积分等均可用不完全伽马函数表示.

误差函数(error function)　特殊的不完全伽马函数之一.即

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right).$$

常用定义是

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du.$$

也可以用汇合型超几何函数$F(\alpha;\gamma;z)$或惠特克函数$W_{k,m}(z)$表示:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} F\left(1;\frac{3}{2};z^2\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) W_{-1/4,1/4}(z^2).$$

余误差函数(co-error function)　特殊的不完全伽马函数之一.即

$$\mathrm{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right).$$

常用定义是

$$\mathrm{erfc}(z) = 1 - \mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

也可以用惠特克函数$W_{k,m}(z)$表示:

$$\mathrm{erfc}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) W_{-1/4,1/4}(z^2).$$

概率积分(probability integral)　亦称正态概率积分.汇合型特殊函数之一.定义为

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

其中$\mathrm{erf}(z)$为误差函数.另外还有函数

$$F(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2i} e^{-z^2} \mathrm{erf}(iz) = e^{-z^2} \int_0^z e^{u^2} du.$$

正态概率积分(normal probability integral)　即“概率积分”.

菲涅耳积分(Fresnel integral)　由积分定义的一类特殊函数.定义为

$$C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi t^2}{2} dt,$$

$$S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi t^2}{2} dt.$$

可用误差函数$\mathrm{erf}(z)$或惠特克函数$W_{k,m}(z)$表示:

$$C(z) \pm iS(z) = \frac{1 \pm i}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{1 \mp i}{2} \sqrt{\pi}\, z\right) = \sqrt{\frac{(1 \pm i)\pi}{2z}} \exp\left(\pm \frac{i\pi}{4} z^2\right) \cdot W_{-1/4,1/4}\left(\mp \frac{i\pi}{2} z^2\right),$$

也可表示成汇合型超几何函数$F(\alpha;\gamma;z)$:

$$C(z) \pm iS(z) = zF\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\pm\frac{i\pi}{2}z^2\right) = z e^{\pm i\pi z^2/2} F\left(1;\frac{3}{2};\mp\frac{i\pi}{2}z^2\right).$$

这类积分最初出现在光的衍射理论中,近年来在其他方面,例如高速公路回旋设计中,也有应用.

指数积分(exponential integral) 特殊的不完全伽马函数之一. 即

$$\mathrm{Ei}(z) = -\Gamma(0, -z).$$

在除去正实轴$(0,+\infty)$的 z 平面上单值解析. 常用定义是

$$\mathrm{Ei}(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u.$$

也可用惠特克函数 $W_{k,m}(z)\Gamma(\nu,z)$表示:

$$\mathrm{Ei}(z) = -\mathrm{e}^{z/2}(-z)^{-1/2}W_{-1/2,0}(-z)$$
$$(|\arg(-z)| < \pi).$$

对数积分(logarithmic integral) 特殊的不完全伽马函数之一. 即

$$\mathrm{li}(z) = \Gamma(0, \ln z).$$

在沿实轴$(-\infty,0]$与$[1,+\infty)$割开的 z 平面上单值解析. 常用定义是

$$\mathrm{li}(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}.$$

也可用惠特克函数 $W_{k,m}(z)$表示:

$$\mathrm{li}(z) = -(-\ln z)^{-1/2}z^{1/2}W_{-1/2,0}(-\ln z)$$
$$(|\arg(-\ln z)| < \pi).$$

正弦积分(sine integral) 由积分定义的一种特殊函数. 常用定义有

$$\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u,$$
$$\mathrm{si}(z) = -\int_z^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \mathrm{Si}(z) - \frac{\pi}{2}.$$

它们都是 z 的整函数,可用惠特克函数 $W_{k,m}(z)$或不完全伽马函数 $\Gamma(\nu,z)$表示:

$$\mathrm{Si}(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{z}}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z/2+\pi/4)}W_{-1/2,0}(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z/2+\pi/4)}W_{-1/2,0}(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})\}$$
$$(|\arg z| < \pi),$$
$$\mathrm{si}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\{\Gamma(0,\mathrm{i}z) - \Gamma(0,-\mathrm{i}z)\},$$
$$(|\arg z| < \pi/2).$$

余弦积分(cosine integral) 由积分定义的一种特殊函数. 定义为

$$\mathrm{Ci}(z) = -\mathrm{ci}(z) = -\int_z^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u.$$

它在除去负实轴$(-\infty,0)$的 z 平面上单值解析,可以表示成惠特克函数 $W_{k,m}(z)$或不完全伽马函数 $\Gamma(\nu,z)$:

$$\mathrm{Ci}(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z/2+\pi/4)}W_{-1/2,0}(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z/2+\pi/4)}W_{-1/2,0}(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})\}$$
$$(|\arg z| < \pi)$$
$$= \frac{1}{2}\{\Gamma(0,\mathrm{i}z) + \Gamma(0,-\mathrm{i}z)\}$$
$$(|\arg z| < \pi/2).$$

抛物函数(parabolic function) 亦称旋转抛物面函数. 在旋转抛物面坐标系中求解波动方程时出现的一类特殊函数. 它们是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} + \left(\xi^2 - \frac{4\mu^2}{\xi^2} - 4\lambda\right)u = 0$$

的解,可用惠特克函数 $M_{k,m}(z)$和 $W_{k,m}(z)$表示:

$$\xi^{-1}M_{\pm\mathrm{i}\lambda,\mu}(\pm\mathrm{i}\xi^2)$$

和

$$\xi^{-1}W_{\pm\mathrm{i}\lambda,\mu}(\pm\mathrm{i}\xi^2).$$

因此,这些函数的性质可以通过惠特克函数推得. 旋转抛物面坐标系(ξ,η,φ)和直角坐标系的关系是

$$x = \xi\eta\cos\varphi,$$
$$y = \xi\eta\sin\varphi,$$
$$z = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2).$$

旋转抛物面函数(rotational paraboloidal function) 即"抛物函数".

贝塞尔方程(Bessel equation) 数学物理中常见的常微分方程之一. 其形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0.$$

ν 称为方程的阶.

贝塞尔方程和汇合型超几何方程具有相同的奇点 0 和∞; $z=0$ 是正则奇点,∞是非正则奇点. 因此,通过适当的变换,贝塞尔方程可以化成汇合型超几何方程或惠特克方程.

贝塞尔函数(Bessel function) 贝塞尔方程的解以及相关函数的总称,包括这些解的多种变形. 早在 1700 年前后,雅各布第一·伯努利(Bernoulli, Jacob Ⅰ)就研究过这类函数. 最晚 1733 年,丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli, Daniel Ⅰ)在研究悬链振动问题时就已经得到了零阶贝塞尔函数. 1770 年,拉格朗日(Lagrange, J. -L.)研究行星绕太阳的椭圆运动,根据矢径 r、平近点角 M、偏近点角 E 和长半轴 a 及离心率 ε 之间的关系

$$M = E - \varepsilon\sin E,$$
$$r = a(1 - \varepsilon\cos E)$$

得到级数解

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}J_n(n\varepsilon)\sin nM,$$
$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - 2\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n'(n\varepsilon)\cos nM,$$

其中的 $J_n(z)$即为现在所称的第一类贝塞尔函数. 由于这类函数后来经常出现在各种问题中,引起了贝塞尔(Bessel, F. W.)的注意. 1824 年,他对此进行了系统的研究,因此得名.

另外,第一类贝塞尔函数也常简称贝塞尔函数.

第一类贝塞尔函数(Bessel function of the first kind) 贝塞尔方程的第一解.

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$(|\arg z|<\pi),$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_L e^{-iz\sin\zeta+i\nu\zeta}d\zeta$$

其中 L 为从 $(-\pi+0)+i\infty$ 到 $(\pi+0)+i\infty$ 的曲线. ν 是第一类贝塞尔函数的阶,也是贝塞尔方程的阶.

$J_\nu(z)$ 有如下基本性质:

1. 当 z 和 ν 为实数时,$J_\nu(z)$ 为实函数.

2. $z^{-\nu}J_\nu(z)$ 为偶函数.

3. $J_\nu(z)$ 在除去半实轴 $(-\infty,0)$ 的 z 平面上单值解析;当 ν 为整数时,$J_\nu(z)$ 在全平面上解析.

4. $J_\nu(z)$ 满足下列递推关系

$$2\frac{dJ_\nu(z)}{dz}=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z),$$

$$2\nu J_\nu(z)=z[J_{\nu-1}(z)+J_{\nu+1}(z)].$$

5. 当 ν=整数 n 时,$J_{-n}(z)$ 与 $J_n(z)$ 线性相关,

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z).$$

6. 当 ν=整数 n 时,有 $J_n(z)$ 的母函数展开式,

$$\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n.$$

相应地,$J_n(z)$ 的积分表示为

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\sin\zeta-in\zeta}d\zeta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\zeta-n\zeta)d\zeta,$$

称为贝塞尔积分.

7. 除了 $z=0$ 可能例外,$J_\nu(z)$ 的零点均为一阶零点. 特别当 $\nu>-1$ 或为整数时,$J_\nu(z)$ 的无穷个零点均为实数,对称地分布在实轴上. 如果把 $J_\nu(z)$ 的第 s 个正零点(由小到大排列)记为 $\alpha_{\nu,s}$,则

$$0<\alpha_{\nu,1}<\alpha_{\nu+1,1}<\alpha_{\nu,2}<\alpha_{\nu+1,2}<\alpha_{\nu,3}<\cdots$$

8. 傅里叶-贝塞尔级数展开定理:设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 中有定义,且

$$\int_0^1 t^{1/2}f(t)dt$$

存在(如果此积分是非正常的,则要求它是绝对收敛的). 若 x 是区间 (a,b) 中的任意一点,$0<a<b<1$,且 $f(x)$ 在 (a,b) 中是囿变的,则

$$\sum_m a_mJ_\nu(\alpha_mx)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

其中 $\nu\geqslant-1/2$,α_m 是 $J_\nu(x)$ 的正零点,$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m<\alpha_{m+1}<\cdots$,

$$a_m=\frac{2}{[J_{\nu+1}(\alpha_m)]^2}\int_0^1 tf(t)J_\nu(\alpha_mt)dt.$$

又如果 $f(x)$ 在 (a,b) 中连续,则级数在

$$a+\Delta\leqslant x\leqslant b-\Delta\quad(\Delta>0)$$

中一致收敛到 $f(x)$.

第一类贝塞尔函数常简称贝塞尔函数.

贝塞尔积分(Bessel integral) 见"第一类贝塞尔函数".

第二类贝塞尔函数(Bessel function of the second kind) 亦称诺伊曼函数. 贝塞尔方程的第二解. 与 $J_\nu(z)$ 线性无关,且可由第一类贝塞尔函数定义:

$$N_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$(|\arg z|<\pi).$$

$N_\nu(z)$ 在除去负实轴 $(-\infty,0)$ 的 z 平面上单值解析.

$N_\nu(z)$ 有时记为 $Y_\nu(z)$.

诺伊曼函数(Neumann function) 即"第二类贝塞尔函数".

第三类贝塞尔函数(Bessel function of the third kind) 亦称汉克尔函数. 贝塞尔方程的线性无关解. 可以表示为第一类和第二类贝塞尔函数的线性组合:

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iN_\nu(z),$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iN_\nu(z).$$

它们在除去负实轴 $(-\infty,0)$ 的 z 平面上单值解析.

$H_\nu^{(1)}(z)$ 和 $H_\nu^{(2)}(z)$ 分别称为第一种和第二种第三类贝塞尔函数,或第一类和第二类汉克尔函数.

汉克尔函数(Hankel function) 即"第三类贝塞尔函数".

第一类汉克尔函数(Hankel function of the first kind) 见"第三类贝塞尔函数".

第二类汉克尔函数(Hankel function of the second kind) 见"第三类贝塞尔函数".

柱函数(cylindrical function) 一类特殊函数的总称. 它们都满足递推关系

$$2\frac{dZ_\nu(z)}{dz}=Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z),$$

$$2\nu Z_\nu(z)=z[Z_{\nu-1}(z)+Z_{\nu+1}(z)].$$

由此可以推知 $Z_\nu(z)$ 一定满足 ν 阶贝塞尔方程,因而一般可以表示为

$$Z_\nu(z)=a_1(\nu)H_\nu^{(1)}(z)+a_2(\nu)H_\nu^{(2)}(z).$$

其中 $H_\nu^{(1)}(z)$ 和 $H_\nu^{(2)}(z)$ 是第三类贝塞尔函数,$a_1(\nu)$ 和 $a_2(\nu)$ 是 ν 的任意周期函数,周期为 1.

第一、二、三类贝塞尔函数都是柱函数.

洛默尔多项式(Lommel polynomial) 广义超几何函数的一种. 定义为

$$R_{m,\nu}(z)=(\nu)_m\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-m}$$

$$\times{}_2F_3\left(\frac{1-m}{2},-\frac{m}{2};\nu,-m,1-\nu-m;-z^2\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{[m/2]} \frac{(-)^n (m-n)!\Gamma(\nu+m-n)}{n!(m-2n)!\Gamma(\nu+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n-m}.$$

当 ν 是负整数时，上式中的

$$\frac{\Gamma(\nu+m-n)}{\Gamma(\nu+n)}$$

应该改写为

$$(-1)^m \frac{\Gamma(-\nu-n-1)}{\Gamma(-\nu-m+n+1)}$$

$$=(-1)^m \frac{(-\nu-n)!}{(-\nu-m+n)!}.$$

$R_{m,\nu}(z)$ 是 z^{-1} 的 m 次多项式，它是四阶常微分方程

$$[(\delta+m)(\delta+2\nu+m-2)(\delta-2\nu-m)(\delta-m-2) + 4z^2\delta(\delta+1)]w=0$$

的解，其中

$$\delta \equiv z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln z}.$$

在历史上，洛默尔(von Lommel, E. C. J.)是从贝塞尔函数的递推关系出发，得出 $J_{\pm(\nu+m)}(z)$ 与 $J_{\pm\nu}(z)$ 及 $J_{\pm(\nu-1)}(z)$ 之间的联系：

$$J_{\nu+m}(z) = J_\nu(z)R_{m,\nu}(z) - J_{\nu-1}(z)R_{m-1,\nu+1}(z),$$

$$J_{-\nu-m}(z) = (-1)^m[J_{-\nu}(z)R_{m,\nu}(z) + J_{-\nu+1}(z)R_{m-1,\nu+1}(z)].$$

从而定义出洛默尔多项式，并给出了它的具体表达式. 由于在推导这两个关系式时只用到递推关系，因此，如果将第一类贝塞尔函数换成其他柱函数，这两个关系式仍然成立.

$R_{m,\nu}(z)$ 本身也可以用第一类贝塞尔函数表示：

$$\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}R_{m,\nu}(z) = J_{\nu+m}(z)J_{-\nu+1}(z) + (-1)^m J_{-\nu-m}(z)J_{\nu-1}(z).$$

变形贝塞尔函数(modified Bessel function) 变形贝塞尔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \left(1+\frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0$$

的解.

$$I_\nu(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi/2}J_\nu(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})$$

$$K_\nu(z) = \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi/2}H_\nu^{(1)}(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})$$

$$= -\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi/2}H_\nu^{(2)}(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2})$$

$$= \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\pi\nu},$$

分别称为第一类和第二类变形贝塞尔函数，它们在除去负实轴 $(-\infty, 0]$ 的 z 平面上单值解析.

$K_\nu(z)$ 又称为巴赛特函数.

第一类变形贝塞尔函数(modified Bessel function of the first kind) 见“变形贝塞尔函数”.

第二类变形贝塞尔函数(modified Bessel function of the second kind) 见“变形贝塞尔函数”.

巴赛特函数(Basset function) 即“第二类变形贝塞尔函数”.

球贝塞尔方程(spherical Bessel equation) 数学物理中常见的常微分方程之一. 即

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left[1 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right]y = 0.$$

在球坐标系中，将亥姆霍兹方程分离变量，其径向方程即可化为球贝塞尔方程.

球贝塞尔方程和贝塞尔方程具有同样的奇点：$x=0$ 为正则奇点，$x=\infty$ 为非正则奇点. 作变换

$$y = x^{-1/2}v(x),$$

则球贝塞尔方程可化为

$$\nu + \frac{1}{2}$$

阶贝塞尔方程.

球贝塞尔函数(spherical Bessel function) 球贝塞尔方程的解. 即函数

$$j_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{\nu+1/2}(x),$$

$$n_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+1/2}(x),$$

$$h_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{\nu+1/2}^{(1)}(x),$$

$$h_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{\nu+1/2}^{(2)}(x),$$

其中 $J_{\nu+1/2}(x)$，$N_{\nu+1/2}(x)$ 和 $H_{\nu+1/2}^{(1)}(x)$，$H_{\nu+1/2}^{(2)}(x)$ 分别是第一类、第二类和第三类贝塞尔函数.

$j_\nu(x)$ 是 ν 阶第一类球贝塞尔函数，常简称 ν 阶球贝塞尔函数；$n_\nu(x)$ 是 ν 阶第二类球贝塞尔函数，亦称 ν 阶球诺伊曼函数；$h_\nu^{(1)}(x)$ 和 $h_\nu^{(2)}(x)$ 是 ν 阶第三类球贝塞尔函数，亦称球汉克尔函数.

第一类球贝塞尔函数(spherical Bessel function of the first kind) 见“球贝塞尔函数”.

第二类球贝塞尔函数(spherical Bessel function of the second kind) 见“球贝塞尔函数”.

球诺伊曼函数(spherical Neumann function) 即“第二类球贝塞尔函数”.

第三类球贝塞尔函数(spherical Bessel function of the third kind) 见“球贝塞尔函数”.

球汉克尔函数(spherical Hankel function) 即“第三类球贝塞尔函数”.

平面波按柱面波展开(expansion of plane wave in series of cylindrical waves) 含贝塞尔函数的一个特殊展开式. 即

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\varphi} = J_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n J_n(kr)\cos n\varphi$$

$$(-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi),$$

其中 $J_n(kr)$ 是 n 阶第一类贝塞尔函数. 在柱坐标系 (r,φ,z) 中, $e^{ikr\cos\varphi}=e^{ikx}$ 表示沿 x 方向传播的平面波(等相位面为 $x=$ 常数)的相位因子的空间部分, k 为波数, 而右方的

$$J_n(kr)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos\left(kr-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

代表柱面波(等相位面为柱面 $r=$ 常数), 振幅与 $\sqrt{r}$ 成反比.

平面波按球面波展开(expansion of plane wave in series of spherical waves) 含球贝塞尔函数的一个特殊展开式. 即

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta)$$
$$(0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

其中 $j_l(kr)$ 是 l 阶球贝塞尔函数, $P_l(\cos\theta)$ 是 l 次勒让德多项式. 若将 r 和 θ 理解为球坐标, 则 $e^{ikr\cos\theta}=e^{ikz}$ 表示沿 z 方向传播的平面波(等相位面为 $z=$ 常数)相位因子的空间部分, k 为波数, 而右方的

$$j_l(kr)\sim\frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)$$

代表球面波(等相位面为球面 $r=$ 常数), 振幅与 r 成反比.

艾里函数(Airy function) 艾里微分方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}-zw=0$$

的线性无关解.

$$\mathrm{Ai}(z)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{z}{3}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right),$$

$$\mathrm{Bi}(z)=\sqrt{\frac{z}{3}}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)+I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right].$$

它们都是 z 的整函数. 艾里函数与艾里积分

$$\int_0^{+\infty}\cos(t^3\pm xt)dt$$

相关,

$$\int_0^{+\infty}\cos(t^3\pm xt)dt=3^{-1/3}\pi\mathrm{Ai}\ (\pm 3^{-1/3}x).$$

开尔文函数(Kelvin function) 开尔文(Kelvin, B.)在研究某些电学问题时引进的特殊函数, 实际上是宗量辐角为 $\pm\pi/4$(或 $\pm3\pi/4$)的贝塞尔函数

$$\mathrm{ber}(x)\pm i\,\mathrm{bei}(x)=J_0(xe^{\mp\pi i/4})$$
$$=J_0(xe^{\pm3\pi i/4}).$$

推广到复数 z 及任意阶贝塞尔函数的情形,

$$\mathrm{ber}_\nu(z)\pm i\,\mathrm{bei}_\nu(z)=J_\nu(ze^{\pm3\pi i/4}),$$
$$\mathrm{ker}_\nu(z)\pm i\,\mathrm{kei}_\nu(z)=e^{\mp\nu\pi i/2}K_\nu(ze^{\pm\pi i/4}),$$
$$\mathrm{her}_\nu(z)+i\,\mathrm{hei}_\nu(z)=H_\nu^{(1)}(ze^{3\pi i/4}),$$
$$\mathrm{her}_\nu(z)-i\,\mathrm{hei}_\nu(z)=H_\nu^{(2)}(ze^{-3\pi i/4}).$$

当 ν 是实数, $\arg z=0$ 时, $\mathrm{ber}_\nu(z)$, $\mathrm{bei}_\nu(z)$, $\mathrm{ker}_\nu(z)$, $\mathrm{kei}_\nu(z)$, $\mathrm{her}_\nu(z)$ 和 $\mathrm{hei}_\nu(z)$ 都是实函数.

因为开尔文原名汤姆森(Thomson, W.), 故开尔文函数亦称汤姆森函数.

汤姆森函数(Thomson function) 即"开尔文函数".

斯图鲁弗函数(Struve function) 非齐次贝塞尔微分方程

$$\left[z^2\frac{d^2}{dz^2}+z\frac{d}{dz}+(z^2-\nu^2)\right]\mathbf{H}_\nu(z)$$
$$=-\frac{4}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+1}$$

的解. 即函数

$$\mathbf{H}_\nu(z)=\frac{2}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$$
$$\times\int_0^{\pi/2}\sin(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta d\theta\ \left(\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right).$$

实际上, 斯图鲁弗(Struve, K. H., 原名 Struve, H. O.)只研究了它的特殊情形 $\mathbf{H}_0(z)$ 和 $\mathbf{H}_1(z)$.

$\mathbf{H}_\nu(z)$ 可以出现在贝塞尔函数的积分中, 例如

$$\int_0^z z^\nu J_\nu dz=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$$
$$\times z[J_\nu(z)\mathbf{H}_{\nu-1}(z)-J_{\nu-1}(z)\mathbf{H}_\nu(z)],$$

$$\int_0^z z^\nu N_\nu dz=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)$$
$$\times z[N_\nu(z)\mathbf{H}_{\nu-1}(z)-N_{\nu-1}(z)\mathbf{H}_\nu(z)].$$

安格尔函数(Anger function) 非齐次贝塞尔微分方程

$$\left[z^2\frac{d^2}{dz^2}+z\frac{d}{dz}+(z^2-\nu^2)\right]\mathbf{J}_\nu(z)$$
$$=\frac{(z-\nu)\sin\pi\nu}{\pi}$$

的解. 即函数

$$\mathbf{J}_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(\nu\theta-z\sin\theta)d\theta.$$

若 ν 为整数 n 时, $\mathbf{J}_n(z)$ 即为第一类贝塞尔函数 $J_n(z)$.

实际上, 在安格尔(Anger, C. T.)之前, 泊松(Poisson, S.-D.)在 1836 年已经证明了

$$\left[z^2\frac{d^2}{dz^2}+z\frac{d}{dz}+(z^2-\nu^2)\right]\int_0^\pi\cos(\nu\theta-z\sin\theta)d\theta$$
$$=(z-\nu)\sin\pi\nu,$$

但未作更多研究.

韦伯函数 $\mathbf{E}_\nu(z)$ (Weber function $\mathbf{E}_\nu(z)$) 非齐次贝塞尔微分方程

$$\left[z^2\frac{d^2}{dz^2}+z\frac{d}{dz}+(z^2-\nu^2)\right]\mathbf{E}_\nu(z)$$
$$=-\frac{z+\nu}{\pi}-\frac{(z-\nu)\cos\pi\nu}{\pi}$$

的解. 即函数

$$\mathbf{E}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu\theta - z\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

洛默尔函数(Lommel function) 非齐次贝塞尔微分方程

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + (z^2-\nu^2)w = z^{\mu+1}$$

的特解：

$$s_{\mu,\nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu+\nu+1)(\mu-\nu+1)} \times {}_1F_2\left(1;\frac{\mu-\nu+3}{2},\frac{\mu+\nu+3}{2};-\frac{z^2}{4}\right)$$

或

$$S_{\mu,\nu}(z) = s_{\mu,\nu}(z) + \frac{2^{\mu-1}}{\sin\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \times\left[J_{-\nu}(z)\cos\frac{\mu-\nu}{2}\pi - J_\nu(z)\cos\frac{\mu+\nu}{2}\pi\right]$$

$$= s_{\mu,\nu}(z) + 2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \times\left[J_\nu(z)\sin\frac{\mu-\nu}{2}\pi - N_\nu(z)\cos\frac{\mu+\nu}{2}\pi\right].$$

$S_{\mu,\nu}(z)$比$s_{\mu,\nu}(z)$更常用，这是因为$s_{\mu,\nu}(z)$在$\mu+\nu$或$\mu-\nu$为负奇数时无意义，但$S_{\mu,\nu}(z)$无此限制.

当$\mu+\nu$或$\mu-\nu$是正奇数时，$S_{\mu,\nu}(z)$成为多项式. 施勒夫利多项式和诺伊曼多项式都是洛默尔函数的特殊情形.

诺伊曼多项式(Neumann polynomial) 由展开式

$$\frac{1}{t-z} = O_0(t)J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} O_n(t)J_n(z)\ (|z|<|t|)$$

所定义的多项式$O_n(t)$，其中$J_n(z)$为第一类贝塞尔函数.

$$O_0(t) = \frac{1}{t},$$

$$O_n(t) = \frac{n}{4}\sum_{j=0}^{[n/2]}\frac{(n-j-1)!}{j!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2j-n-1} \quad (n=1,2,\cdots).$$

它们是洛默尔函数的特殊情形，

$$O_{2n}(t) = \frac{1}{t}S_{1,2n}(t),$$

$$O_{2n+1}(t) = \frac{2n+1}{t}S_{0,2n+1}(t).$$

历史上，$O_n(t)$是诺伊曼(Neumann, C. G.)在求解非齐次微分方程

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + 3t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + (t^2+1-n^2)v = t\cos^2\frac{n\pi}{2} + n\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

时得到的.

施勒夫利多项式(Schläfli polynomial) 非齐次贝塞尔微分方程

$$\left[z^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + (z^2-n^2)\right]S_n(z) = 2n + 2(z-n)\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

的解. 即函数

$$S_0(t) = 0,$$

$$S_n(t) = \frac{2}{n}\left[tO_n(t) - \cos^2\frac{n\pi}{2}\right] = \sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{-n+2m} \quad (n=1,2,\cdots),$$

$$S_{-n}(t) = (-1)^{n+1}S_n(t) \quad (n=1,2,\cdots),$$

其中$O_n(t)$为诺伊曼多项式. 它们是洛默尔函数的特殊情形，

$$S_{2n}(t) = 4nS_{-1,2n}(t),$$
$$S_{2n+1}(t) = 2S_{0,2n+1}(t).$$

施勒夫利多项式比诺伊曼多项式更常用，因为它的某些性质在形式上更简单.

椭圆积分(elliptic integral) 计算椭圆弧长时出现的积分. 形式为

$$\int R(z, \sqrt{\varphi(z)})\mathrm{d}z,$$

其中$R(z,w)$是z和w的有理函数，$\varphi(z)$是z的(复系数)三次或四次多项式. 通过自变量的分式线性变换，总可以将椭圆积分化为标准形式. 常用的标准形式有两种：勒让德型椭圆积分和外尔斯特拉斯型椭圆积分.

当多项式$\varphi(z)$的次数高于4时，则称为超椭圆积分.

超椭圆积分(hyperelliptic integral) 见“椭圆积分”.

勒让德型椭圆积分(elliptic integral in Legendre's form) 亦称不完全椭圆积分. 椭圆积分的一种常用的标准形式. 根据被积函数的解析性质，可分为

$$F(k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\sin\varphi}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$E(k,\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\mathrm{d}z,$$

$$\Pi(h,k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\sin\varphi}\frac{\mathrm{d}z}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

分别称为第一类、第二类和第三类(不完全)椭圆积分，对应于被积函数除根式型枝点外没有奇点、或只

有留数为 0 的极点、或具有留数不为 0 的极点这三种情形. k 称为模数, h 为参数. 另外, 在椭圆积分中还常出现 $k'=\sqrt{1-k^2}$, 称为补模数.

$\varphi=\pi/2$ 时的勒让德型椭圆积分, 称为完全椭圆积分. 它们有

$$K=K(k)=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$E=E(k)=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\mathrm{d}z,$$

$$\Pi_1=\Pi_1(h,k)=\Pi\left(h,k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

分别为第一类、第二类和第三类完全椭圆积分.

勒让德标准型椭圆积分较适合于数值计算.

不完全椭圆积分(incomplete elliptic integral) 见“勒让德型椭圆积分”.

第一类不完全椭圆积分(incomplete elliptic integral of the first kind) 见“勒让德型椭圆积分”.

第二类不完全椭圆积分(incomplete elliptic integral of the second kind) 见“勒让德型椭圆积分”.

第三类不完全椭圆积分(incomplete elliptic integral of the third kind) 见“勒让德型椭圆积分”.

完全椭圆积分(complete elliptic integral) 见“勒让德型椭圆积分”.

第一类完全椭圆积分(complete elliptic integral of the first kind) 见“勒让德型椭圆积分”.

第二类完全椭圆积分(complete elliptic integral of the second kind) 见“勒让德型椭圆积分”.

第三类完全椭圆积分(complete elliptic integral of the third kind) 见“勒让德型椭圆积分”.

外尔斯特拉斯型椭圆积分(elliptic integral in Weierstrass' form) 椭圆积分的另一种常用的标准形式.

$$I_1=\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}},$$

$$I_2=\int\frac{z\mathrm{d}z}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}},$$

$$I_3=\int\frac{\mathrm{d}z}{(z-c)\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$$

分别称为第一类、第二类和第三类外尔斯特拉斯型椭圆积分, 常数 g_2 和 g_3 称为不变量.

外尔斯特拉斯标准型椭圆积分比较对称, 因此在理论研究上更为适用.

第一类外尔斯特拉斯型椭圆积分(Weierstrass' elliptic integral of the first kind) 见“外尔斯特拉斯型椭圆积分”.

第二类外尔斯特拉斯型椭圆积分(Weierstrass' elliptic integral of the second kind) 见“外尔斯特拉斯型椭圆积分”.

第三类外尔斯特拉斯型椭圆积分(Weierstrass' elliptic integral of the third kind) 见“外尔斯特拉斯型椭圆积分”.

椭圆函数(elliptic function) 亦称第一类椭圆函数. 双周期亚纯函数的统称. 在历史上, 椭圆函数是作为椭圆积分的反函数而引入的, 故名.

设 $2\omega,2\omega'$ 为椭圆函数 $f(z)$ 的两个基本周期, 且

$$\operatorname{Im}\ \omega'/\omega>0,$$

$$f(z+2\omega)=f(z+2\omega')=f(z),$$

$f(z)$ 在以任意一点 z 及 $z+2\omega,z+2\omega+2\omega',z+2\omega'$ 为顶点的平行四边形(称为周期平行四边形)内极点的个数(n 阶极点算作 n 个极点)称为椭圆函数 $f(z)$ 的阶.

椭圆函数具有下列性质:

1. 若 $f(z)$ 为椭圆函数, 则其任意阶导数 $f^{(n)}(z)$ 也是椭圆函数, 基本周期不变.

2. 椭圆函数的阶有限.

3. 刘维尔第一定理: 零阶椭圆函数必为常数.

4. 刘维尔第二定理: 椭圆函数在任一周期平行四边形内各极点处留数之和必为 0.

因此, 椭圆函数在任一周期平行四边形内不可能只有一个(一阶)极点. 换言之, 不存在一阶椭圆函数.

5. 椭圆函数在任一周期平行四边形内零点的个数(n 阶零点算作 n 个零点)等于它的阶.

6. 刘维尔第三定理: 对于任一常数 C, 方程 $f(z)=C$ 在周期平行四边形内根的个数(n 重根算作 n 个根)等于 $f(z)$ 的阶.

7. 刘维尔第四定理: 在一个周期平行四边形内, 椭圆函数零点 $a_k(k=1,2,\cdots)$ 之和与极点 $b_k(k=1,2,\cdots)$ 之和相差某一周期, 即

$$\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k=2m\omega+2m'\omega',$$

m,m' 为整数.

最简单的椭圆函数是二阶椭圆函数. 在这些函数中, 或者把(在任一周期平行四边形中)具有一个二阶极点(留数为 0)的函数选作标准函数(外尔斯特拉斯椭圆函数), 或者把具有两个一阶极点(留数互相抵消)的函数选作标准函数(雅可比椭圆函数).

第一类椭圆函数(elliptic function of the first kind) 即“椭圆函数”.

周期平行四边形(period parallelogram) 见“椭圆函数”.

椭圆函数的阶(order of elliptic function) 见“椭圆函数”.

第二类椭圆函数(elliptic function of the second kind) 椭圆函数的推广之一. 如果亚纯函数 $f(u)$ 满足

$$f(u+2\omega_1)=\mu_1 f(u),$$
$$f(u+2\omega_3)=\mu_3 f(u)$$

(ω_1,ω_3 及 μ_1,μ_3 均为常数),则称 $f(u)$ 为第二类椭圆函数. 例如,

$$f(u)=\frac{e^{\rho u}\sigma(u-v)}{\sigma(u)},$$

其中 $\sigma(u)$ 为外尔斯特拉斯 σ 函数,ρ 及 v 为常数. 此时 $\mu_i=e^{2\rho\omega_i-2v\eta_i}(i=1,3)$. η_i 的定义见“外尔斯特拉斯 ζ 函数”.

$2\omega_1$ 及 $2\omega_3$ 仍称为第二类椭圆函数的基本周期.

第三类椭圆函数(elliptic function of the third kind) 椭圆函数的进一步推广. 如果亚纯函数 $f(u)$ 满足

$$f(u+2\omega_i)=e^{a_iu+b_i}f(u)\quad(i=1,3)$$

(ω_i 及 a_i,b_i 均为常数),则称 $f(u)$ 为第三类椭圆函数. 外尔斯特拉斯 σ 函数就属于第三类椭圆函数.

$2\omega_1$ 及 $2\omega_3$ 仍称为第三类椭圆函数的基本周期.

椭圆 ϑ 函数(elliptic theta function) 周期为 1 和 τ ($\operatorname{Im}\tau>0$)的第三类椭圆函数. 定义为

$$\vartheta_1(v)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\pi v,$$

$$\vartheta_2(v)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+1/2)^2}\cos(2n+1)\pi v,$$

$$\vartheta_3(v)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2n\pi v,$$

$$\vartheta_4(v)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi v=\vartheta_0(v),$$

其中 $q=e^{i\pi\tau}$.

$\vartheta_1(v+1)=-\vartheta_1(v)$, $\vartheta_1(v+\tau)=-q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_1(v)$,
$\vartheta_2(v+1)=-\vartheta_2(v)$, $\vartheta_2(v+\tau)=q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_2(v)$,
$\vartheta_3(v+1)=\vartheta_3(v)$, $\vartheta_3(v+\tau)=q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_3(v)$,
$\vartheta_4(v+1)=\vartheta_4(v)$, $\vartheta_4(v+\tau)=-q^{-1}e^{-2\pi v i}\vartheta_4(v)$.

任何椭圆函数都可表示为几个 ϑ 函数之商.

有时还把 $\vartheta_i(v)$ 写成 $\vartheta_i(v|\tau)$ 以标明周期.

外尔斯特拉斯椭圆函数(Weierstrass elliptic function) 二阶椭圆函数的标准形式之一. 它是外尔斯特拉斯椭圆积分

$$u=\int_{\infty}^{z}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$$

的反函数,记为 $z=\wp(u)$.

设 $\wp(u)$ 的基本周期为 $2\omega_1$ 及 $2\omega_3$,则

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{mm'}{}'\left[\frac{1}{(u-\omega_{mm'})^2}-\frac{1}{\omega_{mm'}^2}\right],$$

其中 $\omega_{mm'}=2m\omega_1+2m'\omega_3$,$\sum'$ 表示对一切整数 m 及 m' 求和,$m=m'=0$ 除外.

$$g_2=60\sum_{mm'}{}'\frac{1}{\omega_{mm'}^4},$$

$$g_3=140\sum_{mm'}{}'\frac{1}{\omega_{mm'}^6}.$$

任何椭圆函数都可用 $\wp(u)$ 表示.

$\wp(u)$ 可用外尔斯特拉斯 ζ 函数 $\zeta(u)$ 表示:

$$\wp(u)=-\zeta'(u).$$

外尔斯特拉斯 ζ 函数(Weierstrass zeta function) 具有一阶极点的亚纯函数. 定义为

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum_{mm'}{}'\left[\frac{1}{u-\omega_{mm'}}+\frac{u}{\omega_{mm'}^2}+\frac{1}{\omega_{mm'}}\right],$$

其中 $\omega_{mm'}=2m\omega_1+2m'\omega_3$,$\sum'$ 表示对一切整数 m 及 m' 求和,$m=m'=0$ 除外. $\zeta(u)$ 具有拟周期性,即

$$\zeta(u+2\omega_i)=\zeta(u)+2\eta_i\quad(i=1,2,3),$$

其中 $\omega_2=-(\omega_1+\omega_3)$,$\eta_i=\zeta(\omega_i)$. 它不是双周期函数,因而不是椭圆函数.

$\zeta(u)$ 可用外尔斯特拉斯 σ 函数 $\sigma(u)$ 表示:

$$\zeta(u)=\frac{d}{du}\ln\sigma(u)=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}.$$

外尔斯特拉斯 σ 函数(Weierstrass sigma function) 一种第三类椭圆函数. 定义为

$$\sigma(u)=u\prod_{mm'}{}'\left\{\left(1-\frac{u}{u-\omega_{mm'}}\right)\times\exp\left(\frac{u}{\omega_{mm'}^2}+\frac{u^2}{\omega_{mm'}^2}\right)\right\},$$

其中

$$\omega_{mm'}=2m\omega_1+2m'\omega_3,$$

$\prod'$ 表示对一切整数 m 及 m' 求积,$m=m'=0$ 项除外. $\sigma(u)$ 具有拟周期性,即

$$\sigma(u+2\omega_i)=-e^{-2\eta_i(u+\omega_i)}\sigma(u)\quad(i=1,2,3),$$

其中 $\omega_2=-(\omega_1+\omega_3)$,$\eta_i=\zeta(\omega_i)$,$\zeta(u)$ 为外尔斯特拉斯 ζ 函数.

余 σ 函数(co-sigma function) 三个第三类椭圆函数的统称. 可由外尔斯特拉斯 σ 函数定义,

$$\sigma_i(u)=\frac{e^{-\eta_i u}\sigma(u+\omega_i)}{\sigma(\omega_i)}\quad(i=1,2,3),$$

其中 ω_i 及 η_i 的定义见“外尔斯特拉斯 ζ 函数”.

雅可比椭圆函数(Jacobian elliptic function)

二阶椭圆函数的标准形式之一. 包括第一类勒让德型椭圆积分

$$w=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

的反函数 $z=\operatorname{sn} w$ 及下列有关函数:

$$\operatorname{cn} w=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 w},\quad \operatorname{dn} w=\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 w},$$

$$\operatorname{nt} w=\frac{\operatorname{cn} w}{\operatorname{sn} w},\quad \operatorname{tn} w=\frac{\operatorname{sn} w}{\operatorname{cn} w},$$

$$\operatorname{sd} w=\frac{\operatorname{sn} w}{\operatorname{dn} w},\quad \operatorname{ds} w=\frac{\operatorname{dn} w}{\operatorname{sn} w}$$

$$\operatorname{cd} w=\frac{\operatorname{cn} w}{\operatorname{dn} w},\quad \operatorname{dc} w=\frac{\operatorname{dn} w}{\operatorname{cn} w},$$

$$\operatorname{ns} w=\frac{1}{\operatorname{sn} w},\quad \operatorname{nc} w=\frac{1}{\operatorname{cn} w},$$

$$\operatorname{nd} w=\frac{1}{\operatorname{dn} w}.\quad \varphi=\operatorname{am} w,$$

$\operatorname{sn} w$ 是奇函数, $\operatorname{cn} w$ 和 $\operatorname{dn} w$ 是偶函数, 它们分别是以 $4K, 2\mathrm{i}K'$; $4K, 2K+2\mathrm{i}K'$ 和 $2K, 4\mathrm{i}K'$ 为基本周期的椭圆函数, 其中 $K=K(k)=F(k,\pi/2)$ 为第一类完全椭圆积分, $K'=K(k')=F(k',\pi/2)$, $k'=\sqrt{1-k^2}$.

雅可比 Θ 函数(Jacobian Θ function) 雅可比(Jacobi, C. G. J.)研究椭圆函数时最初引进的 Θ 函数. 即

$$\Theta(w)=\vartheta_4\left(\frac{w}{2K}\,\middle|\,\frac{\mathrm{i}K'}{K}\right),$$

其中 ϑ_4 为椭圆 ϑ 函数 $\vartheta_4(v|\tau)$, 第二类椭圆积分

$$E(k,\varphi)=\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz=\int_0^w \operatorname{dn}^2 w\,dw\quad(\varphi=\operatorname{am} w)$$

可用 Θ 函数表示

$$E(k,\varphi)=\frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)}+\frac{E}{K}w,$$

其中

$$K(k)=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$$

和

$$E(k)=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)$$

分别为第一类和第二类完全椭圆积分.

雅可比 ζ 函数(Jacobian zeta function) 雅可比 Θ 函数的对数微商.

$$\operatorname{zn}(z,k)=\frac{d}{dz}\ln\Theta(z)=\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}.$$

$\operatorname{zn}(z,k)$ 是周期函数, 周期为 $2K(k)$, 且以 nK ($n=0,1,2,\cdots$)为其零点,

$$\operatorname{zn}(z,k)=\frac{\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{K}z}{\sinh\frac{n\pi}{K}K'},$$

其中 $K'\equiv K(k')$, $k'=\sqrt{1-k^2}$.

椭球坐标系(ellipsoidal coordinates) 正交曲线坐标系的一种. 设 $c<b<a$, 给定空间一点 (x,y,z), 则 θ 的三次方程

$$F(\theta)\equiv\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1=0$$

在区间

$$-c^2<\theta,\ -b^2<\theta<-c^2,\ -a^2<\theta<-b^2$$

中各有一个实根 λ,μ,ν, $F(\lambda)=0$, $F(\mu)=0$ 和 $F(\nu)=0$ 分别为通过点 (x,y,z)、与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

共焦、且互相正交的椭球面、单叶双曲面和双叶双曲面. (λ,μ,ν) 称为点 (x,y,z) 的椭球坐标,

$$x^2=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},$$

$$z^2=\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

椭球坐标还可以用椭圆函数(例如, 用雅可比椭圆函数)表示. 令

$$a^2+\lambda=(a^2-b^2)\operatorname{sn}^2\alpha,$$

$$a^2+\mu=(a^2-b^2)\operatorname{sn}^2\beta,$$

$$a^2+\nu=(a^2-b^2)\operatorname{sn}^2\gamma,$$

则有

$$x=k^2\sqrt{a^2-c^2}\,\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma,$$

$$y=-\frac{k^2}{k'}\sqrt{a^2-c^2}\,\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma,$$

$$z=\frac{\mathrm{i}}{k'}\sqrt{a^2-c^2}\,\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma,$$

其中

$$k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},\quad k'^2=1-k^2.$$

拉梅微分方程(Lamé differential equation) 有四个正则奇点($-a^2, -b^2, -c^2$ 及 ∞)的富克斯型方程, 最先由拉梅(Lamé, G.)在椭球坐标系中将拉普拉斯方程分离变量时得到, 故名. 它的代数形式为

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\Lambda}{d\lambda}-\frac{K\lambda+C}{4(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\Lambda=0$$

或

$$\frac{d^2\Lambda}{ds^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-h}\right)\frac{d\Lambda}{ds}$$

$$-\frac{Ks+H}{4s(s-1)(s-h)}\Lambda=0,$$

其中 a,b,c 及 K,C 均为常数，

$$s=\frac{a^2+\lambda}{a^2-b^2},\ h=\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2},\ H=\frac{C-Ka^2}{a^2-b^2}.$$

为了适应不同的研究目的，常将拉梅方程化为不同的形式，例如，修正的代数形式

$$\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}p^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-e_1}+\frac{1}{p-e_2}+\frac{1}{p-e_3}\right)\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}p}-\frac{Kp+B}{4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}\Lambda=0,$$

三角形式（其中 $k^2=1/h$）

$$[1-(k\cos\zeta)^2]\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}\zeta^2}+k^2\cos\zeta\sin\zeta\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\zeta}-[K(k\cos\zeta)^2-A]\Lambda=0,$$

外尔斯特拉斯形式

$$\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}u^2}=[K\mathscr{P}(u)+B]\Lambda,$$

和雅可比形式

$$\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}\alpha^2}=[Kk^2\mathrm{sn}^2(\alpha,k)+A]\Lambda,$$

其中 $\mathscr{P}(u)$ 是外尔斯特拉斯椭圆函数，$\mathrm{sn}\,\alpha$ 是雅可比椭圆函数.

拉梅函数（Lamé function） n 为非负整数时，拉梅方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-h}\right)\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}s}-\frac{n(n+1)s+H}{4s(s-1)(s-h)}\Lambda=0$$

的多项式解. 由于拉梅方程是富克斯型方程，有四个正则奇点：$s=0,1,h$ 和 ∞，前三个奇点的指标都是 0 和 1/2，而奇点 ∞ 的指标则为 $-n/2$ 和 $(n+1)/2$，因此，考虑到在 $0,1,h$ 处的奇异性，不妨将拉梅方程的解写成

$$s^{\rho}(s-1)^{\sigma}(s-h)^{\tau}\sum_{k=0}^{\infty}a_k s^k$$

的形式. 当 H 取某些特定值时，无穷级数可以截断为多项式. 在这些多项式解中，

$$E_n^m(s)=\sum_{k=0}^{[n/2]}a_k s^{\rho+k},$$

$$\rho=\begin{cases}0 & n=\text{偶数},\\ 1/2 & n=\text{奇数},\end{cases}$$

有 $[n/2]+1$ 个（对应于 H 的 $[n/2]+1$ 个特定值），称为第一类拉梅函数. 第二类和第三类拉梅函数的形式是

$$E_n^m(s)=(s-1)^{1/2}\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}b_k s^{\rho+k},$$

$$E_n^m(s)=(s-h)^{1/2}\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}c_k s^{\rho+k},$$

$$\rho=\begin{cases}0 & n=\text{奇数},\\ 1/2 & n=\text{偶数},\end{cases}$$

各有 $[(n+1)/2]$ 个，第四类拉梅函数的形式是

$$E_n^m(s)=[(s-1)(s-h)]^{1/2}\sum_{k=0}^{[n/2]-1}d_k s^{\rho+k},$$

$$\rho=\begin{cases}0 & n=\text{偶数},\\ 1/2 & n=\text{奇数},\end{cases}$$

有 $[n/2]$ 个. 这四类拉梅函数总称第一种拉梅函数（亦称拉梅多项式），共 $2n+1$ 个，对应于 H 的 $2n+1$ 个特定值. 这时拉梅方程的另一解（当然也共有 $2n+1$ 个）为第二种拉梅函数.

如果将拉梅方程写成外尔斯特拉斯形式，相应的第一种拉梅函数记为 $E_n^m(p)$，$p=\mathscr{P}(u)$，则第二种拉梅函数可以表示为

$$F_n^m(p)=(2n+1)E_n^m(p)\int_0^u\frac{\mathrm{d}u}{[E_n^m(p)]^2}.$$

上面介绍是的拉梅函数的一种分类法. 在其他文献中还有别的分类法.

第一类拉梅函数（Lamé function of the first species） 见“拉梅函数”.

第二类拉梅函数（Lamé function of the second species） 见“拉梅函数”.

第三类拉梅函数（Lamé function of the third species） 见“拉梅函数”.

第四类拉梅函数（Lamé function of the fourth species） 见“拉梅函数”.

第一种拉梅函数（Lamé function of the first kind） 见“拉梅函数”.

第二种拉梅函数（Lamé function of the second kind） 见“拉梅函数”.

拉梅多项式（Lamé polynomial） 即第一种拉梅函数. 见“拉梅函数”.

广义拉梅函数（generalized Lamé function） 当 n 不是整数时，拉梅方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-h}\right)\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}s}-\frac{n(n+1)s+H}{4s(s-1)(s-h)}\Lambda=0$$

的解的总称. 它们在形式上可以用 P 符号（参见“黎曼微分方程”）表示：

$$\Lambda=P\begin{Bmatrix}0 & 1 & h & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & -n/2; & \mathrm{sn}^2 z\\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & (n+1)/2 & \end{Bmatrix}.$$

周期拉梅函数（periodic Lamé function） 在 $0<k<1$ 和 $n(n+1)$ 为实数（即 n 为实数或 $n=-1/2+\mathrm{i}p$，p 为实数）时，拉梅方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Lambda}{\mathrm{d}z^2}+[\lambda-n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2\,z]\Lambda=0$$

的单周期解.此时 λ 只能取一系列特定值(本征值).

考虑到 $\mathrm{sn}^2(z)$ 的基本实周期为 $2K$(K 为第一类椭圆积分)以及 $\mathrm{sn}^2(z)$ 的对称性,则具有实周期的周期拉梅函数的周期只能是 $2pK,(p=1,2,\cdots)$,且一定是 $z-K$ 的偶函数(记为 $Ec_n^m(z,k^2),m=0,1,2,\cdots$)或奇函数(记为 $Es_n^m(z,k^2),m=1,2,3,\cdots$).在区间 $0\leqslant z<2pK$ 中,$Ec_n^m(z,k^2)$ 和 $Es_n^m(z,k^2)$ 都具有 mp 个零点.

$\mathrm{sn}(z,k)$ 的基本虚周期为 $2\mathrm{i}K'$.所以,虚周期的周期拉梅函数 $Ec'^m_n(z,k^2)$ 和 $Es'^m_n(z,k^2)$ 的周期必为

$$2\mathrm{i}pK' \quad (p=1,2,\cdots)$$

它们可通过雅可比虚变换化为实周期的周期拉梅函数 $Ec_n^m(z',k'^2)$ 和 $Es_n^m(z',k'^2)$,

$$Ec'^m_n(z,k^2)=Ec_n^m(z',k'^2),$$
$$Es'^m_n(z,k^2)=Es_n^m(z',k'^2),$$

其中

$$z'=\mathrm{i}(z-K-\mathrm{i}K'),\quad k'^2=1-k^2.$$

当 n 为非负整数时,对于给定的 n,总存在 $2n+1$ 个双周期解,它们就是第一种拉梅函数.

椭球调和函数(ellipsoidal harmonics) 拉普拉斯方程的一种特殊形式的多项式解.其普遍形式是

第一类椭球调和函数

$$\prod_{r=1}^{m}\Theta_r,$$

第二类椭球调和函数

$$x\prod_{r=1}^{m}\Theta_r,\ y\prod_{r=1}^{m}\Theta_r,\ z\prod_{r=1}^{m}\Theta_r,$$

第三类椭球调和函数

$$yz\prod_{r=1}^{m}\Theta_r,\ zx\prod_{r=1}^{m}\Theta_r,\ xy\prod_{r=1}^{m}\Theta_r,$$

第四类椭球调和函数

$$xyz\prod_{r=1}^{m}\Theta_r,$$

其中

$$\Theta_r=\frac{x^2}{a^2+\theta_r}+\frac{y^2}{b^2+\theta_r}+\frac{z^2}{c^2+\theta_r}-1,$$

θ_r 是拉梅多项式(以 λ 为自变量)的零点.因此,在椭球坐标系中与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

共焦的一系列坐标面上,椭球调和函数值恒为 0.

对于给定的非负整数 n,独立的 n 次椭球调和函数有 $2n+1$ 个:n 为偶数时为 $(n/2)+1$ 个第一类椭球调和函数和 $3n/2$ 个第三类椭球调和函数,n 为奇数时为 $3(n+1)/2$ 个第二类椭球调和函数和 $(n-1)/2$ 个第四类椭球调和函数.

第一类椭球调和函数(ellipsoidal harmonics of the first species) 见"椭球调和函数".

第二类椭球调和函数(ellipsoidal harmonics of the second species) 见"椭球调和函数".

第三类椭球调和函数(ellipsoidal harmonics of the third species) 见"椭球调和函数".

第四类椭球调和函数(ellipsoidal harmonics of the fourth species) 见"椭球调和函数".

球体波函数(spheroidal wave function) 亦称球体函数.即方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(1-z^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right]+\left(\lambda-k^2z^2-\frac{m^2}{1-z^2}\right)u=0$$

的解.$z=\pm1$ 为方程的正则奇点,$z=\infty$ 为非正则奇点,故球体波函数在 $[-1,1]$ 内具有与勒让德函数相似的性质,而在 ∞ 点邻域内则具有与贝塞尔函数相似的性质.

实际上,在一定区域内,球体波函数可用连带勒让德函数及贝塞尔函数的级数表示.

在旋转长椭球坐标系 (η,ξ,φ)

$$x=a\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi,$$
$$y=a\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi,$$
$$z=a\xi\eta$$

或旋转扁椭球坐标系 (η,ξ,φ)

$$x=a\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\cos\varphi,$$
$$y=a\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\sin\varphi,$$
$$z=a\xi\eta$$

中解亥姆霍兹方程,均可得到球体波函数.

球体函数(spheroidal function) 即"球体波函数".

希尔方程(Hill equation) 系数为周期函数的二阶线性微分方程.即

$$\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+F(x)u=0,$$

其中 $F(x)$ 以 2π 为周期.1877 年,希尔(Hill,G. W.)在讨论月球运动时首先研究过这个方程.

马蒂厄方程、拉梅方程都是希尔方程的特殊情形.通过适当变换,勒让德方程、汇合型超几何方程也可归结为希尔方程.

虽然 $F(x)$ 是周期函数,但希尔方程的解不一定具有周期性,不过,一定具有拟周期性

$$u(x+2\pi)=\sigma u(x)\quad(\sigma=\text{常数}),$$

亦即形如

$$u(x)=\mathrm{e}^{\mu x}\varphi(x),$$
$$\varphi(x+2\pi)=\varphi(x),$$
$$\sigma=\mathrm{e}^{2\pi\mu}$$

的解(弗洛凯定理).μ 称为特征指数,$\mu=0$ 或 i 时,$u(x)$ 为周期函数.

马蒂厄方程(Mathieu equation) 特殊的希尔方程之一.即

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+(a-2q\cos 2z)u=0,$$

其中 a 和 q 为常数. 这个方程首先出现在马蒂厄(Mathieu, É. L.)关于椭圆薄膜振动的工作中. 在椭圆柱坐标系(ξ,η,z)

$$x=a\cosh\xi\cos\eta,$$
$$y=a\sinh\xi\sin\eta,$$
$$z=z$$

中求解亥姆霍兹方程时,可得到马蒂厄方程.

马蒂厄函数(Mathieu function) 指马蒂厄方程的解的总称. 因为马蒂厄方程的系数是全 z 平面上的解析函数(惟一的奇点 $z=\infty$是非正则奇点),因此,马蒂厄方程的解必为整函数.

马蒂厄方程的周期解,即第一类马蒂厄函数,也常简称马蒂厄函数.

第一类马蒂厄函数(Mathieu function of the first kind) 马蒂厄方程的周期解. 在马蒂厄方程中,若 a 取适当的值(本征值),而使特征指数 μ(参见"希尔方程")成为 0 或 i,相应地 $u(z)$为以 π 或 2π 为周期的周期函数,称为第一类马蒂厄函数,简称马蒂厄函数. 根据它们的傅里叶展开形式,可以分为四种类型:

$$\mathrm{ce}_{2n}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{(2n)}\cos 2rz,$$

$$\mathrm{ce}_{2n+1}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}^{(2n+1)}\cos(2r+1)z,$$

$$\mathrm{se}_{2n+1}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{(2n+1)}\sin(2r+1)z,$$

$$\mathrm{se}_{2n+2}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+2}^{(2n+2)}\sin(2r+2)z,$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$相应的本征值分别记为 $a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n+1}$和 b_{2n+2},

$$a_0<a_1<b_1<b_2<a_2<a_3<b_3<\cdots,(q>0),$$
$$a_0<b_1<a_1<b_2<a_2<b_3<a_3<\cdots,(q<0),$$
$$a_n,b_n\to\infty,\qquad (n\to\infty).$$

这些马蒂厄函数满足正交归一条件

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{ce}_m(z,q)\mathrm{se}_n(z,q)\mathrm{d}z=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{ce}_m(z,q)\mathrm{ce}_n(z,q)\mathrm{d}z=\pi\delta_{mn},$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{se}_m(z,q)\mathrm{se}_n(z,q)\mathrm{d}z=\pi\delta_{mn}.$$

当 $q\to 0$ 时,

$$\mathrm{ce}_0(z,q)\to 1/\sqrt{2},$$
$$\mathrm{ce}_m(z,q)\to\cos mz,$$
$$\mathrm{se}_m(z,q)\to\sin mz.$$

由于第一类马蒂厄函数常出现在光波的椭圆柱面衍射问题中,故又称椭圆柱函数.

椭圆柱函数(elliptic cylinder function) 即"第一类马蒂厄函数".

第二类马蒂厄函数(Mathieu function of the second kind) 当 a 为本征值时,马蒂厄方程的非周期解. 与周期解(第一类马蒂厄函数)

$$\mathrm{ce}_{2n}(z,q),\quad \mathrm{ce}_{2n+1}(z,q),$$
$$\mathrm{se}_{2n+1}(z,q),\ \mathrm{se}_{2n+2}(z,q)$$

相对应,它们分别是

$$\mathrm{fe}_{2n}(z,q),\quad \mathrm{fe}_{2n+1}(z,q),$$
$$\mathrm{ge}_{2n+1}(z,q),\ \mathrm{ge}_{2n+2}(z,q).$$

变形马蒂厄方程(modified Mathieu equation) 周期为纯虚数的希尔方程. 即

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}-(a-2q\cosh 2z)u=0.$$

作变换 $\zeta=\mathrm{i}z$,即可化为马蒂厄方程. 在椭圆柱坐标系(ξ,η,z)

$$x=a\cosh\xi\cos\eta,$$
$$y=a\sinh\xi\sin\eta,$$
$$z=z$$

中求解亥姆霍兹方程时,可得到变形马蒂厄方程.

变形马蒂厄函数(modified Mathieu function) 变形马蒂厄方程的解的总称. 在马蒂厄函数中以 iz 代替 z 即可得到变形马蒂厄函数. 特别是,对应于第一类马蒂厄函数$\mathrm{ce}_m(z,q)$, $\mathrm{se}_m(z,q)$和第二类马蒂厄函数$\mathrm{fe}_m(z,q)$, $\mathrm{ge}_m(z,q)$,有

$$\mathrm{Ce}_m(z,q)=\mathrm{ce}_m(\mathrm{i}z,q),$$
$$\mathrm{Se}_m(z,q)=-\mathrm{i}\,\mathrm{se}_m(\mathrm{i}z,q),$$
$$\mathrm{Fey}_m(z,q)=\mathrm{fe}_m(\mathrm{i}z,q),$$
$$\mathrm{Gey}_m(z,q)=\mathrm{ge}_m(\mathrm{i}z,q),$$

分别称为第一类和第二类变形马蒂厄函数. 把它们线性组合起来,还可以得到第三类变形马蒂厄函数$\mathrm{Fek}_m(z,q)$, $\mathrm{Gek}_m(z,q)$:

$$\mathrm{Ce}_{2m}(z,q)+\mathrm{i}\,\mathrm{Fey}_{2m}(z,q)=-2\mathrm{i}\,\mathrm{Fek}_{2m}(z,q),$$
$$\mathrm{Ce}_{2m+1}(z,q)+\mathrm{i}\,\mathrm{Fey}_{2m+1}(z,q)=-2\mathrm{Fek}_{2m+1}(z,q),$$
$$\mathrm{Se}_{2m+1}(z,q)+\mathrm{i}\,\mathrm{Gey}_{2m+1}(z,q)=-2\mathrm{Gek}_{2m+1}(z,q),$$
$$\mathrm{Se}_{2m+2}(z,q)+\mathrm{i}\,\mathrm{Gey}_{2m+2}(z,q)=-2\mathrm{i}\,\mathrm{Gek}_{2m+2}(z,q).$$

另外还有

$$\mathrm{Me}_m^{(1)}(z,q)=\mathrm{Ce}_m(z,q)+\mathrm{i}\,\mathrm{Fey}_m(z,q),$$
$$\mathrm{Me}_m^{(2)}(z,q)=\mathrm{Ce}_m(z,q)-\mathrm{i}\,\mathrm{Fey}_m(z,q),$$
$$\mathrm{Ne}_m^{(1)}(z,q)=\mathrm{Se}_m(z,q)+\mathrm{i}\,\mathrm{Gey}_m(z,q),$$
$$\mathrm{Ne}_m^{(2)}(z,q)=\mathrm{Se}_m(z,q)-\mathrm{i}\,\mathrm{Gey}_m(z,q),$$

也称为第三类变形马蒂厄函数.

第一类变形马蒂厄函数(modified Mathieu function of the first kind) 见"变形马蒂厄函数".

第二类变形马蒂厄函数(modified Mathieu function of the second kind) 见"变形马蒂厄函数".

第三类变形马蒂厄函数(modified Mathieu function of the third kind) 见“变形马蒂厄函数”.

母函数(generating function) 亦称生成函数. 定义特殊函数、特别是正交多项式的基本方法之一，也是分析数学中定义数列或函数序列的常用手段. 若级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

在 t 平面上某区域内收敛于 $g(t)$，则称 $g(t)$ 为数列 $\{a_n\}$ 的母函数；若级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n \quad \text{或} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n$$

($\{c_n\}$ 为已知数列，例如 $c_n = 1/n!$) 在 t 平面上某区域内收敛于函数 $K(x,t)$，则称 $K(x,t)$ 为函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的母函数. 根据母函数 $K(x,t)$ 的解析性，可以导出函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的解析性.

更一般地，若函数 $K(x,t)$ 可形式地展开为级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n,$$

亦称 $K(x,t)$ 为函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的母函数.

在数论函数中，也把

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

称为数论函数 $f(n)$ 的母函数.

生成函数(generating function) 即“母函数”.

欧拉多项式(Euler polynomial) 母函数展开式

$$\frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (|t| < \pi),$$

所定义的多项式 $E_n(x)$.

$E_0(x) = 1$,

$E_1(x) = x - \frac{1}{2}$,

$E_2(x) = x(x-1)$,

$E_3(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right)$,

$E_4(x) = x(x-1)(x^2 - x - 1)$,

$E_5(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1)$,

…

$E_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式，满足

$$E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n,$$
$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x),$$
$$\frac{d^k E_n(x)}{dx^k} = \frac{n!}{(n-k)!} E_{n-k}(x).$$

欧拉数(Euler number) 一组重要的常数. 即函数 $\operatorname{sech} t$ 在 $t=0$ 点的泰勒展开式

$$\operatorname{sech} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} E_n t^{2n} \quad \left(|t| < \frac{\pi}{2}\right)$$

的系数 E_n. 前几个欧拉数为

$E_0 = 1$, $E_1 = 1$,
$E_2 = 5$, $E_3 = 61$,
$E_4 = 1385$, $E_5 = 50521$,
$E_6 = 2702765$, …

欧拉数与欧拉多项式 $E_n(x)$ 有关，

$$E_n = (-1)^n 2^{2n} E_{2n}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} \frac{E_k}{2^{2k}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-2k}.$$

有时也称 $2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right)$ 为欧拉数.

伯努利多项式(Bernoulli polynomial) 雅各布第一·伯努利(Bernoulli, Jacob Ⅰ)引进(去世后 1713 年发表)的一组多项式 $B_n(x)$，可由母函数展开式

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (|t| < 2\pi)$$

定义.

$B_0(x) = 1$,

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$,

$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$,

$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$,

$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$,

$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$,

$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$, …,

$B_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式，满足差分关系

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

伯努利数(Bernoulli number) 雅各布第一·伯努利(Bernoulli, Jacob Ⅰ)在计算整数的正整数次幂之和时引进的一组数(去世后 1713 年发表). 后来由欧拉(Euler, L.)定义为函数 $t/(e^t - 1)$ 展开式

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} B_n t^{2n} \quad (|t| < 2\pi)$$

中的系数 B_n. 前几个伯努利数为

$B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$

$B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$,

$B_5 = \frac{5}{66}$, $B_6 = \frac{691}{2730}$,

$B_7 = \frac{7}{6}$, $B_8 = \frac{3617}{510}$,

$B_9 = \frac{43867}{798}$, ……

伯努利数与伯努利多项式 $B_n(x)$ 有关，

$B_n=(-)^{n-1}B_{2n}(0)$,

$$B_n(x)=x^n-\frac{n}{2}x^{n-1}+\sum_{k=1}^{[n/2]}(-)^{k-1}\binom{n}{2k}B_kx^{n-2k}.$$

有些文献中也把伯努利多项式 $B_n(x)$ 在 $x=0$ 点的值 $B_n(0)$ 或其绝对值 $|B_n(0)|$ 直接称为伯努利数(参见《数学辞海》第一卷《初等数论》同名条).

勒让德多项式(Legendre polynomial) 基本的正交多项式之一. 其微分表示为

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^nk!\ (n-k)!\ (n-2k)!}x^{n-2k}.$$

它们也是勒让德方程

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0$$

在有界条件

$$|y(\pm 1)|<+\infty$$

下的本征函数,相应的本征值为

$$\lambda=n(n+1)\ (n=0,1,2\cdots).$$

历史上,勒让德多项式是勒让德(Legendre, A.-M.)在研究球体引力和行星绕日运动时,于 1784 年提出的. 其母函数展开式为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

$$\left(|t|<\min|x+\sqrt{x^2-1}|\right).$$

$\{P_n(x)\}$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上构成正交完备函数集:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

对任何 $f(x)\in L^2[-1,1]$,其勒让德-傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$$

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx$$

依 L^2 范收敛于 $f(x)$;对任何

$$f(x)\in L^p[-1,1]\ (4/3<p<4),$$

其勒让德-傅里叶级数依 L^p 范收敛于 $f(x)$;在 $[-1,1]$ 上具有连续二阶导数的函数 $f(x)$,其勒让德-傅里叶级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

勒让德多项式是勒让德函数

$$P_\nu(z)=F\left(\nu+1,-\nu;1;\frac{1-z}{2}\right)$$

当 ν 为非负整数时的特殊情形,$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 为超几何函数.

正交多项式系(system of orthogonal polynomials) 正交函数系的一种. 设在区间 (a,b) 上给定权函数 $\rho(x)$ ($\rho\geqslant 0$,且几乎处处有 $\rho(x)>0$),并定义 (a,b) 上函数 $f(x),g(x)$ 的内积为

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx.$$

将 $\{x^n|n=0,1,2,\cdots\}$ 按施密特方法关于 $\rho(x)$ 正交化,适当规定最高次项的系数,即可得到在 (a,b) 上关于 $\rho(x)$ 的正交多项式 $\{p_n(x)\}$. 它们在函数空间 $L_\rho^2(a,b)$ 内是完备的. $L_\rho^2(a,b)$ 为满足 $(f,f)<+\infty$ 的函数 $f(x)$ 所构成的空间.

常见的正交多项式系见下表:

$p_n(x)$	a	b	权函数 $\rho(x)$	特 殊 值
雅可比多项式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $\alpha>-1,\beta>-1$	-1	1	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}$
格根鲍尔多项式 $C_n^{(\alpha)}(x)$ $\alpha>-1/2$	-1	1	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$	$C_n^{(\alpha)}(1)=\begin{cases}\frac{2}{n+\delta_{n0}}, & \alpha=0\\ \binom{n+2\alpha-1}{n}, & \alpha\neq 0\end{cases}$
第一类切比雪夫多项式 $T_n(x)$	-1	1	$(1-x^2)^{-1/2}$	$T_n(1)=1$
第二类切比雪夫多项式 $U_n(x)$	-1	1	$(1-x^2)^{-1/2}$	$U_n(1)=n+1$
勒让德多项式 $P_n(x)$	-1	1	1	$P_n(1)=1$
广义拉盖尔多项式 $L_n^{(\alpha)}(x),\alpha>1$	0	$+\infty$	$e^{-x}x^\alpha$	$L_n^{(\alpha)}(0)=\binom{n+\alpha}{n}$
拉盖尔多项式 $L_n(x)$	0	$+\infty$	e^{-x}	$L_n^{(\alpha)}(0)=1$
埃尔米特多项式 $H_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$	e^{-x^2}	$H_n(0)=\begin{cases}(-1)^{n/2}\frac{n!}{(n/2)!}, & n=\text{偶数}\\ 0, & n=\text{奇数}\end{cases}$

第一类切比雪夫多项式(Chebyshev polynomial of the first class) 基本的正交多项式之一.第一类切比雪夫方程(n 为非负整数)

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0$$

的多项式解,

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$$

$$=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

其母函数展开式为

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n$$

$$\left(|t|<\min|x\pm\sqrt{x^2-1}|\right).$$

$\{T_n(x)\}$在$[-1,1]$上关于权函数 $1/\sqrt{1-x^2}$正交:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}\delta_{nm}(1+\delta_{n0}).$$

设 $p_n(x)$为在$[-1,1]$上 x^n 的 $n-1$ 次最佳逼近多项式,则 $x^n-p_n(x)=2^{-n+1}T_n(x)$.

第一类移位切比雪夫多项式(shifted Chebyshev polynomial of the first class) 见"第一类切比雪夫多项式".

第二类切比雪夫多项式(Chebyshev polynomial of the second class) 基本的正交多项式之一.第二类切比雪夫方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+n(n+2)y=0$$

的多项式解,

$$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

其母函数展开式为

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n$$

$$(|t|<\min|x\pm\sqrt{x^2-1}|).$$

$\{U_n(x)\}$在$[-1,1]$上关于权函数 $\sqrt{1-x^2}$正交:

$$\int_{-1}^{1}U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx=\delta_{nm}.$$

第二类移位切比雪夫多项式(shifted Chebyshev polynomial of the second class) 见"第二类切比雪夫多项式".

拉盖尔多项式(Laguerre polynomial) 基本的正交多项式之一.拉盖尔方程

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+ny=0$$

的多项式解,

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k.$$

其母函数展开式为

$$\frac{1}{1-t}\exp\left[-\frac{xt}{1-t}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n\quad(|t|<1).$$

$\{L_n(x)\}$在$[0,+\infty)$上关于权函数 e^{-x}正交:

$$\int_0^{\infty}L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx=\delta_{nm}.$$

广义拉盖尔多项式(generalized Laguerre polynomial) 基本的正交多项式之一.广义拉盖尔方程

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1+\alpha-x)\frac{dy}{dx}+ny=0$$

的多项式解,

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{e^xx^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n+\alpha}{k+\alpha}x^k.$$

其母函数展开式为

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\exp\left[-\frac{xt}{1-t}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(\alpha)}(x)t^n$$

$$(\alpha>-1,|t|<1).$$

$\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$在$[0,+\infty)$上关于权函数 $x^\alpha e^{-x}$正交:

$$\int_0^{+\infty}L_n(x)L_m(x)x^\alpha e^{-x}dx=\frac{1}{n!}\Gamma(n+\alpha+1)\delta_{nm}.$$

对 $f(x)\in L_\rho^2[0,+\infty)$ ($\rho(x)=x^\alpha e^{-x},\alpha>-1$),其拉盖尔-傅里叶级数依 L_ρ^2 范收敛于 $f(x)$.

埃尔米特多项式(Hermite polynomial) 基本的正交多项式之一.埃尔米特方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2ny=0$$

的多项式解,

$$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^kn!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

其母函数展开式为

$$e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n.$$

$\{H_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上关于权函数 $\rho(x)=e^{-x^2}$正交:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx=2^nn!\sqrt{\pi}\delta_{nm}.$$

对任何 $f(x)\in L_\rho^2(-\infty,+\infty)$ $(\rho(x)=e^{-x^2})$,其埃尔米特-傅里叶级数依 L_ρ^2 范收敛于 $f(x)$.另有函数

$$\mathrm{He}_n(x)=2^{-n/2}\mathrm{H}_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

亦称为埃尔米特多项式.

雅可比多项式(Jacobi polynomial) 基本的正交多项式之一.雅可比方程

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{dy}{dx}$$

$$+n(n+\alpha+\beta+1)y=0$$

的多项式解，

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\times\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]$$
$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k$$
$$(\alpha,\beta>-1).$$

其母函数展开式为

$$[R(1+R-t)^{\alpha}(1+R+t)^{\beta}]^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-\alpha-\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n$$
$$(R=\sqrt{1-2xt+t^2},|t|<1,\alpha,\beta>-1).$$

$\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$在$[-1,1]$上关于权函数

$$\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

正交：

$$\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\mathrm{d}x=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{nm}.$$

雅可比多项式也称为超几何多项式.

$\alpha=\beta=\mu$ 时，$P_n^{(\mu,\mu)}(x)$为超球函数(参见“超球函数”).

勒让德多项式 $P_n(x)$、第一类切比雪夫多项式 $T_n(x)$和格根鲍尔多项式 $C_n^{\lambda}(x)$也都是雅可比多项式的特殊情形，

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\begin{cases}P_n(x) & (\alpha=\beta=0),\\ \dfrac{(2n-1)!!}{2^n n!}T_n(x) & (\alpha=\beta=-1/2),\\ \dfrac{(\lambda+1/2)_n}{(2\lambda)_n}C_n^{\lambda}(x) & (\alpha=\beta=\lambda-1/2),\end{cases}$$

其中$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$.

当 $\alpha\geqslant-1/2,\beta\geqslant-1/2$，且

$$4\max\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha+3},\frac{\beta+1}{2\beta+3}\right)<p<4\min\left(\frac{\alpha+1}{2\alpha+1},\frac{\beta+1}{2\beta+1}\right)$$

时，对任何 $f(x)\in L_\rho^p$ $(\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta})$，其雅可比-傅里叶级数依 L_ρ^p 范收敛于 $f(x)$.

超几何多项式(hypergeometric polynomial) 即“雅可比多项式”.

格根鲍尔多项式(Gegenbauer polynomial) 亦称超球多项式. 基本的正交多项式之一. 格根鲍尔方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-(2\lambda+1)x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n(n+2\lambda)y=0$$

的多项式解，

$$C_n^{\lambda}(x)=\frac{(-1)^n(2\lambda)_n}{2^n n!\ (\lambda+1/2)_n}\frac{1}{(1-x^2)^{\lambda-1/2}}\times\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(1-x^2)^{n+\lambda-1/2}]$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\Gamma(\lambda+n-k)}{k!\ (n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

其母函数展开式为

$$(1-2xt+x^2)^{-\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{\lambda}(x)t^n$$
$$(|t|<\min|x+\sqrt{x^2-1}|).$$

$\{C_n^{\lambda}(x)\}$在$[-1,1]$上关于权函数 $\rho(x)=(1-x^2)^{\lambda-1/2}$正交：

$$\int_{-1}^{1}C_n^{\lambda}(x)C_m^{\lambda}(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\Gamma(n+2\lambda)}{2^{2\lambda-1}n!(\lambda+n)[\Gamma(\lambda)]^2}\delta_{nm}.$$

当 $\lambda>0$，且

$$\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}<p<\frac{2\lambda+1}{\lambda}$$

时，对任何 $f(x)\in L_\rho^p$ $(\rho(x)=(1-x^2)^{\lambda}-1/2)$，其格根鲍尔-傅里叶级数依 L_ρ^p 范收敛于 $f(x)$.

格根鲍尔多项式是雅可比多项式的特殊情形，

$$C_n^{\lambda}(x)=\frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n}P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(x),$$

也是超球函数的特殊情形.

超球多项式(ultraspherical polynomial) 即“格根鲍尔多项式”.

离散变量的正交多项式(orthogonal polynomials of a discrete variable) 自变量只取离散值的正交多项式. 设区间$[a,b]$上函数 $\phi(x)$，$\psi(x)$的内积为

$$(\phi,\psi)=\sum_i w^*(x_i)\phi(x_i)\psi(x_i),$$

其中自变量 x_i 为整数，$w^*(x_i)>0$ 且$\sum_i w^*(x_i)$有限. 则可定义出相应的离散变量的正交多项式 $f_n(x)$.

类似于连续变量时正交多项式的微分表示，离散变量的正交多项式可用的有限差分

$$f_n(x)=\frac{1}{r_n w^*(x)}\Delta^n[w^*(x)g(x,n)]$$

表示，其中 r_n 为(与 n 有关的)常数，

$$g(x,n)=g(x)g(x-1)g(x-2)\cdots g(x-n+1),$$

$g(x)$为(与 n 无关)多项式，差分定义为

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x),$$
$$\Delta^n f(x)=\Delta[\Delta^{n-1}f(x)].$$

撰　稿　吴崇试　邸继征
审　阅　梁昆淼

附录　特殊函数公式

检索须知

1. 如非特殊指明，本公式表中 k,l,m,n 一律表示整数（椭圆积分和椭圆函数中的模数 k 和补模数 k' 除外），x,y,t 表示实变数，z,u,v,w 表示复变数，$\bar{z}$ 表示 z 的复共轭.

2. $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)=\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$；$(\alpha)_0=1$

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)}=\frac{(-)^n\Gamma(n-\alpha)}{n!\Gamma(-\alpha)}$$

$$(v,m)=\frac{[4v^2-3^2]\cdots[4v^2-(2m-1)^2]}{2^{2m}m!}=\frac{\Gamma\left(v+m+\frac{1}{2}\right)}{m!\Gamma\left(v-m+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases}\qquad \varepsilon_n=2-\delta_{n0}=\begin{cases}1 & n=0\\ 2 & n\neq 0\end{cases}$$

伽马函数及其他相关函数

伽马函数(Gamma function)

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$=s^z\int_0^{\infty e^{i\alpha}}t^{z-1}e^{-st}dt \qquad (|\arg s+\delta|<\pi/2,\delta>0,\mathrm{Re}z>0;0<\mathrm{Re}z<1\text{ 时 }\arg s+\delta=\pm\pi/2\text{ 亦成立})$$

$$=\frac{1}{(z)_n}\int_0^\infty e^{-t}t^{z+n-1}dt \qquad (\mathrm{Re}z>-n,n\text{ 为非负整数})$$

$$=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right\} \qquad (z\neq\text{负整数})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\ n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \qquad (z\neq\text{负整数})$$

$$=\lambda^z\int_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1}t^{\lambda-1}dt \qquad (\mathrm{Re}\lambda>0,\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\int_0^\infty e^{-t}(t-z)t^{z-1}\ln t\ dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\frac{\lambda^z}{\cos\alpha z}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)dt \qquad (\mathrm{Re}z>0,\lambda>0,|\alpha|<\pi/2)$$

$$=\frac{\lambda^z}{\sin\alpha z}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)dt \qquad (\mathrm{Re}z>-1,\lambda>0,|\alpha|<\pi/2)$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^{z/2}}{\sin\left(z\arctan\frac{b}{a}\right)}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-at}\sin bt\ dt \qquad (\mathrm{Re}z>-1,\mathrm{Re}a>|\mathrm{Im}b|)$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^{z/2}}{\cos\left(z\arctan\frac{b}{a}\right)}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-at}\cos bt\ dt \qquad (\mathrm{Re}z>0,\mathrm{Re}a>|\mathrm{Im}b|)$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{\pi z}{2}}\int_0^\infty t^{z-1}\cos t\ dt \qquad (0<\mathrm{Re}z<1)$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi z}{2}}\int_0^\infty t^{z-1}\sin t\ dt \qquad (0<|\mathrm{Re}z|<1)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right\}$$ （γ 为欧拉常数）

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty e^{i\alpha}}^{(0^+)}e^t t^{-z}dt$$ （$|\alpha|<\pi/2$，$|\arg t-\alpha|<\pi$. 积分路线：从∞点出发，沿辐角为 $\pi+\alpha$ 的半射线绕原点正向一周，再回到∞点）

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(n+1)=n!,\quad \Gamma(1)=\Gamma(2)=1$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n+z)\Gamma(n-z)=\frac{\pi z}{\sin\pi z}[(n-1)!]^2\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-z\right)=\frac{1}{\cos\pi z}\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2\prod_{k=1}^{n}\left[1-\frac{4z^2}{(2k-1)^2}\right]$$

$$\Gamma(nz)=(2\pi)^{(1-n)/2}n^{nz-1/2}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)$$

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(z+1)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n,\ c_0=1,\ c_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-)^{k+1}s_{k+1}c_{n-k},\ s_1=\gamma,\ s_n=\zeta(n)$$ （$\mathrm{Re}z>0$）

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n z^n,\ d_0=1,\ d_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-)^{k}s_{k+1}d_{n-k},\ s_1=\gamma,\ s_n=\zeta(n)$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\frac{2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}$$

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right\}\frac{e^{-zt}}{t}dt$$ （$\mathrm{Re}z>0$）

$$=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right\}\frac{e^{-zt}}{t}dt$$ （$\mathrm{Re}z>0$）

$$=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+2\int_0^{\infty}\frac{\arctan\frac{t}{z}}{e^{2\pi t}-1}dt$$ （$\mathrm{Re}z>0$）

$$\ln\Gamma(z+1)=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\pi z}{\sin\pi z}-\ln\frac{1+z}{1-z}\right]+(1-\gamma)z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\zeta(2n+1)}{2n+1}z^{2n+1}$$

$$=-\gamma z+\sum_{n=2}^{\infty}(-)^n\frac{\zeta(n)}{n}z^n$$ （$|z|<1$）

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi z}{\sin\pi z}-\gamma z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{2n+1}z^{2n+1}$$ （$|z|<1$）

$$\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)\sin 2n\pi x\,dx=\frac{1}{2n\pi}[\gamma+\ln(2n\pi)]$$ （$n=1,2,3,\cdots$）

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\,dx=\frac{1}{4n}$$ （$n=1,2,3,\cdots$）

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\int_x^{x+1}\ln\Gamma(x)dx=x\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi)$$

$$\int_x^{x+n}\ln\Gamma(x)dx=x\ln x+(x+1)\ln(x+1)+\cdots+(x+n-1)\ln(x+n-1)-nx-\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{n}{2}\ln(2\pi)$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)}e^{-a\ln z}=1 \qquad (|\arg z|<\pi)$$

$$\Gamma(z)\sim\sqrt{2\pi}z^{z-1/2}e^{-z}\left[1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+\frac{163879}{209018880z^5}+\frac{5246819}{75246796800z^6}-\frac{534703531}{902961561600z^7}+\cdots\right] \qquad (|\arg z|<\pi,|z|\to\infty)$$

$$\ln\Gamma(z)\sim\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-)^{k-1}B_k}{2k(2k-1)}z^{-2k+1}+R_n(z)$$

$$\left[B_k\text{ 为伯努利数},|R_n(z)|<\frac{B_n}{2n(2n-1)}\left(|z|\cos\frac{\arg z}{2}\right)^{1-2n},|\arg z|<\pi,|z|\to\infty\right]$$

贝塔函数(Beta function)

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$=\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du \qquad (\mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0)$$

$$=\frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-k)}{k!\ (p+k)} \qquad (\mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0)$$

$$=\frac{p+q}{pq}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k(p+q+k)}{(p+k)(q+k)} \qquad (p,q\neq 0,-1,-2,\cdots)$$

$$=(b-a)^{1-p-q}\int_a^b(t-a)^{p-1}(b-t)^{q-1}dt \qquad (b>a,\mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0)$$

$$=2^{1-p-q}\int_0^1[(1+t)^{p-1}(1-t)^{q-1}+(1+t)^{q-1}(1-t)^{p-1}]dt \qquad (\mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0)$$

$$=\frac{(b-c)^p(a-c)^q}{(b-a)^{p+q-1}}\int_a^b\frac{(t-a)^{p-1}(b-t)^{q-1}}{(t-c)^{p+q}}dt \qquad (\mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0,c<a<b)$$

$$=2^{2-p-q}\int_{-1}^1\frac{(1+t)^{2p-1}(1-t)^{2q-1}}{(1+t^2)^{p+q}}dt \qquad (\mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0)$$

$$=\int_1^\infty\frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt \qquad (\mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0)$$

$$=\int_0^1\frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt \qquad (\mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0)$$

$$=2a^qb^p\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}t}{(a\cos^2t+b\sin^2t)^{p+q}}dt \qquad (\mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0,a>0,b>0)$$

$$=2b^p\int_0^\infty\cosh t\sinh^{2p-1}t(1+b\sinh^2t)^{-p-q}dt \qquad (\mathrm{Re}p>0,\mathrm{Re}q>0,b>0)$$

$$B(p,q)B(p+q,r)=B(q,r)B(q+r,p)=B(r,p)B(r+p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}$$

$$\frac{p+q}{q}B(p,q+1)=\frac{p+q}{p}B(p+1,q)=B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1)$$

$$B(p,p)=2^{1-2p}B\left(p,\frac{1}{2}\right)$$

$$B(p,p)B\left(p+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{p}2^{1-4p}$$

$$\frac{1}{B(n,m)}=m\binom{n+m-1}{n-1}=n\binom{n+m-1}{m-1} \qquad (m,n\text{ 为正整数})$$

$$B(p-1,q)=\sum_{k=0}^{\infty}B(p,q+k)$$

$$B\left(\frac{p}{a},q-\frac{p}{a}\right)=ab^{p/a}\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+bt^a)^q}dt \qquad (a>0,|\arg b|<\pi,0<\mathrm{Re}p<a\mathrm{Re}q)$$

$$B\left(\frac{p}{r},q\right)=r\int_0^\infty e^{-pt}(1-e^{-rt})^{q-1}dt \qquad \left(\mathrm{Re}\frac{p}{r}>0,\mathrm{Re}r>0,\mathrm{Re}q>0\right)$$

$$B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q-p}{2}\right)=2\int_0^\infty\sinh^pt\cosh^{-q}t\,dt \qquad [\mathrm{Re}p>-1,\mathrm{Re}(q-p)>0]$$

$$B\left(\beta+\frac{\alpha}{\rho},\beta-\frac{\alpha}{\rho}\right)=4^{1-\beta}\rho\int_0^\infty\frac{\cosh(2\alpha t)}{\cosh^{2\beta}\rho t}dt \qquad \left[\mathrm{Re}\left(\beta\pm\frac{\alpha}{\rho}\right)>0,\rho>0\right]$$

$$\frac{1}{B(p,q)}=\frac{2^{p+q-1}(p+q-1)}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(p-q)t\cos^{p+q-2}t\,dt$$
$$=\frac{2^{p+q-2}(p+q-1)}{\pi\cos\frac{p-q}{2}\pi}\int_0^{\pi}\cos(p-q)t\sin^{p+q-2}t\,dt$$
$$=\frac{2^{p+q-2}(p+q-1)}{\pi\sin\frac{p-q}{2}\pi}\int_0^{\pi}\sin(p-q)t\sin^{p+q-2}t\,dt$$

普西函数(psi function)

$$\psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\left\{\ln n-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{z+k}\right\}$$
$$=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{t}e^{-t}-\frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}}\right]dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$
$$=\int_0^{\infty}[e^{-t}-(1+t)^{-z}]t^{-1}dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$
$$=-\gamma+\int_0^{1}\frac{1-t^{z-1}}{1-t}dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$
$$=-\gamma+\int_0^{\infty}[(1+t)^{-1}-(1+t)^{-z}]t^{-1}dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$
$$=-\int_0^{1}\left[\frac{1}{\ln t}+\frac{t^{z-1}}{1-t}\right]dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$
$$=\ln z-\frac{1}{2z}-2\int_0^{\infty}t[(t^2+z^2)(e^{2\pi t}-1)]^{-1}dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$
$$=-\gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{z+k}\right)$$
$$=-\gamma-\frac{1}{z}+z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(z+k)}$$
$$=\ln z-\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{z+k}-\ln\left(1+\frac{1}{z+k}\right)\right]$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\psi(z)=(-1)^{n+1}n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^{n+1}} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\psi(z+n)=\psi(z)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z+k} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\psi(z-n)=\psi(z)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-k} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\psi(nz)=\ln n+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi\left(z+\frac{k}{n}\right) \qquad (n=2,3,\cdots)$$

$$\psi(z)-\psi(1-z)=-\pi\cot\pi z$$

$$\psi(z)-\psi(-z)=-\pi\cot\pi z-\frac{1}{z}$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}+z\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-z\right)=\pi\tan\pi z$$

$$\psi\left(\frac{3}{4}-n\right)-\psi\left(\frac{1}{4}+n\right)=\pi \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\lim_{n\to\infty}[\psi(z+n)-\ln n]=0$$

$$\psi(1)=-\gamma$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2$$

$$\psi\left(-\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2+2$$

$$\psi(n)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \qquad (n=2,3,\cdots)$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\pm n\right)=-\gamma-2\ln 2+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2}-3\ln 2$$

$$\psi\left(\frac{3}{4}\right)=-\gamma+\frac{\pi}{2}-3\ln 2$$

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}\ln 3$$

$$\psi\left(\frac{2}{3}\right)=-\gamma+\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}\ln 3$$

$$\psi\left(\frac{m}{n}\right)=-\gamma-\ln n-\frac{\pi}{2}\cot\frac{m\pi}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2km\pi}{n}\ln\left(2\sin\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\psi'(n)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\psi'\left(\frac{1}{2}\pm n\right)=\frac{\pi^2}{2}\mp 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{a+nb}=\frac{1}{2b}\left[\psi\left(1+\frac{a}{2b}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)\right]$$

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{a+nb}=\frac{1}{b}\left[\psi\left(1+m+\frac{a}{b}\right)-\psi\left(\frac{a}{b}\right)\right]$$

$$\sum_{n=1}^{2m}\frac{(-1)^{n-1}}{a+nb}=\frac{1}{2b}\left[\psi\left(m+\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2b}\right)-\psi\left(m+1+\frac{a}{2b}\right)+\psi\left(1+\frac{a}{2b}\right)\right]$$

$$\frac{z}{a}-\frac{1}{2}\frac{z(z-1)}{a(a-1)}+\frac{1}{3}\frac{z(z-1)(z-2)}{a(a-1)(a-2)}+\cdots=\psi(a+z)-\psi(z) \qquad [\mathrm{Re}(a+z)>0,a\neq 0,-1,-2,\cdots]$$

$$\psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{k=1}^{m}(-)^{k-1}\frac{B_k}{2k}z^{-2k}+O(z^{-2m-2}) \qquad (|z|\to\infty,|\arg z|<\pi)$$

$$\psi(z)\sim\ln z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\frac{1}{120z^4}-\frac{1}{252z^6}+\cdots \qquad (|z|\to\infty,|\arg z|<\pi)$$

$$\psi^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}\left[\frac{(n-1)!}{z^n}+\frac{n!}{2}z^{-n-1}+\sum_{k=1}^{m}\frac{(n+2k-1)!}{(2k)!}B_k z^{-n-2k}\right]+O(z^{-n-2m-2})$$

$$(n=1,2,\cdots,|z|\to\infty,|\arg z|<\pi)$$

黎曼ζ函数(Riemann zeta function)

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z} \qquad (\mathrm{Re}z>1)$$

$$=\frac{1}{1-2^{1-z}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\frac{1}{1-2^{-z}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^z} \qquad (\mathrm{Re}z>1)$$

$$\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)=\pi^{-(1-z)/2}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z)$$

$$\zeta(1-z)=2(2\pi)^{-z}\Gamma(z)\cos\frac{z\pi}{2}\zeta(z)$$

$$\frac{1}{\zeta(z)}=\prod_{\text{素数}p}\left(1-\frac{1}{p^z}\right) \qquad (\mathrm{Re}z>1)$$

$$\zeta(z)=\zeta(z,m+1)+\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r^z} \qquad (m=1,2,\cdots)$$

$$\zeta(-n)=-\frac{B_{n+1}(1)}{n+1} \qquad [B_n(a)\text{为伯努利多项式}]$$

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\zeta(-2m)=0 \qquad (m=1,2,\cdots)$$

$$\zeta(1-2m)=(-)^m\frac{B_m}{2m} \qquad (B_m\text{ 为伯努利数})$$

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}}{(2m)!}\pi^{2m}B_m \qquad (B_m\text{ 为伯努利数})$$

广义ζ 函数(generalized zeta function)

$$\zeta(z,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^z} \qquad (\mathrm{Re}z>1,a\neq 0,-1,-2,\cdots)$$

$$=\frac{2\Gamma(1-z)}{(2\pi)^{1-z}}\left[\sin\frac{z\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{z-1}\cos 2n\pi a+\cos\frac{z\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^{z-1}\sin 2n\pi a\right] \qquad (\mathrm{Re}z<0,0<a\leqslant 1)$$

$$=\frac{a^{-z}}{2}+\frac{a^{1-z}}{z-1}+2\int_0^{\infty}\frac{(a^2+t^2)^{-z/2}}{e^{2\pi t}-1}\sin\left(z\arctan\frac{t}{a}\right)dt \qquad (\mathrm{Re}a>0,z\neq 1)$$

$$=\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}\frac{w^{z-1}e^{aw}}{1-e^w}dw$$

[积分路线为:从∞点出发,沿负实轴绕 $w=0$ 正向一周,再回到 $w=\infty$. 积分路线内不包含 $1-e^w$ 的任何零点]

$$\Gamma(z)\zeta(z,a)=\int_0^{\infty}\frac{x^{z-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}dx \qquad (\mathrm{Re}a>0,\mathrm{Re}z>1)$$

$$\lim_{z\to 1}\left\{\zeta(z,a)-\frac{1}{z-1}\right\}=-\psi(a)$$

$$\zeta(-n,a)=-\frac{B_{n+1}(a)}{n+1} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\zeta(z,a)=\frac{1}{\Gamma(z)}\left[a^{1-z}\Gamma(z-1)+\frac{1}{2}\Gamma(z)a^{-z}+\sum_{n=1}^{m}\frac{B_n}{(2n)!}\Gamma(z+2n-1)a^{-2n-z+1}\right]+O(a^{-2m-z-1})$$

$$(|a|\to\infty,|\arg a|<\pi)$$

欧拉常数(Euler's constant)

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n\right]$$

$$=-\psi(1)$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\left[\zeta(x)-\frac{1}{x-1}\right]$$

$$=-\int_0^{\infty}e^{-t}\ln t\,dt$$

$$=-\int_0^1\ln(-\ln t)dt$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{\ln t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$=-\int_0^{\infty}\left[\cos t-\frac{1}{1+t}\right]\frac{dt}{t}$$

$$=1-\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin t}{t}-\frac{1}{1+t}\right]\frac{dt}{t}$$

$$=-\int_0^{\infty}\left[e^{-t}-\frac{1}{1+t}\right]\frac{dt}{t}$$

$$=-\int_0^{\infty}\left[e^{-t}-\frac{1}{1+t^2}\right]\frac{dt}{t}$$

$$=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{te^t}\right]dt$$

$$=\int_0^1(1-e^{-t})dt-\int_1^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-)^n}{n}\zeta(n)$$

$$=1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$=\frac{5}{6}-12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)(2n+4)}$$

$$=\frac{47}{60}-120\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{(2n+1)(2n+4)(2n+5)(2n+6)}$$

$$=\frac{319}{420}-1680\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{(2n+1)(2n+5)(2n+6)(2n+7)(2n+8)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}-\frac{1}{120n^4}+\frac{1}{252n^6}-\frac{1}{240n^8}+\cdots+(-1)^{r-1}\frac{B_r}{2r}\frac{1}{n^{2r}}+(-1)^r\frac{B_{r+1}}{2(r+1)}\frac{\theta}{n^{2r+2}}\quad(0<\theta<1)$$

$$=0.57721566490153286060651209008 2\cdots$$

超几何函数

超几何函数(hypergeometric functions)

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=F(\beta,\alpha;\gamma;z)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{n!\ \Gamma(n+\gamma)}z^n\qquad(|z|<1,\gamma\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\mathrm{d}t\qquad[\mathrm{Re}\gamma>\mathrm{Re}\beta>0,|\arg(1-z)|<\pi]$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty}\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(\gamma+t)}(-z)^t\mathrm{d}t$$

[$|\arg(-z)|<\pi,\alpha,\beta\neq0,-1,-2,\cdots;\alpha-\beta\neq$整数;$\Gamma(\alpha+t)$和$\Gamma(\beta+t)$的极点保持在积分路线的左边,$\Gamma(-t)$的极点保持在积分路线的右边]

$$F(\alpha,\alpha+n;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha+n)}(-z)^{-\alpha-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+n}(\alpha-\gamma+1)_{k+n}}{k!\ (k+n)!}$$
$$\times[\ln(-z)+\psi(1+k)-\psi(\alpha+n+k)-\psi(\gamma-\alpha-k-n)+\psi(1+k+n)]z^{-k}$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+n)}(-z)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_k\Gamma(n-k)}{k!\ \Gamma(\gamma-\alpha-k)}z^{-k}$$

[$|\arg(-z)|<\pi,|z|>1,\gamma-\alpha\neq0,\pm1,\pm2,\cdots;n=0,1,2,\cdots;n=0$时去掉右端第二项的有限和]

$$F(\alpha,\alpha+k;\alpha+k+l;z)=\frac{(-)^{k+l}\Gamma(\alpha+k+l)}{\Gamma(\alpha+k)}(-z)^{-\alpha-k}\sum_{n=l}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+k}(n-l)!}{(n+k)!\ n!}z^{-n}$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+k+l)}{\Gamma(\alpha+k)}\frac{(-z)^{-\alpha-k}}{(k+l-1)!}\sum_{n=0}^{l-1}\frac{(\alpha)_{n+k}(1-k-l)_{n+k}}{n!\ (n+k)!}$$
$$\times[\ln(-z)+\psi(n+k+1)+\psi(n+1)-\psi(\alpha+n+k)-\psi(1-n)]z^{-n}$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha+k+l)}{\Gamma(\alpha+k)}(-z)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(k-n-1)!\ (\alpha)_n}{n!\ (k+l-n-1)!}z^{-n}$$

[$|\arg(-z)|<\pi,\alpha+k\neq0,-1,-2,\cdots;l,m=0,1,2,\cdots;l=0$或$m=0$时去掉右端二项有限和]

$$F(\alpha,\beta;\alpha+\beta+n;z)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!\ (1-n)_k}(1-z)^k$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(z-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_k(\beta+n)_k}{k!\ (k+n)!}$$
$$\times[\ln(1-z)-\psi(k+1)+\psi(\alpha+k+n)+\psi(\beta+k+n)-\psi(1+k+n)](1-z)^k$$

[$|\arg(1-z)|<\pi,\ |1-z|<1,\ n=0,1,2,\cdots;n=0$时去掉右端第二项的有限和]

$$F(\alpha,\beta;\alpha+\beta-n;z)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+\beta-n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha-n)_k(\beta-n)_k}{k!\ (1-n)_k}(1-z)^k$$
$$-\frac{(-)^n\Gamma(\alpha+\beta-n)}{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(\beta-n)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{k!\ (k+n)!}[\ln(1-z)-\psi(k+1)+\psi(\alpha+k)+\psi(\beta+k)-\psi(1+k+n)](1-z)^n.$$

$[|\arg(1-z)|<\pi, |1-z|<1, n=1,2,3,\cdots]$

超几何方程的基本解(fundamental solutions of the hypergeometric equation)

> 下列各式中,$w_i^{(0)}(z)$,$w_i^{(1)}(z)$和$w_i^{(\infty)}(z)$分别是超几何方程
> $$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$
> 在$z=0,1$和∞的基本解,$i=1,2$.

$$\begin{aligned}
w_1^{(0)}(z)&=F(\alpha,\beta;\gamma;z)\\
&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma;z)\\
&=(1-z)^{-\alpha}\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right)\\
&=(1-z)^{-\beta}\left(\gamma-\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{z-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2^{(0)}(z)&=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;z)\\
&=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,1-\beta;2-\gamma;z)\\
&=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha-\gamma+1,1-\beta;2-\gamma;\frac{z}{z-1}\right)\\
&=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}F\left(1-\alpha,\beta-\gamma+1;2-\gamma;\frac{z}{z-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1^{(1)}(z)&=F(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)\\
&=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)\\
&=z^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1;1-\frac{1}{z}\right)\\
&=z^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1;1-\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2^{(1)}(z)&=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)\\
&=z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,1-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-z)\\
&=z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\alpha,1-\alpha;\gamma-\alpha-\beta+1;1-\frac{1}{z}\right)\\
&=z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(\gamma-\beta,1-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-\frac{1}{z}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1^{(\infty)}(z)&=(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1;\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right)\\
&=(-z)^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta,\gamma-\beta;\alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right)\\
&=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta;\alpha-\beta+1;\frac{1}{1-z}\right)\\
&=(-z)^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha-\gamma+1,1-\beta;\alpha-\beta+1;\frac{1}{1-z}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2^{(\infty)}(z)&=(-z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta-\gamma+1;\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}\right)\\
&=(-z)^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\alpha,\gamma-\alpha;\beta-\alpha+1;\frac{1}{z}\right)\\
&=(1-z)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha;\beta-\alpha+1;\frac{1}{1-z}\right)\\
&=(-z)^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}F\left(1-\alpha,\beta-\gamma+1;\beta-\alpha+1;\frac{1}{1-z}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1^{(0)}(z)&=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}w_1^{(1)}(z)+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}w_2^{(1)}(z)\\
&=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\beta)}w_1^{(\infty)}(z)+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}w_2^{(\infty)}(z)
\end{aligned}$$

$$w_2^{(0)}(z)=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}w_1^{(1)}(z)+\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}w_2^{(1)}(z)$$

$$=\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)}e^{i\pi(1-\gamma)}w_1^{(\infty)}(z)+\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}e^{i\pi(1-\gamma)}w_2^{(\infty)}(z)$$

$$w_1^{(1)}(z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}w_1^{(0)}(z)+\frac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}w_2^{(0)}(z)$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma)}e^{-i\pi\alpha}w_1^{(\infty)}(z)+\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\alpha)}e^{-i\pi\beta}w_2^{(\infty)}(z)$$

$$w_2^{(1)}(z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}w_1^{(0)}(z)+\frac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}w_2^{(0)}(z)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{-i\pi(\gamma-\beta)}w_1^{(\infty)}(z)+\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}e^{-i\pi(\gamma-\alpha)}w_2^{(\infty)}(z)$$

$$w_1^{(\infty)}(z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}w_1^{(0)}(z)+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(2-\gamma)}e^{i\pi\gamma}w_2^{(0)}(z)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(1-\beta)}e^{i\pi\alpha}w_1^{(1)}(z)-\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\alpha)}e^{i\pi(\gamma-\beta)}w_2^{(1)}(z)$$

$$w_2^{(\infty)}(z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\alpha)}w_1^{(0)}(z)+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(2-\gamma)}e^{i\pi\gamma}w_2^{(0)}(z)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}e^{i\pi\beta}w_1^{(1)}(z)-\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\beta)}e^{i\pi(\gamma-\alpha)}w_2^{(1)}(z)$$

超几何函数的邻次关系(contiguous relations of the hypergeometric functions)

$$\frac{d}{dz}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n,\beta+n;\gamma+n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{\alpha+n-1}F(\alpha,\beta;\gamma;z)]=(\alpha)_n z^{\alpha-1}F(\alpha+n,\beta;\gamma;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma-1}F(\alpha,\beta;\gamma;z)]=(\gamma-n)_n z^{\gamma-n-1}F(\alpha,\beta;\gamma-n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma-\alpha+n-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha,\beta;\gamma;z)]=(\gamma-\alpha)_n z^{\gamma-\alpha-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-n}F(\alpha-n,\beta;\gamma;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha,\beta;\gamma;z)]=\frac{(\gamma-\alpha)_n(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-n}F(\alpha,\beta;\gamma+n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{\alpha+n-1}F(\alpha,\beta;\gamma;z)]=(-)^n\frac{(\alpha)_n(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n}(1-z)^{\alpha-1}F(\alpha+n,\beta;\gamma+n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma-1}(1-z)^{\beta-\gamma+n}F(\alpha,\beta;\gamma;z)]=(\gamma-n)_n z^{\gamma-n-1}(1-z)^{\beta-\gamma}F(\alpha-n,\beta;\gamma-n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha,\beta;\gamma;z)]=(\gamma-n)_n z^{\gamma-n-1}(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-n}F(\alpha-n,\beta-n;\gamma-n;z)$$

$$(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta;\gamma;z)+[2\alpha-\gamma-(\alpha-\beta)z]F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\alpha(z-1)F(\alpha+1,\beta;\gamma;z)=0$$

$$(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta-1;\gamma;z)+[2\beta-\gamma-(\beta-\alpha)z]F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\beta(z-1)F(\alpha,\beta+1;\gamma;z)=0$$

$$\gamma(\gamma-1)(z-1)F(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)z]F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$
$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha,\beta;\gamma+1;z)=0$$

$$(\beta-\alpha)F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\alpha F(\alpha+1,\beta;\gamma;z)-\beta F(\alpha,\beta+1;\gamma;z)=0$$

$$(\beta-\gamma)F(\alpha,\beta-1;\gamma;z)+(\gamma-\alpha-\beta)F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\alpha(1-z)F(\alpha+1,\beta;\gamma;z)=0$$

$$\gamma[\alpha-(\gamma-\beta)z]F(\alpha,\beta;\gamma;z)-\alpha\gamma(1-z)F(\alpha+1,\beta;\gamma;z)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha,\beta;\gamma+1;z)=0$$

$$(1-\gamma)F(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+(\gamma-\alpha-1)F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\alpha F(\alpha+1;\beta;\gamma;z)=0$$

$$(\alpha-\gamma)F(\alpha-1,\beta;\gamma;z)+(\gamma-\alpha-\beta)F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\beta(1-z)F(\alpha,\beta+1;\gamma;z)=0$$

$$(\alpha-\gamma)F(\alpha-1,\beta;\gamma;z)+(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta-1;\gamma;z)+(\beta-\alpha)(1-z)F(\alpha,\beta;\gamma;z)=0$$

$$\gamma F(\alpha-1,\beta;\gamma;z)-\gamma(1-z)F(\alpha,\beta;\gamma;z)-(\gamma-\beta)zF(\alpha,\beta;\gamma+1;z)=0$$

$$(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta;\gamma;z)-(\gamma-1)(1-z)F(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+[\alpha-1-(\gamma-\beta-1)z]F(\alpha,\beta;\gamma;z)=0$$

$$\gamma[\beta-(\gamma-\alpha)z]F(\alpha,\beta;\gamma;z)-\beta\gamma(1-z)F(\alpha,\beta+1;\gamma;z)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha,\beta;\gamma+1;z)=0$$

$$(1-\gamma)F(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+(\gamma-\beta-1)F(\alpha,\beta;\gamma;z)+\beta F(\alpha,\beta+1;\gamma;z)=0$$

$$\gamma F(\alpha,\beta-1;\gamma;z)-\gamma(1-z)F(\alpha,\beta;\gamma;z)-(\gamma-\alpha)zF(\alpha,\beta;\gamma+1;z)=0$$

$$(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta-1;\gamma;z)-(\gamma-1)(1-z)F(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+[\beta-1-(\gamma-\alpha-1)z]F(\alpha,\beta;\gamma;z)=0$$

超几何函数的二次变换(quadratic transformations of the hypergeometric functions)

> 下列各式只在 $z=0$ 的邻域内有效，且规定当 $0\leqslant z<1/2$ 时有关根式均取正根.

$$F\left(\alpha,\beta;2\beta;\frac{4z}{(1+z)^2}\right)=(1+z)^{2\alpha}F\left(\alpha;\alpha-\beta+\frac{1}{2};\beta+\frac{1}{2};z^2\right)$$

$$\begin{aligned}F\left(2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};z\right)&=F\left(\alpha;\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};4z(1-z)\right)\\&=(1-2z)F\left(\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2};\alpha+\beta+\frac{1}{2};4z(1-z)\right)\\&=(1-2z)^{-2\alpha}F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2};\alpha+\beta+\frac{1}{2};\frac{4z(z-1)}{(1-2z)^2}\right)\end{aligned}$$

$$F\left(2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};-z\right)=[\sqrt{1+z}+\sqrt{z}]^{-4\alpha}F\left[2\alpha,\alpha+\beta;2\alpha+2\beta;\frac{4\sqrt{z(z+1)}}{(\sqrt{z+1}+\sqrt{z})^2}\right]$$

$$\begin{aligned}F(\alpha,1-\alpha;\gamma;z)&=(1-z)^{\gamma-1}F\left(\frac{\gamma-\alpha}{2},\frac{\alpha+\gamma-1}{2};\gamma;4z(1-z)\right)\\&=(1-z)^{\gamma-1}(1-2z)F\left(\frac{\gamma+\alpha}{2},\frac{\gamma-\alpha+1}{2};\gamma;4z(1-z)\right)\\&=(1-z)^{\gamma-1}(1-2z)^{\alpha-\gamma}F\left(\frac{\gamma-\alpha}{2},\frac{\gamma-\alpha+1}{2};\gamma;\frac{4z(z-1)}{(1-2z)^2}\right)\end{aligned}$$

$$F(\alpha,1-\alpha;\gamma;-z)=(1+z)^{\gamma-1}[\sqrt{1+z}+\sqrt{z}]^{2-2\alpha-2\gamma}F\left[\gamma+\alpha-1,\gamma-\frac{1}{2};2\gamma-1;\frac{4\sqrt{z(1+z)}}{(\sqrt{1+z}+\sqrt{z})^2}\right]$$

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta;\alpha-\beta+1;z)&=(1+z)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2};\alpha-\beta+1;\frac{4z}{(1+z)^2}\right)\\&=(1-z)^{1-2\beta}(1+z)^{2\beta-\alpha-1}F\left(\frac{\alpha+1}{2}-\beta,\frac{\alpha}{2}-\beta+1;\alpha-\beta+1;\frac{4z}{(1+z)^2}\right)\\&=(1-z)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2}-\beta;\alpha-\beta+1;-\frac{4z}{(1-z)^2}\right)\\&=(1+z)(1-z)^{-\alpha-1}F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha}{2}-\beta+1;\alpha-\beta+1;-\frac{4z}{(1-z)^2}\right)\\&=(1\pm\sqrt{z})^{-2\alpha}F\left[\alpha,\alpha-\beta+\frac{1}{2};2\alpha-2\beta+1;\pm\frac{4\sqrt{z}}{(1\pm\sqrt{z})^2}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2};\gamma;z\right)&=(1-z)^{-\alpha}F\left[2\alpha,2\gamma-2\alpha-1;\gamma;\frac{\sqrt{1-z}-1}{2\sqrt{1-z}}\right]\\&=(1\pm\sqrt{z})^{-2\alpha}F\left[2\alpha,\gamma-\frac{1}{2};2\gamma-1;\pm\frac{2\sqrt{z}}{1\pm\sqrt{z}}\right]\\&=\left(\frac{1+\sqrt{1-z}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left[2\alpha,2\alpha-\gamma+1;\gamma;\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta;2\beta;z)&=(1-z)^{-\alpha/2}F\left(\frac{\alpha}{2},\beta-\frac{\alpha}{2};\beta+\frac{1}{2};\frac{z^2}{4(z-1)}\right)\\&=\left(1-\frac{z}{2}\right)(1-z)^{-(\alpha+1)/2}F\left(\frac{\alpha+1}{2},\beta+\frac{1-\alpha}{2};\beta+\frac{1}{2};\frac{z^2}{4(z-1)}\right)\\&=(1-z)^{-\alpha/2}F\left[\alpha,2\beta-\alpha;\beta+\frac{1}{2};-\frac{(1-\sqrt{1-z})^2}{4\sqrt{1-z}}\right]\\&=\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2};\beta+\frac{1}{2};\left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right)\\&=(1-z)^{\beta-\alpha}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{\alpha-2\beta}F\left(\beta-\frac{\alpha}{2},\beta+\frac{1-\alpha}{2};\beta+\frac{1}{2};\left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right)\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{1-z}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left[\alpha,\alpha-\beta+\frac{1}{2};\beta+\frac{1}{2};\left(\frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right)^2\right]$$

$$F\left(\alpha,\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};z\right)=F\left(2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-z}\right)$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{1-z}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left[2\alpha,\alpha-\beta+\frac{1}{2};\alpha+\beta+\frac{1}{2};\frac{\sqrt{1-z}-1}{\sqrt{1-z}+1}\right]$$

$$F\left(\alpha,\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};-z\right)=[\sqrt{1+z}+\sqrt{z}]^{-2\alpha}F(2\alpha,\alpha+\beta;2\alpha+2\beta;2\sqrt{z(1+z)}-2z)$$

$$F\left(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\frac{1}{2};-z\right)=\frac{1}{\sqrt{1-z}}F\left(2\alpha-1,2\beta-1;\alpha+\beta-\frac{1}{2};\frac{1-\sqrt{1-z}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-z}}\left(\frac{1+\sqrt{1-z}}{2}\right)^{1-2\alpha}F\left[2\alpha-1,\alpha-\beta+\frac{1}{2};\alpha+\beta-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{1-z}-1}{\sqrt{1-z}+1}\right]$$

$$F\left(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\frac{1}{2};-z\right)=(1+z)^{-1/2}[\sqrt{1+z}+\sqrt{z}]^{1-2\alpha}F(2\alpha-1,\alpha+\beta-1;2\alpha+2\beta-2;2\sqrt{z(1+z)}-2z)$$

$$F\left(2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};\frac{1+z}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}F\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2};z^2\right)$$

$$-\frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}zF\left(\alpha+\frac{1}{2},\beta+\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right)$$

$$F\left(\alpha;\beta;\frac{1}{2};z\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[F\left[2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{z}}{2}\right]+F\left[2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};\frac{1-\sqrt{z}}{2}\right]\right]$$

$$F\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2};-z\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\beta)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha-\beta+1)}(1+z)^{-\alpha}$$

$$\times\left[F\left[2\alpha,1-2\beta;\alpha-\beta+1;\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{z+1}}\right]+F\left[2\alpha,1-2\beta;\alpha-\beta+1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{z+1}}\right]\right]$$

$$F\left(\alpha,\beta;\frac{3}{2};z\right)=\frac{1}{2\sqrt{z}}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\times\left[F\left[2\alpha-1,2\beta-1;\alpha+\beta-\frac{1}{2};\frac{1-\sqrt{z}}{2}\right]-F\left[2\alpha-1,2\beta-1;\alpha+\beta-\frac{1}{2};\frac{1+\sqrt{z}}{2}\right]\right]$$

超几何函数的特殊值(special values of the hypergeometric function)

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}\qquad[\gamma\neq0,-1,-2,\cdots,\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0]$$

$$F(\alpha,\beta;\alpha-\beta+1;-1)=2^{-\alpha}\frac{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\qquad(1+\alpha-\beta\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$(\alpha+1)F(-\alpha,1;\beta+2;-1)+(\beta+1)F(-\beta,1;\alpha+2;-1)=2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$$(\alpha,\beta\neq-2,-3,-4,\cdots)$$

$$F(1,\alpha;\alpha+1;-1)=\frac{\alpha}{2}\left[\psi\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)-\psi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\qquad(\alpha\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$F\left(2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}\qquad\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\neq0,-1,-2,\cdots\right)$$

$$F\left(1,1;\gamma+1;\frac{1}{2}\right)=\gamma\left[\psi\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)-\psi\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right] \qquad (\gamma\neq-1,-2,-3,\cdots)$$

$$F\left(\alpha,\alpha;\alpha+1;\frac{1}{2}\right)=2^{\alpha-1}\alpha\left[\psi\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)-\psi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \qquad (\alpha\neq-1,-2,-3,\cdots)$$

$$F\left(\alpha,1-\alpha;\gamma;\frac{1}{2}\right)=2^{1-\gamma}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma-\alpha+1}{2}\right)} \qquad (\gamma\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$F\left(2\alpha,2\beta;\alpha+\beta+1;\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha-\beta}\Gamma(\alpha+\beta+1)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\beta)}\right] \qquad (\alpha+\beta+1\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$F\left(-\alpha,-\alpha+\frac{1}{2};2\alpha+\frac{3}{2};-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{8}{9}\right)^{2\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(2\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(2\alpha+\frac{4}{3}\right)} \qquad \left(2\alpha+\frac{3}{2}\neq0,-1,-2,\cdots\right)$$

$$F\left(3\alpha,3\alpha+\frac{1}{2};3\alpha+\frac{5}{6};\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{3\alpha}\frac{\Gamma\left(2\alpha+\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{5}{6}\right)} \qquad \left(2\alpha+\frac{5}{6}\neq0,-1,-2,\cdots\right)$$

$$F\left(\alpha+\frac{1}{3},3\alpha;2\alpha+\frac{2}{3};e^{\pm i\pi/3}\right)=\frac{2^{2\alpha+2/3}\sqrt{\pi}}{3^{(3\alpha+1)/2}}e^{\pm i\pi\alpha/2}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \qquad \left(\alpha+\frac{5}{6}\neq0,-1,-2,\cdots\right)$$

特殊的超几何函数(special cases of the hypergeometric function)

$(1\pm z)^{\nu}=F(-\nu,\beta;\beta;\mp z)$

$(1+z)^{\alpha}-1=\alpha zF(1-\alpha,1;2;-z)$

$(1+z)(1-z)^{-2\alpha-1}=F(2\alpha,\alpha+1;\alpha;z)$

$(1+z)^{-2\alpha}+(1-z)^{-2\alpha}=2F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2};\frac{1}{2};z^2\right)$

$(1+z)^{1-2\alpha}-(1-z)^{1-2\alpha}=2(1-2\alpha)zF\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right)$

$(1+\sqrt{1-z^2})^{-2\alpha}=2^{-2\alpha}F\left(\alpha,\alpha+\frac{1}{2};2\alpha+1;z^2\right)$

$(1-z^2)^{-1/2}(1+\sqrt{1-z^2})^{-2\alpha}=2^{-2\alpha}F\left(\alpha+1,\alpha+\frac{1}{2};2\alpha+1;z^2\right)$

$(\sqrt{1+z^2}+z)^{2\alpha}+(\sqrt{1+z^2}-z)^{2\alpha}=2F\left(-\alpha,\alpha;\frac{1}{2};-z^2\right)$

$(1+z^2)^{-1/2}\left[(\sqrt{1+z^2}+z)^{2\alpha-1}+(\sqrt{1+z^2}-z)^{2\alpha-1}\right]=2F\left(1-\alpha;\alpha;\frac{1}{2};-z^2\right)$

$e^{-\alpha z}=\frac{\tanh z}{(2\cosh z)^{\alpha}}F\left(1+\frac{\alpha}{2},\frac{1+\alpha}{2};1+\alpha;\operatorname{sech}^2 z\right)$

$e^{z}=\lim_{k\to\infty}F\left(1,k;1;\frac{z}{k}\right)=1+z\lim_{k\to\infty}F\left(1,k;2;\frac{z}{k}\right)=1+z+\frac{z^2}{2}\lim_{k\to\infty}F\left(1,k;3;\frac{z}{k}\right)=\cdots$

$\cosh z=\lim_{k,k'\to\infty}F\left(k,k';\frac{1}{2};\frac{z^2}{4kk'}\right)$

$\frac{\sinh z}{z}=\lim_{k,k'\to\infty}F\left(k,k';\frac{3}{2};\frac{z^2}{4kk'}\right)$

$\ln(1\pm z)=zF(1,1;2;\mp z)$

$\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}=zF\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};z^2\right)$

$\ln(z+\sqrt{1+z^2})=zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right)=z(1+z^2)^{1/2}F\left(1,1;\frac{3}{2};-z^2\right)$

$\cos z=\lim_{k,k'\to\infty}F\left(k,k';\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4kk'}\right)$

$$\frac{\sin z}{z}=\lim_{k,k'\to\infty}F\left(k,k';\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4kk'}\right)$$

$$\frac{z}{\sin z}=F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2};\sin^2 z\right)$$

$$\frac{z}{\sin z\cos z}=F\left(1,1;\frac{3}{2};\sin^2 z\right)$$

$$\frac{z}{\tan z}=F\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-\tan^2 z\right)$$

$$\sec z=F\left(\frac{1}{2},1;1;\sin^2 z\right)$$

$$\sin\alpha z=\alpha\sin zF\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2},\frac{3}{2};\sin^2 z\right)$$

$$\sin 2\alpha z=\alpha\sin 2zF\left(1+\alpha,1-\alpha;\frac{3}{2};\sin^2 z\right)$$

$$=\frac{2\alpha\sin z}{\cos^{2\alpha+1}z}F\left(1+\alpha,\frac{1}{2}+\alpha;\frac{3}{2};-\tan^2 z\right)=2\alpha\sin z\cos^{2\alpha-1}zF\left(1-\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;\frac{3}{2};-\tan^2 z\right)$$

$$\cos\alpha z=F\left(\frac{\alpha}{2},-\frac{\alpha}{2};\frac{1}{2};\sin^2 z\right)=\cos zF\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2};\frac{1}{2};\sin^2 z\right)$$

$$=\cos^{\alpha}zF\left(-\frac{\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2};\frac{1}{2};-\tan^2 z\right)=\cos^{-\alpha}zF\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1+\alpha}{2};\frac{1}{2};-\tan^2 z\right)$$

$$\arcsin z=zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right)=z\sqrt{1-z^2}F\left(1,1;\frac{3}{2};z^2\right)$$

$$\arctan z=zF\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2\right)$$

$$\sin(\alpha\arcsin z)=\alpha zF\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2};\frac{3}{2};z^2\right)=\alpha z\sqrt{1-z^2}F\left(1+\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2};\frac{3}{2};z^2\right)$$

$$\cos(\alpha\arcsin z)=F\left(\frac{\alpha}{2},-\frac{\alpha}{2};\frac{1}{2};z^2\right)=\sqrt{1-z^2}F\left(\frac{1+\alpha}{2},\frac{1-\alpha}{2};\frac{1}{2};z^2\right)$$

$$T_n(1-2z)=F\left(-n,n;\frac{1}{2};z\right)$$

$$P_n(1-2z)=F(-n,n+1;1;z)$$

$$C_n^{(\alpha)}(1-2z)=\frac{(2\alpha)_n}{n!}F\left(-n,n+2\alpha;\alpha+\frac{1}{2};z\right)$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2z)=\frac{(1+\alpha)_n}{n!}F(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;z)$$

超几何函数的渐近展开(asymptotic expansions of the hypergeometric function)

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\ (\gamma)_n}z^n+O(|\gamma|^{-m-1})\qquad(\alpha,\beta,z\text{ 固定},|z|<1,|\gamma|\to\infty,|\arg\gamma|\leqslant\pi-\varepsilon<\pi)$$

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=e^{\mp i\pi\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(\beta z)^{-\alpha}[1+O(|\beta z|^{-1})]+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{\beta z}(\beta z)^{\alpha-\gamma}[1+O(|\beta z|^{-1})]$$

$$\left(|\beta|\to\infty,\frac{-3\pi}{2}<\arg\beta z<\frac{\pi}{2}\text{时取负号},\frac{-\pi}{2}<\arg\beta z<\frac{3\pi}{2}\text{时取正号}\right)$$

球 函 数

> 在以下各式中,z 表示任意复数(但不含实轴上$(-1,1)$间的点),x 表示$(-1,1)$中的实数.因此,需要严格区分函数 $Q_\nu(z)$,$P_\nu^\mu(z)$,$Q_\nu(z)$和 $Q_\nu(x)$,$P_\nu^\mu(x)$,$Q_\nu(x)$.
>
> 有关函数的相因子采用霍布森的定义.

勒让德函数(Legendre function)

$$P_\nu(z)=F\left(-\nu,\nu+1;1;\frac{1-z}{2}\right)$$

$$Q_\nu(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)}z^{-\nu-1}F\left(\frac{\nu+1}{2},\frac{\nu}{2}+1;\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)$$

$$P_\nu(z)=P_{-\nu-1}(z)$$

$$Q_\nu(z)-Q_{-\nu-1}(z)=\pi\cot\nu\pi P_\nu(z)$$ （$\nu\neq$整数）

$$P_\nu(-z)=e^{-i\pi\nu\operatorname{Im}z}P_\nu(z)-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}Q_\nu(z)$$

$$Q_\nu(-z)=-e^{i\pi\nu\operatorname{Im}z}Q_\nu(z)$$

$$P_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\varphi}{(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^{\nu+1}}$$ （$\operatorname{Re}z>0,\arg(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)|_{\varphi=\pi/2}=\arg z$）

$$Q_\nu(z)=\int_0^\infty\frac{d\varphi}{(z+\sqrt{z^2-1}\cosh\varphi)^{\nu+1}}$$ （$\operatorname{Re}\nu>-1$，ν 不为整数时 $(z+\sqrt{z^2-1}\cosh\varphi)|_{\varphi=0}$ 取主值）

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2}P_\nu(z)\left[\ln\frac{z+1}{z-1}-2\gamma-2\psi(\nu+1)\right]-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{k=1}^\infty\frac{\Gamma(k-\nu)\Gamma(k+\nu+1)}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}P_n(z)\left[\ln\frac{z+1}{z-1}-2\gamma-2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]+\sum_{k=1}^\infty\frac{(-)^k(n+k)!}{(k!)^2(n-k)!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$ （$n=1,2,3,\cdots$）

$$=\frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1}-\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{n-k}\right)P_{n-2k-1}(z)$$ （$n=1,2,3,\cdots$）

$$=\frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1}-P_n(z)\sum_{k=1}^n\frac{1}{kP_k(z)P_{k-1}(z)}$$ （$n=1,2,3,\cdots$）

$$(z^2-1)\frac{dP_\nu(z)}{dz}=(\nu+1)[P_{\nu+1}(z)-zP_\nu(z)]$$

$$(2\nu+1)zP_\nu(z)=(\nu+1)P_{\nu+1}(z)+\nu P_{\nu-1}(z)$$

$$(z^2-1)\frac{dQ_\nu(z)}{dz}=(\nu+1)[Q_{\nu+1}(z)-zQ_\nu(z)]$$

$$(2\nu+1)zQ_\nu(z)=(\nu+1)Q_{\nu+1}(z)+\nu Q_{\nu-1}(z)$$

$$P_{-1/2}(z)=\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{z+1}}K\left(\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\right)$$ （K 为完全椭圆积分）

$$=\frac{2}{\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{-1/2}K\left((z^2-1)^{1/4}(2z-2\sqrt{z^2-1})^{1/2}\right)$$ （K 为完全椭圆积分）

$$Q_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{z+1}}K\left(\sqrt{\frac{2}{z+1}}\right)=2[z+\sqrt{z^2-1}]^{-1/2}K(z-\sqrt{z^2-1})$$ （K 为完全椭圆积分）

$$P_{1/2}(z)=\frac{2}{\pi}[z+\sqrt{z^2-1}]^{1/2}E\left((z^2-1)^{1/4}(2z-2\sqrt{z^2-1})^{1/2}\right)$$ （K 和 E 为完全椭圆积分）

$$Q_{1/2}(z)=z\sqrt{\frac{2}{z+1}}K\left(\sqrt{\frac{z+1}{2}}\right)-2\sqrt{z+1}E\left(\sqrt{\frac{2}{z+1}}\right)$$ （K 和 E 为完全椭圆积分）

$$Q_0(z)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$Q_1(z)=\frac{z}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-1$$

$$Q_2(z)=\frac{1}{2}P_2(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-\frac{3}{2}z$$

$$Q_3(z)=\frac{1}{2}P_3(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-\frac{5}{2}z^2+\frac{2}{3}$$

$$\int_1^\infty P_\nu(z)Q_\sigma(z)dz=\frac{1}{(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}$$ [$\operatorname{Re}(\sigma-\nu)>0,\operatorname{Re}(\sigma+\nu+1)>0$]

$$\int_1^\infty Q_\nu(z)Q_\sigma(z)dz=\frac{\psi(\sigma+1)-\psi(\nu+1)}{(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}$$ [$\operatorname{Re}(\sigma+\nu)>-1,\nu,\sigma\neq-1,-2,-3,\cdots$]

$$\int_1^\infty[Q_\nu(z)]^2dz=\frac{\psi'(\nu+1)}{2\nu+1}$$ [$\operatorname{Re}\nu>-1/2$]

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{m=0}^\infty(2m+1)P_m(z)Q_m(\zeta)$$

$$\frac{n+1}{\zeta-z}[P_{n+1}(\zeta)P_n(z)-P_n(\zeta)P_{n+1}(z)]=\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m(z)P_m(\zeta)$$

$$\frac{1}{\zeta-z}\left\{1-(n+1)[P_{n+1}(z)Q_n(\zeta)-P_n(z)Q_{n+1}(\zeta)]\right\}=\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m(z)Q_m(\zeta)$$

$$P_n(z)Q_{n-1}(z)-Q_n(z)P_{n-1}(z)=\frac{1}{n} \qquad (n\geqslant 1)$$

$$P_n(z)Q_{n-2}(z)-Q_n(z)P_{n-2}(z)=\frac{(2n-1)z}{n(n+1)} \qquad (n\geqslant 2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}P_n(z)t^n & |t|<\min|z\pm\sqrt{z^2-1}| \\ \sum_{n=1}^{\infty}P_n(z)t^{-n-1} & |t|>\max|z\pm\sqrt{z^2-1}|\end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}}\ln\left[\frac{z-t+\sqrt{1-2tz+t^2}}{\sqrt{z^2-1}}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(z)t^n \qquad (\mathrm{Re}z>1,|t|<1)$$

$$P_\nu(x)=P_\nu(x+\mathrm{i}0)=P_\nu(x-\mathrm{i}0)=\frac{1}{2}[P_\nu(x+\mathrm{i}0)+P_\nu(x-\mathrm{i}0)]$$

$$Q_\nu(x)=\frac{1}{2}[Q_\nu(x+\mathrm{i}0)+Q_\nu(x-\mathrm{i}0)]=\frac{\pi}{2}\frac{\cos\nu\pi P_\nu(x)-P_\nu(-x)}{\sin\nu\pi} \qquad (\nu\neq\text{整数})$$

$$P_\nu(\cos\theta)=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\left(\frac{1}{\nu-n}-\frac{1}{\nu+n+1}\right)P_n(\cos\theta) \qquad (\nu\neq\text{整数};0\leqslant\theta<\pi)$$

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P_\nu(x)}{\mathrm{d}x}=(\nu+1)[P_{\nu+1}(x)-xP_\nu(x)]$$

$$(2\nu+1)xP_\nu(x)=(\nu+1)P_{\nu+1}(x)+\nu P_{\nu-1}(x)$$

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{d}Q_\nu(x)}{\mathrm{d}x}=(\nu+1)[Q_{\nu+1}(x)-xQ_\nu(x)]$$

$$(2\nu+1)xQ_\nu(x)=(\nu+1)Q_{\nu+1}(x)+\nu Q_{\nu-1}(x)$$

$$P_\nu(1)=1$$

$$P_\nu(0)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\frac{\nu\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$Q_\nu(0)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\frac{\nu\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$\frac{\mathrm{d}P_\nu(0)}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin\frac{\nu\pi}{2}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q_\nu(0)}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\pi}\cos\frac{\nu\pi}{2}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}$$

$$P_{-1/2}(x)=\frac{2}{\pi}K\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) \qquad (K\text{ 为完全椭圆积分})$$

$$Q_{-1/2}(x)=K\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) \qquad (K\text{ 为完全椭圆积分})$$

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$Q_1(x)=\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{2}P_2(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{3}{2}x$$

$$Q_3(x)=\frac{1}{2}P_3(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}$$

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{n-k}\right)P_{n-2k-1}(x) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$P_n(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\ (n-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k\cos(n-2k)\theta$$

$$P_n^{(r)}(\cos\theta)=\frac{(2r-1)!}{2^{r-1}(r-1)!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{1}{k!\ (n-r-k)!}\left(\frac{2r+1}{2}\right)_k\left(\frac{2r+1}{2}\right)_{n-r-k}\cos(n-r-2k)\theta \qquad (1\leqslant r\leqslant n)$$

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2^{n+2}}{\pi}\frac{n!}{(2n+1)!!}\left[\sin(n+1)\theta+\frac{1}{1}\frac{n+1}{2n+3}\sin(n+3)\theta+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}\sin(n+5)\theta+\cdots\right]$$

$$Q_n(\cos\theta)=2^{n+1}\frac{n!}{(2n+1)!!}\left[\cos(n+1)\theta+\frac{1}{1}\frac{n+1}{2n+3}\cos(n+3)\theta+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\theta+\cdots\right]$$

$$\int_0^1 x^\sigma P_\nu(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\sigma+1}}\frac{\Gamma(1+\sigma)}{\Gamma\left(1+\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma+\nu+3}{2}\right)} \qquad (\mathrm{Re}\sigma>-1)$$

$$\int_{-1}^1 P_\nu(x)P_\sigma(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi^2}\frac{2\sin\pi\nu\ \sin\pi\sigma[\psi(\nu+1)-\psi(\sigma+1)]+\pi\ \sin\pi(\sigma-\nu)}{(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)} \qquad (\sigma+\nu\neq-1)$$

$$\int_{-1}^1 [P_\nu(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2\nu+1}\left[1-\frac{2}{\pi^2}\sin^2\pi\nu\ \psi'(\nu+1)\right]$$

$$\int_{-1}^1 Q_\nu(x)Q_\sigma(x)\mathrm{d}x=\frac{2[\psi(\nu+1)-\psi(\sigma+1)][1+\cos\pi\sigma\ \cos\pi\nu]-\pi\ \sin\pi(\nu-\sigma)}{2(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)} \qquad (\nu,\sigma\neq-1,-2,\cdots)$$

$$\int_{-1}^1 [Q_\nu(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2-2\psi'(\nu+1)[1+\cos^2\pi\nu]}{2(2\nu+1)} \qquad (\nu\neq-1,-2,\cdots)$$

$$\int_{-1}^1 P_\nu(x)Q_\sigma(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi[1-\cos\pi(\sigma-\nu)]-2\sin\pi\nu\ \cos\pi\sigma[\psi(\nu+1)-\psi(\sigma+1)]}{\pi(\nu-\sigma)(\nu+\sigma+1)}$$
$$(\sigma+\nu+1\neq 0,\nu,\sigma\neq-1,-2,-3,\cdots)$$

$$\int_{-1}^1 P_\nu(x)Q_\nu(x)\mathrm{d}x=-\frac{\sin 2\pi\nu\ \psi'(\nu+1)}{\pi(2\nu+1)} \qquad (\nu\neq-1,-2,-3,\cdots)$$

$$\int_0^1 P_\nu(x)P_\sigma(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cos\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}\sin\frac{\pi\nu}{2}\cos\frac{\pi\sigma}{2}\right]$$

$$\int_0^1 Q_\nu(x)Q_\sigma(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}$$
$$\times\left\{[\psi(\nu+1)-\psi(\sigma+1)]-\pi\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}\cos\frac{\pi\sigma}{2}\sin\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cos\frac{\pi\nu}{2}\right]\right\}$$
$$(\nu,\sigma\neq-1,-2,\cdots)$$

$$\int_0^1 P_\nu(x)Q_\sigma(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(\sigma-\nu)(\sigma+\nu+1)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}\cos\frac{\pi(\nu-\sigma)}{2}-1\right] \qquad (\sigma\neq-1,-2,\cdots)$$

$$\int_{-1}^1 P_\nu(x)P_\sigma(x)(1+x)^{\nu+\sigma}\mathrm{d}x=\frac{2^{\nu+\sigma+1}[\Gamma(\nu+\sigma+1)]^4}{\Gamma(2\nu+2\sigma+2)[\Gamma(\nu+1)\Gamma(\sigma+1)]^2} \qquad [\mathrm{Re}(\nu+\sigma)>-1]$$

$$|P_\nu(\cos\theta)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{\nu\pi}\ \sin\theta} \qquad (0<\theta<\pi;\nu>1)$$

$$|Q_\nu(\cos\theta)|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{\nu\ \sin\theta}} \qquad (0<\theta<\pi;\nu>1)$$

另有部分公式见“勒让德多项式”.

连带勒让德函数(associated Legendre function)

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right)\qquad\left(\arg\frac{z+1}{z-1}\bigg|_{z>1}=0\right)$$

$$Q_\nu^\mu(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{z^{\nu+\mu+1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mu}F\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1,\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)\qquad[\arg(z^2-1)|_{z>1}=0;\arg z|_{z>0}=0]$$

$$P_\nu^\mu(z)=\frac{2^\mu(z^2-1)^{-\mu/2}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\mu+1/2)}\int_0^\pi\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos t\right)^{\nu+\mu}\sin^{-2\mu}t\,\mathrm{d}t\qquad(\mathrm{Re}\mu<1/2)$$

$$=\frac{2^{-\nu}(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu-\mu)}\int_0^\infty(z+\cosh t)^{\mu-\nu-1}\sinh^{2\nu+1}t\,\mathrm{d}t\qquad[\mathrm{Re}\mu>\mathrm{Re}\nu>-1,z\notin[-1,\infty)]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(-\mu+1/2)(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)}\int_0^\infty(z+\cosh t)^{\mu-1/2}\cosh(\nu+1/2)t\,\mathrm{d}t$$

$$[\mathrm{Re}(\mu-\nu)>0,\mathrm{Re}(\mu+\nu+1)>0]$$

$$=\frac{\Gamma(-\mu+1/2)(z^2-1)^{-\mu/2}}{2^\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)}\int_0^\infty(1+2tz+z^2)^{\mu-1/2}t^{-\nu-\mu-1}\mathrm{d}t\qquad[\mathrm{Re}(\nu+\mu)<0,\mathrm{Re}(\nu-\mu)>-1]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(z^2-1)^{-\mu/2}}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(-\nu-\mu)}\int_0^\infty t^{-\mu-1/2}K_{\nu+1/2}(t)\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t$$

$$[\mathrm{Re}(\nu-\mu+1)>0,\mathrm{Re}(\nu+\mu)<0,\mathrm{Re}>-1,z\notin[-1,1]]$$

$$P_\nu^{-\mu}(z)=\frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{2^\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+1/2)}\int_{-1}^1(1-t^2)^{\mu-1/2}(z+t\sqrt{z^2-1})^{\nu-\mu}\mathrm{d}t\qquad(\mathrm{Re}\mu>-1/2,|\arg(z\pm1)|<\pi)$$

$$=\frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{2^\nu\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty\frac{\sinh^{2\nu+1}t}{(z+\cosh t)^{\mu+\nu+1}}\mathrm{d}t\qquad[\mathrm{Re}z>-1,|\arg(z\pm1)|<\pi,\mathrm{Re}\nu>-1,\mathrm{Re}(\mu-\nu)>0]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(\mu+1/2)(z^2-1)^{\mu/2}}{\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^\infty\frac{\cosh(\nu+1/2)t}{(z+\cosh t)^{\mu+1/2}}\mathrm{d}t$$

$$[\mathrm{Re}z>-1,|\arg(z\pm1)|<\pi,\mathrm{Re}(\mu+\nu)>-1,\mathrm{Re}(\mu-\nu)>0]$$

$$P_\nu^\mu(\cosh\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sinh^\mu\alpha}{\Gamma(-\mu+1/2)}\int_0^\alpha\frac{\cosh(\nu+1/2)t}{(\cosh\alpha-\cosh t)^{\mu+1/2}}\mathrm{d}t\qquad(\alpha>0,\mathrm{Re}\mu<1/2)$$

$$=\frac{2^\mu\sinh^{-\mu}\alpha}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\mu+1/2)}\int_0^\pi\frac{(\cosh\alpha+\sinh\alpha\cos t)^{\nu+\mu}}{\sin^{2\mu}t}\mathrm{d}t\qquad(\mathrm{Re}\mu<1/2)$$

$$Q_\nu^\mu(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mu}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}(z^2-1)^{\mu/2}\int_{-1}^1(1-t^2)^\nu(z-t)^{-\nu-\mu-1}\mathrm{d}t\qquad[\mathrm{Re}(\nu+\mu)>-1,\mathrm{Re}\nu>-1,|\arg(z\pm1)|<\pi]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}(z^2-1)^{-\mu/2}\int_0^\pi\frac{\sin^{2\nu+1}t}{(z+\cos t)^{\nu-\mu+1}}\mathrm{d}t\qquad[\mathrm{Re}\nu>-1,\mathrm{Re}(\nu+\mu+1)>0]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^\mu\Gamma(\mu+1/2)\Gamma(\nu-\mu+1)}(z^2-1)^{\mu/2}\int_0^\infty\sinh^{2\mu}t\left(z+\sqrt{z^2-1}\cosh t\right)^{-\nu-\mu-1}\mathrm{d}t$$

$$[\mathrm{Re}(\nu\pm\mu+1)>0,|\arg(z\pm1)|<\pi]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\int_0^\infty\frac{\cosh\mu t}{(z+\sqrt{z^2-1}\cosh t)^{\nu+1}}\mathrm{d}t\qquad[\mathrm{Re}(\nu\pm\mu)>-1,\nu\neq-1,-2,-3,\cdots,|(z\pm1)|<\pi]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}2^\mu\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\mu+1/2)}\frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{(z+\sqrt{z^2-1})^{\nu+1/2}}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(\nu+\mu+1)t}(1-\mathrm{e}^{-t})\left[z+\sqrt{z^2-1}-ze^{-t}+(z^2-1)\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t$$

$$[\mathrm{Re}\mu<1/2,\mathrm{Re}(\nu+\mu+1)>0]$$

$$Q_\nu^\mu(\cosh\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mu}\sinh^\mu\alpha}{\Gamma(-\mu+1/2)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-(\nu+1/2)t}}{(\cosh t-\cosh\alpha)^{\mu+1/2}}\mathrm{d}t\qquad[\alpha>0,\mathrm{Re}\mu<1/2,\mathrm{Re}(\nu+\mu)>-1]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\sqrt{\pi}}{2^\mu\Gamma(\mu+1/2)}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}\sinh^\mu\alpha\int_0^\infty\frac{\sinh^{2\mu}t}{(\cosh\alpha+\sinh\alpha\cosh t)^{\nu+\mu+1}}\mathrm{d}t\qquad[\mathrm{Re}(\nu\pm\mu+1)>0]$$

$$\sqrt{z^2-1}P_\nu^{\mu+2}(z)+2(\mu+1)zP_\nu^{\mu+1}(z)-(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)\sqrt{z^2-1}P_\nu^\mu(z)=0$$

$$(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}P_\nu^{\mu-1}(z)=P_{\nu+1}^\mu(z)-P_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}P_\nu^{\mu+1}(z)=(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)-(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)P_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$(\nu-\mu+1)\sqrt{z^2-1}P_\nu^{\mu-1}(z)=zP_\nu^\mu(z)-P_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$(\nu+\mu)\sqrt{z^2-1}P_\nu^{\mu-1}(z)=P_{\nu+1}^\mu(z)-zP_\nu^\mu(z)$$

$$\sqrt{z^2-1}P_\nu^{\mu+1}(z)=(\nu-\mu)zP_\nu^\mu(z)-(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$\sqrt{z^2-1}P_\nu^{\mu+1}(z)=(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)-(\nu+\mu+1)zP_\nu^\mu(z)$$

$$(2\nu+1)zP_\mu^\nu(z)=(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$(z^2-1)\frac{\mathrm{d}P_\nu^\mu(z)}{\mathrm{d}z}=(\nu+\mu)(\nu-\mu+1)\sqrt{z^2-1}P_\nu^{\mu-1}(z)-\mu zP_\nu^\mu(z)$$

$$(z^2-1)\frac{\mathrm{d}P_\nu^\mu(z)}{\mathrm{d}z}=(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(z)-(\nu+1)zP_\nu^\mu(z)=\nu zP_\nu^\mu(z)-(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$\sqrt{z^2-1}Q_\nu^{\mu+2}(z)+2(\mu+1)zQ_\nu^{\mu+1}(z)-(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)\sqrt{z^2-1}Q_\nu^\mu(z)=0$$

$$(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}Q_\nu^{\mu-1}(z)=Q_{\nu+1}^\mu(z)-Q_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$(2\nu+1)\sqrt{z^2-1}Q_\nu^{\mu+1}(z)=(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)Q_{\nu+1}^\mu(z)-(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)Q_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$(\nu-\mu+1)\sqrt{z^2-1}Q_\nu^{\mu-1}(z)=zQ_\nu^\mu(z)-Q_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$(\nu+\mu)\sqrt{z^2-1}Q_\nu^{\mu-1}(z)=Q_{\nu+1}^\mu(z)-zQ_\nu^\mu(z)$$

$$\sqrt{z^2-1}Q_\nu^{\mu+1}(z)=(\nu-\mu)zQ_\nu^\mu(z)-(\nu+\mu)Q_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$\sqrt{z^2-1}Q_\nu^{\mu+1}(z)=(\nu-\mu+1)Q_{\nu+1}^\mu(z)-(\nu+\mu+1)zQ_\nu^\mu(z)$$

$$(2\nu+1)zQ_\nu^\mu(z)=(\nu-\mu+1)Q_{\nu+1}^\mu(z)+(\nu+\mu)Q_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$(z^2-1)\frac{\mathrm{d}Q_\nu^\mu(z)}{\mathrm{d}z}=(\nu+\mu)(\nu-\mu+1)\sqrt{z^2-1}Q_\nu^{\mu-1}(z)-\mu zQ_\nu^\mu(z)$$

$$(z^2-1)\frac{\mathrm{d}Q_\nu^\mu(z)}{\mathrm{d}z}=(\nu-\mu+1)Q_{\nu+1}^\mu(z)-(\nu+1)zQ_\nu^\mu(z)=\nu zQ_\nu^\mu(z)-(\nu+\mu)Q_{\nu-1}^\mu(z)$$

$$P_{-\nu-1}^\mu(z)=P_\nu^\mu(z)$$

$$Q_{-\nu-1}^\mu(z)-Q_\nu^\mu(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mu}\cos\nu\pi\,\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)P_\nu^{-\mu}(z)$$

$$P_\nu^{-\mu}(z)=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[P_\nu^\mu(z)-\frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\mu}\sin\mu\pi\,Q_\nu^\mu(z)\right]$$

$$Q_\nu^{-\mu}(z)=\mathrm{e}^{-2\mu\pi\mathrm{i}}\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}Q_\nu^\mu(z)$$

$$P_\nu^\mu(-z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}z)}P_\nu^\mu(z)-\frac{2\sin(\nu+\mu)\pi}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\mu}Q_\nu^\mu(z)$$

$$Q_\nu^\mu(-z)=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}z)}Q_\nu^\mu(z)$$

$$P_\nu^\mu(\cosh\alpha)=\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}}{\Gamma(-\nu-\mu)}\sqrt{\frac{2}{\pi\sinh\alpha}}Q_{-\mu-1/2}^{-\nu-1/2}(\coth\alpha)\qquad[\mathrm{Re}(\cosh\alpha)>0]$$

$$Q_\nu^\mu(\cosh\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{2\sinh\alpha}}\Gamma(\nu+\mu+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mu}P_{-\mu-1/2}^{-\nu-1/2}(\coth\alpha)\qquad[\mathrm{Re}(\cosh\alpha)>0]$$

$$P_\nu^m(z)=(z^2-1)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{p}_\nu(z)}{\mathrm{d}z^m}\qquad(m=0,1,2,\cdots)$$

$$P_\nu^{-m}(z)=(z^2-1)^{-m/2}\int_1^z\mathrm{d}z\int_1^z\cdots\int_1^z P_\nu(z)\mathrm{d}z\qquad(m=1,2,3,\cdots)$$

$$Q_\nu^m(z)=(z^2-1)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^mQ_\nu(z)}{\mathrm{d}z^m}\qquad(m=0,1,2,\cdots)$$

$$Q_\nu^{-m}(z)=(-)^m(z^2-1)^{-m/2}\int_z^\infty\mathrm{d}z\int_z^\infty\cdots\int_z^\infty Q_\nu(z)\mathrm{d}z\qquad(m=0,1,2,\cdots)$$

$$P_\nu^{1/2}(z)=(2\pi)^{-1/2}(z^2-1)^{-1/4}\left[(z+\sqrt{z^2-1})^{\nu+1/2}+(z+\sqrt{z^2-1})^{-\nu-1/2}\right]$$

$$Q_\nu^{1/2}(z)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(z^2-1)^{-1/4}(z+\sqrt{z^2-1})^{-\nu-1/2}$$

$$P_\nu^{-1/2}(z)=\frac{1}{2\nu+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(z^2-1)^{-1/4}\left[(z+\sqrt{z^2-1})^{\nu+1/2}-(z+\sqrt{z^2-1})^{-\nu-1/2}\right]$$

$$Q_\nu^{-1/2}(z)=-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2\pi}}{2\nu+1}(z^2-1)^{-1/4}(z+\sqrt{z^2-1})^{-\nu-1/2}$$

$$P_\nu^{-\nu}(z)=\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(1+\nu)}(z^2-1)^{\nu/2}$$

$$P_\nu\left(z\zeta-\sqrt{z^2-1}\sqrt{\zeta^2-1}\cos\varphi\right)=P_\nu(z)P_\nu(\zeta)+2\sum_{m=1}^{\infty}(-)^m P_\nu^m(z)P_\nu^{-m}(\zeta)\cos m\varphi$$

$[\mathrm{Re}z>0,\mathrm{Re}\zeta>0,|\arg(z-1)|<\pi,|\arg(\zeta-1)|<\pi]$

$$Q_\nu\left(xx'-\sqrt{x^2-1}\sqrt{x'^2-1}\cos\varphi\right)=Q_\nu(x)P_\nu(x')+2\sum_{m=1}^{\infty}(-)^m Q_\nu^m(x)P_\nu^{-m}(x')\cos m\varphi$$

$[x,x',\varphi$ 为实数$,1<x'<x,\nu\neq-1,-2,-3,\cdots]$

$$Q_n(xx'+\sqrt{x^2+1}\sqrt{x'^2+1}\cosh\alpha)=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(m-n-1)!\ (m+n)!}Q_n^m(\mathrm{i}x)Q_n^m(\mathrm{i}x')\mathrm{e}^{-m\alpha}\qquad(x,x',\alpha>0)$$

$$P_\nu^\mu(z)=\left[\frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}z^\nu+\frac{2^{-\nu-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(-\nu-1/2)}{\Gamma(-\nu-\mu)}z^{-\nu-1}\right][1+O(z^{-2})]$$

$(2\nu\neq\pm1,\pm3,\pm5,\cdots,|\arg z|<\pi,|z|\gg1)$

$$Q_\nu^\mu(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu}z^{-\nu-1}[1+O(z^{-2})]\qquad(2\nu\neq-3,-5,-7,\cdots,|\arg z|<\pi,|z|\gg1)$$

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\pi}{2}\right][1+O(\nu^{-1})]\qquad(0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon,|\nu|\gg1/\varepsilon)$$

$$Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{\pi}{2\sin\theta}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\pi}{2}\right][1+O(\nu^{-1})]\qquad(0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon,|\nu|\gg1/\varepsilon)$$

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu+1/2)_k(-\mu+1/2)_k}{k!\ (\nu+3/2)_k 2^k\sin^k\theta}\sin\left[\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{2k-1}{4}\pi+\frac{\mu}{2}\pi\right]$$

[若 $\nu+\mu\neq-1,-2,-3,\cdots,\nu+3/2\neq0,-1,-2,\cdots$，则当 $\pi/6<\theta<5\pi/6$ 时级数对复数 ν,μ 收敛；若 $\nu>0,\mu>0,0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$，则为 $|\nu|\gg|\mu|,|\nu|\gg1$ 时的渐近展开]

$$Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu+1/2)_k(-\mu+1/2)_k}{k!\ (\nu+3/2)_k 2^k\sin^k\theta}\cos\left[\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{2k-1}{4}\pi+\frac{\mu}{2}\pi\right]$$

[若 $\nu+\mu\neq-1,-2,-3,\cdots,\nu+3/2\neq0,-1,-2,\cdots$，则当 $\pi/6<\theta<5\pi/6$ 时级数对复数 ν,μ 收敛；若 $\nu>0,\mu>0,0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$，则为 $|\nu|\gg|\mu|,|\nu|\gg1$ 时的渐近展开]

$$\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right]^\mu P_\nu^{-\mu}(\cos\theta)=J_\mu(\eta)+\sin^2\frac{\theta}{2}\left[\frac{1}{2\eta}J_{\mu+1}(\eta)-J_{\mu+2}(\eta)+\frac{\eta}{6}J_{\mu+3}(\eta)\right]+O\left(\sin^4\frac{\theta}{2}\right)$$

$\left(\eta=(2\nu+1)\sin\frac{\theta}{2},\mu\geqslant0,\nu\gg1,\theta\to0\right)$

以下公式适用于$-1\leqslant x\leqslant1$

$$\begin{aligned}P_\nu^\mu(x)&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi/2}P_\nu^\mu(x+\mathrm{i}0)\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\pi/2}P_\nu^\mu(x-\mathrm{i}0)\\&=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi/2}P_\nu^\mu(x+\mathrm{i}0)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\pi/2}P_\nu^\mu(x-\mathrm{i}0)]\\&=\frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\pi\mu}}{\pi}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\pi/2}Q_\nu^\mu(x+\mathrm{i}0)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi/2}Q_\nu^\mu(x-\mathrm{i}0)]\\&=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2}F\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-x}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_\nu^\mu(x)&=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\mu}}{2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\pi/2}Q_\nu^\mu(x+\mathrm{i}0)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi/2}Q_\nu^\mu(x-\mathrm{i}0)]\\&=\frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\left[P_\nu^\mu(x)\cos\mu\pi-\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(x)\right]\end{aligned}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\mu}Q_\nu^\mu(x\pm\mathrm{i}0)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\mu\pi/2}\left[Q_\nu^\mu(x)\mp\frac{\mathrm{i}\pi}{2}P_\nu^\mu(x)\right]$$

$$P_{-\nu-1}^\mu(x)=P_\nu^\mu(x)$$

$$Q_{-\nu-1}^\mu(x)=\frac{\sin(\nu+\mu)\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}Q_\nu^\mu(x)-\frac{\pi\cos\nu\pi\cos\mu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}P_\nu^\mu(x)$$

$$P_\nu^{-\mu}(x)=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[\cos\mu\pi P_\nu^\mu(x)-\frac{2\sin\mu\pi}{\pi}Q_\nu^\mu(x)\right]$$

$$Q_\nu^{-\mu}(x)=\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[\cos\mu\pi Q_\nu^\mu(x)+\frac{\pi}{2}\sin\mu\pi P_\nu^\mu(x)\right]$$

$$P_\nu^\mu(-x)=\cos(\nu+\mu)\pi P_\nu^\mu(x)-\frac{2\sin(\nu+\mu)\pi}{\pi}Q_\nu^\mu(x) \qquad (0<x<1)$$

$$Q_\nu^\mu(-x)=-\cos(\nu+\mu)\pi Q_\nu^\mu(x)-\frac{\pi\sin(\nu+\mu)\pi}{2}P_\nu^\mu(x) \qquad (0<x<1)$$

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^\mu\theta}{\Gamma(-\mu+1/2)}\int_0^\theta\frac{\cos(\nu+1/2)\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{\mu+1/2}}\mathrm{d}\varphi \qquad (0<\theta<\pi,\mathrm{Re}\mu<1/2)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\mu+1/2)}\left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^\mu\int_0^\pi\frac{(\cos\theta+i\sin\theta\cos t)^{\nu+\mu}}{\sin^{2\mu}t}\mathrm{d}t \qquad (\mathrm{Re}\mu<1/2)$$

$$P_\nu^{-\mu}(\cos\theta)=\frac{2^\mu\Gamma(\mu+1/2)\sin^\mu\theta}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^\infty\frac{t^{\nu+\mu}}{(1+2t\cos\theta+t^2)^{\mu+1/2}}\mathrm{d}t \qquad [\mathrm{Re}(\nu+\mu)>-1,\mathrm{Re}(\mu-\nu)>0]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\cos\theta}J_\mu(t\sin\theta)t^\nu\mathrm{d}t \qquad [0<\theta<\pi/2,\mathrm{Re}(\nu+\mu)>-1]$$

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{2^{\mu+1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\sin^\mu\theta\sum_{k=0}^\infty\frac{(\mu+1/2)_k(1+\nu+\mu)_k}{k!\ (\nu+3/2)_k}\sin(2k+\nu+\mu+1)\theta$$

$$Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}2^\mu\sin^\mu\theta\sum_{k=0}^\infty\frac{(\mu+1/2)_k(1+\nu+\mu)_k}{k!\ (\nu+3/2)_k}\cos(2k+\nu+\mu+1)\theta \qquad (0<\theta<\pi)$$

$$P_\nu^m(x)=(-)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^mP_\nu(x)}{\mathrm{d}x^m}$$

$$=\frac{(-)^m}{2^m m!}\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}(1-x^2)^{m/2}F\left(m-\nu,m+\nu+1;m+1;\frac{1-x}{2}\right)$$

$$P_\nu^{-m}(x)=(1-x^2)^{-m/2}\int_x^1\cdots\int_x^1P_\nu(x)(\mathrm{d}x)^m=(-)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(x)$$

$$Q_\nu^m(x)=(-)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^mQ_\nu(x)}{\mathrm{d}x^m} \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

$$Q_\nu^{-m}(x)=(-)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}Q_\nu^m(x) \qquad (m=0,1,2,\cdots)$$

$$P_\nu^{\mu+2}(x)+2(\mu+1)x(1-x^2)^{-1/2}P_\nu^{\mu+1}(x)+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)P_\nu^\mu(x)=0$$

$$(2\nu+1)xP_\nu^\mu(x)=(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(x)+(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(x)$$

$$P_{\nu-1}^\mu(x)-P_{\nu+1}^\mu(x)=(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}P_\nu^{\mu-1}(x)$$

$$(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(x)-(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)P_{\nu-1}^\mu(x)=(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}P_\nu^{\mu+1}(x)$$

$$P_{\nu-1}^\mu(x)-xP_\nu^\mu(x)=(\nu-\mu+1)\sqrt{1-x^2}P_\nu^{\mu-1}(x)$$

$$xP_\nu^\mu(x)-P_{\nu+1}^\mu(x)=(\nu+\mu)\sqrt{1-x^2}P_\nu^{\mu-1}(x)$$

$$(\nu-\mu)xP_\nu^\mu(x)-(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(x)=\sqrt{1-x^2}P_\nu^{\mu+1}(x)$$

$$(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(x)-(\nu+\mu+1)xP_\nu^\mu(x)=\sqrt{1-x^2}P_\nu^{\mu+1}(x)$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}=(\nu+1)xP_\nu^\mu(x)-(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(x)$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}=(\nu+\mu)P_{\nu-1}^\mu(x)-\nu xP_\nu^\mu(x)$$

$$Q_\nu^{\mu+2}(x)+2(\mu+1)x(1-x^2)^{-1/2}Q_\nu^{\mu+1}(x)+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)Q_\nu^\mu(x)=0$$

$$(2\nu+1)xQ_\nu^\mu(x)=(\nu-\mu+1)Q_{\nu+1}^\mu(x)+(\nu+\mu)Q_{\nu-1}^\mu(x)$$

$$Q_{\nu-1}^\mu(x)-Q_{\nu+1}^\mu(x)=(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}Q_\nu^{\mu-1}(x)$$

$$(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)Q_{\nu+1}^\mu(x)-(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)Q_{\nu-1}^\mu(x)=(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}Q_\nu^{\mu+1}(x)$$

$$Q_{\nu-1}^\mu(x)-xQ_\nu^\mu(x)=(\nu-\mu+1)\sqrt{1-x^2}Q_\nu^{\mu-1}(x)$$

$$xQ_\nu^\mu(x)-Q_{\nu+1}^\mu(x)=(\nu+\mu)\sqrt{1-x^2}Q_\nu^{\mu-1}(x)$$

$$(\nu-\mu)xQ_\nu^\mu(x)-(\nu+\mu)Q_{\nu-1}^\mu(x)=\sqrt{1-x^2}Q_\nu^{\mu+1}(x)$$

$$(\nu-\mu+1)Q_{\nu+1}^\mu(x)-(\nu+\mu+1)xQ_\nu^\mu(x)=\sqrt{1-x^2}Q_\nu^{\mu+1}(x)$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}Q_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}=(\nu+1)xQ_\nu^\mu(x)-(\nu-\mu+1)Q_{\nu+1}^\mu(x)$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}Q_\nu^\mu(x)}{\mathrm{d}x}=(\nu+\mu)Q_{\nu-1}^\mu(x)-\nu xQ_\nu^\mu(x)$$

$$P_\nu^\mu(0)=\frac{2\mu}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}\cos\frac{\nu+\mu}{2}\pi$$

$$Q_\nu^\mu(0)=-2^{\mu-1}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}\sin\frac{\nu+\mu}{2}\pi$$

$$\frac{\mathrm{d}P_\nu^\mu(0)}{\mathrm{d}x}=\frac{2^{\mu+1}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}\sin\frac{\nu+\mu}{2}\pi$$

$$\frac{\mathrm{d}Q_\nu^\mu(0)}{\mathrm{d}x}=2^\mu\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}\cos\frac{\nu+\mu}{2}\pi$$

$$P_\nu^{1/2}(x)=(2\pi)^{-1/2}(1-x^2)^{-1/4}[(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^{\nu+1/2}+(x-\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^{\nu+1/2}]$$

$$Q_\nu^{1/2}(x)=-\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-x^2)^{-1/4}[(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^{-\nu-1/2}-(x-\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^{-\nu-1/2}]$$

$$P_\nu^{-1/2}(x)=-\frac{\mathrm{i}}{2\nu+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-x^2)^{-1/4}[(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^{\nu+1/2}-(x-\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^{\nu+1/2}]$$

$$Q_\nu^{-1/2}(x)=\frac{1}{2\nu+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-x^2)^{-1/4}[(x+\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^{-\nu-1/2}+(x-\mathrm{i}\sqrt{1-x^2})^{-\nu-1/2}]$$

$$P_\nu^{-\nu}(x)=\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(1+\nu)}(1-x^2)^{\nu/2}$$

$$\int_0^1 x^\sigma(1-x^2)^{-\mu/2}P_\nu^\mu(x)\mathrm{d}x=2^{\mu-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\sigma-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{3+\sigma+\nu-\mu}{2}\right)}\qquad[\mathrm{Re}\mu<1,\mathrm{Re}\sigma>-1]$$

$$\int_0^1[P_\nu^\mu(x)]^2\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=-\frac{1}{2\mu}\frac{\Gamma(1+\nu+\mu)}{\Gamma(1+\nu-\mu)}\qquad[\mathrm{Re}\mu<0,\nu+\mu=1,2,3,\cdots]$$

$$P_\nu^{-\mu}(\cos\theta)=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{n=0}^\infty(-)^n\left(\frac{1}{\nu-n}-\frac{1}{\nu+n+1}\right)P_n^{-\mu}(\cos\theta)\qquad(-\pi<\theta<\pi,\mu\geqslant 0)$$

$$2\pi\Gamma(\nu+1)P_\nu^m(\cos\theta)\cos m\varphi=\mathrm{i}^m\Gamma(\nu+m+1)\int_0^{2\pi}[\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos(t-\varphi)]^\nu\cos mt\,\mathrm{d}t\qquad(0<\theta<\pi/2)$$

$$2\pi\Gamma(\nu+1)P_\nu^m(\cos\theta)\sin m\varphi=\mathrm{i}^m\Gamma(\nu+m+1)\int_0^{2\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos(t-\varphi)]^\nu\sin mt\,\mathrm{d}t\qquad(0<\theta<\pi/2)$$

$$\begin{aligned}P_\nu(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi)&=P_\nu(\cos\theta)P_\nu(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^\infty(-)^mP_\nu^m(\cos\theta)P_\nu^{-m}(\cos\theta')\cos m\varphi\\&=P_\nu(\cos\theta)P_\nu(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^\infty\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(\cos\theta)P_\nu^m(\cos\theta')\cos m\varphi\end{aligned}$$

($0\leqslant\theta<\pi,0\leqslant\theta'<\pi,\theta+\theta'<\pi,\varphi$为实数)

$$\begin{aligned}Q_\nu(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi)&=P_\nu(\cos\theta')Q_\nu(\cos\theta)+2\sum_{m=1}^\infty(-)^mP_\nu^{-m}(\cos\theta')Q_\nu^m(\cos\theta)\cos m\varphi\\&=P_\nu(\cos\theta')Q_\nu(\cos\theta)+2\sum_{m=1}^\infty\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(\cos\theta')Q_\nu^m(\cos\theta)\cos m\varphi\end{aligned}$$

[$0<\theta<\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta'<\pi,0<\theta+\theta'<\pi,\varphi$为实数]

$$\left.\begin{array}{l}|P_\nu^{\pm\mu}(\cos\theta)|<\sqrt{\dfrac{8}{\nu\pi}}\dfrac{\Gamma(\nu\pm\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\sin^{-\mu-1/2}\theta\\ |Q_\nu^{\pm\mu}(\cos\theta)|<\sqrt{\dfrac{2\pi}{\nu}}\dfrac{\Gamma(\nu\pm\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\sin^{-\mu-1/2}\theta\end{array}\right\}\quad(\nu\geqslant1,\nu-\mu+1>0,\mu\geqslant0)$$

$$\left.\begin{array}{l}|P_\nu^{\pm m}(\cos\theta)|<\dfrac{2}{\sqrt{\nu\pi}}\dfrac{\Gamma(\nu\pm m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\sin^{-m-1/2}\theta\\ |Q_\nu^{\pm m}(\cos\theta)|<\sqrt{\dfrac{\pi}{\nu}}\dfrac{\Gamma(\nu\pm m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\sin^{-m-1/2}\theta\end{array}\right\}\quad(\nu\geqslant1,m=0,1,2,\cdots)$$

***m* 阶 *l* 次连带勒让德函数**(associated Legendre function of order *m* and degree *l*)

$$P_n^m(-x)=(-)^{m+n}P_n^m(x)$$

$$Q_n^m(-x)=(-)^{m+n+1}Q_n^m(x)$$

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos\varphi)^n=P_n(\cos\theta)+2\sum_{m=1}^{n}(-\mathrm{i})^m\frac{n!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\qquad(0<\theta<\pi/2)$$

$$\begin{aligned}P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi)&=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{\infty}(-)^mP_n^m(\cos\theta)P_n^{-m}(\cos\theta')\cos m\varphi\\&=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m\varphi\end{aligned}$$

$$(0\leqslant\theta<\pi,0\leqslant\theta'<\pi,\theta+\theta'<\pi,\varphi\text{ 为实数})$$

$$P_1^1(x)=-\sqrt{1-x^2}\qquad P_1^1(\cos\theta)=-\sin\theta$$

$$P_2^1(x)=-3x\sqrt{1-x^2}\qquad P_2^1(\cos\theta)=-\frac{3}{2}\sin2\theta$$

$$P_2^2(x)=3(1-x^2)\qquad P_2^2(\cos\theta)=\frac{3}{2}(1-\cos2\theta)$$

$$P_3^1(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}(5x^2-1)\qquad P_3^1(\cos\theta)=-\frac{3}{8}(\sin\theta+5\sin3\theta)$$

$$P_3^2(x)=15x(1-x^2)\qquad P_3^2(\cos\theta)=\frac{15}{4}(\cos\theta-\cos3\theta)$$

$$P_3^3(x)=-15(1-x^2)^{3/2}\qquad P_3^3(\cos\theta)=-\frac{15}{4}(3\sin\theta-\sin3\theta)$$

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{lk}\qquad(0\leqslant m\leqslant l,0\leqslant m\leqslant k)$$

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_l^n(x)\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{1}{n}\frac{(l+n)!}{(l-n)!}\delta_{mn}\qquad(0\leqslant m,n\leqslant1)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{1-x^2}P_l^m(x)P_{l+1}^m(x)\mathrm{d}x=\frac{(l+m)!}{m(l-m)!}$$

$$\int_{-1}^{1}P_l^n(x)P_k^{-n}(x)\mathrm{d}x=(-)^n\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}\qquad(0\leqslant n\leqslant l,0\leqslant n\leqslant k)$$

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_l^{-n}(x)\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{(-1)^n}{n}\delta_{mn}$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(m-m')\varphi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^{m'}(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'}\delta_{mm'}$$

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)Q_k^m(x)\mathrm{d}x=(-)^m\frac{1-(-)^{l-k}(k+m)!}{(l-k)(l+k+1)(k-m)!}\qquad(k,l,m=1,2,3,\cdots)$$

格根鲍尔函数(Gegenbauer function)

$$\begin{aligned}C_\alpha^\nu(z)&=\frac{\Gamma(\alpha+2\nu)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\nu)}F\left(\alpha+2\nu,-\alpha;\nu+\frac{1}{2};\frac{1-z}{2}\right)\\&=\frac{\sqrt{2\pi}}{2^\nu}\frac{\Gamma(\alpha+2\nu)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu)}(z^2-1)^{1/4-\nu/2}P_{\alpha+\nu-1/2}^{1/2-\nu}(z)\\&=-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}(1+2tz+t^2)^{-\nu}t^{-\alpha-1}\mathrm{d}t\end{aligned}\qquad[-2<\mathrm{Re}\nu<\mathrm{Re}\alpha<0,|\arg(z\pm1)|<\pi]$$

$$C_\alpha^\nu(0)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+2\nu)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}$$

$$(\alpha+2\nu)C_{\alpha+2}^\nu(z)=2(\nu+\alpha+1)zC_{\alpha+1}^\nu(z)-(2\nu+\alpha)C_\alpha^\nu(z)$$

$$\alpha C_\alpha^\nu(z)=2\nu[zC_{\alpha-1}^{\nu+1}(z)-C_{\alpha-2}^{\nu+1}(z)]$$

$$(\alpha+2)C_\alpha^\nu(z)=2\nu[C_\alpha^{\nu+1}(z)-zC_{\alpha-1}^{\nu+1}(z)]$$

$$\alpha C_\alpha^\nu(z)=(\alpha+2\nu-1)zC_{\alpha-1}^\nu(z)-2\nu(1-z^2)C_{\alpha-2}^{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}C_\alpha^\nu(z)=2\nu C_{\alpha-1}^{\nu+1}(z)$$

$$\sin(\alpha+2\nu)\pi C_\alpha^\nu(z)=-\sin\alpha\pi C_{-\alpha-2\nu}^\nu(z)$$

$$\lim_{\nu\to0}\Gamma(\nu)C_\alpha^\nu(\cos\theta)=\frac{2}{\alpha}\cos\alpha\theta \qquad (\alpha\neq0)$$

圆环函数(toroidal function)

$$P_{n-1/2}^m(\cosh\eta)=\frac{(-)^m}{2\pi}\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n-m+1/2)}\int_0^{2\pi}\frac{\cos m\varphi}{(\cosh\eta+\sinh\eta\cos\varphi)^{n+1/2}}\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{\Gamma(n+m+1/2)}{\Gamma(n-m+1/2)\Gamma(m+1/2)}\frac{\sinh^m\eta}{2^m\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2m}\varphi}{(\cosh\eta+\sinh\eta\cos\varphi)^{n+m+1/2}}\mathrm{d}\varphi$$

$$P_{\nu-1/2}^\mu(\cosh\eta)=\frac{2^{2\mu}}{\Gamma(1-\mu)}\frac{(1-\mathrm{e}^{-2\eta})^{-\mu}}{\mathrm{e}^{(\nu+1/2)\eta}}F\left(\frac12-\mu,\nu-\mu+\frac12;1-2\mu;1-\mathrm{e}^{-2\eta}\right)$$

$$Q_{n-1/2}^m(\cosh\eta)=(-)^m\frac{\Gamma(n+m+1/2)}{\Gamma(n+1/2)}\int_0^{\ln\coth\frac{\eta}{2}}(\cosh\eta-\sinh\eta\cosh t)^{n-1/2}\cosh mt\,\mathrm{d}t$$
$$=(-)^m\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n-m+1/2)}\int_0^\infty\frac{\cosh mt}{(\cosh\eta+\sinh\eta\cosh t)^{n+1/2}}\mathrm{d}t$$

$$Q_{\nu-1/2}^\mu(\cosh\eta)=\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\pi}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)}(1-\mathrm{e}^{-2\eta})^\mu\mathrm{e}^{-(n+1/2)\eta}F\left(\mu+\frac12,\nu+\mu+\frac12;\nu+1;\mathrm{e}^{-2\eta}\right)$$

$$P_{-1/2}(\cosh\eta)=\frac{2}{\pi\cosh(\eta/2)}K\left(\tanh\frac{\eta}{2}\right)$$

$$Q_{-1/2}(\cosh\eta)=2\mathrm{e}^{-\eta/2}K(\mathrm{e}^{-\eta})$$

$$P_{1/2}(\cosh\eta)=\frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{\eta/2}E(\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\eta}})$$

圆锥函数(conical function)

$$P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta)=1+\frac{4\lambda^2+1^2}{2^2}\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{(4\lambda^2+1^2)(4\lambda^2+3^2)}{2^24^2}\sin^4\frac{\theta}{2}+\cdots$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\theta\frac{\cosh\lambda u}{\sqrt{2(\cos u-\cos\theta)}}\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\cosh\lambda\pi\int_0^\infty\frac{\cos\lambda u}{\sqrt{2(\cosh u+\cos\theta)}}\mathrm{d}u$$

$$Q_{-1/2\mp\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta)=\pm\mathrm{i}\sinh\lambda\pi\int_0^\infty\frac{\cos\lambda u}{\sqrt{2(\cosh u+\cos\theta)}}\mathrm{d}u+\int_0^\infty\frac{\cosh\lambda u}{\sqrt{2(\cosh u-\cos\theta)}}\mathrm{d}u$$

$$P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(-\cos\theta)=\frac{\cosh\lambda\pi}{\pi}[Q_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta)+Q_{-1/2-\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta)]$$

$$P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta'\cos\theta+\sin\theta'\sin\theta\cos\varphi)=P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta')P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta)$$
$$+2\sum_{m=1}^\infty\frac{(-)^m2^{2m}}{(4\lambda^2+1^2)(4\lambda^2+3^2)\cdots[4\lambda^2+(2m-1)^2]}P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}^m(\cos\theta')P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$
$$(0<\theta<\pi/2,0<\theta'<\pi,\theta'+\theta<\pi)$$

$$P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(-\cos\theta'\cos\theta-\sin\theta'\sin\theta\cos\varphi)=P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta')P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(-\cos\theta)$$
$$+2\sum_{m=1}^\infty\frac{(-)^m2^{2m}}{(4\lambda^2+1^2)(4\lambda^2+3^2)\cdots[4\lambda^2+(2m-1)^2]}P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}^m(\cos\theta')P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}^m(-\cos\theta)\cos m\varphi$$
$$(0<\theta'<\pi/2<\theta,\theta'+\theta<\pi)$$

$$Q_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta'\cos\theta+\sin\theta'\sin\theta\cos\theta')=P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta')Q_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}(\cos\theta)$$
$$+2\sum_{k=1}^\infty\frac{(-)^k2^{2k}}{(4\lambda^2+1^2)(4\lambda^2+3^2)\cdots[4\lambda^2+(2k-1)^2]}P_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}^k(\cos\theta')Q_{-1/2+\mathrm{i}\lambda}^k(\cos\theta)\cos k\theta'$$
$$(0<\theta'<\pi/2<\theta,\theta'+\theta<\pi)$$

$$P^{\mu}_{-1/2+i\lambda}(\cos\theta)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi\sin\theta}}\lambda^{\mu-1}e^{\lambda\mu} \qquad (\lambda\gg1)$$

$$P^{\mu}_{-1/2+i\lambda}(\cosh\theta)\sim\sqrt{\frac{2}{\sinh\theta}}\lambda^{\mu-1}\cos\left(\lambda\theta+\frac{\pi\mu}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (\lambda\gg1)$$

汇合型超几何函数

库默尔函数(Kummer's function)

$$F(\alpha;\gamma;z)={}_1F_1(\alpha;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\ \Gamma(n+\gamma)}z^n \qquad (\gamma\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{1-\gamma}\int_0^z e^t t^{\alpha-1}(z-t)^{\gamma-\alpha-1}dt \qquad (0<\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}\gamma)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt \qquad (0<\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}\gamma)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^z\int_0^1 e^{-zt}t^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt \qquad (0<\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}\gamma)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)2^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{z/2}\int_{-1}^1 e^{zt/2}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1+t)^{\alpha-1}dt \qquad (0<\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}\gamma)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)2^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{z/2}\int_{-1}^1 e^{-zt/2}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt \qquad (0<\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}\gamma)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)2^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{z/2}\int_0^{\pi}\exp\left[-\frac{z}{2}\cos t\right]\sin^{\gamma-1}t\ \cot^{\gamma-2\alpha}\frac{t}{2}dt \qquad (0<\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}\gamma)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)2^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{z/2}\int_0^{\pi}\exp\left[\frac{z}{2}\cos t\right]\sin^{\gamma-1}t\ \tan^{\gamma-2\alpha}\frac{t}{2}dt \qquad (0<\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}\gamma)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{-z\tau}\int_{\tau}^{\tau+1} e^{zt}(t-\tau)^{\alpha-1}(1+\tau-t)^{\gamma-\alpha-1}dt \qquad (0<\mathrm{Re}\alpha<\mathrm{Re}\gamma)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\exp\left(-\frac{az}{b-a}\right)(b-a)^{1-\gamma}\int_a^b (t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\gamma-\alpha-1}\exp\left[\frac{zt}{b-a}\right]dt$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(\gamma+t)}(-z)^t dt$$

[$\mathrm{Re}\alpha>-\lambda>0,\gamma\neq0,-1,-2,\cdots,|\arg(-z)|<\pi/2$,$\Gamma(\alpha+t)$的极点保持在积分路线的左边,而$\Gamma(-t)$的极点保持在积分路线的右边]

$$U(\alpha;\gamma;z)=\frac{\pi}{\sin\pi\gamma}\left[\frac{F(\alpha;\gamma;z)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}-z^{1-\gamma}\frac{F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\gamma)}\right] \qquad (-\pi<\arg z\leqslant\pi)$$

$$=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}F(\alpha;\gamma;z)+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}e^{-zt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}dt \qquad (\mathrm{Re}\alpha>0,\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\frac{z^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}(z+t)^{\gamma-\alpha-1}dt \qquad (\mathrm{Re}\alpha>0,\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\frac{e^z}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}e^{-zt}(t-1)^{\alpha-1}t^{\gamma-\alpha-1}dt$$

$$=\frac{2^{1-\gamma}e^{z/2}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}e^{-zt/2}(t-1)^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}dt$$

$$=\frac{2^{1-\gamma}e^{z/2}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{z\cosh t}{2}\right)\sinh^{\gamma-1}t\ \coth^{\gamma-2\alpha}\frac{t}{2}dt$$

$$=\frac{e^z}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau}^{\tau+1}\exp\left[-\frac{z}{\tau+1-t}\right](t-\tau)^{\alpha-1}(\tau+1-t)^{-\gamma}dt \qquad (\tau>0)$$

$$=\frac{a^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}e^z\int_a^{\infty}e^{-zt/a}t^{\gamma-\alpha-1}(t-a)^{\alpha-1}dt \qquad (a>0)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty e^{i\delta}}e^{-zt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}dt$$

($\mathrm{Re}\alpha>0,-\pi/2-\delta<\arg z<\pi/2-\delta,-\pi<\delta<\pi,t^{\alpha-1}$及$(1+t)^{\gamma-\alpha-1}$均取主值)

$$U(\alpha;n+1;z)=\frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha)}\sum_{r=0}^{n=1}\frac{(\alpha-n)_r}{(1-n)_r}\frac{z^{r-n}}{r!}+\frac{(-)^{n-1}}{n!\ \Gamma(\alpha-n)}$$

$$\times\left\{F(\alpha;n+1;z)\ln z+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!(n+1)_r}[\psi(\alpha+r)-\psi(1+r)-\psi(n+1+r)]z^r\right\}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$U(\alpha;\gamma;ze^{i\pi})=\frac{\pi}{\sin\pi\gamma}e^{-z}\left[\frac{F(\gamma-\alpha;\gamma;z)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}-\frac{e^{i\pi(1-\gamma)}z^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\gamma)}F(1-\alpha;2-\gamma;z)\right]\quad (\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots)$$

$$U(\alpha;\gamma;ze^{-i\pi})=\frac{\pi}{\sin\pi\gamma}e^{-z}\left[\frac{F(\gamma-\alpha;\gamma;z)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}-\frac{e^{-i\pi(1-\gamma)}z^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\gamma)}F(1-\alpha;2-\gamma;z)\right]\quad (\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots)$$

$$U(\alpha;\gamma;ze^{i2n\pi})=[1-e^{-i2n\pi\gamma}]\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}F(\alpha;\gamma;z)+e^{-i2n\pi\gamma}U(\alpha;\gamma;z)$$

$$(\gamma-\alpha)F(\alpha-1;\gamma;z)+(2\alpha-\gamma+z)F(\alpha;\gamma;z)-\alpha F(\alpha+1;\gamma;z)=0$$

$$\gamma(\gamma-1)F(\alpha;\gamma-1;z)-\gamma(\gamma-1+z)F(\alpha;\gamma;z)+(\gamma-\alpha)F(\alpha;\gamma+1;z)=0$$

$$(\gamma-1)F(\alpha;\gamma-1;z)+(\alpha-\gamma+1)F(\alpha;\gamma;z)-\alpha F(\alpha+1;\gamma;z)=0$$

$$\gamma F(\alpha;\gamma;z)-\gamma F(\alpha-1;\gamma;z)-zF(\alpha;\gamma+1;z)=0$$

$$\gamma(\alpha+z)F(\alpha;\gamma;z)-(\gamma-\alpha)zF(\alpha;\gamma+1;z)-\alpha\gamma F(\alpha+1;\gamma;z)=0$$

$$(\gamma-\alpha)F(\alpha-1;\gamma;z)-(\gamma-1)F(\alpha;\gamma-1;z)+(\alpha-1+z)F(\alpha;\gamma;z)=0$$

$$\gamma(\gamma-\alpha)F(\alpha-1;\gamma;z)-\gamma(\gamma-\alpha-z)F(\alpha;\gamma;z)-\alpha zF(\alpha+1;\gamma+1;z)=0$$

$$\gamma F(\alpha;\gamma;z)-(\gamma-\alpha)F(\alpha;\gamma+1;z)-\alpha F(\alpha+1;\gamma+1;z)=0$$

$$\gamma(\gamma-1)F(\alpha;\gamma-1;z)-\gamma(\gamma-1)F(\alpha;\gamma;z)-\alpha zF(\alpha+1;\gamma+1;z)=0$$

$$\gamma(\gamma-1)F(\alpha-1;\gamma-1;z)+\gamma(1-\gamma+z)F(\alpha;\gamma;z)-\alpha zF(\alpha+1;\gamma+1;z)=0$$

$$U(\alpha-1;\gamma;z)+(\gamma-2\alpha-z)U(\alpha;\gamma;z)+\alpha(\alpha-\gamma+1)U(\alpha+1;\gamma;z)=0$$

$$U(\alpha-1;\gamma;z)+(\gamma-\alpha)U(\alpha;\gamma;z)-zU(\alpha;\gamma+1;z)=0$$

$$(\gamma-\alpha-1)U(\alpha;\gamma-1;z)+(1-\gamma-z)U(\alpha;\gamma;z)+zU(\alpha;\gamma+1;z)=0$$

$$U(\alpha;\gamma-1;z)-U(\alpha;\gamma;z)+\alpha U(\alpha+1;\gamma;z)=0$$

$$(1+\alpha-\gamma)U(\alpha;\gamma-1;z)-U(\alpha-1;\gamma;z)+(\alpha-1+z)U(\alpha;\gamma;z)=0$$

$$(\alpha+z)U(\alpha;\gamma;z)-zU(\alpha;\gamma+1;z)+\alpha(\gamma-\alpha-1)U(\alpha+1;\gamma;z)=0$$

$$F(\alpha;\gamma;z)=e^zF(\gamma-\alpha;\gamma;-z)$$

$$U(\alpha;\gamma;z)=z^{1-\gamma}U(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)$$

$$F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)=e^zF(1-\alpha;2-\gamma;-z)$$

$$U(\gamma-\alpha;\gamma;-z)=e^{i\pi(1-\gamma)\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}z)}z^{1-\gamma}U(1-\alpha;2-\gamma;-z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}F(\alpha;\gamma;z)=\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n;\gamma+n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{\alpha+n-1}F(\alpha;\gamma;z)]=(\alpha)_nz^{\alpha-1}F(\alpha+n;\gamma;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma-1}F(\alpha;\gamma;z)]=(-)^n(1-\gamma)_nz^{\gamma-1-n}F(\alpha;\gamma-n;z)\quad (\gamma-n\neq 0,-1,-2,\cdots)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{-z}F(\alpha;\gamma;z)]=(-)^n\frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n}e^{-z}F(\alpha;\gamma+n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{-z}z^{\gamma+n-\alpha-1}F(\alpha;\gamma;z)]=(\gamma-\alpha)_ne^{-z}z^{\gamma-\alpha-1}F(\alpha-n;\gamma;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{-z}z^{\gamma-1}F(\alpha;\gamma;z)]=(-)^n(1-\gamma)_ne^{-z}z^{\gamma-n-1}F(\alpha-n;\gamma-n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}U(\alpha;\gamma;z)=(-)^n(\alpha)_nU(\alpha+n;\gamma+n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{\gamma-1}U(\alpha;\gamma;z)]=(-)^n(\alpha-\gamma+1)_nz^{\gamma-n-1}U(\alpha;\gamma-n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{\alpha+n-1}U(\alpha;\gamma;z)]=(\alpha)_n(\alpha-\gamma+1)_nz^{\alpha-1}U(\alpha+n;\gamma;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{-z}U(\alpha;\gamma;z)]=(-)^n e^{-z}U(\alpha;\gamma+n;z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{-z}z^{\gamma-\alpha+n-1}U(\alpha;\gamma;z)]=(-)^n e^{-z}z^{\gamma-\alpha-1}U(\alpha-n;\gamma;z)$$

$$\lim_{\gamma\to 1-n}\frac{F(\alpha;\gamma;z)}{\Gamma(\gamma)}=\frac{(\alpha)_n}{n!}z^n F(\alpha+n;n+1;z)$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}F\left(\alpha;\gamma;\frac{z}{\alpha}\right)=z^{(1-\gamma)/2}I_{\gamma-1}(2\sqrt{z})$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\gamma)}F\left(\alpha;\gamma;-\frac{z}{\alpha}\right)=z^{(1-\gamma)/2}J_{\gamma-1}(2\sqrt{z})$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\Gamma(\alpha-\gamma+1)U\left(\alpha;\gamma;\frac{z}{\alpha}\right)=2z^{(1-\gamma)/2}K_{\gamma-1}(2\sqrt{z})$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\Gamma(\alpha-\gamma+1)U\left(\alpha;\gamma;-\frac{z}{\alpha}\right)=\begin{cases}-i\pi e^{i\pi\gamma}z^{(1-\gamma)/2}H^{(1)}_{\gamma-1}(2\sqrt{z}) & \text{Im}z>0\\ i\pi e^{-i\pi\gamma}z^{(1-\gamma)/2}H^{(2)}_{\gamma-1}(2\sqrt{z}) & \text{Im}z>0\end{cases}$$

$$F\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2iz\right)=\Gamma(1+\nu)e^{iz}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(z)$$

$$F\left(-\nu+\frac{1}{2};-2\nu+1;2iz\right)=\Gamma(1-\nu)e^{iz}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}[J_\nu(z)\cos\pi\nu-N_\nu(z)\sin\pi\nu]$$

$$F\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2z\right)=\Gamma(1-\nu)e^{z}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}I_\nu(z)$$

$$F(n+1;2n+2;2iz)=\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)e^{iz}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1/2}J_{n+1/2}(z)$$

$$F(-n;-2n;2iz)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)e^{iz}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+1/2}J_{-n-1/2}(z)$$

$$F(n+1;2n+2;2z)=\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)e^{z}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1/2}I_{n+1/2}(z)$$

$$F\left(n+\frac{1}{2};2n+1;-2\sqrt{iz}\right)=\Gamma(n+1)e^{-2\pi z}\left(\frac{i\pi z}{2}\right)^{-n}[\text{ber}_n z+i\,\text{bei}_n z]$$

$$U\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2z\right)=\frac{e^z}{\sqrt{\pi}}(2z)^{-\nu}K_\nu(z)$$

$$U\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2iz\right)=\frac{i\sqrt{\pi}}{2}e^{-i\pi(\nu-z)}(2z)^{-\nu}H^{(2)}_\nu(z)$$

$$U\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;-2iz\right)=\frac{i\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi(\nu-z)}(2z)^{-\nu}H^{(1)}_\nu(z)$$

$$U(n+1;2n+2;2z)=\frac{e^z}{\sqrt{\pi}}(2z)^{-n-1/2}K_{n+1/2}(z)$$

$$U\left(n+\frac{1}{2};2n+1;\sqrt{iz}\right)=\frac{e^{in\pi/2}}{\sqrt{\pi}}e^{\sqrt{iz}}(2\sqrt{iz})^{-n}[\text{ker}_n z+i\,\text{kei}_n z]$$

$$F(\alpha;\alpha;z)=e^z$$

$$F(1;2;-2iz)=\frac{e^{-iz}}{z}\sin z$$

$$F(1;2;2z)=\frac{e^z}{z}\sinh z$$

$$F(\alpha;\alpha+1;-z)=\alpha z^{-\alpha}\gamma(\alpha,z)$$

$$F\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2z}\text{erf}(z)$$

$$F\left(1;\frac{3}{2};z^2\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2z}e^{z^2}\text{erf}(z)$$

$$U(1-\alpha;1-\alpha;z)=e^z\Gamma(\alpha,z)$$

$$U(1;1;\pm z)=-e^{\pm z}\text{Ei}(\mp z)$$

$$U(1;1;-\ln z)=-\frac{1}{z}\text{li}(z)$$

$$U(1;1;\pm iz)=e^{\pm iz}\left[\mp\frac{i\pi}{2}-\mathrm{Ci}(z)\pm i\mathrm{Si}(z)\right]$$

$$U\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};z^2\right)=\sqrt{\pi}\,e^{z^2}\mathrm{erfc}(z)$$

$$F(\alpha;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{(\gamma-\alpha)_n(1-\alpha)_n}{n!}z^{-n}+O(|z|^{-N-1})\right]$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}z)}z^{-\alpha}\left[\sum_{n=0}^{M}\frac{(\alpha)_n(\alpha-\gamma+1)_n}{n!}(-z)^{-n}+O(|z|^{-M-1})\right]$$

(α,γ 固定,$\alpha\neq0,-1,-2,\cdots,|z|\to\infty,-\pi<\arg z<\pi$)

$$U(\alpha;\gamma;z)=z^{-\alpha}\left[\sum_{n=0}^{N}(-)^n\frac{(\alpha)_n(\alpha-\gamma+1)_n}{n!}z^{-n}+O(|z|^{-N-1})\right]$$
(α,γ 固定,$|z|\to\infty,|\arg z|\leqslant3\pi/2$)

$$F(\alpha;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{N}\frac{(\alpha)_n}{n!\ (\gamma)_n}z^n+O(|\gamma|^{-N-1})$$
(α,z 有界,$|\gamma|\to\infty,|\arg\gamma|\leqslant\pi-\delta<\pi$)

$$U(\alpha;\gamma;z)=(-\gamma)^{-\alpha}[1+O(|\gamma|^{-1})]+\sqrt{2\pi}z^{1-\gamma}e^{z-\gamma}\gamma^{\gamma-3/2}[1+O(|\gamma|^{-1})]$$
(α,z 有界,$|\gamma|\to\infty,|\arg\gamma|\leqslant\pi-\delta<\pi\,|\arg(-\gamma)|\leqslant\pi-\delta<\pi$)

$$F(\alpha;\gamma;z)=\Gamma(\gamma)\left[\left(\frac{\gamma}{2}-\alpha\right)z\right]^{(1-\gamma)/2}\exp\left(\frac{z}{2}\right)J_{\gamma-1}(\sqrt{2(\gamma-2\alpha)z})\left[1+O\left(\left|\frac{\gamma}{2}-\alpha\right|^{-\lambda}\right)\right]$$
$$\left[\gamma,z\text{ 固定},\alpha\to\infty,\lambda=\min\left(1-\mu,\frac{1-3\mu}{2}\right),|z|=\left|\frac{\gamma}{2}-\alpha\right|^{\mu},0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{3}\right]$$

$$U(\alpha;\gamma;z)=\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}-\alpha\right)e^{z/2}z^{(1-\gamma)/2}$$
$$\times[\cos\pi\alpha J_{\gamma-1}(\sqrt{2(\gamma-2\alpha)z})-\sin\pi\alpha N_{\gamma-1}(\sqrt{2(\gamma-2\alpha)z})]\left[1+O\left(\left|\frac{\gamma}{2}-\alpha\right|^{-\lambda}\right)\right]$$
$$\left[\gamma,z\text{ 固定},\alpha\to\infty,\lambda=\min\left(1-\mu,\frac{1-3\mu}{2}\right),|z|=\left|\frac{\gamma}{2}-\alpha\right|^{\mu},0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{3}\right]$$

$$F(\alpha;\gamma;k\gamma)=(1-k)^{-\alpha}\left[1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2\gamma}\left(\frac{k}{1-k}\right)^2+O(|\gamma|^{-2})\right]$$
($\gamma\to\infty,0<|k|<1$)

汇合型超几何方程的解(solutions of the confluent hypergeometric equation)

> 汇合型超几何方程
> $$z\frac{d^2w}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{dw}{dz}-\alpha w=0$$
> 在 $z=0$ 点邻域内的解可取为
> $$w_1=F(\alpha;\gamma;z)=e^zF(\gamma-\alpha;\gamma;-z)$$
> $$w_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)=z^{1-\gamma}e^zF(1-\alpha;2-\gamma;-z)$$
> $$w_3=U(\alpha;\gamma;z)=z^{1-\gamma}U(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)$$
> $$w_4=e^zU(\gamma-\alpha;\gamma;-z)=e^{i\pi(1-\gamma)\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}z)}z^{1-\gamma}e^zU(1-\alpha;2-\gamma;-z)$$
> 当 $\gamma\neq$ 整数时,这四个解均有定义,且两两线性无关,故任意两解均可取作为汇合型超几何方程的基本解;当 $\gamma=n+1,n=0,1,2,\cdots$ 时,汇合型超几何方程的基本解可取为 w_1 和 w_3;当 $\gamma=-n+1,n=1,2,3,\cdots$ 时,汇合型超几何方程的基本解可取为 w_2 和 w_3.
>
> $W[w_i,w_j]\equiv w_i\dfrac{dw_j}{dz}-w_j\dfrac{dw_i}{dz}$ 是它们之间的朗斯基行列式.

$$F(\alpha;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}z)}U(\alpha;\gamma;z)+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{i\pi(\alpha-\gamma)\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}z)}e^zU(\gamma-\alpha;\gamma;-z)$$

$$z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)=e^{i\pi(\alpha-\gamma)\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}z)}\left[-\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)}U(\alpha;\gamma;z)+\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}e^zU(\gamma-\alpha;\gamma;-z)\right]$$

$$U(\alpha;\gamma;z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}F(\alpha;\gamma;z)+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)$$

$$e^zU(\gamma-\alpha;\gamma;-z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)}F(\alpha;\gamma;z)-\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}e^{i\pi\gamma\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}z)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)$$

$$W[w_1,w_2]=(1-\gamma)z^{-\gamma}e^z$$

$$W[w_1,w_3]=-\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}z^{-\gamma}e^z$$
$$W[w_1,w_4]=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{-\gamma}e^z e^{i\pi\gamma\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}z)}$$
$$W[w_2,w_3]=-\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}z^{-\gamma}e^z$$
$$W[w_2,w_4]=-\frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)}z^{-\gamma}e^z$$
$$W[w_3,w_4]=z^{-\gamma}e^z e^{i\pi(\gamma-\alpha)\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}z)}$$

汇合型超几何方程

$$z\frac{d^2w}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{dw}{dz}-\alpha w=0$$

在$z=\infty$点邻域内的解可取为

$$w_1^{(\infty)}(z)=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}F(\alpha;\gamma;z)+\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)$$
$$w_2^{(\infty)}(z)=e^{-i\pi(\alpha-\gamma)}\frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)}F(\alpha;\gamma;z)-e^{-i\pi\alpha}\frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)$$

它们具有简单的渐近行为.

$$\left.\begin{aligned}w_1^{(\infty)}(z)&\sim z^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha-\gamma+1)_n}{n!}(-z)^{-n}\\ w_2^{(\infty)}(z)&\sim z^{\alpha-\gamma}e^z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)_n(\gamma-\alpha)_n}{n!}z^{-n}\end{aligned}\right\}\quad(|z|\to\infty,\ -3\pi/2<\arg z<\pi/2)$$

惠特克函数(Whittaker's function)

$$M_{k,\pm\mu}(z)=z^{\pm\mu+1/2}e^{-z/2}F\left(\pm\mu-k+\frac{1}{2};\pm2\mu+1;z\right)$$
$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)}z^{\mu+1/2}e^{-z/2}\int_0^1 e^{zt}t^{\mu-k-1/2}(1-t)^{\mu+k-1/2}dt$$
$$\left[\mathrm{Re}\left(\mu\pm k+\frac{1}{2}\right)>0,\ |\arg z|<\pi\right]$$
$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)}z^{\mu+1/2}e^{z/2}\int_0^1 e^{-zt}t^{\mu+k-1/2}(1-t)^{\mu-k-1/2}dt$$
$$\left[\mathrm{Re}\left(\mu\pm k+\frac{1}{2}\right)>0,\ |\arg z|<\pi\right]$$
$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)}z^{\mu+1/2}e^{-z/2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty}\frac{\Gamma(-t)\Gamma\left(\mu-k+t+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+2\mu+t)}(-z)^t dt$$

$\left[\mathrm{Re}\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)>-\lambda>0,2\mu\neq-1,-2,-3,\cdots,|\arg(-z)|<\frac{\pi}{2},\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}+t\right)\right.$ 的极点保持在积分路线的左边,而 $\Gamma(-t)$ 的极点保持在积分路线的右边]

$$W_{k,\mu}(z)=W_{k,-\mu}(z)=z^{\mu+1/2}e^{-z/2}U\left(\mu-k+\frac{1}{2};2\mu+1;z\right)$$
$$=\frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)}M_{k,\mu}(z)+\frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)}M_{k,-\mu}(z)\qquad(2\mu\neq0,\pm1,\pm2,\cdots,|\arg z|<3\pi/2)$$
$$=\frac{z^{\mu+1/2}e^{-z/2}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-k\right)}\int_0^\infty e^{-z\tau}\tau^{\mu-k-1/2}(1+\tau)^{\mu+k-1/2}d\tau\qquad[|\arg z|<\pi/2,\mathrm{Re}(\mu-k)>-1/2]$$
$$=\frac{e^{-z/2}z^k}{\Gamma(-k+\mu+\frac{1}{2})\Gamma\left(-k-\mu+\frac{1}{2}\right)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(t)\Gamma\left(-t-k-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-t-k+\mu+\frac{1}{2}\right)z^t dt$$

$$\left[k\pm\mu+\frac{1}{2}\neq\text{正整数},|\arg z|<\frac{3\pi}{2};\Gamma(t)\text{的极点保持在积分路线的左方},\Gamma\left(-t-k\pm\mu+\frac{1}{2}\right)\text{的极点保持在积分路线的右方}\right]$$

$$M_{k,\mu}(z)=e^{i\pi(\mu+1/2)\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}z)}M_{-k,\mu}(-z) \qquad (2\mu\neq-1,-2,\cdots)$$

$$=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)}e^{\pm i\pi k}W_{-k,\mu}(e^{\pm i\pi}z)+\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)}e^{\pm i\pi(k-\mu-1/2)}W_{k,\mu}(z)$$

($2\mu\neq-1,-2,\cdots,-3\pi/2<\arg z<\pi/2$ 时取正号，$-\pi/2<\arg z<3\pi/2$ 时取负号)

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{\pm z/2}z^{-\mu-1/2}M_{k,\mu}(z)]=(\pm1)^n\frac{\left(\mu\mp k+\frac{1}{2}\right)_n}{(1+2\mu)_n}e^{\pm z/2}z^{-\mu-(n+1)/2}M_{k\mp n/2,\mu+n/2}(z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{\pm z/2}z^{n\mp k-1}M_{k,\mu}(z)]=\left(\mu\mp k+\frac{1}{2}\right)_n e^{\pm z/2}z^{\mp k-1}M_{k\mp n,\mu}(z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{\pm z/2}z^{\mu-1/2}M_{k,\mu}(z)]=(-)^n(-2\mu)_n e^{\pm z/2}z^{\mu-(n+1)/2}M_{k\mp n/2,\mu-n/2}(z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{z/2}z^{\pm\mu-1/2}W_{k,\mu}(z)]=(-)^n\left(\frac{1}{2}\mp\mu-k\right)_n e^{z/2}z^{\pm\mu-(n+1)/2}W_{k-n/2,\mu\mp n/2}(z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{z/2}z^{n-k-1}W_{k,\mu}(z)]=\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)_n\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)_n e^{z/2}z^{-k-1}W_{k-n,\mu}(z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{-z/2}z^{\pm\mu-1/2}W_{k,\mu}(z)]=(-)^n e^{-z/2}z^{\pm\mu-(n+1)/2}W_{k+n/2,\mu\mp n/2}(z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{-z/2}z^{k+n-1}W_{k,\mu}(z)]=(-)^n e^{-z/2}z^{k-1}W_{k+n,\mu}(z)$$

$$2\mu M_{k-1/2,\mu-1/2}(z)-2\mu M_{k+1/2,\mu-1/2}(z)-\sqrt{z}M_{k,\mu}(z)=0$$

$$4\mu(1+2\mu)\sqrt{z}M_{k-1/2,\mu-1/2}(z)\mp2(1+2\mu)(2\mu\mp z)M_{k,\mu}(z)-(1+2\mu\mp2k)\sqrt{z}M_{k\mp1/2,\mu+1/2}(z)=0$$

$$4\mu(1+2\mu)\sqrt{z}M_{k-1/2,\mu-1/2}(z)-4\mu(1+2\mu)M_{k,\mu}(z)-(1+\mu-2k)\sqrt{z}M_{k-1/2,\mu+1/2}(z)=0$$

$$4\mu(1+2\mu)\sqrt{z}M_{k+1/2,\mu-1/2}(z)-4\mu(1+2\mu)M_{k,\mu}(z)+(1+2\mu+2k)\sqrt{z}M_{k+1/2,\mu+1/2}(z)=0$$

$$(1+2\mu-2k)M_{k-1/2,\mu+1/2}(z)-2(1+2\mu)\sqrt{z}M_{k,\mu}(z)+(1+2\mu+2k)M_{k+1/2,\mu+1/2}(z)=0$$

$$(1+2\mu-2k)M_{k-1,\mu}(z)+2(2k-z)M_{k,\mu}(z)-(1+2\mu+2k)M_{k+1,\mu}(z)=0$$

$$(\mu\pm k)W_{k-1/2,\mu}(z)\mp\sqrt{z}W_{k,\mu\pm1/2}(z)\pm W_{k+1/2,\mu}(z)=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\pm\mu-k\right)\sqrt{z}W_{k-1/2,\mu\pm1/2}(z)\mp(2\mu\mp z)W_{k,\mu}(z)-\sqrt{z}W_{k+1/2,\mu\mp1/2}(z)=0$$

$$\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)\sqrt{z}W_{k-1/2,\mu-1/2}(z)+\left(k-\mu-\frac{1}{2}\right)\sqrt{z}W_{k-1/2,\mu+1/2}(z)+2\mu W_{k,\mu}(z)=0$$

$$\sqrt{z}W_{k+1/2,\mu-1/2}(z)-2\mu W_{k,\mu}(z)+\sqrt{z}W_{k+1/2,\mu+1/2}(z)=0$$

$$\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)W_{k-1,\mu}(z)+(2k-\mu)W_{k,\mu}(z)+W_{k+1,\mu}(z)=0$$

$$z\frac{d}{dz}W_{k,\mu}(z)=\left(k-\frac{z}{2}\right)K_{k,\mu}(z)-\left[\mu^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]W_{k-1,\mu}(z)$$

$$M_{a,0}(z)=e^{-z/2}\sqrt{z}L_{a-1/2}(z)$$

$$M_{0,1/2}(z)=2\sinh\frac{z}{2}$$

$$M_{0,1/2}(-iz)=-2i\sin\frac{z}{2}$$

$$M_{0,\mu}(z)=\Gamma(1+\mu)2^{2\mu}e^{-i\pi\mu/2}\sqrt{z}J_\mu\left(\frac{1}{2}ze^{i\pi/2}\right)=\Gamma(1+\mu)2^{2\mu}\sqrt{z}I_\mu\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$M_{0,\mu}(iz)=\Gamma(1+\mu)2^{2\mu}e^{-i\pi(2\mu-1)/4}\sqrt{z}J_\mu\left(-\frac{z}{2}\right)$$

$$M_{0,\mu}(-iz)=\Gamma(1+\mu)2^{2\mu}e^{-i\pi(2\mu+1)/4}\sqrt{z}J_\mu\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$M_{\mu+1/2,\mu}(z)=e^{-z/2}z^{\mu+1/2}$$

$$M_{-\mu-1/2,\mu}(z)=e^{z/2}z^{\mu+1/2}$$

$$M_{\mu+n+1/2,\mu}(z)=\frac{1}{(1+2\mu)_n}e^{z/2}z^{-\mu+1/2}\frac{d^n}{dz^n}[e^{-z}z^{2\mu+n}] \qquad (2\mu\neq-1,-2,-3,\cdots)$$

$$W_{0,1/2}(\pm z)=e^{\mp z/2}$$

$$W_{0,1/2}(\pm iz)=e^{\mp iz/2}$$

$$W_{0,\mu}(z)=\sqrt{\frac{z}{\pi}}K_\mu\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{i}{2}\sqrt{\pi z}e^{-i\pi\mu/2}H_\mu^{(1)}\left(\frac{1}{2}ze^{i\pi/2}\right)$$

$$W_{0,\mu}(iz)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi z}e^{-i\pi(2\mu+1)/4}H_\mu^{(2)}\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$W_{0,\mu}(-iz)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi z}e^{i\pi(2\mu+1)/4}H_\mu^{(1)}\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$W_{\mu+1/2,\mu}(z)=W_{\mu+1/2,-\mu}(z)=z^{\mu+1/2}e^{-z/2}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{z}{k}\right)^{-\mu-1/2}M_{k,\mu}\left(\frac{z}{k}\right)=\Gamma(1+2\mu)z^{-\mu}I_{2\mu}(2\sqrt{z})$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{z}{k}\right)^{-\mu-1/2}M_{k,\mu}\left(-\frac{z}{k}\right)=\Gamma(1+2\mu)z^{-\mu}J_{2\mu}(2\sqrt{z})$$

$$\lim_{k\to\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)\left(\frac{z}{k}\right)^{-\mu-1/2}W_{k,\mu}\left(\frac{z}{k}\right)=2z^{-\mu}K_{2\mu}(2\sqrt{z})$$

$$\lim_{k\to\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)\left(-\frac{z}{k}\right)^{-\mu-1/2}W_{k,\mu}\left(-\frac{z}{k}\right)=\begin{cases}i\pi e^{2\mu\pi i}z^{-\mu}H_{2\mu}^{(1)}(2\sqrt{z}) & \mathrm{Im}z>0\\ -i\pi e^{-2\mu\pi i}z^{-\mu}H_{2\mu}^{(2)}(2\sqrt{z}) & \mathrm{Im}z<0\end{cases}$$

$$W_{k,\mu}(z)\sim e^{z/2}e^{\pm i\pi k}z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)_n\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)_n}{n!}z^{-n}$$

($|z|\to\infty$，$-\pi/2<\arg z<5\pi/2$ 时取正号，$-5\pi/2<\arg z<\pi/2$ 时取负号)

$$M_{k,\mu}(z)\sim\frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(\mu-k+\frac{1}{2})}e^{z/2}z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}+\mu+k\right)_n\left(\frac{1}{2}-\mu+k\right)_n z^{-n}$$

$$+e^{-z/2}z^k e^{\pm i\pi(k-\mu-1/2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)_n\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)_n(-z)^{-n}$$

$\left(|z|\to\infty,\ \frac{-3\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\text{时取正号},\ \frac{-\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}\text{时取负号}\right)$

$$M_{k,\mu}(z)=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\sqrt{\pi}}k^{-\mu-1/4}z^{1/4}\cos\left(2\sqrt{kz}-\mu\pi-\frac{\pi}{4}\right)+O(|k|^{-\mu-3/4}) \qquad (|k|\to\infty,|\arg(kz)|<2\pi)$$

$$M_{-k,\mu}(z)=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\sqrt{\pi}}k^{-\mu-1/4}z^{1/4}e^{\mp i\pi(\mu+1/4)}\cos\left(\pm2i\sqrt{kz}-\mu\pi-\frac{\pi}{4}\right)+O(|k|^{-\mu-3/4})$$

($|k|\to\infty$，$-3\pi<\arg(kz)<\pi$ 时取正号，$-\pi<\arg(kz)<3\pi$ 时取负号)

$$W_{k,\mu}(z)\sim-\left(\frac{4z}{k}\right)^{1/4}e^{-k}k^k\cos\left(2\sqrt{kz}-\pi k+\frac{\pi}{4}\right) \qquad [|k|\to\infty,|\arg k|<\pi,|\arg(kz)|<2\pi]$$

$$W_{-k,\mu}(z)\sim\left(\frac{z}{4k}\right)^{1/4}k^{-k}\exp\left(k-2\sqrt{kz}\right)$$

[$|k|\to\infty$，$-\pi<\arg(kz)<3\pi$，$\mathrm{Im}k>0$ 或 $-3\pi<\arg(kz)<\pi$，$\mathrm{Im}k<0$]

不完全伽马函数(incomplete gamma function)

$$\gamma(\nu,z)=\int_0^z u^{\nu-1}e^{-u}du \qquad (\mathrm{Re}\nu>0)$$

$$=\frac{z^\nu}{\nu}F(\nu;\nu+1;-z) \qquad (\nu\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$=\frac{1}{\nu}z^\nu e^{-z}F(1;\nu+1;z) \qquad (\nu\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$=\frac{z^\nu}{\sin\pi\nu}\int_0^\pi e^{z\cos\varphi}\cos(\nu\varphi+z\sin\varphi)d\varphi \qquad (z\neq0,\nu\neq\text{整数})$$

$$\gamma(n+1,z)=n!\left[1-e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right] \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\gamma(\nu+1,z)=\nu\gamma(\nu,z)-z^{\nu}e^{-z}$$

$$\frac{d}{dz}\gamma(\nu,z)=-\frac{d}{dz}\Gamma(\nu,z)=z^{\nu-1}e^{-z}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{-\nu}\gamma(\nu,z)]=(-)^n z^{-\nu-n}\gamma(\nu+n,z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^z\gamma(\nu,z)]=(-)^n(1-\nu)_n e^z\gamma(\nu-n,z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^z z^{n-\nu}\gamma(\nu,z)]=\frac{n!}{\nu}F(n+1;\nu+1;z)$$

$$\Gamma(\nu,z)=\Gamma(\nu)-\gamma(\nu,z)=\int_z^{\infty}u^{\nu-1}e^{-u}du=\frac{e^{-z}z^{\nu}}{\Gamma(1-\nu)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{-\nu}}{z+t}dt \qquad (\mathrm{Re}\nu<1,z\neq-1,-2,-3,\cdots)$$

$$\Gamma(n+1,z)=n!\ e^{-z}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$$

$$\Gamma(-n,z)=\frac{(-)^n}{n!}\left[\Gamma(0,z)-e^{-z}\sum_{k=0}^{n-1}(-)^k k!\ z^{-k-1}\right]$$

$$\Gamma(\nu,z)=z^{\nu}e^{-z}U(1;\nu+1;z)=e^{-z}U(1-\nu;1-\nu;z)$$

$$\Gamma(\nu+1,z)=\nu\Gamma(\nu,z)+z^{\nu}e^{-z}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[z^{-\nu}\Gamma(\nu,z)]=(-)^n z^{-\nu-n}\Gamma(\nu+n,z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^z\Gamma(\nu,z)]=(-)^n(1-\nu)_n e^z\Gamma(\nu-n,z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^z z^{n-\nu}\Gamma(\nu,z)]=n!\ (1-\nu)_n U(n+1;\nu+1;z)$$

$$\Gamma(\nu,z)=e^{-z}z^{\nu-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1}(1-\nu)_n(-z)^{-n}+O(|z|^{-N})\right] \qquad (|z|\to\infty,\ |\arg z|<3\pi/2)$$

$$\Gamma(\nu+1,\nu)=e^{-\nu}\nu^{\nu}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}\nu}+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2\pi}}{24}\nu^{-1/2}+\cdots\right] \qquad (|\nu|\to\infty,\ |\arg\nu|<\pi/2)$$

误差函数(error function)

$$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}du=\frac{2}{\sqrt{\pi}}zF\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right)=\frac{2z}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}F\left(1;\frac{3}{2};z^2\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n!\ (2n+1)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!!}z^{2k+1}$$

$$\mathrm{erf}(z)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\left[\sum_{k=0}^{n}(-)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k}z^{-2k-1}+r_n(z)\right] \qquad (|z|\to\infty,\ |\arg z|<3\pi/4)$$

$$r_n(z)=(-)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{2^n}ze^{z}\int_z^{\infty}t^{-2(n+1)}e^{-t^2}dt,$$

$$|r_n(z)|=\frac{(2n+1)!!}{(2z^2)^n}\frac{1}{\sin\delta} \qquad (|\arg z|\leqslant\pi/2-\delta<\pi/2)$$

$$\mathrm{erfc}(z)=1-\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty}e^{-u^2}du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}U\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};z^2\right)$$

$$\mathrm{erf}(\infty)=1$$

概率积分(probability integral)

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-u^2/2}du=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!!}z^{2k+1}$$

$$F(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{2i}e^{-z^2}\mathrm{erf}(iz)=e^{-z^2}\int_0^z e^{u^2}du=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k2^k}{(2k+1)!!}z^{2k+1}=zF\left(1;\frac{3}{2};-z^2\right)$$

$$\Phi(\infty)=1$$

菲涅耳积分(Fresnel integral)

$$S(z)=\int_0^z \sin\frac{\pi t^2}{2}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}\frac{z^{4k+3}}{4k+3}=\alpha(z)\sin\frac{\pi z^2}{2}-\beta(z)\cos\frac{\pi z^2}{2}$$

$$C(z)=\int_0^z \cos\frac{\pi t^2}{2}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\frac{z^{4k+1}}{4k+1}=\alpha(z)\cos\frac{\pi z^2}{2}+\beta(z)\sin\frac{\pi z^2}{2}$$

$$\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(4k+1)!!}\pi^{2k}z^{4k+1},\quad \beta(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(4k+3)!!}\pi^{2k+1}z^{4k+3}$$

$$C(z)\pm iS(z)=\frac{1\pm i}{2}\mathrm{erf}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1\mp i)z\right]$$

$$S(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi z}\left[A(z)\cos\frac{\pi z^2}{2}+B(z)\sin\frac{\pi z^2}{2}\right]$$

$$C(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi z}\left[B(z)\cos\frac{\pi z^2}{2}-A(z)\sin\frac{\pi z^2}{2}\right]$$

$$A(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(4k-1)!!}{(\pi z^2)^{2k}},B(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(4k+1)!!}{(\pi z^2)^{2k+1}}, \qquad (|z|\to\infty,|\arg|z<\pi/2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}S(x)=\lim_{x\to+\infty}C(x)=\frac{1}{2}$$

指数积分(exponential integral)

$$\mathrm{Ei}(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{e^u}{u}du=\gamma+\ln(-z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot k!}z^k \qquad [|\arg(-z)|<\pi]$$

$$\mathrm{Ei}(x)=v.p.\left[\int_{-\infty}^{x}\frac{e^u}{u}du\right]=v.p.\left[-\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du\right]=\gamma+\ln x+\int_0^x\frac{e^u-1}{u}du=\gamma+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot k!}x^k \qquad (x>0)$$

$$\mathrm{Ei}(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{e^u}{u}du=\gamma+\ln x+\int_0^x\frac{e^{-u}-1}{u}du=\gamma+\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-)^k}{k\cdot k!}x^k \qquad (x>0)$$

$$\mathrm{Ei}(z)=\frac{1}{z}e^z\left[\sum_{k=0}^{n}k!\ z^{-k}+r_n(z)\right] \qquad (|z|\to\infty)$$

$$r_n(z)=(n+1)!\ ze^{-z}\int_{-\infty}^{z}t^{-n-2}e^t dt \qquad (|\arg(-z)|<\pi)$$

$$|r_n(z)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} & |\arg(-z)|\leqslant\pi/2\\[2mm] \dfrac{(n+1)!}{|z|^{n+1}\sin^{n+1}\delta} & |\arg(-z)|\leqslant\pi-\delta<\pi\end{cases}$$

$$\mathrm{Ei}(z)\sim\frac{e^z}{z}\sum_{k=0}^{\infty}k!\ z^{-k} \qquad (|z|\to\infty,|\arg z|<3\pi/2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}[e^{-x}\mathrm{Ei}(x)]=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[xe^{-x}\mathrm{Ei}(x)]=1$$

对数积分(logarithmic integral)

$$\mathrm{li}(z)=\int_0^z\frac{du}{\ln u}=\mathrm{Ei}(\ln z)$$

$$\mathrm{li}(x)=\int_0^x\frac{du}{\ln u}=\mathrm{Ei}(\ln x)=\gamma+\ln(-\ln x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^k x}{kk!} \qquad (0<x<1)$$

$$\mathrm{li}(x)=v.p.\left[\int_0^x\frac{du}{\ln u}\right]=\mathrm{Ei}(\ln x)=\gamma+\ln\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln^k x}{kk!} \qquad (1<x<\infty)$$

$$\mathrm{li}(z)=\frac{z}{\ln z}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{\ln^k z}+r_n(z)\right] \qquad (|z|\to\infty)$$

$$|r_n(z)|=O(|z|^{-n-1}) \qquad (0<\delta\leqslant|\arg z|\leqslant\pi-\delta<\pi)$$

$$|r_n(z)|\leqslant\frac{(n+1)!}{|\ln z|^{n+1}} \qquad (|\arg z|\leqslant\pi-\delta<\pi)$$

正弦积分(sine integral)

$$\mathrm{Si}(z)=\int_0^z\frac{\sin u}{u}du=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)(2k+1)!}z^{2k+1}$$

$$\mathrm{si}(z)=-\int_z^{\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\mathrm{Si}(z)-\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Si}(z)=\frac{\sin z}{z}$$

$$\mathrm{Si}(-z)=-\mathrm{Si}(z) \qquad (|\arg z|<\pi)$$

$$\mathrm{si}(x)+\mathrm{si}(-x)=-\pi \qquad (x>0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{si}(nx)}{n}=\frac{1}{2}[\pi\ln x-x] \qquad (0<x<2\pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\frac{\mathrm{si}(nx)}{n}=\frac{1}{2}[\pi\ln 2-x] \qquad (-\pi<x<\pi)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\mathrm{si}[2(2n+1)\pi]=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\infty}[\mathrm{si}(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\infty}\sin x\,\mathrm{si}(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{si}(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{z}\arctan z \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$\mathrm{si}(z)=-\frac{\cos z}{z}P(z)-\frac{\sin z}{z}Q(z)$$

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k(2k)!}{z^{2k}}+O(|z|^{-2n-2}),Q(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k(2k+1)!}{z^{2k+1}}+O(|z|^{-2n-3}) \qquad |\arg z|<\pi$$

$$\lim_{x\to+\infty}[x^{\rho}\mathrm{si}(x)]=0 \qquad (\rho<1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{si}(x)=-\pi \qquad (在负实轴上 \arg x=\mp\pi)$$

余弦积分(cosine integral)

$$\mathrm{Ci}(z)=\mathrm{ci}(z)=-\int_z^{\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u=\gamma+\ln z-\int_0^z\frac{1-\cos u}{u}\mathrm{d}u=\gamma+\ln z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-)^k}{2k(2k)!}z^{2k} \qquad (|\arg z|<\pi)$$

$$\mathrm{Ci}(x)\pm\mathrm{i}\,\mathrm{si}(x)=\mathrm{Ei}(\pm\mathrm{i}x) \qquad (x>0)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Ci}(z)=\frac{\cos z}{z}$$

$$\mathrm{Ci}(-z)=\mathrm{Ci}(z)-\mathrm{i}\pi \qquad (|\arg z|<\pi)$$

$$\mathrm{Ci}(x)-\mathrm{Ci}(x\mathrm{e}^{\pm\pi\mathrm{i}})=\mp\pi\mathrm{i} \qquad (x>0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ci}(2n\pi)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\mathrm{Ci}(2n\pi)=1-\ln 2-\frac{\gamma}{2}$$

$$\int_0^{\infty}[\mathrm{Ci}(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{Ci}(x)\mathrm{si}(x)\mathrm{d}x=-\ln 2$$

$$\int_0^{\infty}\cos x\,\mathrm{Ci}(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{Ci}(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2z}\ln(1+z^2) \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$\mathrm{Ci}(z)=\frac{\sin z}{z}P(z)-\frac{\cos z}{z}Q(z)$$

$$\lim_{x\to+\infty}[x^{\rho}\mathrm{Ci}(x)]=0 \qquad (\rho<1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{Ci}(x)=\pm\pi\mathrm{i} \qquad (在负实轴上 \arg x=\mp\pi)$$

抛物线柱函数(parabolic cylinder function)

$$D_\nu(z)=2^{(2\nu+1)/4}z^{-1/2}W_{(2\nu+1)/4,\pm 1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\pi}\,2^{(2\nu+1)/4}z^{-1/2}\left[\frac{M_{(2\nu+1)/4,-1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}-2\frac{M_{(2\nu+1)/4,1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}\right]$$

$$=2^{\nu/2}e^{-z^2/4}\sqrt{\pi}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}F\left(-\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};\frac{z^2}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}\,z}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}F\left(\frac{1-\nu}{2};\frac{3}{2};\frac{z^2}{2}\right)\right] \qquad (|\arg z|<3\pi/4)$$

$$D_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(-\nu)}e^{-z^2/4}\int_0^\infty e^{-zt-t^2/2}t^{-\nu-1}dt \qquad (\mathrm{Re}\,\nu<0)$$

$$\exp\left[-\frac{z^2}{4}-zt-\frac{t^2}{2}\right]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}D_n(z) & (|t|<\infty)\\ \displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^\nu\Gamma(-\nu)D_\nu(z)d\nu & (c<0,\ |\arg t|<\pi/4)\end{cases}$$

$$D_\nu(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi}}[e^{i\pi\nu/2}D_{-\nu-1}(iz)+e^{-i\pi\nu/2}D_{-\nu-1}(-iz)]$$

$$=e^{-i\pi\nu}D_\nu(-z)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{-i\pi(\nu+1)/2}D_{-\nu-1}(iz)$$

$$=e^{i\pi\nu}D_\nu(-z)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{i\pi(\nu+1)/2}D_{-\nu-1}(-iz)$$

$$D_{\nu+1}(z)-zD_\nu(z)+\nu D_{\nu-1}(z)=0$$

$$\frac{d}{dz}D_\nu(z)+\frac{z}{2}D_\nu(z)-\nu D_{\nu-1}(z)=0$$

$$\frac{d}{dz}D_\nu(z)-\frac{z}{2}D_\nu(z)+D_{\nu+1}(z)=0$$

$$2\frac{d}{dz}D_\nu(z)-\nu D_{\nu-1}(z)+D_{\nu+1}(z)=0$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{z^2/4}D_\nu(z)]=(-)^n(-\nu)_n e^{z^2/4}D_{\nu-n}(z)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}[e^{-z^2/4}D_\nu(z)]=(-)^n e^{-z^2/4}D_{\nu+n}(z)$$

$$D_0(z)=\frac{z}{\sqrt{2\pi}}K_{1/2}\left(\frac{1}{4}z^2\right)=e^{-z^2/4}H_0\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=e^{-z^2/4}$$

$$D_n(z)=2^{-n/2}e^{-z^2/4}H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_{-1}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{z^2/4}\mathrm{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_{-n-1}(z)=\frac{(-)^n}{n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-z^2/4}\frac{d^n}{dz^n}\left[e^{z^2/2}\mathrm{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$D_{1/2}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{3/2}\left[K_{1/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)+K_{3/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)\right]$$

$$D_{3/2}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{5/2}\left[2K_{1/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)+3K_{3/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)-K_{5/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)\right]$$

$$D_{5/2}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{7/2}\left[5K_{1/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)+9K_{3/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)-5K_{5/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)-K_{7/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)\right]$$

$$D_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{z}{2\pi}}K_{1/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)$$

$$D_{-3/2}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^{3/2}\left[K_{3/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)-K_{1/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)\right]$$

$$D_{-5/2}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{z^{5/2}}{3}\left[K_{5/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)-3K_{3/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)+2K_{1/4}\left(\frac{1}{4}z^2\right)\right]$$

$$D_\nu(0)=\frac{2^{\nu/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}$$

$$D'_\nu(0)=-\frac{2^{(\nu+1)/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}$$

$$D_\nu(z)\sim e^{-z^2/4}z^\nu\left[1-\frac{\nu(\nu-1)}{2\cdot z^2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot 4\cdot z^4}\mp\cdots\right] \qquad (|\arg z|<3\pi/4)$$

$$D_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left[\frac{\nu}{2}\ln(-\nu)-\frac{\nu}{2}-z\sqrt{-\nu}\right][1+O(|\nu|^{-1/2})] \qquad [|z|\text{有界},|\nu|\to\infty,|\arg(-\nu)|\leqslant\pi/2]$$

柱 函 数

以下约定

$w=\sqrt{z_1^2+z_2^2-2z_1z_2\cos\theta}$，$|z_2 e^{\pm i\theta}|<|z_1|$

$z_1-z_2\cos\theta=w\cos\alpha$，$z_2\sin\theta=w\sin\alpha$

规定 $z_2\to 0$ 时，$w\to z_1$，$\alpha\to 0$.

柱函数的一般性质(general properties of the cylindrical functions)

$Z_\nu(z)$代表柱函数，包括 $J_\nu(z)$，$N_\nu(z)$，$H_\nu^{(1)}$ 和 $H_\nu^{(2)}(z)$，以及它们的线性组合，只要组合系数与 z 及 ν 无关. 它们都是贝塞尔方程的解.

$$z[Z_{\nu-1}(z)+Z_{\nu+1}(z)]=2\nu Z_\nu(z)$$

$$Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)=2\nu Z'_\nu(z)$$

$$Z'_\nu(z)=Z_{\nu-1}(z)-\frac{\nu}{z}Z_\nu(z)$$

$$Z'_\nu(z)=-Z_{\nu+1}(z)+\frac{\nu}{z}Z_\nu(z)$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n[z^\nu Z_\nu(z)]=z^{\nu-n}Z_{\nu-n}(z)$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n[z^{-\nu}Z_\nu(z)]=(-)^n z^{-\nu-n}Z_{\nu+n}(z)$$

$$Z_\nu^{(n)}(z)=\frac{1}{2^n}\left[Z_{\nu-n}(z)-\binom{n}{1}Z_{\nu-n+2}(z)+\binom{n}{2}Z_{\nu-n+4}(z)-+\cdots+(-)^n Z_{\nu+n}(z)\right]$$

$$Z_\nu(\lambda z)=\lambda^{\pm\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mp)^n(\lambda^2-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n Z_{\nu\pm n}(z) \qquad |\lambda^2-1|<1$$

$$Z_\nu(z_1\pm z_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Z_{\nu\mp n}(z_1)J_n(z_2) \qquad |z_2|<|z_1|$$

$$e^{\pm i\nu\alpha}Z_\nu(w)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Z_{\nu+n}(z_1)J_n(z_2)e^{\pm in\theta}$$

$$\frac{Z_\nu(w)}{w^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)\frac{Z_{\nu+n}(z_2)}{z_1^\nu}\frac{J_{\nu+n}(z_1)}{z_2^\nu}C_n^\nu(\cos\theta) \qquad (\nu\neq 0,-1,-2,\cdots)$$

第一类贝塞尔函数(Bessel function of the first kind)

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}e^{-iz}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}F\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2iz\right) \qquad (|z|<\pi)$$

$$=\frac{1}{(2iz)^{1/2}2^{2\nu}i^{\nu}\Gamma(\nu+1)}M_{0,\nu}(2iz) \qquad (|z|<\pi)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\pi/2}\cos(z\cos t)\sin^{2\nu}t\,dt \qquad \left(\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin t-\nu t)dt-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-z\sinh t-\nu t}dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\frac{z^{\nu}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\exp\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{z^2}{t}\right)\right]t^{-\nu-1}dt \qquad (c>0,|\arg z|<\pi,\mathrm{Re}\nu>-1)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]t^{-\nu-1}dt \qquad (|\arg z|<\pi/2,|\arg t|<\pi)$$

（积分路线为从∞点出发，沿负实轴绕原点正向一周，再沿负实轴回到∞点）

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j_{\nu,n}^2}\right)$$

（$\nu\neq-1,-2,\cdots$，$j_{\nu,n}$是$z^{-\nu}J_\nu(z)$在右半平面$\mathrm{Re}z\geqslant0$的零点，按实部大小排列. 若零点为纯虚数，则只考虑虚部为正的零点）

$$J_\nu(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\int_1^{\infty}\frac{\sin xt}{(t^2-1)^{\nu+1/2}}dt \qquad (x>0,|\mathrm{Re}\nu|<1/2)$$

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\cos t}e^{in(t-\pi/2)}dt=\frac{i^{-n}}{\pi}\int_0^{\pi}e^{iz\cos t}\cos nt\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin t-nt)dt$$

$$J_\nu(e^{im\pi}z)=e^{im\pi\nu}J_\nu(z)$$

$$J_{-n}(z)=(-)^nJ_n(z)$$

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)t^n=J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}[t^n+(-t)^{-n}]J_n(z)$$

$$\exp(iz\cos\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nJ_n(z)e^{in\varphi}=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^nJ_n(z)\cos n\varphi$$

$$\sqrt{\frac{i}{\pi}}e^{iz\cos 2\alpha}\int_{-\infty}^{\sqrt{2z}\cos\alpha}e^{-it^2}dt=\frac{1}{2}J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}e^{in\pi/4}J_{n/2}(z)\cos n\alpha$$

$$J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(z)=1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-)^kJ_{2k+1}(z)=\frac{\sin z}{2}$$

$$J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-)^kJ_{2k}(z)=\cos z$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-)^{k+1}(2k)^2J_{2k}(z)=\frac{z\sin z}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k(2k+1)^2J_{2k+1}(z)=\frac{z\cos z}{2}$$

$$J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(z)\cos 2k\theta=\cos(z\sin\theta)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(z)\sin(2k+1)\theta=\frac{\sin(z\sin\theta)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)^3J_{2k+1}(z)=\frac{1}{2}(z+z^3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^2J_{2k}(z)=\frac{1}{2}z^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}2k(2k+1)(2k+2)J_{2k+1}(z)=\frac{1}{2}z^3$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n+2k)(2n+k-1)!}{k!} J_{2n+2k}(2z\sin\theta) = z^{2n}\sin^{2n}\theta$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+2k)(n+k-1)!}{k!} J_{n+2k}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{n}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+2k)\Gamma(\nu+k)}{k!} J_{\nu+2k}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \qquad (\nu \neq -1, -2, -3, \cdots)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+1)(2k-1)!!}{2^k k!} J_{2k+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}$$

$$\sum_{k=0}^{2n} (-)^k J_k(z) J_{2n-k}(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k(z) J_{2n+k}(z) = 0 \qquad (n \geqslant 1)$$

$$J_{-\nu}(z_1+z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-)^k J_{-\nu+k}(z_1) J_k(z_2) \qquad (|z_2| < |z_1|)$$

$$J_n(z_1+z_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z_1) J_{n-k}(z_2)$$

$$J_n(2z) = \sum_{k=0}^{n} J_k(z) J_{n-k}(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-)^k J_k(z) J_{n+k}(z)$$

$$J_\nu(\lambda z) = \lambda^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k(\lambda^2-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^k J_{\nu+k}(z)$$

$$J_0(2z\sin\alpha) = J_0^2(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(z)\cos 2k\alpha$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!} t^k \left(1+\frac{t}{2z}\right)^k J_{\nu+k}(z) = \left(\frac{z}{z+t}\right)^{\nu} J_\nu(z+t)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1/2}(x^2) = S(x)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1/2}(x^2) = C(x)$$

$$J_0(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z_1) J_m(z_2) e^{im\theta} = J_0(z_1)J_0(z_2) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_m(z_1)J_m(z_2)\cos m\theta$$

$$e^{\pm i\nu\alpha} J_\nu(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\nu+m}(z_1) J_m(z_2) e^{\pm im\theta}$$

$$\frac{J_n(w)}{w^n} = \sum_{m=n}^{\infty} \varepsilon_m \frac{J_m(z_1)}{z_1^n}\frac{J_m(z_2)}{z_2^n}\frac{d^n\cos m\theta}{(d\cos\theta)^n}$$

$$\frac{J_\nu(w)}{w^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) \frac{J_{\nu+m}(z_1)}{z_1^\nu}\frac{J_{\nu+m}(z_2)}{z_2^\nu} C_m^\nu(\cos\theta) \qquad (\nu \neq 0, -1, -2, \cdots)$$

$$\frac{J_{-\nu}(w)}{w^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m(\nu+m) \frac{J_{\nu+m}(z_1)}{z_1^\nu}\frac{J_{-\nu-m}(z_2)}{z_2^\nu} C_m^\nu(\cos\theta) \qquad (\nu \neq 0, -1, -2, \cdots)$$

$$e^{\pm iz\cos\alpha} = \Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} (\nu+m) i^{\pm m} J_{\nu+m}(z) C_m^\nu(\cos\theta) \qquad (\nu \neq 0, -1, -2, \cdots)$$

$$\frac{J_\nu(2z\sin\theta)}{(2z\sin\theta)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (\nu+n)\left[\frac{J_{\nu+n}(z)}{z^\nu}\right]^2 C_n^\nu(\cos 2\theta) \qquad (\nu \neq 0, -1, -2, \cdots)$$

$$t^\nu J_\nu(z(t+t^{-1})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{2n} J_{\nu-n}(z) J_n(z) \qquad (若\ \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots 则\ |t| < 1)$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \Gamma(2\nu) = \Gamma(\nu)\Gamma(1+\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+n)\Gamma(2\nu+n)}{n!}[J_{\nu+n}(z)]^2$$

$$\cos(z\cos\theta) = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n(\nu+2n) \frac{J_{\nu+2n}(z)}{z^\nu} C_{2n}^\nu(\cos\theta)$$

$$\sin(z\cos\theta) = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n(\nu+2n+1) \frac{J_{\nu+2n+1}(z)}{z^\nu} C_{2n+1}^\nu(\cos\theta)$$

$$(\sin\alpha\,\sin\beta)^{-\nu+1/2}J_{\nu-1/2}(z\,\sin\alpha\,\sin\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\cos\alpha\cos\beta}=\sqrt{\frac{1}{2\pi z}}[2^{\nu}\Gamma(\nu)]^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{n}n!\,(\nu+n)}{\Gamma(2\nu+n)}J_{\nu+n}(z)C_{n}^{\nu}(\cos\alpha)C_{n}^{\nu}(\cos\beta)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}J_{k}(kz)=\frac{z}{2(1-z)}\\&\sum_{k=1}^{\infty}(-)^{k}J_{k}(kz)=-\frac{z}{2(1+z)}\\&\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(2kz)=\frac{z^{2}}{2(1-z^{2})}\\&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}J_{2k}(2kz)=\frac{1}{2}z^{2}\\&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2}}J_{2k-1}((2k-1)z)=\frac{1}{2}z\end{aligned}\right\}\qquad\left[\left|\frac{z\exp\sqrt{1-z^{2}}}{1+\sqrt{1-z^{2}}}\right|<1\right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{k}'(kx)}{k}=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\qquad(0\leqslant x<1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-)^{k-1}\frac{J_{k}'(kx)}{k}=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\qquad(0\leqslant x<1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}kJ_{k}'(kx)=\frac{1}{2(1-x)^{2}}\qquad(0\leqslant x<1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-)^{k-1}kJ_{k}'(kx)=\frac{1}{2(1+x)^{2}}\qquad(0\leqslant x<1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-)^{k+1}J_{0}(kx)=\frac{1}{2}\qquad(0<x<\pi)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2}}J_{0}((2k-1)x)=\begin{cases}\dfrac{\pi^{2}}{8}-\dfrac{|x|}{2} & (-\pi<x<2\pi)\\[2mm]\dfrac{\pi^{2}}{8}+\sqrt{x^{2}-\pi^{2}}-\dfrac{x}{2}-\pi\arccos\dfrac{\pi}{x} & (\pi<x<2\pi)\end{cases}$$

$$\int J_{\nu}(z)\mathrm{d}z=2\sum_{n=0}^{\infty}J_{\nu+2n+1}(z)$$

$$\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-at}J_{\nu}(bt)t^{\nu}\mathrm{d}t=\frac{(2b)^{\nu}}{(a^{2}+b^{2})^{\nu+1/2}\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\qquad\left[\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2},\mathrm{Re}(a\pm\mathrm{i}b)>0\right]$$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-ax}J_{\nu}(bx)x^{\mu-1}\mathrm{d}x&=\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{a^{\mu}\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu}F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+1;-\frac{b^{2}}{a^{2}}\right)\\&=\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{a^{\mu}\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu}\left(1+\frac{b^{2}}{a^{2}}\right)^{-\mu+1/2}F\left(\frac{\nu-\mu+1}{2},\frac{\nu-\mu}{2}+1;\nu+1;-\frac{b^{2}}{a^{2}}\right)\\&=\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{(a^{2}+b^{2})^{(\nu+\mu)/2}\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu}F\left(\frac{\nu+\mu}{2},\frac{\nu-\mu+1}{2};\nu+1;\frac{b^{2}}{a^{2}+b^{2}}\right)\\&\qquad[\mathrm{Re}(\nu+\mu)>0,\mathrm{Re}(a\pm\mathrm{i}b)>0]\\&=\frac{\Gamma(\nu+\mu)}{(a^{2}+b^{2})^{\mu/2}}P_{\mu-1}^{-\nu}\left(\frac{a}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}\right)\qquad[\mathrm{Re}(\nu+\mu)>0,\mathrm{Re}b>|\mathrm{Im}a|]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{\nu}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Bigg\{&\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-)^{m}\frac{(\nu,2m)}{(2z)^{2m}}+O(|z|^{-2M})\right]\\&-\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{N-1}(-)^{m}\frac{(\nu,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+O(|z|^{-2N-1})\right]\Bigg\}\qquad(\nu\text{ 固定},z\to\infty,|\arg z|<\pi)\end{aligned}$$

第二类贝塞尔函数(Bessel function of the second kind)

$$N_{\nu}(z)=\frac{1}{\sin\nu\pi}[J_{\nu}(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)]\qquad(|\arg z|<\pi)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\left[\int_{0}^{\pi/2}\sin(z\,\sin t)\cos^{2\nu}t\,\mathrm{d}t-\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-z\sinh t}\cosh^{2\nu}t\,\mathrm{d}t\right]\qquad\left(\mathrm{Re}z>0,\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin t-\nu t)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\sinh t}[e^{\nu t}+e^{-\nu t}\cos\nu\pi]\,dt \qquad (\operatorname{Re}z>0)$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\int_1^\infty \frac{\cos xt}{(t^2-1)^{\nu+1/2}}dt \qquad \left(x>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(x\cosh t-\frac{\nu\pi}{2}\right)\cosh\nu t\,dt \qquad (x>0,\ |\operatorname{Re}\nu|<1)$$

$$N_n(z)=\lim_{\nu\to n}N_\nu(z)$$

$$=\frac{2}{\pi}J_n(z)\ln\frac{z}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-)^k}{k!\,(n+k)!}[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

（$|\arg z|<\pi$，$n=0$ 时去掉最后一项有限和）

$$N_{-n}(z)=(-)^n N_n(z)$$

$$N_\nu(w)e^{i\nu\alpha}=\sum_{n=-\infty}^\infty N_{\nu+n}(z_1)J_n(z_2)e^{in\theta}$$

$$N_{\pm\nu}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z\mp\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-)^k}{(2k)!}\frac{\Gamma\left(\nu+2k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-2k+\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-2k}+R_1(z)\right]\right.$$

$$\left.+\cos\left(z\mp\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}\frac{\Gamma\left(\nu+2k+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-2k-\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-2k-1}+R_2(z)\right]\right\} \qquad (|z|\to\infty,\ |\arg z|<\pi)$$

$$|R_1(z)|<\frac{1}{(2m)!}\left|\frac{\Gamma\left(\nu+2m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-2m+\frac{1}{2}\right)}\right|\cdot|2z|^{-2m}, \qquad \left(m>\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$|R_2(z)|<\frac{1}{(2n+1)!}\left|\frac{\Gamma\left(\nu+2n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-2n-\frac{1}{2}\right)}\right|\cdot|2z|^{-(2n+1)}, \qquad \left(n>\frac{\nu}{2}-\frac{3}{4}\right)$$

$$N_\nu(x)\sim-\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \qquad (\nu>0,\ x\to0)$$

$$N_0(x)\sim-\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2} \qquad (x\to0)$$

第三类贝塞尔函数(Bessel function of the third kind)

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iN_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i(2\nu+1)\pi/4}W_{0,\nu}(2e^{-i\pi/2}z)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\eta+i\infty}^{\eta-i\infty}e^{i[z\cos t+\nu(t-\pi/2)]}dt \qquad (-\eta<\arg z<\pi-\eta,\ 0\leqslant\eta\leqslant\pi)$$

$$=-\frac{2i}{\pi}e^{-i\nu\pi/2}\int_0^\infty e^{iz\cosh t}\cosh\nu t\,dt \qquad (0<\arg z<\pi)$$

$$=\frac{1}{\pi i}e^{-i\nu\pi/2}\int_{-\infty}^\infty e^{iz\cosh t-\nu t}dt \qquad (0<\arg z<\pi)$$

$$=-\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-i\nu\pi}}{\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^\infty e^{iz\cosh t}\sinh^{2\nu}t\,dt \qquad \left(0<\arg z<\pi,\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}\text{或}\arg z=0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{i}{\pi}e^{-i\nu\pi/2}\int_0^\infty \exp\left[\frac{iz}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]t^{-\nu-1}dt \qquad (\arg z=0,\ |\operatorname{Re}z|<1\text{ 或 }0<\arg z<\pi)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)}\exp\left[i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\int_0^{\infty e^{i\delta}}e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{it}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt$$

$$\left(\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2},\ \delta-\frac{\pi}{2}<\arg z<\delta+\frac{3\pi}{2},\ |\delta|<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\frac{2i}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\int_1^\infty \frac{e^{izt}}{(t^2-1)^{\nu+1/2}}dt \qquad \left(\operatorname{Im}z>0,\operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}\text{或}\arg z=0,\ |\operatorname{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right)$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-\mathrm{i}N_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\nu+1)\pi/4}W_{0,\nu}(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}z)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\eta-\mathrm{i}\infty}^{2\pi-\eta+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[z\cos t+\nu(t-\pi/2)]}\mathrm{d}t \qquad (-\eta<\arg z<\pi-\eta,0\leqslant\eta\leqslant\pi)$$

$$=\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\nu/2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cosh t}\cosh\nu t\,\mathrm{d}t \qquad (-\pi<\arg z<0)$$

$$=-\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi/2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\cosh t-\nu t}\mathrm{d}t \qquad (-\pi<\arg z<0)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)}\exp\left[-\mathrm{i}\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\int_0^{\infty\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}}\mathrm{e}^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1-\frac{\mathrm{i}t}{2z}\right)^{\nu-1/2}\mathrm{d}t$$

$$\left(\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2},\delta-\frac{3\pi}{2}<\arg z<\delta+\frac{\pi}{2},|\delta|<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu+1/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\int_1^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt}}{(t^2-1)^{\nu+1/2}}\mathrm{d}t \qquad \left(\mathrm{Im}z>0,\mathrm{Re}\nu<\frac{1}{2}\text{或 }\arg z=0,|\mathrm{Re}\nu|<\frac{1}{2}\right)$$

$$H_{-\nu}^{(1)}(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z)$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z)$$

$$\overline{H_\nu^{(2)}(z)}=H_{\bar\nu}^{(1)}(\bar z)$$

$$\frac{H_\nu^{(1)}(w)}{w^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^\infty(\nu+n)\frac{H_{\nu+n}^{(1)}(z_1)}{z_1^\nu}\frac{J_{\nu+n}(z_2)}{z_2^\nu}C_n^\nu(\cos\theta) \qquad (\nu\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$\frac{H_\nu^{(2)}(w)}{w^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^\infty(\nu+n)\frac{H_{\nu+n}^{(2)}(z_1)}{z_1^\nu}\frac{J_{\nu+n}(z_2)}{z_2^\nu}C_n^\nu(\cos\theta) \qquad (\nu\neq0,-1,-2,\cdots)$$

$$H_0^{(1)}(w)=H_0^{(1)}(z_1)J_0(z_2)+2\sum_{n=1}^\infty H_n^{(1)}(z_1)J_n(z_2)\cos n\theta$$

$$H_0^{(2)}(w)=H_0^{(2)}(z_1)J_0(z_2)+2\sum_{n=1}^\infty H_n^{(2)}(z_1)J_n(z_2)\cos n\theta$$

$$H_\nu^{(1)}(w)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\nu\alpha}=\sum_{n=-\infty}^\infty H_{\nu+n}^{(1)}(z_1)J_n(z_2)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\theta}$$

$$H_\nu^{(2)}(w)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\nu\alpha}=\sum_{n=-\infty}^\infty H_{\nu+n}^{(2)}(z_1)J_n(z_2)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\theta}$$

$$H_0^{(1)}(z)\sim-\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\ln\frac{2}{z} \qquad H_\nu^{(1)}(z)\sim-\frac{\mathrm{i}\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$$

$$H_0^{(2)}(z)\sim\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\ln\frac{2}{z} \qquad H_\nu^{(2)}(z)\sim\frac{\mathrm{i}\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \qquad (z\to0)$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[\mathrm{i}\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\sum_{m=0}^n\frac{(-)^m}{m!}\frac{\Gamma\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-m+\frac{1}{2}\right)}(2\mathrm{i}z)^{-m}+O(|z|^{-n-1})\right]$$

$$(|z|\to\infty,-\pi<\arg z<2\pi)$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[-\mathrm{i}\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\sum_{m=0}^n\frac{1}{m!}\frac{\Gamma\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-m+\frac{1}{2}\right)}(2\mathrm{i}z)^{-m}+O(|z|^{-n-1})\right]$$

$$(|z|\to\infty,-2\pi<\arg z<\pi)$$

$$H_\nu^{(1)}(x)\sim\sqrt{\frac{2\cot\beta}{\pi\nu}}\exp\left\{\mathrm{i}\left[\nu(\tan\beta-\beta)-\frac{\pi}{4}\right]\right\}\times\left[1-\frac{\mathrm{i}}{\nu}\left(\frac{1}{8}\cot\beta+\frac{5}{24}\cot^3\beta\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{9}{128}\cot^2\beta+\frac{231}{576}\cot^4\beta+\frac{1155}{3456}\cot^6\beta+\cdots\right)\right]$$

($x,\nu>0,\nu=x\cos\beta\to\infty$，当 $|x-\nu|$ 与 $x^{1/3}$ 可比时不成立)

$$H_\nu^{(2)}(x)\sim\sqrt{\frac{2\cot\beta}{\pi\nu}}\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\nu(\tan\beta-\beta)-\frac{\pi}{4}\right]\right\}\times\left[1+\frac{\mathrm{i}}{\nu}\left(\frac{1}{8}\cot\beta+\frac{5}{24}\cot^3\beta\right)\right.$$

$$-\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{9}{128}\cot^2\beta+\frac{231}{576}\cot^4\beta+\frac{1155}{3456}\cot^6\beta+\cdots\right)\Bigg]$$

$(x,\nu>0,\nu=x\cos\beta\to\infty$，当$|x-\nu|$与$x^{1/3}$可比时不成立)

$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{w}{\sqrt{3}}\exp\left\{\mathrm{i}\left[\frac{\pi}{6}+\nu\left(w-\frac{w^3}{3}-\arctan w\right)\right]\right\}H_{1/3}^{(1)}\left(\frac{\nu w^3}{3}\right)+O(|\nu|^{-1})$$

$$\left(x,\nu>0,w=\left[\left(\frac{x}{\nu}\right)^2-1\right]^{1/2},|x-\nu|\to0\text{ 或}\infty\right)$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=\frac{w}{\sqrt{3}}\exp\left\{-\mathrm{i}\left[\frac{\pi}{6}+\nu\left(w-\frac{w^3}{3}-\arctan w\right)\right]\right\}H_{1/3}^{(2)}\left(\frac{\nu w^3}{3}\right)+O(|\nu|^{-1})$$

$$\left(x,\nu>0,w=\left[\left(\frac{x}{\nu}\right)^2-1\right]^{1/2},|x-\nu|\to0\text{ 或}\infty\right)$$

半奇数阶贝塞尔函数(Bessel functions of order of half odd integers)

$$J_{n+1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Bigg[\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{[n/2]}(-)^m\left(n+\frac{1}{2},2m\right)(2z)^{-2m}$$
$$+\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{[(n-1)/2]}(-)^m\left(n+\frac{1}{2},2m+1\right)(2z)^{-2m-1}\Bigg]$$

$$N_{n+1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Bigg[\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{[(n-1)/2]}(-)^m\left(n+\frac{1}{2},2m+1\right)(2z)^{-2m-1}$$
$$-\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{m=0}^{[n/2]}(-)^m\left(n+\frac{1}{2},2m\right)(2z)^{-2m}\Bigg]$$

$$H_{n+1/2}^{(1)}(z)=(-\mathrm{i})^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\sum_{m=0}^{n}\mathrm{i}^m\left(n+\frac{1}{2},m\right)(2z)^{-m}$$

$$H_{n+1/2}^{(2)}(z)=\mathrm{i}^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\sum_{m=0}^{n}(-\mathrm{i})^m\left(n+\frac{1}{2},m\right)(2z)^{-m}$$

$$J_{-n-1/2}(z)=(-)^{n+1}N_{n+1/2}(z)\qquad N_{-n-1/2}(z)=(-)^nJ_{n+1/2}(z)$$

$$H_{-n-1/2}^{(1)}(z)=(-)^n\mathrm{i}H_{n+1/2}^{(1)}(z)\qquad H_{-n-1/2}^{(2)}(z)=(-)^{n+1}\mathrm{i}H_{n+1/2}^{(2)}(z)$$

$$J_{n+1/2}(z)=(-)^n\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\sin z}{z}$$

$$N_{n+1/2}(z)=(-)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\cos z}{z}$$

$$H_{n+1/2}^{(1)}(z)=(-)^{n+1}\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$$

$$H_{n+1/2}^{(2)}(z)=(-)^n\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z}$$

$$[J_{n+1/2}(z)]^2+[J_{-n-1/2}(z)]^2=\frac{2}{\pi z}\sum_{m=0}^{n}\frac{(2n-m)!\,(2n-2m)!}{[(n-m)!]^2m!}(2z)^{2m-2n}$$

$$J_{1/2}(z)=N_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z$$

$$N_{1/2}(z)=-J_{-1/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z$$

$$H_{1/2}^{(1)}(z)=-\mathrm{i}H_{-1/2}^{(1)}(z)=-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$$

$$H_{1/2}^{(2)}(z)=\mathrm{i}H_{-1/2}^{(2)}(z)=\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$$

$$J_0(z\sin\alpha)=\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(2k+\frac{1}{2}\right)\frac{(2k-1)!!}{2^kk!}J_{2k+1/2}(z)P_{2k}(\cos\alpha)$$

$$\frac{e^{iw}}{w}=\frac{i\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{H_{n+1/2}^{(1)}(z_1)}{\sqrt{z_1}}\frac{J_{n+1/2}(z_2)}{\sqrt{z_2}}P_n(\cos\alpha)$$

$$\frac{e^{-iw}}{w}=-\frac{i\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{H_{n+1/2}^{(2)}(z_1)}{\sqrt{z_1}}\frac{J_{n+1/2}(z_2)}{\sqrt{z_2}}P_n(\cos\alpha)$$

$$e^{iz\cos\theta}=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^nJ_{n+1/2}(z)P_n(\cos\theta)\qquad(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

$$\sqrt{\frac{i}{\pi}}e^{iz\cos2v}\int_{-\infty}^{\sqrt{2z}\cos v}e^{-it^2}dt=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_ne^{in\pi/4}J_{n/2}(z)\cos nv$$

$$\frac{1}{z}\sin\sqrt{z^2+2zt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sqrt{\frac{\pi z}{2}}J_{-n+1/2}(z)\qquad\left(\sqrt{z^2+2zt}\,|_{t=0}=z,2|t|<|z|\right)$$

$$\frac{1}{z}\cos\sqrt{z^2-2zt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sqrt{\frac{\pi z}{2}}J_{n-1/2}(z)\qquad\left(\sqrt{z^2-2zt}\,|_{t=0}=z,2|t|<|z|\right)$$

变形贝塞尔函数(modified Bessel function)

$$I_\nu(z)=e^{-i\nu\pi/2}J_\nu(ze^{i\pi/2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\;\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}e^{-z}F\left(\frac{1}{2}+\nu;1+2\nu;2z\right)$$

$$=\frac{2^{-2\nu}}{\Gamma(1+\nu)\sqrt{2z}}M_{0,\nu}(2z)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}e^{-zt}dt\qquad\left(\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{z\cos\theta}\cos\nu\theta d\theta-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-z\cosh t-\nu t}dt\qquad\left(|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2},\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\nu\pi}$$

$$=\frac{\pi e^{-z}}{2\sin\nu\pi}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu/2}F\left(\frac{1}{2}-\nu;1-2\nu;2z\right)-\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu/2}F\left(\frac{1}{2}+\nu;1+2\nu;2z\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}W_{0,\nu}(2z)$$

$$=\frac{i\pi}{2}e^{i\nu\pi/2}H_\nu^{(1)}(ze^{i\pi/2})=-\frac{i\pi}{2}e^{-i\nu\pi/2}H_\nu^{(2)}(ze^{-i\pi/2})$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_1^{\infty}e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-1/2}dt\qquad\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2},\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\text{或 }\mathrm{Re}z=0,\nu=0\right)$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-z\cosh t}\cosh\nu t\,dt\qquad\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2}\text{或 }\mathrm{Re}z=0,\nu=0\right)$$

$$=\frac{(2z)^{\nu}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\infty}(t^2+z^2)^{-\nu-1/2}\cos t\,dt\qquad\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2},\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_0^{\infty}\cos(t^3\pm xt)dt=\frac{\sqrt{x}}{3}K_{1/3}\left[\frac{2x}{3}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}\right]\qquad(x>0)$$

$$\frac{1}{2p^2}\exp\left[-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4p^2}\right]I_\nu\left(\frac{\alpha\beta}{2p^2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-p^2t^2}J_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)t\,dt\qquad\left(\mathrm{Re}\nu>-1,|\arg p|<\frac{\pi}{4}\right)$$

$$J_\mu(z)N_\nu(z)-J_\nu(z)N_\mu(z)=\frac{4\sin(\mu-\nu)\pi}{\pi^2}\int_0^{\infty}K_{\nu-\mu}(2z\sinh t)e^{-(\mu+\nu)t}dt\qquad(\mathrm{Re}z>0,|\mathrm{Re}(\mu-\nu)|<1)$$

$$J_\nu(z)\frac{\partial N_\nu(z)}{\partial\nu}-N_\nu(z)\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}=-\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}K_0(2z\sinh t)e^{-2\nu t}dt\qquad(\mathrm{Re}z>0)$$

$$J_\mu(z)J_\nu(z)+N_\mu(z)N_\nu(z)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{\infty}K_{\nu-\mu}(2z\sinh t)[e^{(\mu+\nu)t}+e^{-(\mu+\nu)t}\cos(\mu-\nu)\pi]dt & (\mathrm{Re}z>0,|\mathrm{Re}(\nu-\mu)|<1)\\ \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\int_0^{\infty}K_{\mu+\nu}(2z\sinh t)[e^{(\mu-\nu)t}\cos\pi\nu+e^{-(\mu-\nu)t}\cos\pi\mu]dt & (\mathrm{Re}z>0,|\mathrm{Re}(\nu+\mu)|<1)\end{cases}$$

$$z[I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)]=2\nu I_\nu(z) \qquad I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z)=2I'_\nu(z)$$

$$z[K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)]=-2\nu K_\nu(z) \qquad K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)=-2K'_\nu(z)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{z\,\mathrm{d}z}\right)^m[z^{\pm\nu}I_\nu(z)]=z^{\pm\nu-m}I_{\nu\mp m}(z)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{z\,\mathrm{d}z}\right)^m[z^{\pm\nu}K_\nu(z)]=(-)^m z^{\pm\nu-m}K_{\nu\mp m}(z)$$

$$I_\nu(z)I_{-\nu+1}(z)-I_{-\nu}(z)I_{\nu-1}(z)=I_\nu(z)I'_{-\nu}(z)-I'_\nu(z)I_{-\nu}(z)=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}$$

$$I_\nu(z)K_{\nu+1}(z)+I_{\nu+1}(z)K_\nu(z)=I'_\nu(z)K_\nu(z)-I_\nu(z)K'_\nu(z)=\frac{1}{z}$$

$$\mathrm{e}^{z\cos 2\alpha}\mathrm{erfc}(\sqrt{2z}\cos\alpha)=I_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n I_{n/2}(z)\cos n\alpha$$

$$\frac{I_\nu(w)}{w^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n(\nu+n)\frac{I_{\nu+n}(z_1)}{z_1^\nu}\frac{I_{\nu+n}(z_2)}{z_2^\nu}C_n^\nu(\cos\theta)$$

$$\frac{I_{-\nu}(w)}{w^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n(\nu+n)\frac{I_{\nu+n}(z_1)}{z_1^\nu}\frac{I_{-\nu-n}(z_2)}{z_2^\nu}C_n^\nu(\cos\theta)$$

$$\frac{K_\nu(w)}{w^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)\frac{K_{\nu+n}(z_1)}{z_1^\nu}\frac{I_{\nu+n}(z_2)}{z_2^\nu}C_n^\nu(\cos\theta)$$

$$I_\nu(w)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\nu\alpha}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-)^n I_{\nu+n}(z_1)I_n(z_2)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}n\theta}$$

$$K_\nu(w)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\nu\alpha}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-)^n K_{\nu+n}(z_1)I_n(z_2)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}n\theta}$$

$$t^\nu I_\nu(z(t^{-1}-t))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-)^n t^{2n}J_{\nu-n}(z)J_n(z) \qquad (若\ \nu\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots 则\ |t|<1)$$

$$I_\nu(z)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\left[\mathrm{e}^z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-k}+\mathrm{e}^{-z\pm(\nu+1/2)\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\ \Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-k}\right]$$

（$|z|\to\infty$；$-\pi/2<\arg z<3\pi/2$ 时取正号，$-3\pi/2<\arg z<\pi/2$ 时取负号）

$$I_\nu(x)\sim\frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}x^\nu \qquad (\nu>0,x\to 0)$$

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(\nu+k+\frac{1}{2}\right)}{k!\ \Gamma\left(\nu-k+\frac{1}{2}\right)}(2z)^{-k}+O(|z|^{-n})\right] \qquad (|\arg z|<3\pi/2)$$

$$K_0(x)\sim\ln\frac{2}{x} \qquad (x\to 0)$$

$$K_\nu(x)\sim 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)x^{-\nu} \qquad (\nu>0,x\to 0)$$

半奇数阶变形贝塞尔函数(modified Bessel functions of order of half odd integers)

$$K_{n+1/2}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\mathrm{e}^{-z}\sum_{m=0}^{n}\left(n+\frac{1}{2},m\right)(2z)^{-m}$$

$$I_{-n-1/2}(z)=(-)^n\frac{2}{\pi}K_{n+1/2}(z)+I_{n+1/2}(z)$$

$$I_{n+1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\sinh z}{z}$$

$$K_{n+1/2}(z)=(-)^n\sqrt{\frac{\pi}{2z}}z^{n+1}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}$$

$$I_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sinh z$$

$$I_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cosh z$$

$$K_{1/2}(z)=K_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\mathrm{e}^{-z}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-w}}{w}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{K_{n+1/2}(z_1)}{\sqrt{z_1}}\frac{I_{n+1/2}(z_2)}{\sqrt{z_2}}P_n(\cos\alpha)$$

$$\mathrm{e}^{z\cos 2\alpha}\operatorname{erf}(\sqrt{2z}\cos\alpha)=2\sum_{n=0}^{\infty}I_{n+1/2}(z)\cos(2n+1)\alpha$$

$$\frac{1}{z}\sinh\sqrt{z^2-2\mathrm{i}zt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}t)^n}{n!}\sqrt{\frac{\pi z}{2}}I_{-n+1/2}(z)\qquad\left(\sqrt{z^2-2\mathrm{i}zt}\,|_{t=0}=z,2|t|<|z|\right)$$

$$\frac{1}{z}\cosh\sqrt{z^2+2\mathrm{i}zt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}t)^n}{n!}\sqrt{\frac{\pi z}{2}}I_{n-1/2}(z)\qquad\left(\sqrt{z^2+2\mathrm{i}zt}\,|_{t=0}=z,2|t|<|z|\right)$$

安格尔函数和韦伯函数$\mathbf{J}_\nu(z)$(Anger function and Weber function $\mathbf{E}_\nu(z)$)

$$\mathbf{J}_\nu(z)\pm\mathrm{i}\mathbf{E}_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(\nu\theta-z\sin\theta)}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathbf{J}_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\nu\theta-z\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=J_\nu(z)+\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-z\sinh t-\nu t}\mathrm{d}t\qquad(\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\cos\frac{\pi\nu}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m}{\Gamma\left(m+1+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(m+1-\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}+\sin\frac{\pi\nu}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m}{\Gamma\left(m+\frac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{3-\nu}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+1}$$

$$\mathbf{E}_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin(\nu\theta-z\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=-N_\nu(z)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\mathrm{e}^{\nu t}+\mathrm{e}^{-\nu t}\cos\pi\nu)\mathrm{e}^{-z\sinh t}\mathrm{d}t\qquad(\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\sin\frac{\pi\nu}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m}{\Gamma\left(m+1+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(m+1-\frac{\nu}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}-\cos\frac{\pi\nu}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^m}{\Gamma\left(m+\frac{3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{3-\nu}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+1}$$

$$\mathbf{J}_n(z)=J_n(z)$$

$$\mathbf{J}_{-1/2}(z)=\mathbf{E}_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\{[C(z)+S(z)]\cos z-[C(z)-S(z)]\sin z\}$$

$$\mathbf{J}_{1/2}(z)=-\mathbf{E}_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\{[C(z)-S(z)]\cos z+[C(z)+S(z)]\sin z\}$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos(z\cos\theta)\cos\nu\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4\cos(\pi\nu/2)}[\mathbf{J}_\nu(z)+\mathbf{J}_{-\nu}(z)]=\frac{\pi}{4\sin(\pi\nu/2)}[\mathbf{E}_\nu(z)-\mathbf{E}_{-\nu}(z)]$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin(z\cos\theta)\cos\nu\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4\sin(\pi\nu/2)}[\mathbf{J}_\nu(z)-\mathbf{J}_{-\nu}(z)]=-\frac{\pi}{4\cos(\pi\nu/2)}[\mathbf{E}_\nu(z)+\mathbf{E}_{-\nu}(z)]$$

$$\mathbf{J}_\nu(z)\sin\pi\nu=\mathbf{E}_\nu(z)\cos\pi\nu-\mathbf{E}_{-\nu}(z)$$

$$\mathbf{E}_\nu(z)\sin\pi\nu=\mathbf{J}_{-\nu}(z)-\mathbf{J}_\nu(z)\cos\pi\nu$$

$$\mathbf{J}_{\nu-1}(z)+\mathbf{J}_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}\mathbf{J}_\nu(z)-\frac{2}{\pi z}\sin\pi\nu$$

$$\mathbf{E}_{\nu-1}(z)+\mathbf{E}_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}\mathbf{E}_\nu(z)-\frac{2}{\pi z}(1-\cos\pi\nu)$$

$$\mathbf{J}_{\nu-1}(z)-\mathbf{J}_{\nu+1}(z)=2\,\mathbf{J}'_\nu(z)$$

$$\mathbf{E}_{\nu-1}(z)-\mathbf{E}_{\nu+1}(z)=2\,\mathbf{E}'_\nu(z)$$

$$\mathbf{J}_\nu(z)=J_\nu(z)+\frac{\sin\pi\nu}{\pi z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-)^m\left(\frac{1+\nu}{2}\right)_m\left(\frac{1-\nu}{2}\right)_m\left(\frac{z}{2}\right)^{-2m}+O(z^{-2M})\right.$$

$$\left.+\frac{\nu}{2}\sum_{m=0}^{N-1}(-)^m\left(1+\frac{\nu}{2}\right)_m\left(1-\frac{\nu}{2}\right)_m\left(\frac{z}{2}\right)^{-2m-1}+O(z^{-2N-1})\right]\qquad(|\arg z|<\pi)$$

$$\mathbf{E}_\nu(z)=-N_\nu(z)-\frac{1+\cos\pi\nu}{\pi z}\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-)^m\left(\frac{1+\nu}{2}\right)_m\left(\frac{1-\nu}{2}\right)_m\left(\frac{z}{2}\right)^{-2m}+O(z^{-2M})\right]$$

$$-\frac{\nu}{2}\frac{1-\cos\pi\nu}{\pi z}\left[\sum_{m=0}^{N-1}(-)^m\left(1+\frac{\nu}{2}\right)_m\left(1-\frac{\nu}{2}\right)_m\left(\frac{z}{2}\right)^{-2m-1}+O(z^{-2N-1})\right] \qquad (|\arg z|<\pi)$$

艾里函数(Airy function)

$$\mathrm{Ai}(z)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{z}{3}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)$$

$$\mathrm{Bi}(z)=\sqrt{\frac{z}{3}}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)+I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right]$$

$$\mathrm{Ai}(-z)=\frac{\sqrt{z}}{3}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)+J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right]$$

$$\mathrm{Bi}(-z)=\sqrt{\frac{z}{3}}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)-J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right]$$

$$\int_0^\infty\cos(a^3t^3\pm xt)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sqrt[3]{3}\,a}\mathrm{Ai}\left(\pm\frac{x}{\sqrt[3]{3}\,a}\right)=\frac{1}{3a}\sqrt{\frac{x}{a}}K_{1/3}\left(\frac{2x}{3a}\sqrt{\frac{x}{3a}}\right) \qquad (a>0,x>0)$$

$$\int_0^\infty\left[\mathrm{e}^{-a^3t^3\pm zt}+\sin(a^3t^3\pm zt)\right]\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sqrt[3]{3}\,a}\mathrm{Bi}\left(\pm\frac{z}{\sqrt[3]{3}\,a}\right) \qquad (a>0)$$

$$\int_0^\infty\sin(a^3t^3-xt)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{9a}\sqrt{\frac{x}{a}}\left[I_{1/3}\left(\frac{2x}{3a}\sqrt{\frac{x}{3a}}\right)+I_{-1/3}\left(\frac{2x}{3a}\sqrt{\frac{x}{3a}}\right)+2\mathrm{i}\mathscr{J}_{1/3}\left(\frac{2\mathrm{i}x}{3a}\sqrt{\frac{x}{3a}}\right)-2\mathrm{i}\mathscr{J}_{-1/3}\left(\frac{2\mathrm{i}x}{3a}\sqrt{\frac{x}{3a}}\right)\right] \qquad (a,x>0)$$

$$\int_0^\infty\sin(a^3t^3+xt)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{9a}\sqrt{\frac{x}{a}}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2x}{3a}\sqrt{\frac{x}{3a}}\right)-J_{1/3}\left(\frac{2x}{3a}\sqrt{\frac{x}{3a}}\right)-2\mathscr{J}_{1/3}\left(\frac{2x}{3a}\sqrt{\frac{x}{3a}}\right)+2\mathscr{J}_{-1/3}\left(\frac{2x}{3a}\sqrt{\frac{x}{3a}}\right)\right] \qquad (a,x>0)$$

斯图鲁弗函数(Struve function)

$$\mathbf{H}_\nu(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-)^n}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+n+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu+1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^1(1-t^2)^{\nu-1/2}\sin zt\mathrm{d}t \qquad \left(\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^{\pi/2}\sin(z\cos t)\sin^{2\nu}t\mathrm{d}t \qquad \left(\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}\right)$$

$$=N_\nu(z)+\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^\infty(1+t^2)^{\nu-1/2}\mathrm{e}^{-zt}\mathrm{d}t \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\sqrt{\frac{2z}{\pi}}\int_0^{\pi/2}J_{\nu+1/2}(z\sin t)\sin^{-\nu+1/2}t\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^\nu\mathbf{H}_\nu(z)]=z^\nu\mathbf{H}_{\nu-1}(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z^{-\nu}\mathbf{H}_\nu(z)]=\frac{1}{2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}-z^\nu\mathbf{H}_{\nu+1}(z)$$

$$\mathbf{H}_{\nu-1}(z)+\mathbf{H}_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}\mathbf{H}_\nu(z)+\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$$

$$\mathbf{H}_{\nu-1}(z)-\mathbf{H}_{\nu+1}(z)=2\nu\mathbf{H}'_\nu(z)-\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu$$

$$\mathbf{H}_\nu(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi(\nu+1)}\mathbf{H}_\nu(z)$$

$$\mathbf{H}_{n+1/2}(z)=N_{n+1/2}(z)+\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{m=0}^n\frac{(2m)!}{m!\;(n-m)!}z^{-2m}$$

$$\mathbb{H}_{-n-1/2}(z)=(-)^n J_{n+1/2}(z)$$

$$\mathbb{H}_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}(1-\cos z) \qquad \mathbb{H}_{3/2}(z)=\sqrt{\frac{z}{2\pi}}\left(1+\frac{2}{z^2}\right)-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\sin z+\frac{\cos z}{z}\right)$$

$$\mathbb{H}_0(z)=-\mathbb{E}_0(z)$$

$$\mathbb{H}_n(z)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(2m)!\ (n-m)!}{m!\ (2n-2m)!}(2z)^{n-2m-1}-\mathbb{E}_n(z)$$

$$\mathbb{H}_{-n}(z)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(2n-2m-2)!\ (m+1)!}{(n-m-1)!\ (2m+2)!}(2z)^{2m-n+1}-\mathbb{E}_{-n}(z)$$

$$\mathbb{H}_\nu(z)=N_\nu(z)+\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}\left[\sum_{m=0}^{k-1}(-)^m\frac{(2m)!}{m!}\left(\frac{1}{2}-\nu\right)_m z^{-2m}+O(z^{-2k})\right] \qquad (|\arg z|<\pi)$$

洛默尔函数(Lommel function)

$$s_{\mu,\nu}(z)=\frac{1}{4}z^{\mu+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\frac{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+3}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+3}{2}+n\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \qquad (\mu\pm\nu\neq-1,-2,-3,\cdots)$$

$$=\frac{2^{\mu+3/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+3}{2}\right)\frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)}\int_0^1(1-t^2)^{(2\mu+1)/4}P_{\nu-1/2}^{-\mu-1/2}(t)\cos zt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2^{\mu+3/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+3}{2}\right)\frac{z^{\mu}}{(\mu+\nu+1)(\mu-\nu+1)}\int_0^1(1-t^2)^{(2\mu-1)/4}P_{\nu-1/2}^{-\mu+1/2}(t)\sin zt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[N_\nu(z)\int_0^z z^\mu J_\nu(z)\mathrm{d}z-J_\nu(z)\int_0^z z^\mu N_\nu(z)\,\mathrm{d}z\right]$$

$$=2^\mu\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{(\mu+\nu+1)/2}\int_0^{\pi/2}J_{(\mu-\nu+1)/2}(z\sin\theta)\sin^{(\nu-\mu+1)/2}\theta\cos^{\mu+\nu}\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad [\mathrm{Re}(\mu+\nu+1)>0]$$

$$s_{\mu,\nu}(az)=2^{(\mu-\nu+1)/2}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)a^{-\nu}z^{(\mu+\nu+1)/2}\int_0^a t^{(\nu-\mu+1)/2}(a^2-t^2)^{(\nu+\mu-1)/2}J_{(\mu-\nu+1)/2}(zt)\mathrm{d}t \qquad [\mathrm{Re}(\nu+\mu)>-1]$$

$$S_{\mu,\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)+\frac{2^{\mu-1}}{\sin\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\left[J_{-\nu}(z)\cos\frac{\mu-\nu}{2}\pi-J_\nu(z)\cos\frac{\mu+\nu}{2}\pi\right]$$

$$=s_{\mu,\nu}(z)+2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)\left[J_\nu(z)\sin\frac{\mu-\nu}{2}\pi-N_\nu(z)\cos\frac{\mu-\nu}{2}\pi\right]$$

$$=z^\mu\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}F\left(\frac{1-\mu+\nu}{2},\frac{1-\mu-\nu}{2};\frac{1}{2};-t^2\right)\mathrm{d}t \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$=z^{\mu+1}\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-zt}F\left(\frac{1-\mu+\nu}{2},\frac{1-\mu-\nu}{2};\frac{3}{2};-t^2\right)\mathrm{d}t \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2^\nu}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}z^\mu\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}(1+t^2)^{(\mu-1)/2}\left[P_{\mu-1}^\nu\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\sin\frac{\mu+\nu}{2}\pi+\frac{2}{\pi}Q_{\mu-1}^\nu\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\cos\frac{\mu+\nu}{2}\pi\right]\mathrm{d}t$$

$$(\mathrm{Re}z>0)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2^\nu}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\nu+\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)}z^\mu\int_0^\infty \mathrm{e}^{-zt}(1+t^2)^{(\mu-1)/2}\left[P_{-\mu}^\nu\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\cos\frac{\mu-\nu}{2}\pi+\frac{2}{\pi}Q_{-\mu}^\nu\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\sin\frac{\mu-\nu}{2}\pi\right]\mathrm{d}t$$

$$(\mathrm{Re}z>0)$$

$$S_{\mu,\nu}(az)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right)}\int_0^\infty t^{-\mu}(a^2+t^2)^{-1}K_\nu(zt)\mathrm{d}t \qquad [\mathrm{Re}(\mu\pm\nu)<1]$$

$$=\frac{2^{(\mu-\nu+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}a^{-\nu}z^{(\mu+\nu+1)/2}\int_0^\infty t^{(\nu-\mu+1)/2}(a^2+t^2)^{(\mu+\nu-1)/2}K_{(\nu-\mu-1)/2}(zt)\mathrm{d}t \qquad [\mathrm{Re}(\mu-\nu)<1]$$

$$S_{0,\nu}(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z\sinh t}\cosh\nu t\,\mathrm{d}t \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$\nu S_{o,\nu}(z)=z\int_0^\infty e^{-z\sinh t}\sinh\nu t\cosh t\,dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$S_{1,\nu}(z)=z\int_0^\infty e^{-z\sinh t}\cosh\nu t\cosh t\,dt \qquad (\mathrm{Re}z>0)$$

$$s_{\mu,-\nu}(z)=s_{\mu,\nu}(z)$$

$$S_{\mu,-\nu}(z)=S_{\mu,\nu}(z)$$

$$S_{\mu,\nu}(z)=z^{\mu-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right)_n\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)_n\left(\frac{z}{2}\right)^{-2n} \qquad (\mu\pm\nu=1,3,5,\cdots)$$

$$s_{\mu+2,\nu}(z)=z^{\mu+1}-[(\mu+1)^2-\nu^2]s_{\mu,\nu}(z)$$

$$\frac{d}{dz}s_{\mu,\nu}(z)\pm\frac{\nu}{z}s_{\mu,\nu}(z)=(\mu\pm\nu-1)s_{\mu-1,\nu\mp1}(z)$$

$$\frac{2\nu}{z}s_{\mu,\nu}(z)=(\mu+\nu-1)s_{\mu-1,\nu-1}(z)-(\mu-\nu-1)s_{\mu-1,\nu+1}(z)$$

$$2\frac{d}{dz}s_{\mu,\nu}(z)=(\mu+\nu-1)s_{\mu-1,\nu-1}(z)+(\mu-\nu-1)s_{\mu-1,\nu-1}(z)$$

$$s_{\nu,\nu}(z)=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{H}_\nu(z)$$

$$S_{\nu,\nu}(z)=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)[\boldsymbol{H}_\nu(z)-N_\nu(z)]$$

$$s_{\nu,\nu}(z)-S_{\nu,\nu}(z)=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)N_\nu(z)$$

$$s_{0,\nu}(z)=\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}[\boldsymbol{J}_\nu(z)-\boldsymbol{J}_{-\nu}(z)]$$

$$S_{0,\nu}(z)=\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}[\boldsymbol{J}_\nu(z)-\boldsymbol{J}_{-\nu}(z)-J_\nu(z)+J_{-\nu}(z)]$$

$$s_{-1,\nu}(z)=-\frac{\pi}{2\nu\sin\pi\nu}[\boldsymbol{J}_\nu(z)+\boldsymbol{J}_{-\nu}(z)]$$

$$S_{-1,\nu}(z)=\frac{\pi}{2\nu\sin\pi\nu}[J_\nu(z)+J_{-\nu}(z)-\boldsymbol{J}_\nu(z)-\boldsymbol{J}_{-\nu}(z)]$$

$$s_{1,\nu}(z)=1+\nu^2 s_{-1,\nu}(z)$$

$$S_{1,\nu}(z)=1+\nu^2 S_{-1,\nu}(z)$$

$$S_{0,2n+1}(z)=\frac{1}{2}S_{2n+1}(z)=\frac{z}{2n+1}O_{2n+1}(z)$$

$$S_{0,-1}(z)=\frac{1}{z}$$

$$S_{-1,2n}(z)=\frac{1}{4n}S_{2n}(z)$$

$$S_{1,2n}=zO_{2n}(z)$$

$$s_{0,1/2}(z)=\sqrt{\frac{2\pi}{z}}[C(z)\sin z-S(z)\cos z]$$

$$S_{0,1/2}(z)=\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left\{\left[\frac{1}{2}-S(z)\right]\cos z-\left[\frac{1}{2}-C(z)\right]\sin z\right\}$$

$$s_{-1,1/2}(z)=2\sqrt{\frac{2\pi}{z}}[S(z)\sin z+C(z)\cos z]$$

$$S_{-1,1/2}(z)=2\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left\{\left[\frac{1}{2}-C(z)\right]\cos z+\left[\frac{1}{2}-S(z)\right]\sin z\right\}$$

$$S_{1/2,1/2}(z)=\frac{1}{\sqrt{z}} \qquad S_{3/2,1/2}(z)=\sqrt{z}$$

$$S_{-1/2,1/2}(z)=\frac{1}{\sqrt{z}}[\mathrm{Ci}(z)\sin z-\mathrm{si}(z)\cos z]$$

$$S_{-3/2,1/2}(z)=-\frac{1}{\sqrt{z}}[\mathrm{si}(z)\sin z+\mathrm{Ci}(z)\cos z]$$

$$\lim_{\mu\to\nu}\frac{s_{\mu-1,\nu}(z)}{\Gamma(\nu-\mu)}=-2^{\nu-1}\Gamma(\nu)J_\nu(z)$$

$$S_{-1,0}(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(n!)^2}\left\{\left[\ln\frac{z}{2}-\psi(n+1)\right]^2-\frac{1}{2}\psi'(n+1)+\frac{\pi^2}{4}\right\}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

$$S_{\nu-1,\nu}(z)=\frac{1}{4}\Gamma(\nu)z^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\ \Gamma(\nu+n+1)}\left[2\ln\frac{z}{2}-\psi(\nu+n+1)-\psi(n+1)\right]\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}-2^{\nu-2}\pi\Gamma(\nu)N_\nu(z)$$

$$S_{\nu-2n-1,\nu}(z)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-)^m}{2^{2m+2}(-n)_{m+1}(\nu-n)_{m+1}}z^{\nu-2n+2m}+\frac{(-)^n}{2^{2n}n!\ (1-\nu)_n}S_{\nu-1,\nu}(z)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\frac{s_{\mu,\nu}(n\alpha)}{n^{\mu+3}}=\frac{1}{2}\frac{\alpha^{\mu+1}}{(\mu+1)^2-\nu^2}\left[\frac{\alpha^2}{(\mu+3)^2-\nu^2}-\frac{\pi^2}{6}\right]\qquad\left(0<\alpha<\pi,\mathrm{Re}\mu>-\frac{7}{2}\right)$$

$$\mathbf{J}_\nu(z)=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}[s_{0,\nu}(z)-\nu s_{1,\nu}(z)]$$

$$\mathbf{E}_\nu(z)=-\frac{1}{\pi}[(1+\cos\nu\pi)s_{0,\nu}(z)+\nu(1-\cos\nu\pi)s_{-1,\nu}(z)]$$

$$S_{\mu,\nu}(z)=z^{\mu-1}\left[\sum_{m=0}^{k-1}(-)^m\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right)_m\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)_m\left(\frac{z}{2}\right)^{-2m}+O(z^{-2k})\right]$$

洛默尔多项式(Lommel polynomial)

$$R_{m,\nu}(z)=\sum_{k=0}^{[m/2]}(-)^k\frac{(m-k)!}{k!\ (m-2k)!}\frac{\Gamma(\nu+m-k)}{\Gamma(\nu+k)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-m+2k}\qquad(\nu\neq-1,-2,\cdots)$$

$$R_{m,-n}(z)=\sum_{k=0}^{[m/2]}(-)^{m+k}\frac{(m-k)!}{k!\ (m-2k)!}\frac{(n-k)!}{(n-m+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-m+2k}$$

$$R'_{m,\nu}(z)=-\frac{m}{z}R_{m,\nu}(z)+R_{m-1,\nu}(z)-R_{m-1,\nu+1}(z)$$

$$=\frac{2\nu+m}{z}R_{m,\nu}(z)-R_{m-1,\nu+1}(z)-R_{m+1,\nu}(z)$$

$$=-\frac{2\nu+m-2}{z}R_{m,\nu}(z)+R_{m+1,\nu-1}(z)+R_{m-1,\nu}(z)$$

$$R_{0,\nu}(z)=1$$

$$R_{1,\nu}(z)=\frac{2\nu}{z}$$

$$R_{2,\nu}(z)=\frac{4\nu(\nu+1)}{z^2}-1$$

$$R_{-1,\nu}(z)=0$$

$$R_{-2,\nu}(z)=-1$$

$$R_{m,\nu}(z)R_{m-n+1,\nu+n}(z)-R_{m+1,\nu}(z)R_{m-n,\nu+n}(z)=R_{n-1,\nu}(z)$$

$$R_{n,\nu}(z)R_{k-m-1,\nu+m+1}(z)+R_{k,\nu}(z)R_{m-n-1,\nu+n+1}(z)+R_{m,\nu}(z)R_{n-k-1,\nu+k+1}(z)=0$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\Gamma(\nu+m+1)}R_{m,\nu+1}(z)\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+m}=J_\nu(z)$$

诺伊曼多项式(Neumann polynomial)

$$O_n(z)=\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{n(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n-1}\qquad(n\geqslant1)$$

$$=\frac{1}{2z^{n+1}}\int_0^\infty\left[\left(u+\sqrt{u^2+z^2}\right)^n+\left(u-\sqrt{u^2+z^2}\right)^n\right]e^{-u}du\qquad(n\geqslant1)$$

$$O_0(z)=\frac{1}{z}$$

$$O_1(z)=\frac{1}{z^2}$$

$$O_2(z)=\frac{1}{z}+\frac{4}{z^3}$$

$$O_{2n}(z)=\frac{n}{2}\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m-1)!}{(n-m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2m-1}$$

$$O_{2n+1}(z)=\frac{2n+1}{4}\sum_{m=0}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-2m-2}$$

$$2O_n'(z)=O_{n-1}(z)-O_{n+1}(z) \qquad (n\geqslant 1)$$

$$(n-1)O_{n+1}(z)+(n+1)O_{n-1}(z)-\frac{2}{z}(n^2-1)O_n(z)=\frac{2n}{z}\sin^2\frac{n\pi}{2} \qquad (n\geqslant 1)$$

$$nzO_{n-1}(z)-(n^2-1)O_n(z)=(n-1)zO_n'(z)+n\sin^2\frac{n\pi}{2} \qquad (n\geqslant 1)$$

$$nzO_{n+1}(z)-(n^2-1)O_n(z)=-(n+1)zO_n'(z)+n\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

$$|O_n(z)|\leqslant\frac{2^{n-1}n!}{|z|^{n+1}}e^{|z|^2/4}$$

施勒夫利多项式(Schläfli polynomial)

$$S_0(z)=0$$

$$S_n(z)=\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \qquad (n\geqslant 1)$$

$$S_{-n}(z)=(-)^{n+1}S_n(z)$$

$$nS_n(z)=2zO_n(z)-2\cos^2\frac{n\pi}{2} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$S_{n-1}(z)+S_{n+1}(z)=4O_n(z)$$

椭圆积分和椭圆函数

椭圆积分(elliptic integral)

在下列各式中，$|k|<1, k'=\sqrt{1-k^2}, 0\leqslant\varphi<\pi/2$

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m\binom{-1/2}{m}k^{2m}t_{2m}(\varphi)$$

$$\left[t_0(\varphi)=\varphi, t_{2m}(\varphi)=\frac{2m-1}{2m}t_{2(m-1)}(\varphi)-\frac{1}{2m}\sin^{2m-1}\varphi\cos\varphi, m=1,2,3,\cdots\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-1/2}{m}k'^{2m}\rho_{2m}(\varphi) \qquad (0<k'\tan\varphi<1)$$

$$\left[\rho_0(\varphi)=\ln\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}, \rho_{2m}(\varphi)=\frac{1}{2m}\frac{\sin^{2m-1}\varphi}{\cos^{2m}\varphi}-\frac{2m-1}{2m}\rho_{2(m-1)}(\varphi), m=1,2,3,\cdots\right]$$

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m\binom{1/2}{m}k^{2m}t_{2m}(\varphi)$$

$$\left[t_0(\varphi)=\varphi, t_{2m}(\varphi)=\frac{2m-1}{2m}t_{2(m-1)}(\varphi)-\frac{1}{2m}\sin^{2m-1}\varphi\cos\varphi, m=1,2,3,\cdots\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{1/2}{m}k'^{2m}d_{2m}(\varphi) \qquad (0<k'\tan\varphi<1)$$

$$\left[d_0(\varphi)=\sin\varphi, d_2(\varphi)=-\sin\varphi+\ln\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}d_{2m}(\varphi)=\frac{1}{2(m-1)}\frac{\sin^{2m-1}\varphi}{\cos^{2(m-1)}\varphi}-\frac{2m-1}{2(m-1)}d_{2(m-1)}(\varphi), m=2,3,4,\cdots\right]$$

$$\Pi(h,k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{(1+h\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

$$K=K(k)=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{1+k'}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1/2)_m(1/2)_m}{m!\ m!}\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^{2m}\qquad\left(\frac{1-k'}{1+k'}<k<1\right)$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sum_{m=0}^{\infty}(-)^m(4m+1)\left[\frac{(2m)!}{2^{2m}m!\ m!}\right]^3P_{2m}(k')$$

$$=\frac{\pi}{2}+\pi\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{sech}\frac{m\pi K'}{K}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-1/2}{m}^2\left(\ln\frac{4}{k'}-b_m\right)k'^{2m}\qquad\left(b_0=0,b_m=b_{m-1}+\frac{2}{2m(2m-1)},m=1,2,3,\cdots\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1/2)_m(1/2)_m}{m!\ m!}\left[\psi(m+1)-\psi\left(m+\frac{1}{2}\right)-\ln k'\right]k'^{2m}$$

$$E=E(k)=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right)$$

$$=\frac{(1+k')\pi}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(2m)!}{2^{2m}(2m-1)m!\ m!}\right]^2\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^{2m}\qquad\left(\frac{1-k'}{1+k'}<k<1\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{8}\sum_{m=0}^{\infty}(-)^{m+1}\frac{4m+1}{(2m-1)(m+1)}\left[\frac{(2m)!}{2^{2m}m!\ m!}\right]^3P_{2m}(k')$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1/2)_m(1/2)_m}{(m-1)!\ m!}\left[2\ln k'-\psi(m+1)+\psi\left(m+\frac{1}{2}\right)-\psi(m)+\psi\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]k'^{2m}$$

$$\Pi_1(h,k)=\Pi\left(h,k,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$K'(k)=K(k')\qquad E'(k)=E(k')$$

$$K'(k')=K(k)\qquad E'(k')=E(k)$$

$$F(k,n\pi\pm\varphi)=2nK\pm F(k,\varphi)$$

$$E(k,n\pi\pm\varphi)=2nE\pm E(k,\varphi)$$

$$F\left(\frac{1}{k},\varphi\right)=kF\left(k,\arcsin\frac{\sin\varphi}{k}\right)$$

$$E\left(\frac{1}{k},\varphi\right)=\frac{1}{k}E\left(k,\arcsin\frac{\sin\varphi}{k}\right)-\frac{k'^2}{k}F\left(k,\arcsin\frac{\sin\varphi}{k}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}&F(k,\psi)=K+\mathrm{i}F(k',A)\\&K(k,\psi)=E+\mathrm{i}\left[F(k',A)-E(k',A)+\frac{k'^2\sin A\cos A}{\sqrt{1-k'^2\sin^2A}}\right]\end{aligned}\right\}\qquad\left(1<\sin\psi\leqslant\frac{1}{k},A=\arcsin\frac{\sqrt{\sin^2\psi-1}}{k'\sin\psi}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}&F(k,\psi)=F(k,A)+\mathrm{i}K'\\&E(k,\psi)=E(k,A)+\sqrt{1-k^2\sin^2A}\cot A+\mathrm{i}(K'-E')\end{aligned}\right\}\qquad\left(\frac{1}{k}\leqslant\sin\psi<\infty,A=\arcsin\frac{1}{k\sin\psi}\right)$$

$$EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial F(k,\varphi)}{\partial k}=\frac{1}{k'^2}\left[\frac{E(k,\varphi)-k'^2F(k,\varphi)}{k}-\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]$$

$$\frac{\partial E(k,\varphi)}{\partial k}=\frac{E(k,\varphi)-F(k,\varphi)}{k}$$

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=K'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2\qquad K'(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}K(\sqrt{2}-1)$$

$$K'\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}K\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)\qquad K'\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=2K\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$K'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}K(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3})=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/6)}{2\cdot3^{3/4}\Gamma(2/3)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$$

$$F(0,\varphi)=\varphi\qquad F(0,\mathrm{i}\varphi)=\mathrm{i}\varphi$$

$$E(0,\varphi)=\varphi\qquad E(0,\mathrm{i}\varphi)=\mathrm{i}\varphi$$

$F(1,\varphi)=\ln(\tan\varphi+\sec\varphi)$

$E(1,\varphi)=\sin\varphi$

$F(k,0)=0$

$E(k,0)=0$

$F\left(k,\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+k'}}\right)=\frac{K}{2}$

$E\left(k,\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+k'}}\right)=\frac{1}{2}[E+(1-k')]$

$K(0)=K'(1)=\frac{\pi}{2}$

$E(0)=E'(1)=\frac{\pi}{2}$

$K(1)=K'(0)=\infty$

$E(1)=E'(0)=1$

$F\left(k,\arcsin\frac{1}{k}\right)=K+\mathrm{i}K'$

$E\left(k,\arcsin\frac{1}{k}\right)=E+\mathrm{i}(K'-E')$

$\lim\limits_{k\to1}\left(K-\ln\frac{4}{k'}\right)=0$

$\lim\limits_{k\to0}\frac{K-E}{k^2}=\lim\limits_{k\to0}\frac{E-k'^2K}{k^2}=\frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{k\to0}(E-K)K'=0$

$\lim\limits_{k\to0}\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{-\pi K'/K}=\lim\limits_{k\to1}\frac{1}{k'^2}\mathrm{e}^{-\pi K/K'}=\frac{1}{16}$

$\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{F(k,\varphi)}{\sin\varphi}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{E(k,\varphi)}{\sin\varphi}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\Pi(h,k,\varphi)}{\sin\varphi}=1$

$F(1,\mathrm{i}\varphi)=2\arctan\mathrm{e}^{\varphi}-\frac{\pi}{2}$

$E(1,\mathrm{i}\varphi)=\mathrm{i}\sinh\varphi=\sin\mathrm{i}\varphi$

表　椭圆积分替换公式表

$a\equiv\sin\varphi\cos\varphi$　　$b\equiv\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$

$A=F(k,\varphi)$　　$B=E(k,\varphi)$

k_1	$\sin\varphi_1$	$\cos\varphi_1$	$F(k_1,\varphi_1)$	$E(k_1,\varphi_1)$
$\frac{1}{k}$	$k\sin\varphi$	b	kA	$\frac{1}{k}[B-k'^2A]$
k'	$-\mathrm{i}\tan\varphi$	$\sec\varphi$	$-\mathrm{i}A$	$\mathrm{i}[B-A-b\tan\varphi]$
$\frac{1}{k'}$	$-\mathrm{i}k'\tan\varphi$	$b\csc\varphi$	$-\mathrm{i}k'A$	$\frac{\mathrm{i}}{k'}[B-k'^2A-b\tan\varphi]$
$\frac{\mathrm{i}k}{k'}$	$\frac{k'\sin\varphi}{b}$	$\frac{\cos\varphi}{b}$	$k'B$	$\frac{1}{k'}\left[B-\frac{k^2a}{b}\right]$
$\frac{k'}{\mathrm{i}k}$	$-\frac{\mathrm{i}k\sin\varphi}{b}$	$\frac{1}{b}$	$-\mathrm{i}kA$	$\frac{\mathrm{i}}{k}\left[B-A-\frac{k^2a}{b}\right]$
$\frac{1-k'}{1+k'}$	$\frac{(1+k')a}{b}$	$\frac{\cos^2\varphi-k'\sin^2\varphi}{b}$	$(1+k')A$	$\frac{2}{1+k'}[B+k'A]-(1-k')\frac{a}{b}$
$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$\frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi}$	$\frac{b\cos\varphi}{1+k\sin^2\varphi}$	$(1+k)A$	$\frac{1}{1+k}\left[2B-k'^2A+\frac{2kab}{1+k\sin^2\varphi}\right]$

表　可化为第一类椭圆积分的积分

$AF(k,\varphi)$	A	k	φ
$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\arccos\frac{\sqrt{3}+1-x}{\sqrt{3}-1+x}$
$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\arccos\frac{\sqrt{3}-1+x}{\sqrt{3}+1-x}$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2-t^2)}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{b}{a}$	$\arcsin\frac{x}{b}$
$\int_b^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(t^2-b^2)}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\arcsin\frac{a}{x}\sqrt{\frac{x^2-b^2}{a^2-b^2}}$
$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(t^2-b^2)}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\arcsin\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2-b^2}}$
$\int_a^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-b^2)}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{b}{a}$	$\arcsin\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}}$
$\int_x^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-b^2)}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{b}{a}$	$\arcsin\frac{a}{x}$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\arctan\frac{x}{b}$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{x^2+b^2}}$
$\int_b^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(t^2-b^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\arccos\frac{b}{x}$

表　可化为第二类椭圆积分的积分

$AE(k,\varphi)$	A	k	φ
$\int_0^x \sqrt{\frac{a^2-t^2}{b^2-t^2}}dt$	a	$\frac{b}{a}$	$\arcsin\frac{x}{b}$
$\int_x^a \sqrt{\frac{b^2+t^2}{a^2-t^2}}dt$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\arccos\frac{x}{a}$
$\int_b^x \sqrt{\frac{t^2+a^2}{t^2-b^2}}\frac{dt}{t^2}$	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\arccos\frac{b}{x}$
$\int_b^x \sqrt{\frac{t^2+a^2}{t^2-b^2}}t^2dt$	$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\arcsin\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+x^2}}$
$\int_0^x \sqrt{\frac{a^2+t^2}{(b^2+t^2)^3}}dt$	$\frac{a}{b^2}$	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\arctan\frac{x}{b}$
$\int_b^x \frac{1}{\sqrt{(t^2-b^2)(a^2-t^2)}}\frac{dt}{t^2}$	$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\arcsin\frac{a}{x}\sqrt{\frac{x^2-b^2}{a^2-b^2}}$

外尔斯特拉斯椭圆函数(Weierstrass elliptic fuction)

在下列公式中，$2\omega_1$ 和 $2\omega_3$ 为椭圆函数的基本周期，

$$\omega_{nm}=n\omega_1+m\omega_3 \qquad \omega_1+\omega_2+\omega_3=0$$

$$g_2=60\sum_{nm}{}'\frac{1}{\omega_{nm}^4} \qquad g_3=140\sum_{nm}{}'\frac{1}{\omega_{nm}^6}$$

$\sum_{nm}{}'$ 表示对一切整数 n,m 求和，$n=m=0$ 项除外.

$$e_j=\wp(\omega_j)\quad(j=1,2,3) \qquad e_1+e_2+e_3=0$$

$$e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-g_2/4 \qquad e_1e_2e_3=g_3/4$$

$$\mathscr{P}(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{nm}{}'\left[\frac{1}{(u-2\omega_{nm})^2}-\frac{1}{4\omega_{nm}^2}\right]$$

$$=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{20}u^2+\frac{g_3}{28}u^4+\frac{g_2^2}{1200}u^6+\frac{3g_2g_3}{6160}u^8+\cdots$$

$$\mathscr{P}'(u)=-2\sum_{nm}\frac{1}{(u-2\omega_{nm})^3}$$

$$\mathscr{P}'^2(u)=4[\mathscr{P}(u)-e_1][\mathscr{P}(u)-e_2][\mathscr{P}(u)-e_3]=4\mathscr{P}^3(u)-g_2\mathscr{P}(u)-g_3$$

$$\mathscr{P}''(u)=6\mathscr{P}^2(u)-\frac{g_2}{2}$$

$$\mathscr{P}(u+\nu)=-\mathscr{P}(u)-\mathscr{P}(v)+\frac{1}{4}\left[\frac{\mathscr{P}'(u)-\mathscr{P}'(v)}{\mathscr{P}(u)-\mathscr{P}(v)}\right]^2$$

$$\mathscr{P}(u+\nu)+\mathscr{P}(u-\nu)=\frac{[4\mathscr{P}(u)\mathscr{P}(v)-g_2][\mathscr{P}(u)+\mathscr{P}(v)]-4g_3}{4[\mathscr{P}(u)-\mathscr{P}(v)]^2}$$

$$\mathscr{P}(2u)-\mathscr{P}(2v)=\frac{\mathscr{P}'(u+v)\mathscr{P}'(u-v)}{[\mathscr{P}(u+v)-\mathscr{P}(u-v)]^2}$$

$$\mathscr{P}(u+\omega_j)=e_j+\frac{(e_j-e_k)(e_j-e_l)}{\mathscr{P}(u)-e_j} \qquad (j,k,l)=(1,2,3)\text{的偶排列}$$

$$\mathscr{P}(\omega_1/2)=e_1+\sqrt{(e_1-e_3)(e_1-e_2)}$$

$$\mathscr{P}(\omega_3/2)=e_3-\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}$$

$$\mathscr{P}'(\omega_1/2)=-2\left[(e_1-e_3)\sqrt{e_1-e_2}+(e_1-e_2)\sqrt{e_1-e_3}\right]$$

$$\mathscr{P}'(\omega_3/2)=-2\mathrm{i}\left[(e_1-e_3)\sqrt{e_2-e_3}+(e_2-e_3)\sqrt{e_1-e_3}\right]$$

$$\left(\omega_1=\frac{K}{\sqrt{e_1-e_3}}=\int_{e_1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}=\int_{e_3}^{e_2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}\right)$$

$$\left(\omega_3=\frac{\mathrm{i}K'}{\sqrt{e_1-e_3}}=\int_{e_3}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}=\int_{e_2}^{e_1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}\right)$$

外尔斯特拉斯ζ函数(Weierstrass zeta function)

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}-\int_0^u\left[\mathscr{P}(z)-\frac{1}{z^2}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{u}+\sum_{nm}{}'\left[\frac{1}{u-2\omega_{nm}}+\frac{u}{4\omega_{nm}^2}+\frac{1}{2\omega_{nm}}\right]$$

$$=\frac{1}{u}-\frac{g_2}{60}u^3-\frac{g_3}{140}u^5-\frac{g_2^2}{8400}u^7-\frac{g_2g_3}{18480}u^9-\cdots$$

$$\zeta'(u)=-\mathscr{P}(u)$$

$$\zeta(u+2\omega_{nm})=\zeta(u)+2n\eta_1+2m\eta_3 \qquad [\eta_j=\zeta(\omega_j),j=1,2,3]$$

$$\left(\eta_1=-\frac{1}{12\omega_1}\frac{\vartheta'''_1(0)}{\vartheta'_1(0)},\quad \eta_1+\eta_2+\eta_3=0\right)$$

$$\zeta(u\pm v)=\zeta(u)\pm\zeta(v)+\frac{1}{2}\frac{\zeta''(u)\mp\zeta''(v)}{\zeta'(u)-\zeta'(v)}$$

外尔斯特拉斯σ函数和余σ函数(Weierstrass sigma function and co-sigma function)

$$\sigma(u)=u\exp\left\{\int_0^u\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]\mathrm{d}z\right\}$$

$$=u\prod_{nm}{}'\left(1-\frac{u}{2\omega_{nm}}\right)\exp\left[\frac{u}{2\omega_{nm}}+\frac{1}{8}\left(\frac{u}{\omega_{nm}}\right)^2\right] \qquad \left(\prod_{nm}{}'\text{ 表示对一切整数 }n,m\text{ 求积},n=m=0\text{ 项除外}\right)$$

$$=u-\frac{g_2}{2^4\cdot3\cdot5}u^5-\frac{g_3}{2^3\cdot3\cdot5\cdot7}u^7-\frac{g_2^2}{2^9\cdot3^2\cdot5\cdot7}u^9-\frac{g_2g_3}{2^7\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11}u^{11}+\cdots$$

$$=2\omega_1\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta'_1(0)}\exp\left[\frac{\eta_1u^2}{2\omega_1}\right]$$

$$\zeta(u)=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{\mathrm{d}\ln\sigma(u)}{\mathrm{d}u},\quad \sigma(-u)=-\sigma(u)$$

$$\sigma(u+2\omega_{nm})=(-)^{n+m+nm}\exp[2\omega_{nm}(\omega_{nm}+u)]\sigma(u)$$

$$\sigma_j(u)=-\mathrm{e}^{\eta_j u}\frac{\sigma(u+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)}=\frac{\vartheta_{j+1}\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_{j+1}(0)}\exp\left[\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}\right]\qquad (j=1,2,3;\vartheta_4=\vartheta_0)$$

$$\mathscr{P}(u)-e_j=\left[\frac{\sigma_j(u)}{\sigma(u)}\right]^2$$

$$\mathscr{P}'(2u)=-\frac{2\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}=-\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)}$$

椭圆ϑ函数(elliptic theta function)

$q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau}$	$\tau=\mathrm{i}\,\frac{K'(k)}{K(k)}$
$k=\left[\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2$	$k'=\left[\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2$
$\vartheta_i(u)=\vartheta_i(u,\tau)$	$i=0,1,2,3$
$Q_0=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$	

$$q^{1/4}=\left(\frac{k}{4}\right)^{1/2}\left[1+2\left(\frac{k}{4}\right)^2+15\left(\frac{k}{4}\right)^4+150\left(\frac{k}{4}\right)^6+1707\left(\frac{k}{4}\right)^8+\cdots\right]$$

$$q=\frac{1}{2}L+\frac{2}{2^5}L^5+\frac{15}{2^9}L^9+\frac{150}{2^{13}}L^{13}+\frac{1707}{2^{17}}L^{17}+\cdots\qquad \left(L=\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}\right)$$

$$\vartheta_0(u)=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos2\pi u+q^{4n-2})=\vartheta_3\left(u+\frac{1}{2}\right)$$

$$\vartheta_1(u)=2Q_0q^{1/4}\sin\pi u\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos2\pi u+q^{4n})$$

$$\vartheta_2(u)=2Q_0q^{1/4}\cos\pi u\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos2\pi u+q^{4n})=\vartheta_1\left(u+\frac{1}{2}\right)$$

$$\vartheta_3(u)=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos2\pi u+q^{4n-2})=q^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi u}\vartheta_2\left(u+\frac{\tau}{2}\right)$$

$$\vartheta_0^2(u)=k\vartheta_1^2(u)+k'\vartheta_3^2(u)\qquad \vartheta_1^2(u)=k\vartheta_0^2(u)-k'\vartheta_2^2(u)$$

$$\vartheta_2^2(u)=-k'\vartheta_1^2(u)+k\vartheta_3^2(u)\qquad \vartheta_0^4(u)+\vartheta_2^4(u)=\vartheta_1^4(u)+\vartheta_3^4(u)$$

$$\vartheta_0(0)=\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\qquad \vartheta_1(0)=0$$

$$\vartheta_2(0)=\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}\qquad \vartheta_3(0)=\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$$

$$\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_0(0)=2K\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}$$

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}=\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_0''(0)}{\vartheta_0(0)}$$

$$\mathscr{P}(u)=\frac{1}{12\omega_1^2}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\ln\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)$$

$$\mathscr{P}'(u)=-\frac{1}{4\omega_1^3}\frac{\vartheta_1'^3(0)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_0(0)}\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)\vartheta_0\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1^3\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}$$

雅可比椭圆函数(Jacobi elliptic function)

$$\text{am}z \equiv \text{am}(z,k) \qquad \text{sn}z \equiv \text{sn}(\text{am}z,k)$$
$$\text{cn}z \equiv \text{cn}(\text{am},z,k) \qquad \text{dn}z \equiv \text{dn}(\text{am}z,k)$$
$$\text{tn}z \equiv \frac{\text{sn}z}{\text{cn}z} \qquad \text{sd}z \equiv \frac{\text{sn}z}{\text{dn}z} \qquad \text{cd}z \equiv \frac{\text{cn}z}{\text{dn}z}$$
$$\text{nt}z \equiv \frac{\text{cn}z}{\text{sn}z} \qquad \text{ds}z \equiv \frac{\text{dn}z}{\text{sn}z} \qquad \text{dc}z \equiv \frac{\text{dn}z}{\text{cn}z}$$
$$\text{ns}z \equiv \frac{1}{\text{sn}z} \qquad \text{nc}z \equiv \frac{1}{\text{cn}z} \qquad \text{nd}z \equiv \frac{1}{\text{dn}z}$$

$$\text{am}z = \frac{\pi z}{2K} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sech}\, \frac{m\pi K'}{K} \sin \frac{m\pi z}{K} \qquad \left(\left|\text{Im}\, \frac{z}{K}\right| < \text{Im}\, \frac{\text{i}K'}{K}\right)$$
$$= z - \frac{k^2}{3!} z^3 + \frac{k^2(4+k^2)}{5!} z^5 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{7!} z^7 + \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{9!} z^9 - + \cdots \qquad (|z|<K')$$

$$\text{sn}z = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}$$
$$= \frac{\pi}{kK} \sum_{m=0}^{\infty} \text{csch}\, \frac{(2m+1)\pi K'}{2K} \sin(2m+1)\frac{\pi z}{2K} \qquad \left(\left|\text{Im}\, \frac{z}{K}\right| < \text{Im}\, \frac{\text{i}K'}{K}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2kK} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \csc \frac{\pi}{2K}[z - \text{i}(2m-1)K'] \qquad \left(\left|\text{Im}\, \frac{z}{K}\right| < \text{Im}\, \frac{\text{i}K'}{K}\right)$$
$$= z - \frac{1+k^2}{3!} z^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!} z^5 - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{7!} z^7 + \frac{1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8}{9!} z^9 + \cdots \qquad (|z|<K')$$

$$\text{cn}z = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}$$
$$= \frac{\pi}{kK} \sum_{m=0}^{\infty} \text{sech}\, \frac{(2m+1)\pi K'}{2K} \cos(2m+1)\frac{\pi z}{2K} \qquad \left(\left|\text{Im}\, \frac{z}{K}\right| < \text{Im}\, \frac{\text{i}K'}{K}\right)$$
$$= \frac{\text{i}\pi}{2kK} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-)^m \csc \frac{\pi}{2K}[z - \text{i}(2m-1)K'] \qquad \left(\left|\text{Im}\, \frac{z}{K}\right| < \text{Im}\, \frac{\text{i}K'}{K}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1+4k^2}{4!} z^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6!} z^6 + \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{8!} z^8 + \cdots \qquad (|z|<K')$$

$$\text{dn}z = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}$$
$$= \frac{\pi}{2K} + \frac{\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sech}\, \frac{m\pi K'}{K} \cos \frac{m\pi z}{K} \qquad \left(\left|\text{Im}\, \frac{z}{K}\right| < \text{Im}\, \frac{\text{i}K'}{K}\right)$$
$$= \frac{\text{i}\pi}{2K} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-)^m \cot \frac{\pi}{2K}[z - \text{i}(2m-1)K'] \qquad \left(\left|\text{Im}\, \frac{z}{K}\right| < \text{Im}\, \frac{\text{i}K'}{K}\right)$$
$$= 1 - \frac{k^2}{2!} z^2 + \frac{k^2(4+k^2)}{4!} z^4 - \frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{6!} z^6 + \frac{k^2(64+912k^2+408k^4+k^6)}{8!} z^8 + \cdots \qquad (|z|<K')$$

$$\text{sn}z\ \text{cn}z = z - \frac{4+k^2}{3!} z^3 + \frac{16+44k^2+k^4}{5!} z^5 - \frac{64+912k^2+408k^4+k^6}{7!} z^7 + - \cdots \qquad (|z|<K')$$

$$\text{sn}z\ \text{dn}z = z - \frac{1+4k^2}{3!} z^3 + \frac{1+44k^2+16k^4}{5!} z^5 - \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{7!} z^7 + - \cdots \qquad (|z|<K')$$

$$\text{cn}z\ \text{dn}z = 1 - \frac{1+k^2}{2!} z^2 + \frac{1+14k^2+k^4}{4!} z^4 - \frac{1+135k^2+135k^4+k^6}{6!} z^6 + - \cdots \qquad (|z|<K')$$

$$\text{sn}^2 z + \text{cn}^2 z = 1, \quad \text{dn}^2 z + k^2 \text{sn}^2 z = 1, \quad \text{dn}^2 z - k^2 \text{cn}^2 z = 1 - k^2 = k'^2$$

$$\text{am}(z \pm \zeta) = \arctan(\text{tn}z\ \text{dn}\zeta) \pm \arctan(\text{tn}\zeta\, \text{dn}z)$$

$$\mathrm{sn}(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\mathrm{dn}\zeta\pm\mathrm{cn}z\ \mathrm{sn}\zeta\mathrm{dn}z}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}^2z-\mathrm{sn}^2\zeta}{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z}$$

$$\mathrm{cn}(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{cn}z\ \mathrm{cn}\zeta\mp\mathrm{sn}z\ \mathrm{sn}\zeta\mathrm{dn}z\ \mathrm{dn}\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\mathrm{cn}\zeta\mathrm{dn}z}{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z}$$

$$\mathrm{dn}(z\pm\zeta)=\frac{\mathrm{dn}z\ \mathrm{dn}\zeta\mp k^2\mathrm{sn}z\ \mathrm{sn}\zeta\mathrm{cn}z\ \mathrm{cn}\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{sn}^2\zeta}=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\mathrm{dn}z\mp\mathrm{sn}\zeta\mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}\zeta}{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}\zeta\mathrm{dn}\zeta\mp\mathrm{sn}\zeta\mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z}$$

$$\mathrm{sn}(z+\zeta)\mathrm{sn}(z-\zeta)=\frac{\mathrm{sn}^2z-\mathrm{sn}^2\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{sn}^2\zeta}$$

$$\mathrm{cn}(z+\zeta)\mathrm{cn}(z-\zeta)=\frac{\mathrm{cn}^2z-\mathrm{sn}^2\zeta\mathrm{dn}^2z}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{sn}^2\zeta}$$

$$\mathrm{dn}(z+\zeta)\mathrm{dn}(z-\zeta)=\frac{\mathrm{dn}^2z-k^2\mathrm{sn}^2\zeta\mathrm{cn}^2z}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{sn}^2\zeta}$$

$$\mathrm{sn}(z\pm\zeta)\mathrm{cn}(z\mp\zeta)=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}\zeta\pm\mathrm{sn}\zeta\mathrm{cn}\zeta\mathrm{dn}z}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{sn}^2\zeta}$$

$$\mathrm{sn}(z\pm\zeta)\mathrm{dn}(z\mp\zeta)=\frac{\mathrm{sn}z\ \mathrm{dn}z\ \mathrm{cn}\zeta\pm\mathrm{sn}\zeta\mathrm{dn}\zeta\mathrm{cn}z}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{sn}^2\zeta}$$

$$\mathrm{cn}(z\pm\zeta)\mathrm{dn}(z\mp\zeta)=\frac{\mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z\ \mathrm{cn}\zeta\mathrm{dn}\zeta\mp k'^2\mathrm{sn}z\ \mathrm{sn}\zeta}{1-k^2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{sn}^2\zeta}$$

$$\mathrm{sn}(z\pm\mathrm{i}\zeta,k)=\frac{\mathrm{sn}(z,k)\mathrm{dn}(\zeta,k')\pm\mathrm{i}\mathrm{cn}(z,k)\mathrm{dn}(z,k)\mathrm{sn}(\zeta,k')\mathrm{cn}(\zeta,k')}{1-\mathrm{sn}^2(\zeta,k')\mathrm{dn}^2(z,k)}$$

$$\mathrm{cn}(z\pm\mathrm{i}\zeta,k)=\frac{\mathrm{cn}(z,k)\mathrm{cn}(\zeta,k')\pm\mathrm{i}\mathrm{sn}(z,k)\mathrm{dn}(z,k)\mathrm{sn}(\zeta,k')\mathrm{dn}(\zeta,k')}{1-\mathrm{sn}^2(\zeta,k')\mathrm{dn}^2(z,k)}$$

$$\mathrm{dn}(z\pm\mathrm{i}\zeta,k)=\frac{\mathrm{dn}(z,k)\mathrm{cn}(\zeta,k')\mathrm{dn}(\zeta,k')\mp\mathrm{i}k^2\mathrm{sn}(z,k)\mathrm{cn}(z,k)\mathrm{sn}(\zeta,k')}{1-\mathrm{sn}^2(\zeta,k')\mathrm{dn}^2(z,k)}$$

$$\mathrm{am}2z=2\arctan(\mathrm{tn}z\ \mathrm{dn}z)$$

$$\mathrm{sn}2z=\frac{2\mathrm{sn}z\mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z}{1-k^2\mathrm{sn}^4z}$$

$$\mathrm{cn}2z=\frac{\mathrm{cn}^2z-\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{dn}^2z}{1-k^2\mathrm{sn}^4z}$$

$$\mathrm{dn}2z=\frac{\mathrm{dn}^2z-k^2\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{cn}^2z}{1-k^2\mathrm{sn}^4z}$$

$$\mathrm{sn}2z\pm\mathrm{sn}2\zeta=\frac{2\mathrm{sn}(z\pm\zeta)\mathrm{cn}(z\mp\zeta)\mathrm{dn}(z\mp\zeta)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(z+\zeta)\mathrm{sn}^2(z-\zeta)}$$

$$\mathrm{cn}2z+\mathrm{cn}2\zeta=\frac{2\mathrm{cn}(z+\zeta)\mathrm{cn}(z-\zeta)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(z+\zeta)\mathrm{sn}^2(z-\zeta)}$$

$$\mathrm{cn}2z-\mathrm{cn}2\zeta=-\frac{2\mathrm{sn}(z+\zeta)\mathrm{sn}(z-\zeta)\mathrm{dn}(z+\zeta)\mathrm{dn}(z-\zeta)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(z+\zeta)\mathrm{sn}^2(z-\zeta)}$$

$$\mathrm{dn}2z+\mathrm{dn}2\zeta=\frac{2\mathrm{dn}(z+\zeta)\mathrm{dn}(z-\zeta)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(z+\zeta)\mathrm{sn}^2(z-\zeta)}$$

$$\mathrm{dn}2z-\mathrm{dn}2\zeta=\frac{2k^2\mathrm{sn}(z+\zeta)\mathrm{sn}(z-\zeta)\mathrm{cn}(z+\zeta)\mathrm{cn}(z-\zeta)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(z+\zeta)\mathrm{sn}^2(z-\zeta)}$$

$$\frac{1-\mathrm{cn}2z}{1+\mathrm{cn}2z}=\frac{\mathrm{sn}^2z\ \mathrm{dn}^2z}{\mathrm{cn}^2z}$$

$$\frac{1-\mathrm{dn}2z}{1+\mathrm{dn}2z}=\frac{k^2\mathrm{sn}^2z\mathrm{cn}^2z}{\mathrm{dn}^2z}$$

$$\mathrm{sn}^2\frac{z}{2}=\frac{1-\mathrm{cn}z}{1+\mathrm{dn}z}=\frac{1-\mathrm{dn}z}{k^2(1+\mathrm{cn}z)}=\frac{\mathrm{dn}z-\mathrm{cn}z}{k'^2+\mathrm{dn}z-k^2\mathrm{cn}z}$$

$$\mathrm{cn}^2\frac{z}{2}=\frac{\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}{1+\mathrm{dn}z}=\frac{k^2\mathrm{cn}z-k'^2+\mathrm{dn}z}{k^2(1+\mathrm{cn}z)}=\frac{k'^2(1+\mathrm{cn}z)}{k'^2+\mathrm{dn}z-k^2\mathrm{cn}z}$$

$$\mathrm{dn}^2\frac{z}{2}=\frac{\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}{1+\mathrm{cn}z}=\frac{k'^2+k^2\mathrm{cn}z+\mathrm{dn}z}{1+\mathrm{dn}z}=\frac{k'^2(1+\mathrm{dn}z)}{k'^2+\mathrm{dn}z-k^2\mathrm{cn}z}$$

$$\frac{\mathrm{dsn}z}{\mathrm{d}z}=\mathrm{cn}z\ \mathrm{dn}z,\quad \frac{\mathrm{dcn}z}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{sn}z\ \mathrm{dn}z,\quad \frac{\mathrm{ddn}z}{\mathrm{d}z}=-k^2\mathrm{sn}z\ \mathrm{cn}z$$

$$\int\mathrm{sn}z\ \mathrm{d}z=\frac{1}{k}\ln(\mathrm{dn}z-k\ \mathrm{cn}z)$$

$$\int \mathrm{cn}z\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{i}}{k}\ln(\mathrm{dn}z-\mathrm{i}k\,\mathrm{sn}z)$$

$$\int \mathrm{dn}z\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\ln(\mathrm{cn}z-\mathrm{i}\,\mathrm{sn}z)=\mathrm{am}z$$

$$\int \mathrm{ns}z\,\mathrm{d}z=\ln(\mathrm{ds}z-\mathrm{nt}z)=-\ln(\mathrm{nt}z+\mathrm{ds}z)$$

$$\int \mathrm{nc}z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{k'}\ln(k'\mathrm{tn}z+\mathrm{dc}z)=\frac{1}{2k'}\ln\frac{\mathrm{ds}z+k'}{\mathrm{ds}z-k'}$$

$$\int \mathrm{nd}z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{k'}\arctan\frac{k'-\mathrm{nt}z}{k'+\mathrm{nt}z}=\frac{1}{k'}\arccos\mathrm{cd}z=\frac{1}{k'}\arcsin(k'\mathrm{sd}z)=\frac{1}{\mathrm{i}k'}\ln(\mathrm{cd}z+\mathrm{i}k'\mathrm{sd}z)$$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(z)&=e_1+(e_1-e_3)\mathrm{nt}^2(\sqrt{e_1-e_3}z)\\&=e_2+(e_1-e_3)\mathrm{ds}^2(\sqrt{e_1-e_3}z)\\&=e_3+(e_1-e_3)\mathrm{ns}^2(\sqrt{e_1-e_3}z)\end{aligned}$$

表　雅可比椭圆函数的特殊值

u	$\mathrm{sn}u$	$\mathrm{cn}u$	$\mathrm{dn}u$	$\mathrm{tn}u$
0	0	1	1	0
$\frac{K}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	$\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	$\sqrt{k'}$	$\frac{1}{\sqrt{k'}}$
K	1	0	k'	∞
$\frac{3K}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	$-\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	$\sqrt{k'}$	$-\frac{1}{\sqrt{k'}}$
$2K$	0	-1	1	0
$\frac{\mathrm{i}K'}{2}$	$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	$\sqrt{1+k}$	$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1+k}}$
$\frac{K}{2}+\mathrm{i}\frac{K'}{2}$	$\sqrt{\frac{k+\mathrm{i}k'}{k}}$	$\sqrt{\frac{k'}{\mathrm{i}k}}$	$\sqrt{k'(k'-\mathrm{i}k)}$	$\sqrt{\frac{\mathrm{i}(k+\mathrm{i}k')}{k'}}$
$K+\mathrm{i}\frac{K'}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$-\mathrm{i}\sqrt{\frac{1-k}{k}}$	$\sqrt{1-k}$	$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1-k}}$
$\frac{3K}{2}+\mathrm{i}\frac{K'}{2}$	$\sqrt{\frac{k-\mathrm{i}k'}{k}}$	$-\sqrt{\frac{\mathrm{i}k'}{k}}$	$\sqrt{k'(k'+\mathrm{i}k)}$	$-\sqrt{\frac{k-\mathrm{i}k'}{\mathrm{i}k'}}$
$2K+\mathrm{i}\frac{K'}{2}$	$-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}$	$-\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	$\sqrt{1+k}$	$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1+k}}$
$\mathrm{i}K'$	∞	∞	∞	i
$\frac{K}{2}+\mathrm{i}K'$	$\frac{1}{\sqrt{1-k'}}$	$-\mathrm{i}\sqrt{\frac{k'}{1-k'}}$	$-\mathrm{i}\sqrt{k'}$	$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k'}}$
$K+\mathrm{i}K'$	$\frac{1}{k}$	$-\frac{\mathrm{i}k'}{k}$	0	$\frac{\mathrm{i}}{k'}$
$\frac{3K}{2}+\mathrm{i}K'$	$\sqrt{\frac{1}{1-k'}}$	$-\mathrm{i}\sqrt{\frac{k'}{1-k'}}$	$\mathrm{i}\sqrt{k'}$	$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k'}}$
$2K+\mathrm{i}K'$	∞	∞	∞	i
$\mathrm{i}\frac{3K'}{2}$	$-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}$	$-\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	$-\sqrt{1+k}$	$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1+k}}$
$\frac{K}{2}+\mathrm{i}\frac{3K'}{2}$	$\sqrt{\frac{k-\mathrm{i}k'}{k}}$	$-\sqrt{\frac{\mathrm{i}k'}{k}}$	$-\sqrt{k'(k'+\mathrm{i}k)}$	$-\sqrt{\frac{k-\mathrm{i}k'}{\mathrm{i}k'}}$
$K+\mathrm{i}\frac{3K'}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{k}}$	$-\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{1-k}}$	$-\sqrt{1-k'}$	$\mathrm{i}\sqrt{1-k}$

u	$\mathrm{sn}u$	$\mathrm{cn}u$	$\mathrm{dn}u$	$\mathrm{tn}u$
$\frac{3K}{2}+\mathrm{i}\frac{3K'}{2}$	$\sqrt{\frac{k+\mathrm{i}k'}{k}}$	$\sqrt{\frac{k'}{\mathrm{i}k}}$	$-\sqrt{k'(k'-\mathrm{i}k)}$	$\sqrt{\frac{\mathrm{i}(k+\mathrm{i}k')}{k'}}$
$2K+\mathrm{i}\frac{3K'}{2}$	$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k}}$	$\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	$-\sqrt{1+k}$	$\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1+k}}$
$2\mathrm{i}K'$	0	-1	-1	0
$\frac{K}{2}+2\mathrm{i}K'$	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	$-\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	$-\sqrt{k'}$	$-\frac{1}{\sqrt{k'}}$
$K+2\mathrm{i}K'$	1	0	$-k'$	∞
$\frac{3K}{2}+2\mathrm{i}K'$	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	$\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	$-\sqrt{k'}$	$\frac{1}{\sqrt{k'}}$
$2K+2\mathrm{i}K'$	0	1	-1	0

表　雅可比椭圆函数的周期、零点和极点

函　数	基本周期	零　　点	极　　点	留　　数
$\mathrm{sn}z$	$4K;2\mathrm{i}K'$	$2mK+2n\mathrm{i}K'$	$2mK+(2n+1)\mathrm{i}K'$	$(-)^m\frac{1}{k}$
$\mathrm{cn}z$	$4K;2K+2\mathrm{i}K'$	$(2m+1)K+2n\mathrm{i}K'$	$2mK+(2n+1)\mathrm{i}K'$	$(-)^{m+n}\frac{1}{\mathrm{i}k}$
$\mathrm{dn}z$	$2K;4\mathrm{i}K'$	$(2m+1)K+(2n+1)\mathrm{i}K'$	$2mK+(2n+1)\mathrm{i}K'$	$(-)^{n-1}\mathrm{i}$

表　雅可比椭圆函数诱导公式表

u'	$\mathrm{sn}u'$	$\mathrm{cn}u'$	$\mathrm{dn}u'$
$u+K$	$\mathrm{cd}u$	$-k'\mathrm{sd}u$	$k'\mathrm{nd}u$
$u+2K$	$-\mathrm{sn}u$	$-\mathrm{cn}u$	$\mathrm{dn}u$
$u+3K$	$-\mathrm{cd}u$	$k'\mathrm{sd}u$	$k'\mathrm{nd}u$
$u+4K$	$\mathrm{sn}u$	$\mathrm{cn}u$	$\mathrm{dn}u$
$u+\mathrm{i}K'$	$\frac{1}{k}\mathrm{ns}u$	$-\frac{\mathrm{i}}{k}\mathrm{ds}u$	$-\mathrm{i}\,\mathrm{nt}u$
$u+2mK+2n\mathrm{i}K'$	$(-)^m\mathrm{sn}u$	$(-)^{m+n}\mathrm{cn}u$	$(-)^n\mathrm{dn}u$
$u+(2m-1)K+2n\mathrm{i}K'$	$(-)^{m+1}\mathrm{cd}u$	$(-)^{m+n}k'\mathrm{sd}u$	$(-)^n k'\mathrm{nd}u$
$u+2mK+(2n+1)\mathrm{i}K'$	$\frac{(-)^m}{k}\mathrm{ns}u$	$\frac{(-)^{m+n+1}\mathrm{i}}{k}\mathrm{ds}u$	$(-)^{n+1}\mathrm{i}\,\mathrm{nt}u$
$u+(2m-1)K+(2n+1)\mathrm{i}K'$	$\frac{(-)^{m+1}}{k}\mathrm{dc}u$	$(-)^{m+n}\frac{\mathrm{i}k'}{k}\mathrm{nc}u$	$(-)^n\mathrm{i}k'\mathrm{nt}u$

表　雅可比椭圆函数变换公式表

$k'=\sqrt{1-k^2}$		$k_1'=\sqrt{1-k_1^2}$
$S\equiv\mathrm{sn}(u,k)$	$C\equiv\mathrm{cn}(u,k)$	$D\equiv\mathrm{dn}(u,k)$
$S'\equiv\mathrm{sn}(u,k')$	$C'\equiv\mathrm{cn}(u,k')$	$D'\equiv\mathrm{dn}(u,k')$
$\overline{S}\equiv\mathrm{sn}(k_1'u,k/k_1')$	$\overline{C}\equiv\mathrm{cn}(k_1'u,k/k_1')$	$\overline{D}\equiv\mathrm{dn}(k_1'u,k/k_1')$
$\hat{S}\equiv\mathrm{sn}(\mathrm{i}u,k)$	$\hat{C}\equiv\mathrm{cn}(\mathrm{i}u,k)$	$\hat{D}\equiv\mathrm{dn}(\mathrm{i}u,k)$
$D_+\equiv D+\sqrt{k'}$	$D_-\equiv D-\sqrt{k'}$	$\Delta\equiv\sqrt{(D+1)(D+k')}$

u_1	k_1	$\mathrm{sn}(u_1,k_1)$	$\mathrm{cn}(u_1,k_1)$	$\mathrm{dn}(u_1,k_1)$
ku	$\frac{1}{k}$	kS	D	C
$k'u$	$\frac{\mathrm{i}k}{k'}$	$k'\frac{S}{D}$	$\frac{C}{D}$	$\frac{1}{D}$
$\mathrm{i}u$	k	$\mathrm{i}\frac{S'}{C'}$	$\frac{1}{C'}$	$\frac{D'}{C'}$
$\mathrm{i}u$	k'	$\mathrm{i}\frac{S}{C}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$
$\mathrm{i}ku$	$\frac{\mathrm{i}k'}{k}$	$\mathrm{i}k\frac{S}{D}$	$\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$
$\mathrm{i}k'u$	$\frac{1}{k'}$	$\mathrm{i}k'\frac{S}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{1}{C}$
$(1+k)u$	$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$\frac{(1+k)S}{1+kS^2}$	$\frac{CD}{1+kS^2}$	$\frac{1-kS^2}{1+kS^2}$
$(1+k')u$	$\frac{1-k'}{1+k'}$	$(1+k')\frac{SC}{D}$	$\frac{1-(1+k')S^2}{D}$	$\frac{1-(1-k')S^2}{D}$
$\mathrm{i}(1+k)u$	$\frac{1-k}{1+k}$	$\mathrm{i}(1+k)\frac{S}{CD}$	$\frac{1+kS^2}{CD}$	$\frac{1-kS^2}{CD}$
$\mathrm{i}(1+k')u$	$\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$	$\frac{\mathrm{i}(1+k')SC}{1-(1+k')S^2}$	$\frac{D}{1-(1+k')S^2}$	$\frac{1-(1-k')S^2}{1-(1+k')S^2}$
$(k'+\mathrm{i}k)u$	$\frac{2\sqrt{\mathrm{i}kk'}}{k'+\mathrm{i}k}$	$\frac{(k'+\mathrm{i}k)SD}{1+k(\mathrm{i}k'-k)S^2}$	$\frac{C}{1+k(\mathrm{i}k'-k)S^2}$	$\frac{1-k(k+\mathrm{i}k')S^2}{1+k(\mathrm{i}k'-k)S^2}$
$\frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2}u$	$\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$	$\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\frac{k^2SC}{\Delta^2}$	$\frac{\sqrt{2(1+k')}}{1-\sqrt{k'}}\frac{D_-}{\Delta}$	$\frac{\sqrt{2(1+k')}}{1+\sqrt{k'}}\frac{D_+}{\Delta}$
$2\sqrt{k}\,u$	$\frac{1+k}{2\sqrt{k}}$	$\frac{2\sqrt{k}\,S}{1+kS^2}$	$\frac{1-kS^2}{1+kS^2}$	$\frac{CD}{1+kS^2}$
u	$\mathrm{i}k$	$\frac{\overline{S}}{\sqrt{1+k^2}\,\overline{D}}$	$\frac{\overline{C}}{\overline{D}}$	$\frac{1}{\overline{D}}$
u	k'	$-\mathrm{i}\frac{\hat{S}}{\hat{C}}$	$\frac{1}{\hat{C}}$	$\frac{\hat{D}}{\hat{C}}$

雅可比ζ函数(Jacobian zeta function)

$$\mathrm{zn}(z)\equiv\mathrm{zn}(\mathrm{am}z,k)=\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}$$

$$\mathrm{am}z\equiv\mathrm{am}(z,k)\qquad \mathrm{sn}z\equiv\mathrm{sn}(\mathrm{am}z,k)$$

$$\mathrm{cn}z\equiv\mathrm{cn}(\mathrm{am}z,k)\qquad \mathrm{dn}z\equiv\mathrm{dn}(\mathrm{am}z,k)$$

$$\mathrm{zn}(z)=\int_0^z\left[\mathrm{dn}^2u-\frac{E}{K}\right]\mathrm{d}u=E(k,\mathrm{am}z)-\frac{E}{K}F(k,\mathrm{am}z)$$

$$=\frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta'_0\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}$$

$$=\frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta'_1\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}-\frac{\mathrm{cn}z\,\mathrm{dn}z}{\mathrm{sn}z}$$

$$=\frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta'_2\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}+\frac{\mathrm{dn}z\,\mathrm{sn}z}{\mathrm{cn}z}$$

$$=\frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta_3'\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\pi z}{2K}\right)}-k^2\frac{\text{sn}z\ \text{cn}z}{\text{dn}z}$$

$$=\frac{\pi}{K}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi z}{K}}{\sinh\frac{m\pi K'}{K}} \qquad \left(\left|\text{Im}\frac{z}{K}\right|<\text{Im}\frac{\text{i}K'}{K}\right)$$

$$=\left(1-\frac{E}{K}\right)z-\frac{2}{3!}k^2z^3+\frac{8}{5!}k^2(k^2+1)z^5-\frac{16}{7!}k^2(2k^4+13k^2+2)z^7+\frac{128}{9!}k^2(k^6+30k^4+30k^2+1)z^9-+\cdots \qquad (|z|<K')$$

$$=-\frac{\cot\beta}{K}\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\int_0^K\frac{\text{d}u}{1-\csc^2\beta\ \text{sn}^2u}$$

$$=\frac{k^2\sin\beta\cos\beta}{K}\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\int_0^K\frac{\text{sn}^2u}{1-k^2\sin^2\beta\ \text{sn}^2u}\text{d}u$$

$$\text{zn}(-z)=-\text{zn}(z)$$

$$\text{zn}(z+2K)=\text{zn}(z)$$

$$\text{zn}(z+\text{i}K')=\text{zn}(z)+\frac{\text{cn}z\ \text{dn}z}{\text{sn}z}-\frac{\text{i}\pi}{2K}$$

$$\text{zn}(z+\text{i}2K')=\text{zn}(z)-\frac{\text{i}\pi}{K}$$

$$\text{zn}(0)=0$$

$$\text{zn}(mK)=0 \qquad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\text{zn}(\text{am}z,0)=0$$

$$\text{zn}(\text{am}z,1)=\tanh z$$

$$\text{zn}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+k'}},k\right)=\frac{k^2}{2(1+k')}$$

$$\lim_{\beta\to0}\frac{\text{zn}(\beta,k)}{\sin\beta}=\frac{K-E}{K}$$

$$\text{zn}(\alpha,k)\pm\text{zn}(\beta,k)=\text{zn}(\varphi,k)\pm k^2\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\varphi \qquad \left(\varphi=2\arctan\frac{\sin\alpha\ \sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\pm\sin\beta\ \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)$$

$$\text{zn}(\alpha\pm\text{i}\beta,k)=\left[\text{zn}(\alpha,k)+\frac{k^2\text{sn}(\alpha,k)\text{cn}(\alpha,k)\text{dn}(\alpha,k)\text{sn}^2(\beta,k')}{1-\text{sn}^2(\beta,k')\text{dn}^2(\alpha,k)}\right]$$
$$\mp\text{i}\left[\text{zn}(\beta,k')+\frac{\pi\beta}{2KK'}-\frac{\text{dn}^2(\alpha,k)\text{sn}(\beta,k')\text{cn}(\beta,k')\text{dn}(\beta,k')}{1-\text{sn}^2(\beta,k')\text{dn}^2(\alpha,k)}\right]$$

$$\text{zn}(\text{i}\alpha,k)=\text{i}\left[\frac{\text{sn}(\alpha,k')\text{dn}(\alpha,k')}{\text{cn}(\alpha,k')}-\text{zn}(\alpha,k')-\frac{\pi\alpha}{2KK'}\right]$$

$$\text{zn}(u\pm v)=\text{zn}(u)\pm\text{zn}(v)\mp k^2\text{sn}u\ \text{sn}v\ \text{sn}(u\pm v)$$

$$2\text{zn}(\beta,k)=\text{zn}\left(\arccos\frac{1-2\sin^2\beta+k^2\sin^4\beta}{1-k^2\sin^4\beta},k\right)+\frac{2k^2\sin^3\beta\ \cos\beta}{1-k^2\sin^4\beta}\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}$$

拉 梅 函 数

第一种拉梅函数(Lamé function of the first kind)

表 前几个第一种拉梅函数

(对于给定的 n,共有 $2n+1$ 个第一种拉梅函数,$-n\leqslant m\leqslant n$,按本征值由小到大排列)

n	m	第一种拉梅函数 $E_n^m(s)$	本征值 H_n^m
0	0	1	0
1	−1	$s^{1/2}$	$-1-h$
	0	$(s-1)^{1/2}$	$-h$
	1	$(s-h)^{1/2}$	-1

n	m	第一种拉梅函数 $E_n^m(s)$	本征值 H_n^m
2	-2	$s-\frac{1}{3}[(1+h)-\sqrt{1-h+h^2}]$	$-2(1+h)-2\sqrt{1-h+h^2}$
	-1	$s^{1/2}(s-1)^{1/2}$	$-1-4h$
	0	$s^{1/2}(s-h)^{1/2}$	$-4-h$
	1	$(s-1)^{1/2}(s-h)^{1/2}$	$-1-h$
2	2	$s-\frac{1}{3}[(1+h)+\sqrt{1-h+h^2}]$	$-2(1+h)+2\sqrt{1-h+h^2}$
3	-3	$s^{1/2}\left\{s-\frac{1}{5}\left[2(1+h)-\sqrt{4(1-h)^2+h}\right]\right\}$	$-5(1+h)-2\sqrt{4(1-h)^2+h}$
	-2	$(s-1)^{1/2}\left\{s-\frac{1}{5}\left[(1+2h)-\sqrt{1-h+4h^2}\right]\right\}$	$-(2+5h)-2\sqrt{1-h+4h^2}$
	-1	$(s-h)^{1/2}\left\{s-\frac{1}{5}\left[(2+h)-\sqrt{4-h+h^2}\right]\right\}$	$-(5+2h)-2\sqrt{4-h+h^2}$
	0	$s^{1/2}(s-1)^{1/2}(s-h)^{1/2}$	$-4(1+h)$
	1	$s^{1/2}\left\{s-\frac{1}{5}\left[2(1+h)+\sqrt{4(1-h)^2+h}\right]\right\}$	$-5(1+h)+2\sqrt{4(1-h)^2+h}$
	2	$(s-1)^{1/2}\left\{s-\frac{1}{5}\left[(1+2h)+\sqrt{1-h+4h^2}\right]\right\}$	$-(2+5h)+2\sqrt{1-h+4h^2}$
	3	$(s-h)^{1/2}\left\{s-\frac{1}{5}\left[(2+h)+\sqrt{4-h+h^2}\right]\right\}$	$-(5+2h)+2\sqrt{4-h+h^2}$

周期拉梅函数(periodic Lamé function)

表　周期为 $2K$ 和 $4K$ 的拉梅函数

[$n(n+1)$为实数,K 为第一类椭圆积分]

边界条件	周期拉梅函数	本征值	周期
$\Lambda'(-K)=\Lambda'(K)=0$	$Ec_n^m(z), m=0,1,2,\cdots$	a_n^m	$4K$
$\Lambda(-K)=\Lambda(K)=0$	$Es_n^m(z), m=1,2,3,\cdots$	b_n^m	$4K$
$\Lambda(0)=\Lambda(K)=0$	$Es_n^{2m}(z), m=1,2,3,\cdots$	b_n^{2m}	$2K$
$\Lambda'(0)=\Lambda(K)=0$	$Es_n^{2m+1}(z), m=0,1,2,\cdots$	b_n^{2m+1}	$4K$
$\Lambda(0)=\Lambda'(K)=0$	$Ec_n^{2m+1}(z), m=0,1,2,\cdots$	a_n^{2m+1}	$4K$
$\Lambda'(0)=\Lambda'(K)=0$	$Ec_n^{2m}(z), m=0,1,2,\cdots$	a_n^{2m}	$2K$
$\Lambda(0)=\Lambda(2K)=0$	$Es_n^{2m}(z), m=1,2,3,\cdots$	b_n^{2m}	$2K$
	$Ec_n^{2m+1}(z), m=0,1,2,\cdots$	a_n^{2m+1}	$4K$
$\Lambda'(0)=\Lambda'(2K)=0$	$Es_n^{2m+1}(z), m=0,1,2,\cdots$	b_n^{2m+1}	$4K$
	$Ec_n^{2m}(z), m=0,1,2,3,\cdots$	a_n^{2m}	$2K$

$$a_n^0<a_n^1<a_n^2<\cdots,\text{当 } m\to\infty, a_n^m\to\infty.$$
$$b_n^1<b_n^2<b_n^3<\cdots,\text{当 } m\to\infty, b_n^m\to\infty.$$
$$a_n^1<b_n^2<a_n^3<b_n^4<\cdots,\ a_n^0<b_n^1<a_n^2<b_n^3<\cdots$$

马蒂厄函数

马蒂厄函数(Mathieu function)

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dz^2}+[\lambda-2q\cos 2z]u=0\\ u(0)=u(\pi)=0\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{本征值 } \lambda = b_n(q) & \text{本征函数 } u_n(z) = \mathrm{se}_n(z,q) \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\ \mathrm{se}n(z,q)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} > 0 & \displaystyle\int_0^{2\pi}[\mathrm{se}_n(z,q)]^2\mathrm{d}z = \pi\end{array}\right\} \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+[\lambda-2q\cos 2z]u=0 \\ u'(0)=u'(\pi)=0\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{本征值 } \lambda = a_n(q) & \text{本征函数 } u_n(z) = \mathrm{ce}_n(z,q) \\ \mathrm{ce}_n(0,q) > 0 & \displaystyle\int_0^{2\pi}[\mathrm{ce}_n(z,q)]^2\mathrm{d}z = \pi\end{array}\right\} \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$a_0<a_1<b_1<b_2<a_2<a_3<b_3<\cdots, q>0$$

$$a_0<b_1<a_1<b_2<a_2<b_3<a_3<\cdots, q<0$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\mathrm{ce}_{2k}(z,q)\mathrm{ce}_{2n}(z,q)\mathrm{d}z &= \int_0^{\pi/2}\mathrm{ce}_{2k+1}(z,q)\mathrm{ce}_{2n+1}(z,q)\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\pi/2}\mathrm{se}_{2k+1}(z,q)\mathrm{se}_{2n+1}(z,q)\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\pi/2}\mathrm{se}_{2k+2}(z,q)\mathrm{se}_{2n+2}(z,q)\mathrm{d}z=0 \qquad (k,n=0,1,2,\cdots,k\neq n)\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{ce}_n(z,q)\mathrm{ce}_l(z,q)\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\mathrm{se}_{n+1}(z,q)\mathrm{se}_{l+1}(z,q)\mathrm{d}z=0 \qquad (l,n=0,1,2,\cdots,l\neq n)$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{ce}_n(z,q)\mathrm{se}_{l+1}(z,q)\mathrm{d}z=0 \qquad (l,n=0,1,2,\cdots)$$

$$\mathrm{ce}_{2n}(z,q)=\mathrm{ce}_{2n}(-z,q)=\mathrm{ce}_{2n}(\pi-z,q)=\mathrm{ce}_{2n}(\pi+z,q)$$

$$\mathrm{ce}_{2n+1}(z,q)=\mathrm{ce}_{2n+1}(-z,q)=-\mathrm{ce}_{2n+1}(\pi-z,q)=-\mathrm{ce}_{2n+1}(\pi+z,q)$$

$$\mathrm{se}_{2n+1}(z,q)=-\mathrm{se}_{2n+1}(-z,q)=\mathrm{se}_{2n+1}(\pi-z,q)=-\mathrm{se}_{2n+1}(\pi+z,q)$$

$$\mathrm{se}_{2n+2}(z,q)=-\mathrm{se}_{2n+2}(-z,q)=-\mathrm{se}_{2n+2}(\pi-z,q)=\mathrm{se}_{2n+2}(\pi+z,q)$$

$$a_{2n}(-q)=a_{2n}(q)$$

$$a_{2n+1}(-q)=b_{2n+1}(q)$$

$$b_{2n+2}(-q)=b_{2n+2}(q)$$

$$\mathrm{ce}_{2n}(z,-q)=(-)^n\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right)$$

$$\mathrm{se}_{2n+2}(z,-q)=(-)^n\mathrm{se}_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right)$$

$$\mathrm{ce}_{2n+1}(z,-q)=(-)^n\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right)$$

$$\mathrm{se}_{2n+1}(z,-q)=(-)^n\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}-z,q\right)$$

$$\mathrm{ce}_{2n}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{(2n)}\cos 2rz$$

$$\left.\begin{array}{l}a_{2n}A_0^{(2n)}-qA_2^{(2n)}=0 \\ [a_{2n}-4]A_2^{(2n)}-q[2A_0^{(2n)}+A_4^{(2n)}]=0 \\ [a_{2n}-4r^2]A_{2r}^{(2n)}-q[A_{2r-2}^{(2n)}+A_{2r+2}^{(2n)}]=0 \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}>0,\quad 2[A_0]^2+\sum_{r=1}^{\infty}[A_{2r}]^2=1\end{array}\right\} \qquad (r=2,3,\cdots)$$

$$\mathrm{ce}_{2n+1}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}^{(2n+1)}\cos(2r+1)z$$

$$\left.\begin{array}{l}[a_{2n+1}-q-1]A_1^{(2n+1)}-qA_3^{(2n+1)}=0 \\ [a_{2n+1}-(2r+1)^2]A_{2r+1}^{(2n+1)}-q[A_{2r-1}^{(2n+1)}+A_{2r+3}^{(2n+1)}]=0 \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}>0,\quad \sum_{r=0}^{\infty}[A_{2r+1}]^2=1\end{array}\right\} \qquad (r=1,2,\cdots)$$

$$\mathrm{se}_{2n+1}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{(2n+1)}\sin(2r+1)z$$

$$\left.\begin{array}{l}[b_{2n+1}-q-1]B_1^{(2n+1)}-qB_3^{(2n+1)}=0\\ [b_{2n+1}-(2r+1)^2]B_{2r+1}^{(2n+1)}-q[B_{2r-1}^{(2n+1)}+B_{2r+3}^{(2n+1)}]=0\\ \sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)B_{2r+1}>0,\quad \sum_{r=0}^{\infty}[B_{2r+1}]^2=1\end{array}\right\}\qquad (r=1,2,\cdots)$$

$$\mathrm{se}_{2n+2}(z,q)=\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+2}^{(2n+2)}\cos(2r+2)z$$

$$\left.\begin{array}{l}[b_{2n+2}-4]B_2^{(2n+2)}-qB_4^{(2n+2)}=0\\ [b_{2n+2}-(2r+2)^2]B_{2r+2}^{(2n+2)}-q[B_{2r}^{(2n+2)}+B_{2r+4}^{(2n+2)}]=0\\ \sum_{r=0}^{\infty}(2r+2)B_{2r+2}>0,\quad \sum_{r=0}^{\infty}[B_{2r+2}]^2=1\end{array}\right\}\qquad (r=1,2,\cdots)$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^2A_{2r+2}}{A_{2r}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2A_{2r+1}}{A_{2r-1}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2B_{2r+1}}{B_{2r-1}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^2B_{2r+2}}{B_{2r}}=-\frac{q}{4}$$

在下列公式中，$q=k^2$，

$$p_{2n}=\frac{1}{A_0^{(2n)}}\mathrm{ce}_{2n}(0)\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$p_{2n+1}=-\frac{1}{kA_1^{(2n+1)}}\mathrm{ce}_{2n+1}(0)\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$s_{2n+1}=\frac{1}{kB_1^{(2n+1)}}\mathrm{se}'_{2n+1}(0)\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$s_{2n+2}=\frac{1}{qB_2^{(2n+2)}}\mathrm{se}'_{2n+2}(0)\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ce}_{2n}(z,q)&=\frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rA_{2r}^{(2n)}J_{2r}(2k\cos z)\\&=\frac{\mathrm{ce}_{2n}(0,q)}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rA_{2r}^{(2n)}I_{2r}(2k\sin z)\\&=\frac{p_{2n}}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rA_{2r}^{(2n)}J_r(ke^{iz})J_r(ke^{-iz})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ce}_{2n+1}(z,q)&=-\frac{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{kA_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rA_{2r+1}^{(2n+1)}J_{2r+1}(2k\cos z)\\&=\frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0,q)}{kA_1^{(2n+1)}}\cot z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+1)A_{2r+1}^{(2n+1)}I_{2r+1}(2k\sin z)\\&=\frac{p_{2n+1}}{A_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rA_{2r+1}^{(2n+1)}[J_r(ke^{iz})J_{r+1}(ke^{-iz})+J_{r+1}(ke^{iz})J_r(ke^{-iz})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{se}_{2n+1}(z,q)&=\frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{kB_1^{(2n+1)}}\tan z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+1)B_{2r+1}^{(2n+1)}J_{2r+1}(2k\cos z)\\&=\frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0,q)}{kB_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rB_{2r+1}^{(2n+1)}I_{2r+1}(2k\sin z)\\&=-\frac{s_{2n+1}}{iB_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rB_{2r+1}^{(2n+1)}[J_r(ke^{iz})J_{r+1}(ke^{-iz})-J_{r+1}(ke^{iz})J_r(ke^{-iz})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{se}_{2n+2}(z,q)&=-\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{qB_2^{(2n+2)}}\tan z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}J_{2r+2}(2k\cos z)\\&=\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0,q)}{qB_2^{(2n+2)}}\cot z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}I_{2r+2}(2k\sin z)\end{aligned}$$

$$=\frac{s_{2n+2}}{\mathrm{i}B_2^{(2n+2)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r B_{2r+2}^{(2n+2)}[J_r(k\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})J_{r+2}(k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})-J_{r+2}(k\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})J_r(k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})]$$

$$a_n(q)\sim b_n(q)\sim -2q+2(2n+1)\sqrt{q}-\frac{1}{4}(2n^2+2n+1)\qquad(q\to\infty)$$

$$\mathrm{ce}_n(z,q)\sim(-)^{[n/2]}\frac{2^n}{\sqrt{2k\pi}}\frac{p_n}{\cos^{n+1}z}\left[\cos^{2n+1}\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\exp(2k\sin z)+\sin^{2n+1}\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\exp(-2k\sin z)\right]$$
$$(-\pi/2<z<\pi/2,q\to\infty)$$

$$\mathrm{se}_n(z,q)\sim(-)^{[n/2]}\frac{2^{n-1}}{\sqrt{2k\pi}}\frac{s_n}{\cos^n z}\left[\cos^{2n-1}\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\exp(2k\sin z)-\sin^{2n-1}\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\exp(-2k\sin z)\right]$$
$$(-\pi/2<z<\pi/2,q\to\infty)$$

表 马蒂厄函数的对称性质

$f(z)$	$f(-z)$	$f(\pi-z)$	$f(\pi+z)$
$\mathrm{ce}_{2n}(z)$	$\mathrm{ce}_{2n}(z)$	$\mathrm{ce}_{2n}(z)$	$\mathrm{ce}_{2n}(z)$
$\mathrm{ce}_{2n+1}(z)$	$\mathrm{ce}_{2n+1}(z)$	$-\mathrm{ce}_{2n+1}(z)$	$-\mathrm{ce}_{2n+1}(z)$
$\mathrm{se}_{2n+1}(z)$	$-\mathrm{se}_{2n+1}(z)$	$\mathrm{se}_{2n+1}(z)$	$-\mathrm{se}_{2n+1}(z)$
$\mathrm{se}_{2n+2}(z)$	$-\mathrm{se}_{2n+2}(z)$	$-\mathrm{se}_{2n+2}(z)$	$\mathrm{se}_{2n+2}(z)$

第一类变形马蒂厄函数(modified Mathieu function of the first kind)

$$\mathrm{Ce}_{2n}(z,q)=\mathrm{ce}_{2n}(\mathrm{i}z,q)$$
$$=\frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r A_{2r}^{(2n)}J_{2r}(2k\cosh z)$$
$$=\frac{\mathrm{ce}_{2n}(0,q)}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{(2n)}J_{2r}(2k\sinh z)$$
$$=\frac{p_{2n}}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{(2n)}J_r(k\mathrm{e}^{-z})J_r(k\mathrm{e}^{z})$$

$$\mathrm{Ce}_{2n+1}(z,q)=\mathrm{ce}_{2n+1}(\mathrm{i}z,q)$$
$$=-\frac{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{kA_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}J_{2r+1}(2k\cosh z)$$
$$=\frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0,q)}{kA_1^{(2n+1)}}\coth z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)A_{2r+1}^{(2n+1)}J_{2r+1}(2k\sinh z)$$
$$=\frac{p_{2n+1}}{A_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}[J_r(k\mathrm{e}^{-z})J_{r+1}(k\mathrm{e}^{z})+J_{r+1}(k\mathrm{e}^{-z})J_r(k\mathrm{e}^{z})]$$

$$\mathrm{Se}_{2n+1}(z,q)=-\mathrm{i}se_{2n+1}(\mathrm{i}z,q)$$
$$=\frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{kB_1^{(2n+1)}}\tanh z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+1)B_{2r+1}^{(2n+1)}J_{2r+1}(2k\cosh z)$$
$$=\frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0,q)}{kB_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{(2n+1)}J_{2r+1}(2k\sinh z)$$
$$=\frac{s_{2n+1}}{B_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}[J_r(k\mathrm{e}^{-z})J_{r+1}(k\mathrm{e}^{z})-J_{r+1}(k\mathrm{e}^{-z})J_r(k\mathrm{e}^{z})]$$

$$\mathrm{Se}_{2n+2}(z,q)=-\mathrm{i}\mathrm{se}_{2n+2}(\mathrm{i}z,q)$$
$$=-\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{qB_2^{(2n+2)}}\tanh z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}J_{2r+2}(2k\cosh z)$$
$$=\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0,q)}{qB_2^{(2n+2)}}\coth z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}J_{2r+2}(2k\sinh z)$$

$$=-\frac{s_{2n+2}}{B_2^{(2n+2)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r B_{2r+2}^{(2n+2)}[J_r(k\mathrm{e}^{-z})J_{r+2}(k\mathrm{e}^{z})-J_{r+2}(k\mathrm{e}^{-z})J_r(k\mathrm{e}^{z})]$$

$$\mathrm{Ce}_{2n}(z,q)=-\frac{2\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{\pi A_0^{2n}}\int_0^{\infty}\sin(2k\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2n}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta \qquad (q>0,z>0)$$

$$\mathrm{Ce}_{2n+1}(z,q)=-\frac{2\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{k\pi A_1^{2n+1}}\int_0^{\infty}\cos(2k\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2n+1}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta \qquad (q>0,z>0)$$

$$\mathrm{Se}_{2n+1}(z,q)=-\frac{4\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{\pi B_1^{2n+1}}\int_0^{\infty}\sinh z\sinh\zeta\sin(2k\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2n+1}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta \qquad (q>0,z>0)$$

$$\mathrm{Se}_{2n+2}(z,q)=-\frac{4\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{k\pi B_2^{(2n+2)}}\int_0^{\infty}\sinh z\sinh\zeta\cos(2k\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2n+2}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta \qquad (q>0,z>0)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Ce}(z,q)&\sim\frac{(-)^{[n/2]}p_n}{\sqrt{k\pi\cosh z}}\cos\left[2k\sinh z-(2n+1)\arctan\left(\tanh\frac{z}{2}\right)\right]\\ \mathrm{Se}(z,q)&\sim\frac{(-)^{[n/2]}s_n}{\sqrt{k\pi\cosh z}}\sin\left[2k\sinh z-(2n+1)\arctan\left(\tanh\frac{z}{2}\right)\right]\end{aligned}\right\} \qquad (z>0,q\to\infty)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Ce}_{2n}(z,q)&\sim\sqrt{\frac{2}{k\pi}}p_{2n}\mathrm{e}^{-z/2}\cos\left(k\mathrm{e}^{z}-\frac{\pi}{4}\right)\\ \mathrm{Ce}_{2n+1}(z,q)&\sim\sqrt{\frac{2}{k\pi}}p_{2n+1}\mathrm{e}^{-z/2}\cos\left(k\mathrm{e}^{z}-\frac{3\pi}{4}\right)\\ \mathrm{Se}_{2n+1}(z,q)&\sim\sqrt{\frac{2}{k\pi}}s_{2n+1}\mathrm{e}^{-z/2}\cos\left(k\mathrm{e}^{z}-\frac{3\pi}{4}\right)\\ \mathrm{Se}_{2n+2}(z,q)&\sim\sqrt{\frac{2}{k\pi}}s_{2n+2}\mathrm{e}^{-z/2}\cos\left(k\mathrm{e}^{z}-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{Re}z\to\infty,\ |\arg k+\mathrm{Im}z|<\pi)$$

第二类变形马蒂厄函数(modified Mathieu functions of the second kind)

$$\mathrm{Fey}_{2n}(z,q)=\frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r A_{2r}^{(2n)}N_{2r}(2k\cosh z) \qquad (|\cosh z|>1)$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2n}(0,q)}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{(2n)}N_{2r}(2k\sinh z) \qquad (|\sinh z|>1)$$

$$=\frac{p_{2n}}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r A_{2r}^{(2n)}J_r(k\mathrm{e}^{-z})N_r(k\mathrm{e}^{z})$$

$$\mathrm{Fey}_{2n+1}(z,q)=-\frac{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{kA_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}N_{2r+1}(2k\cosh z) \qquad (|\cosh z|>1)$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0,q)}{kA_1^{(2n+1)}}\coth z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)A_{2r+1}^{(2n+1)}N_{2r+1}(2k\sinh z) \qquad (|\sinh z|>1)$$

$$=\frac{p_{2n+1}}{A_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}[J_r(k\mathrm{e}^{-z})N_{r+1}(k\mathrm{e}^{z})+J_{r+1}(k\mathrm{e}^{-z})N_r(k\mathrm{e}^{z})]$$

$$\mathrm{Gey}_{2n+1}(z,q)=\frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{kB_1^{(2n+1)}}\tanh z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+1)B_{2r+1}^{(2n+1)}N_{2r+1}(2k\cosh z) \qquad (|\cosh z|>1)$$

$$=\frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0,q)}{kB_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{(2n+1)}N_{2r+1}(2k\sinh z) \qquad (|\sinh z|>1)$$

$$=\frac{s_{2n+1}}{B_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}[J_r(k\mathrm{e}^{-z})N_{r+1}(k\mathrm{e}^{z})-J_{r+1}(k\mathrm{e}^{-z})N_r(k\mathrm{e}^{z})]$$

$$\mathrm{Gey}_{2n+2}(z,q)=-\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{qB_2^{(2n+2)}}\tanh z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}N_{2r+2}(2k\cosh z)\qquad(|\cosh z|>1)$$

$$=\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0,q)}{qB_2^{(2n+2)}}\coth z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}N_{2r+2}(2k\sinh z)\qquad(|\sinh z|>1)$$

$$=-\frac{s_{2n+2}}{B_2^{(2n+2)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rB_{2r+2}^{(2n+2)}[J_r(k\mathrm{e}^{-z})N_{r+2}(k\mathrm{e}^{z})-J_{r+2}(k\mathrm{e}^{-z})N_r(k\mathrm{e}^{z})]$$

$$\mathrm{Fey}_{2n}(z,q)=-\frac{2\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{\pi A_0^{(2n)}}\int_0^{\infty}\cos(2k\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2n}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta\qquad(q>0,z>0)$$

$$\mathrm{Fey}_{2n+1}(z,q)=\frac{2\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{k\pi A_1^{(2n+1)}}\int_0^{\infty}\sin(2k\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2n+1}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta\qquad(q>0,z>0)$$

$$\mathrm{Gey}_{2n+1}(z,q)=\frac{4\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{\pi B_1^{(2n+1)}}\int_0^{\infty}\sinh z\sinh\zeta\cos(2k\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2n+1}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta\qquad(q>0,z>0)$$

$$\mathrm{Gey}_{2n+2}(z,q)=-\frac{4\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{k\pi B_2^{(2n+2)}}\int_0^{\infty}\sinh z\sinh\zeta\sin(2k\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2n+2}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta\qquad(q>0,z>0)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Fey}_{2n}(z,q)&\sim\sqrt{\frac{2}{k\pi}}p_{2n}\mathrm{e}^{-z/2}\sin\left(k\mathrm{e}^{z}-\frac{\pi}{4}\right)\\ \mathrm{Fey}_{2n+1}(z,q)&\sim\sqrt{\frac{2}{k\pi}}p_{2n+1}\mathrm{e}^{-z/2}\sin\left(k\mathrm{e}^{z}-\frac{3\pi}{4}\right)\\ \mathrm{Gey}_{2n+1}(z,q)&\sim\sqrt{\frac{2}{k\pi}}s_{2n+1}\mathrm{e}^{-z/2}\sin\left(k\mathrm{e}^{z}-\frac{3\pi}{4}\right)\\ \mathrm{Gey}_{2n+2}(z,q)&\sim\sqrt{\frac{2}{k\pi}}s_{2n+2}\mathrm{e}^{-z/2}\sin\left(k\mathrm{e}^{z}-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{Re}z\to\infty,\ |\arg k+\mathrm{Im}z|<\pi)$$

第三类变形马蒂厄函数(modified Mathieu functions of the third kind)

$$\mathrm{Fek}_{2n}(z,q)=\frac{\mathrm{i}}{2}[\mathrm{Ce}_{2n}(z,q)+\mathrm{i}\mathrm{Fey}_{2n}(z,q)]$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{\pi A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{(2n)}K_{2r}(-2\mathrm{i}k\cosh z)$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2n}(0,q)}{\pi A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rA_{2r}^{(2n)}K_{2r}(-2\mathrm{i}k\sinh z)$$

$$\mathrm{Fek}_{2n+1}(z,q)=-\frac{1}{2}[\mathrm{Ce}_{2n+1}(z,q)+\mathrm{i}\mathrm{Fey}_{2n+1}(z,q)]$$

$$=-\frac{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{k\pi A_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r+1}^{(2n+1)}K_{2r+1}(-2\mathrm{i}k\cosh z)$$

$$=\frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0,q)}{k\pi A_1^{(2n+1)}}\coth z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+1)A_{2r+1}^{(2n+1)}K_{2r+1}(-2\mathrm{i}k\sinh z)$$

$$\mathrm{Gek}_{2n+1}(z,q)=-\frac{1}{2}[\mathrm{Se}_{2n+1}(z,q)+\mathrm{i}\mathrm{Gey}_{2n+1}(z,q)]$$

$$=\frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{k\pi B_1^{(2n+1)}}\tanh z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)B_{2r+1}^{(2n+1)}K_{2r+1}(-2\mathrm{i}k\cosh z)$$

$$=\frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0,q)}{k\pi B_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rB_{2r+1}^{(2n+1)}K_{2r+1}(-2\mathrm{i}k\sinh z)$$

$$\mathrm{Gek}_{2n+2}(z,q)=\frac{\mathrm{i}}{2}[\mathrm{Se}_{2n+2}(z,q)+\mathrm{i}\mathrm{Gey}_{2n+2}(z,q)]$$

$$=-\frac{se'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{q\pi B_2^{(2n+2)}}\tanh z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}K_{2r+2}(-2ik\cosh z)$$

$$=\frac{se'_{2n+2}(0,q)}{q\pi B_2^{(2n+2)}}\coth z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}K_{2r+2}(-2ik\sinh z)$$

$$\mathrm{Fek}_{2n}(z,q)=\frac{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{\pi A_0^{(2n)}}\int_0^{\infty}\exp(2ik\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2n}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta\qquad(q>0,z>0)$$

$$\mathrm{Fek}_{2n+1}(z,q)=-\frac{ce'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{k\pi A_1^{(2n+1)}}\int_0^{\infty}\exp(2ik\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Ce}_{2n+1}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta\qquad(q>0,z>0)$$

$$\mathrm{Gek}_{2n+1}(z,q)=-\frac{2i\,se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{\pi B_1^{(2n+1)}}\int_0^{\infty}\sinh z\sinh\zeta\exp(2ik\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2n+1}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta\qquad(q>0,z>0)$$

$$\mathrm{Gek}_{2n+2}(z,q)=-\frac{2i\,se'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{k\pi B_2^{(2n+2)}}\int_0^{\infty}\sinh z\sinh\zeta\exp(2ik\cosh z\cosh\zeta)\mathrm{Se}_{2n+2}(\zeta,q)\mathrm{d}\zeta\qquad(q>0,z>0)$$

$$\mathrm{Me}_{2n}^{(1)}(z,q)=\mathrm{Ce}_{2n}(z,q)+i\mathrm{Fey}_{2n}(z,q)$$

$$=\frac{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rA_{2r}^{(2n)}H_{2r}^{(1)}(2k\cosh z)$$

$$=\frac{ce_{2n}(0,q)}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}A_{2r}^{(2n)}H_{2r}^{(1)}(2k\sinh z)$$

$$=\frac{p_{2n}}{A_0^{(2n)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rA_{2r}^{(2n)}J_r(ke^{-z})H_r^{(1)}(ke^z)$$

$$\mathrm{Me}_{2n+1}^{(1)}(z,q)=\mathrm{Ce}_{2n+1}(z,q)+i\mathrm{Fey}_{2n+1}(z,q)$$

$$=-\frac{ce'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{kA_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rA_{2r+1}^{(2n+1)}H_{2r+1}^{(1)}(2k\cosh z)$$

$$=\frac{ce_{2n+1}(0,q)}{kA_1^{(2n+1)}}\coth z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)A_{2r+1}^{(2n+1)}H_{2r+1}^{(1)}(2k\sinh z)$$

$$=\frac{p_{2n+1}}{A_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rA_{2r+1}^{(2n+1)}[J_r(ke^{-z})H_{r+1}^{(1)}(ke^z)+J_{r+1}(ke^{-z})H_r^{(1)}(ke^z)]$$

$$\mathrm{Ne}_{2n+1}^{(1)}(z,q)=\mathrm{Se}_{2n+1}(z,q)+i\mathrm{Gey}_{2n+1}(z,q)$$

$$=\frac{se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{kB_1^{(2n+1)}}\tanh z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+1)B_{2r+1}^{(2n+1)}H_{2r+1}^{(1)}(2k\cosh z)$$

$$=\frac{se'_{2n+1}(0,q)}{kB_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}B_{2r+1}^{(2n+1)}H_{2r+1}^{(1)}(2k\sinh z)$$

$$=\frac{s_{2n+1}}{B_1^{(2n+1)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rB_{2r+1}^{(2n+1)}[J_r(ke^{-z})H_{r+1}^{(1)}(ke^z)-J_{r+1}(ke^{-z})H_r^{(1)}(ke^z)]$$

$$\mathrm{Ne}_{2n+2}^{(1)}(z,q)=-\mathrm{Se}_{2n+2}(z,q)+i\mathrm{Gey}_{2n+2}(z,q)$$

$$=-\frac{se'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{qB_2^{(2n+2)}}\tanh z\sum_{r=0}^{\infty}(-)^r(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}H_{2r+2}^{(1)}(2k\cosh z)$$

$$=\frac{se'_{2n+2}(0,q)}{qB_2^{(2n+2)}}\coth z\sum_{r=0}^{\infty}(2r+2)B_{2r+2}^{(2n+2)}H_{2r+2}^{(1)}(2k\sinh z)$$

$$=-\frac{s_{2n+2}}{B_2^{(2n+2)}}\sum_{r=0}^{\infty}(-)^rB_{2r+2}^{(2n+2)}[J_r(ke^{-z})H_{r+2}^{(1)}(ke^z)-J_{r+2}(ke^{-z})H_r^{(1)}(ke^z)]$$

$$\mathrm{Me}_{2n}^{(2)}(z,q)=\mathrm{Ce}_{2n}(z,q)-i\mathrm{Fey}_{2n}(z,q)$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r A_{2r}^{(2n)} H_{2r}^{(2)}(2k \cosh z)$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} H_{2r}^{(2)}(2k \sinh z)$$

$$= \frac{p_{2n}}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r A_{2r}^{(2n)} J_r(k\mathrm{e}^{-z}) H_r^{(2)}(k\mathrm{e}^{z})$$

$$\mathrm{Me}_{2n+1}^{(2)}(z, q) = -\mathrm{Ce}_{2n+1}(z, q) - \mathrm{i}\,\mathrm{Fey}_{2n+1}(z, q)$$

$$= -\frac{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kA_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} H_{2r+1}^{(2)}(2k \cosh z)$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0, q)}{kA_1^{(2n+1)}} \coth z \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)} H_{2r+1}^{(2)}(2k \sinh z)$$

$$= \frac{p_{2n+1}}{A_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} [J_r(k\mathrm{e}^{-z}) H_{r+1}^{(2)}(k\mathrm{e}^{z}) + J_{r+1}(k\mathrm{e}^{-z}) H_r^{(2)}(k\mathrm{e}^{z})]$$

$$\mathrm{Ne}_{2n+1}^{(2)}(z, q) = \mathrm{Se}_{2n+1}(z, q) - \mathrm{i}\,\mathrm{Gey}_{2n+1}(z, q)$$

$$= \frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kB_1^{(2n+1)}} \tanh z \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)} H_{2r+1}^{(2)}(2k \cosh z)$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0, q)}{kB_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} H_{2r+1}^{(2)}(2k \sinh z)$$

$$= \frac{s_{2n+1}}{B_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} [J_r(k\mathrm{e}^{-z}) H_{r+1}^{(2)}(k\mathrm{e}^{z}) - J_{r+1}(k\mathrm{e}^{-z}) H_r^{(2)}(k\mathrm{e}^{z})]$$

$$\mathrm{Ne}_{2n+2}^{(2)}(z, q) = -\mathrm{Se}_{2n+2}(z, q) - \mathrm{i}\,\mathrm{Gey}_{2n+2}(z, q)$$

$$= -\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{qB_2^{(2n+2)}} \tanh z \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} H_{2r+2}^{(2)}(2k \cosh z)$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0, q)}{qB_2^{(2n+2)}} \coth z \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} H_{2r+2}^{(2)}(2k \sinh z)$$

$$= -\frac{s_{2n+2}}{B_2^{(2n+2)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r B_{2r+2}^{(2n+2)} [J_r(k\mathrm{e}^{-z}) H_{r+2}^{(2)}(k\mathrm{e}^{z}) - J_{r+2}(k\mathrm{e}^{-z}) H_r^{(2)}(k\mathrm{e}^{z})]$$

正交多项式

勒让德多项式(Legendre polynomial)

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} (z^2 - 1)^n = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-z}{2}\right)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}; \frac{1}{2} - n; z^{-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-)^k (2n-2k)!}{k!\ (n-k)!\ (n-2k)!} z^{n-2k}$$

$$P_n(\cos\theta) = F\left(-n, n+1; 1; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \cos(n-2k)\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos\theta + \mathrm{i} \sin\theta \cos\varphi)^n \mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos \frac{2n+1}{2}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}} \mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)h^n & (|h|<\min|z\pm\sqrt{z^2-1}|)\\ \sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)h^{-n-1} & (|h|>\max|z\pm\sqrt{z^2-1}|)\end{cases}$$

$$\mathrm{e}^{z\cos\theta}J_0(z\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}P_n(\cos\theta)z^n$$

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

$$\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)\mathrm{d}x=0 \qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

$$\int_0^1 x^{\lambda}P_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+2)}{(\lambda+n+1)(\lambda+n-1)\cdots(\lambda+1)} & n\text{ 为偶数}\\ \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-n+2)}{(\lambda+n+1)(\lambda+n-1)\cdots(\lambda+2)} & n\text{ 为奇数}\end{cases} \qquad (\mathrm{Re}\lambda>-1)$$

$$\int_{-1}^{1}P_n'(x)P_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2 & n-m\text{ 为正奇数}\\ 0 & \text{其它情形}\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}P_n'(x)P_m'(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}m(m+1) & n-m\text{ 为正偶数}\\ n(n+1) & m-n\text{ 为正偶数}\\ 0 & n-m\text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\frac{2}{n(n+1)} & n=1,2,3,\cdots\\ 2(\ln2-1) & n=0\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)}{(1-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x=2^{1-\alpha}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha+2)} \qquad (0<\alpha<1)$$

$$\int_0^1 x^{-1/2}P_n(x)\mathrm{d}x=(-)^{[n/2]}\frac{2}{2n+1}$$

$$\int_0^{\pi}P_{2n}(\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2^{4n}}\left[\frac{(2n)!}{n!\ n!}\right]^2$$

$$\int_0^{\pi}P_{2n+1}(\cos\theta)\cos\theta\ \mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2^{4n+2}}\frac{(2n)!}{n!\ n!}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\ (n+1)!}$$

$P_0(x)=1$ $\qquad$ $P_0(\cos\theta)=1$

$P_1(x)=x$ $\qquad$ $P_1(\cos\theta)=\cos\theta$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$ $\qquad$ $P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(3\cos2\theta+1)$

$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ $\qquad$ $P_3(\cos\theta)=\frac{1}{8}(5\cos3\theta+3\cos\theta)$

$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$ $\qquad$ $P_4(\cos\theta)=\frac{1}{64}(35\cos4\theta+20\cos2\theta+9)$

$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$ $\qquad$ $P_5(\cos\theta)=\frac{1}{128}(63\cos5\theta+35\cos3\theta+30\cos\theta)$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k}{2^{k+1}}\frac{(n+k)!}{(n-k)!\ (k!)^2}[(1-x)^k+(-)^k(1+x)^k]$$

$$P_0(x)<P_1(x)<P_2(x)<\cdots<P_n(x)<\cdots \qquad (x>1)$$

$$\sum_{k=0}^{n}P_k(x)>0 \qquad (x>-1)$$

$P_n(1)=1$ $\qquad$ $P_n(-1)=(-1)^n$

$P_n^{(r)}(1)=\frac{(n+r)!}{2^r r!\ (n-r)!}$ $\qquad$ $P_n^{(r)}(-1)=(-)^{n-r}\frac{(n+r)!}{2^r r!\ (n-r)!}$

$P_{2n}(0)=(-)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $\qquad P_{2n+1}(0)=0$

$$P^{(r)}(0)=\begin{cases}(-)^k\dfrac{\Gamma(n-k+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+1)}2^r & n-r=2k,k=0,1,2,\cdots,[n/2]\\ 0 & \text{其它情形}\end{cases}$$

$P_n(-x)=(-)^nP_n(x)$

$(n+1)P_{n+1}(z)-(2n+1)zP_n(z)+nP_{n-1}(z)=0$

$$(z^2-1)\frac{dP_n(z)}{dz}=n[zP_n(z)-P_{n-1}(z)]$$
$$=\frac{n(n+1)}{2n+1}[P_{n+1}(z)-P_{n-1}(z)]=(n+1)[P_{n+1}(z)-zP_n(z)]$$

$$P_{n+r}^{(r)}(x)=(2r-1)!!\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_{2r+1}=n}P_{j_1}(x)P_{j_2}(x)\cdots P_{j_{2r+1}}(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}P_n(\cos2\theta)=-\ln\sin\theta-\ln(1+\sin\theta)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}P_n(\cos2\theta)=\ln\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}-1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}P_n(x)P_n(y)=2\ln2-1-\ln[(1-x)(1+y)],\qquad(-1<x\leqslant y<1)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^k=\frac{1}{2}n(n-1)$ 其中 x_i 是 $P_n(x)$ 的零点，$i=1,2,\cdots,n$

$$|P_n(x)|\leqslant1\qquad(-1\leqslant x\leqslant1)$$

$$|P_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}\qquad(-1\leqslant x\leqslant1,n\geqslant1)$$

$$\left|\frac{dP_n(x)}{dx}\right|<\frac{2}{1-x^2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\qquad(-1<x<1,n\geqslant1)$$

$$\left|\frac{dP_n(x)}{dx}\right|\leqslant\frac{1}{2}n(n+1)\qquad(-1\leqslant x\leqslant1)$$

$$\frac{1-[P_n(x)]^2}{(2n-1)(n+1)}\leqslant[P_n(x)]^2-P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)<\frac{2n+1}{3n(n+1)}$$

另有部分公式见“勒让德函数”.

切比雪夫多项式(Chebyshev polynomials)

$$T_n(x)=(-)^n\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-1/2}]$$
$$=\frac{1}{2}[(x+i\sqrt{1-x^2})^n+(x-i\sqrt{1-x^2})^n]$$
$$=F\left(n,-n;\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-)^k\binom{n}{2k}x^{n-2k}(1-x^2)^k$$
$$=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-)^k\frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$
$$=\cos(n\arccos x)$$

$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$

$T_0(x)=1$

$T_1(x)=x$

$T_2(x)=2x^2-1$

$T_3(x)=4x^3-3x$

$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$

$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$

$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$

$(1-x^2)T'_n(x)=n[T_{n-1}(x)-xT_n(x)]$

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=T_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)t^n \qquad (|t|<\min|x\pm\sqrt{x^2-1}|)$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}(1+\delta_{n0})\delta_{mn}$$

$$\sum_{i=0}^{k}T_m(u_i)T_n(u_i)=\begin{cases}0 & m\neq n \text{ 或 } m=n=k+1\\ \dfrac{k+1}{2} & 1\leqslant m=n\leqslant k\\ k+1 & m=n=0\end{cases}$$

u_i 为 $T_{k+1}(x)$ 的零点，$i=0,1,2,\cdots,k$

$$U_n(x)=\frac{(-)^n}{\sqrt{1-x^2}}\frac{n+1}{(2n+1)!!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+1/2}]$$
$$=(n+1)F\left(-n,n+2;\frac{3}{2};\frac{1-x}{2}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-)^k\frac{(n-k)!}{k!\ (n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

$$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

$U_0(x)=1$

$U_1(x)=2x$

$U_2(x)=4x^2-1$

$U_3(x)=8x^3-4x$

$U_4(x)=16x^4-12x^2+1$

$U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$

$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)$

$(1-x^2)U'_n(x)=(n+1)U_{n-1}(x)-nxU_n(x)$

$T_n(x)=U_n(x)-xU_{n-1}(x)$

$(1-x^2)U_{n-1}(x)=xT_n(x)-T_{n+1}(x)$

$T'_n(x)=nU_{n-1}(x)$

$$\frac{1}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n \qquad (|t|<\min|x\pm\sqrt{x^2-1}|)$$

$$\int_{-1}^{1}U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

拉盖尔多项式(Laguerre polynomial)

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k=L_n^{(0)}(x)$$

$L_0(x)=1$

$L_1(x)=-x+1$

$$L_2(x)=\frac{x^2-4x+2}{2}$$

$$L_3(x)=\frac{-x^3+9x^2-18x+6}{6}$$

$$L_4(x)=\frac{x^4-16x^3+72x^2-96x+24}{24}$$

$$L_5(x)=\frac{-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120}{120}$$

$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x)$

$$\frac{1}{1-t}\exp\left[-\frac{xt}{1-t}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n \qquad (|t|<1)$$

$$\int_0^{\infty}L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx=\delta_{mn}$$

广义拉盖尔多项式(generalized Laguerre polynomial)

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\alpha}e^{-x}]=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k}{k!}\binom{n+\alpha}{n-k}x^k$$

$$=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\ \Gamma(\alpha+1)}F(-n;\alpha+1;x)$$

$$=\frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha/2}\int_0^{\infty}t^{n+\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{xt})e^{-t}dt \qquad (n+\alpha>-1)$$

$$L_n^{(-1/2)}(x)=\frac{1}{n!\sqrt{\pi}}e^x\int_0^{\infty}e^{-t}t^{n-1/2}\cos(2\sqrt{xt})dt=\frac{(-)^n}{n!\ 2^{2n}}H_{2n}(\sqrt{x})$$

$$L_n^{(1/2)}(x)=\frac{1}{n!\sqrt{\pi x}}e^x\int_0^{\infty}e^{-t}t^n\sin(2\sqrt{xt})dt=\frac{(-)^n}{n!\ 2^{2n+1}\sqrt{x}}H_{2n+1}(\sqrt{x})$$

$$L_n^{(\alpha)}(0)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\ \Gamma(\alpha+1)}$$

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\exp\left[\frac{xt}{t-1}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(\alpha)}(x)t^n \qquad (|t|<1,\alpha\neq-1,-2,-3,\cdots)$$

$$\int_0^{\infty}L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}dx=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{mn}$$

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)=(2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha-\beta)_k}{k!}L_{n-k}^{(\beta)}(x)$$

$$x\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x)=nL_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

$$=(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)=-xL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$$

$$\frac{d^kL_n^{(\alpha)}(x)}{dx^k}=(-)^kL_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)$$

$$\int_x^{\infty}e^{-t}L_n^{(\alpha)}(t)dt=e^{-x}[L_n^{(\alpha)}(x)-L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]$$

$$L_n^{(\alpha+\beta+1)}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}L_k^{(\alpha)}(x)L_{n-k}^{(\beta)}(y)$$

$$e^x x^\alpha\Gamma(\alpha,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}L_n^{(\alpha)}(x) \qquad (\alpha>-1,x>0)$$

$$|L_n^{(\alpha)}(x)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\ \Gamma(\alpha+1)}e^{x/2} & x\geqslant0,\alpha\geqslant0\\ \left[2-\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\ \Gamma(\alpha+1)}\right]e^{x/2} & x\geqslant0,-1<\alpha<0\end{cases}$$

埃尔米特多项式(Hermite polynomial)

$$H_n(x)=(-)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{x^2}=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-)^k n!}{k!\ (n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

$$=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}}e^{x^2}\int_0^{\infty}e^{-t^2}t^n\cos\left(2xt-\frac{n\pi}{2}\right)dt$$

$$H_0(x)=1$$

$$H_1(x)=2x$$

$$H_2(x)=4x^2-2$$

$$H_3(x)=8x^3-12x$$

$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$

$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$

$$H_{2n}(x)=\frac{(-)^n(2n)!}{n!}F\left(-n;\frac{1}{2};x^2\right)$$

$$H_{2n+1}(x)=\frac{(-)^n(2n+1)!}{n!}2xF\left(-n;\frac{3}{2};x^2\right)$$

$$H_{2n}(0)=(-)^n\frac{(2n)!}{n!} \qquad H_{2n+1}(0)=0$$

$$H'_{2n}(0)=0 \qquad H'_{2n+1}(0)=(-)^n\frac{2(2n+1)!}{n!}$$

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$$

$$H'_n(x)=2nH_{n-1}(x)$$

$$H_n(-x)=(-)^nH_n(x)$$

$$e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

$$e^{-1}\sinh 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}H_{2n+1}(x)$$

$$e^{-1}\cosh 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}H_{2n}(x)$$

$$e\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}H_{2n+1}(x)$$

$$e\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n)!}H_{2n}(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-)^n\sqrt{n}}{2^{2n}n!}H_{2n}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-)^n}{2^{2n}n!}H_{2n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{n}}\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=2^nn!\sqrt{\pi}\,\delta_{mn}$$

$$H_n(x)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}e^{x^2/2}\left[\cos\left(\sqrt{2n+1}x-\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{x^3}{6}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\sin\left(\sqrt{2n+1}x-\frac{n\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad (n\to\infty)$$

$$H_{2n}(x)=(-)^n2^n(2n-1)!!e^{x^2/2}\left[\cos\sqrt{4n+1}x+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right] \qquad (x\to\infty)$$

$$H_{2n+1}(x)=(-)^n2^{n+1/2}(2n-1)!!\sqrt{2n+1}e^{x^2/2}\left[\sin\sqrt{4n+3}x+O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right] \qquad (x\to\infty)$$

$$|H_n(x)|<ke^{x^2/2}2^{n/2}(n!)^{1/2}, \qquad (k=1.086435\cdots)$$

$$|H_{2n}(x)|\leqslant e^{x^2/2}[2^{2n+1}n!-2^n(2n-1)!!] \qquad (x\geqslant 0)$$

$$|H_{2n+1}(x)|\leqslant xe^{x^2/2}2^{n+1}(2n+1)!! \qquad (x\geqslant 0)$$

雅可比多项式(Jacobi polynomial)

$$\begin{aligned}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)&=\frac{(-)^n}{2^nn!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k\\&=\binom{n+\alpha}{n}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right)\\&=(-)^n\binom{n+\beta}{n}F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\beta+1;\frac{1+x}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\&\quad=(2n+\alpha+\beta+1)[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x+(\alpha^2-\beta^2)]P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\&\qquad-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{n+\alpha+\beta+1}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\left(\frac{1-t+\sqrt{1-2xt+t^2}}{2}\right)^{-\alpha}\left(\frac{1+t+\sqrt{1-2xt+t^2}}{2}\right)^{-\beta}=\sum_{k=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n \qquad (|t|<1)$$

$$\int_{-1}^{1}P_m^{\alpha,\beta}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\mathrm{d}x=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)n!\ \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\delta_{mn}$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|=\begin{cases}\begin{pmatrix}n+q\\ n\end{pmatrix}\sim n^q & \alpha>-1,\beta>-1,q=\max(\alpha,\beta)\geqslant-\frac{1}{2}\\ |P_n^{(\alpha,\beta)}(x')|\sim n^{-1/2} & \alpha>-1,\beta>-1,q=\max(\alpha,\beta)<-\frac{1}{2}\end{cases}$$

x' 为最靠近$\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+1}$点的极大值点

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\begin{pmatrix}n+\alpha\\ n\end{pmatrix}=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-)^n\begin{pmatrix}n+\alpha\\ n\end{pmatrix}=(-)^n\frac{(\beta+1)_n}{n!}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-)^nP_n^{(\beta,\alpha)}(x)$$

格根鲍尔多项式(Gegenbauer polynomial)

$$C_n^{\lambda}(x)=\frac{(-)^n}{2^n n!}\frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n}(1-x^2)^{-\lambda+1/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(1-x^2)^{n+\lambda-1/2}]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-)^k\Gamma(n+\lambda-k)}{k!\ (n-2k)!}(2x)^{n-2k} \qquad (\lambda>0)$$

$$=\frac{(2\lambda)_n}{n!}F\left(-n,n+2\lambda;\lambda+\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right)$$

$$C_n^{\lambda}(\cos\theta)=\frac{1}{[\Gamma(\lambda)]^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\lambda-k)\Gamma(\lambda+k)}{k!\ (n-k)!}\cos(n-2k)\vartheta \qquad (\lambda\neq 0)$$

$$=\frac{2}{\Gamma(\lambda)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)k}{k!}\frac{\Gamma(n+2\lambda+k)}{\Gamma(n+\lambda+k+1)}\cos[(n+2\lambda+2k)\theta-\lambda\pi] \qquad (0<\lambda<1,0<\theta<\pi)$$

$$C_n^0(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-)^k\frac{\Gamma(n-k)}{k!\ \Gamma(n-2k+1)}(2x)^{n-2k} \qquad (n\neq 0)$$

$$C_n^0(\cos\theta)=\frac{2}{n}\cos n\theta$$

$$C_n^1(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$C_0^{\lambda}(x)=1 \qquad (\lambda\neq 0)$$

$$C_1^{\lambda}(x)=2\lambda x \qquad (\lambda\neq 0)$$

$$C_2^{\lambda}(x)=2\lambda(1+\lambda)x^2-\lambda \qquad (\lambda\neq 0)$$

$$C_3^{\lambda}(x)=\frac{4}{3}\lambda(1+\lambda)(2+\lambda)x^3-2\lambda(1+\lambda)x$$

$$C_4^{\lambda}(x)=\frac{2}{3}\lambda(1+\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda)x^4-2\lambda(1+\lambda)(2+\lambda)x^2+\frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)$$

$$\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n C_n^{\lambda}(x)=(2\lambda)_nP_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(x) \qquad \left(\lambda>-\frac{1}{2}\right)$$

$$C_n^{1/2}(x)=P_n(x)$$

$$C_n^1(x)=U_n(x)$$

$$C_n^0(x)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}C_n^{\lambda}(x)=\frac{2}{n}T_n(x)$$

$$C_n^{\lambda}(-x)=(-)^nC_n^{\lambda}(x)$$

$$C_n^{\lambda}(0)=\begin{cases}0 & n=2m+1,m=0,1,2,\cdots\\ \frac{(-)^m}{m!}(\lambda)_m & n=2m,m=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

$$(n+1)C_{n+1}^{\lambda}(x)=2(n+\lambda)xC_n^{\lambda}(x)-(n+2\lambda-1)C_{n-1}^{\lambda}(x)$$

$$2\lambda(1-x^2)C_{n-1}^{\lambda+1}(x)=(n+2\lambda-1)C_{n-1}^{\lambda}(x)-nxC_n^{\lambda}(x)$$

$$\frac{d^k}{dx^k}C_n^{\lambda}(x)=2^k(\lambda)_k C_{n-k}^{\lambda+k}(x)$$

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{\lambda}(x)t^n \qquad (|t|<\min|x\pm\sqrt{x^2-1}|,\lambda\neq 0)$$

$$\int_{-1}^{1}C_m^{\lambda}(x)C_n^{\lambda}(x)(1-x^2)^{\lambda-1/2}dx=\frac{\pi\Gamma(n+2\lambda)}{2^{2\lambda-1}n!\ (n+\lambda)[\Gamma(\lambda)]^2}\delta_{mn}$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|C_n^{\lambda}(x)|=C_n^{\lambda}(1)=\frac{1}{n!}(2\lambda)_n \qquad (\lambda>0)$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|C_{2n}^{\lambda}(x)|=|C_{2n}^{\lambda}(0)|=\frac{1}{n!}(\lambda)_n \qquad (-n<\lambda<0,\lambda\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|C_{2n+1}^{\lambda}(x)|<\frac{2}{\sqrt{(2n+1)(2n+2\lambda+1)}}\frac{1}{n!}|(\lambda)_{n+1}| \qquad \left(-n-\frac{1}{2}<\lambda<0,\lambda\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right)$$

$$\sin^{\lambda}\theta|C_n^{\lambda}(\cos\theta)|<\left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda-1}\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \qquad (0<\lambda<1,0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

其　　他

欧拉多项式(Euler polynomial)

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(0)x^{n-k}$$

$$E_0(x)=1$$

$$E_1(x)=x-\frac{1}{2}$$

$$E_2(x)=x(x-1)$$

$$E_3(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x-\frac{1}{2}\right)$$

$$E_4(x)=x(x-1)(x^2-x-1)$$

$$E_5(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^4-2x^3-x^2+2x+1)$$

$$E_6(x)=x(x-1)(x^4-2x^3-2x^2+3x+3)$$

$$E_n(x+1)+E_n(x)=2x^n$$

$$\frac{d^p}{dx^p}E_n(x)=\frac{n!}{(n-p)!}E_{n-p}(x)$$

$$E_n(1-x)=(-)^nE_n(x)$$

$$\sum_{k=1}^{m}(-)^k k^n=\frac{1}{2}[(-)^mE_n(m+1)-E_n(1)]$$

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t|<\pi)$$

欧拉数(Euler numbers)

$$E_n=(-)^n\sum_{k=0}^{2n}2^k\binom{2n}{k}E_k(0)=(-)^n2^{2n}E_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-)^k\binom{2n}{2k}E_k=0 \qquad (n\geqslant 1)$$

$E_0=1$，　$E_1=1$，　$E_2=5$，

$E_3=61$，　$E_4=1385$，　$E_5=50521$，

$E_6=2702765$，　$E_7=199360981$，　$E_8=19391512145$，

$E_9=2404879675441$，　$E_{10}=370371188237525$，　…

伯努利多项式(Bernoulli polynomial)

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(0)x^{n-k}$$

$$B_0(x)=1$$

$$B_1(x)=x-\frac{1}{2}$$

$$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$$

$$B_3(x)=x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$$

$$B_5(x)=x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x-\frac{1}{3}\right)$$

$$B_6(x)=x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42}$$

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k(x)=nx^{n-1} \qquad (n=2,3,4,\cdots)$$

$$B_n(1-x)=(-)^nB_n(x)=B_n(-x)$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}k^n=\frac{1}{n+1}[B_{n+1}(m)-B_{n+1}(0)]$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}B_n\left(x+\frac{k}{m}\right)=m^{1-n}B_n(mx)$$

$$B_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(y)x^{n-k}$$

$$\frac{d^p}{dx^p}B_n(x)=\frac{n!}{(n-p)!}B_{n-p}(x)$$

$$\int_a^x B_n(t)dt=\frac{1}{n+1}[B_{n+1}(x)-B_{n+1}(a)]$$

$$B_n(0)=B_n(1)$$

伯努利数(Bernoulli numbers)

$$B_n=(-)^{n-1}B_{2n}(0)$$

$B_1=\frac{1}{6}$,

$B_2=\frac{1}{30}$,

$B_3=\frac{1}{42}$,

$B_4=\frac{1}{30}$,

$B_5=\frac{5}{66}$,

$B_6=\frac{691}{2730}$,

$B_7=\frac{7}{6}$,

$B_8=\frac{3617}{510}$,

$B_9=\frac{43867}{798}$,

$B_{10}=\frac{1\ 74611}{330}$,

$B_{11}=\frac{8\ 14513}{138}$,

$$B_{12}=\frac{2363\ 64091}{2730},$$

$$B_{13}=\frac{85\ 53103}{6},$$

$$B_{14}=\frac{2\ 37494\ 61029}{510},$$

$$B_{15}=\frac{861\ 58412\ 76005}{14322},$$

$$B_{16}=\frac{770\ 93210\ 41217}{510},$$

$$B_{17}=\frac{257\ 76878\ 58367}{6},$$

$$B_{18}=\frac{26315\ 27155\ 30534\ 77373}{19\ 19190},$$

$$B_{19}=\frac{2\ 92999\ 39138\ 41559}{6},$$

$$B_{20}=\frac{2\ 61082\ 71849\ 64491\ 22051}{13530},$$

$$B_{21}=\frac{15\ 20097\ 64391\ 80708\ 02691}{1806},$$

$$B_{22}=\frac{278\ 33269\ 57930\ 10242\ 35023}{690},$$

$$B_{23}=\frac{5964\ 51111\ 59391\ 21632\ 77961}{282},$$

$$B_{24}=\frac{560\ 94033\ 68997\ 81768\ 62491\ 27547}{46410},$$

$$B_{25}=\frac{49\ 50572\ 05241\ 07964\ 82124\ 77525}{66},$$

$$B_{26}=\frac{80116\ 57181\ 35489\ 95734\ 79249\ 91853}{1590},$$

$$B_{27}=\frac{29\ 14996\ 36348\ 84862\ 42141\ 81238\ 12691}{798},$$

$$B_{28}=\frac{2479\ 39292\ 93132\ 26753\ 68541\ 57396\ 63229}{870},$$

$$B_{29}=\frac{84483\ 61334\ 88800\ 41862\ 04677\ 59940\ 36021}{354}$$

$$B_{30}=\frac{12152331\ 40483\ 75557\ 20403\ 04994\ 07982\ 02460\ 41491}{567\ 86730}.$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

撰 稿 吴崇试 邸继征
审 阅 梁昆森

数 学 符 号 表

数学符号表编写说明

《数学辞海》第一至五卷正文之后，均附有数学符号表，提供读者查阅之用. 本表所收符号比较齐全，除包含"中国数学物理名词委员会"审定的《数学物理符号表》中的全部数学符号外，还收入了国内外数学界已普遍使用的数学符号，总共列入数学符号 1158 个.

一些新兴学科，如小波分析、分形几何、数理语言学、机器证明等，都是 20 世纪中叶以后发展起来的，这些学科的数学符号在国际国内还不统一，《数学辞海》将其收入，仅供读者参考.

本表所收数学符号并非仅限于《数学辞海》的正文，有的符号虽然在本辞书的正文中(如模糊数学中的一些专用数学符号)未曾出现，但由于这些符号已经广泛应用于国内外的教学、科研、工程技术中，因此亦作了适当的搜集，以飨读者.

数学符号表的体例：数学符号表共设五个横栏，依次为符号栏、中文名称栏、英文名称栏、意义或举例栏、备注栏.

数学符号的编排分类：《数学辞海》共六卷，包含数学科学的 100 多个分支学科或专题项目，所涉及的数学符号种类繁多. 为便于读者查找而采取分类编排. 因此，本表将数学符号按学科类型分为以下 7 类：

1. 算术与数论：算术中包括最常用的数学符号，如＋，－，×，÷，＝，≠等，它的应用范围遍及所有分支学科. 数论则包括初等数论、代数数论、解析数论、几何数论等.

2. 逻辑与集合：包括数学基础、形式逻辑、数理逻辑、集合论、公理集合论、序与格等.

3. 几何与拓扑：包括平面几何、立体几何、平面三角、球面三角、解析几何、高等几何、微分几何、凸集几何、距离几何、一般拓扑学、代数拓扑学与流形拓扑学等.

4. 代数学：包括初等代数、高等代数、布尔代数、线性代数与多重线性代数、环与代数、模与同调代数、群及其推广、域与伽罗瓦理论、李群与李代数、范畴论与代数 K 理论、代数几何、奇点理论与突变理论等.

5. 分析学：包括数学分析、实变函数论、复变函数论、多复变与复空间、测度论、泛函分析、变分法、函数逼近论、调和分析、流形上的分析、位势论、凸分析、非标准分析、小波分析、分形几何、常微分方程、偏微分方程、积分方程与函数方程、动力系统、特殊函数等.

6. 概率统计：包括组合学、概率论、随机过程、统计学等.

7. 应用数学：包括计算数学、模糊数学、生物数学、经济数学、数学物理与理论物理、运筹学、系统理论、控制理论、通信与信息理论、测绘学、力学、天文学、数理语言学等.

数学符号表的编排顺序：本表所列数学符号，大体上按它们在《数学辞海》中出现的先后顺序编排. 由于很多数学符号的含义及使用范围比较复杂，若要准确地归入哪一类，实际上是很困难的，因而制订下列编排原则：

1. 多学科共用符号，将其编入最先出现的分支学科中. 例如，运算符号＋，－，×，÷等，是所有学科共用的，就编入本表最前面的学科——算术中.

2. 同形同义的符号，就只在某一分支学科符号表内出现一次. 例如，符号"R"在集合论中表示实数集，而在代数学和分析学中也表示实数集，其意义是相同的，就将符号"R"只列入集合论的符号表，而在代数学和分析学的符号表中不再出现.

3. 同形而不同义的符号，则分别列入相应分支学科. 如"Im"在初等代数中表示复数的虚部，而在集合论和代数学中则表示映射的像，就将其分别列入各个学科的符号表中；又如"k"在应用数学中表示高斯常数，在微分几何中表示曲率，而在特殊函数中则表示贝克函数，这样便分别将其列入应用数学、微分几何、特殊函数的符号表中.

4. 异形同义的符号，首先将《数学物理符号表》中核定的符号列入符号栏，而将其异形符号列入备注栏，如几何中将 Rt∠列于符号栏，而将曾用符号 rt∠和 R∠列入备注栏；其次，凡目前国际国内用法尚未统一的异形同义符号，如代数中的"A^T"，"A'"都表示矩阵 A 的转置矩阵，则一同列于符号栏.

5. 过去用过，而现在少用或不用的数学符号，本表将其列入备注栏，以利读者阅读古旧数学资料时参考.

算术和数论(Arithmetic & Number theory)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$+$	加号;正号	plus ;positive	例如,$+2$ 即正 2;$a+b$ 即 a 与 b 相加	正号常可略去不写
$-$	减号;负号	minus ;negative	例如,-1 即负 1;$a-b$ 即 a 与 b 的差	
$\pm$	正或负;加或减	positive or negative;plus or minus	例如,± 2,即正 2 或负 2;$a\pm b$ 即 a 加或减 b	
$\mp$	负或正;减或加	negative or positive;minus or plus	例如,∓ 2 即负 2 或正 2;$a\mp b$ 即 a 减或加 b	
$\times$, $\cdot$	乘号	multiple sign	例如,2×3 即 2 乘 3;$a\cdot b$ 即 a 乘 b	乘号在括号前或字母间常可略去
$\div$, —, /	除号;分数(式)线	sign of division, fraction stroke	$a\div b$, $\frac{a}{b}$, a/b,即 a 除以 b,b 分之 a	
$:$	比	ration	$a:b$ 即 a 比 b	
$\mid$	整除	exact division	$a\mid b$ 即整数 a 整除整数 b	
$\nmid$	不能整除	nonaliquot	$a\nmid b$ 即整数 a 不能整除整数 b	
$\parallel$	限界整除	bound exact division	$a^k\parallel b$ 即 a^k 能整除 b,但 a^{k+1} 不能整除 b	$a^k\mid b$,且 $a^{k+1}\nmid b$
$[,\cdots,]$	最小公倍数	least common multiple	$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$表示整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数	亦可用 LCM 表示
$(,\cdots,)$	最大公约数	greatest common divisor	$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$表示整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公约数	亦可用 GCD 表示
a^n	a 的 n 次方(幂)	a to the power n	例如,5^4 即 5 的 4 次方(幂)	当 $n=2,3$ 时,分别称平方、立方
$\sqrt{\ }$	平方根号	square root sign	$\sqrt{a}$ 即 a 开平方	
$\sqrt[n]{\ }$	n 次根号	n-th root sign	$\sqrt[n]{a}$ $(n\geqslant 2)$即 a 开 n 次方	当 $n=3$ 时,称 a 开立方
$\lvert\ \rvert$	绝对值;模	absolute value;modules	$\lvert a\rvert$表示 a 的绝对值或模	亦可用 abs a 表示
$=$	等号	equal sign	$2+3=5$	
$\neq$	不等号	inequality sign	$2+3\neq 4$	
$\equiv$	恒等号	identity symbol	$a\equiv b$ 即 a 恒等于 b	
$<$	小于	less than	$a<b$ 即 a 小于 b	
$>$	大于	greater than	$a>b$ 即 a 大于 b	
$\gtrless$	大于或小于	greater than or less than	$a\gtrless b$ 即 $a>b$ 或 $a<b$	
$\lessgtr$	小于或大于	less than or greater than	$a\lessgtr b$ 即 $a<b$ 或 $a>b$	
$\leqslant$	小于或等于;不大于	less than or equal to	$a\leqslant b$ 即 a 小于或等于 b,或 a 不大于 b	一般不用符号“$\leqq$”
$\geqslant$	大于或等于;不小于	greater than or equal to	$a\geqslant b$ 即 a 大于或等于 b,或 a 不小于 b	一般不用符号“$\geqq$”
$\ll$	远小于	much less than	$a\ll b$ 即 a 远小于 b	
$\gg$	远大于	much greater than	$a\gg b$ 即 a 远大于 b	
$\approx$	约等于	approximately equal	$a\approx b$ 即 a 约等于 b	曾用$\doteq$,现已不用
$\triangleq$	相当于	equivalent to	1 cm$\triangleq$10 km 表示图上 1 cm 相当于实际距离 10 km	曾用$\hat{=}$,现已不用
$\propto$	成正比	is direct ratio to	$a\propto b$ 表示 a 与 b 成正比	
$\sim$	数值范围	numerical range	例如,5～10 即由 5 至 10	现已不用“—”
.	小数点	decimal point	例如,8.59 即 8 又 100 分之 59	小数点记于个位数字后的下足
$\dot{}\ \dot{}$	循环小数	recurring decimal	$2.4\dot{2}3\dot{1}$ 即 2.423 123 123 1…	记于循环节的首末位数字上方

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
%	百分号	sign of percent	例如,5%即百分之五,亦即 5/100	
‰	千分号	sign of permillage	例如,5‰即千分之五,亦即 5/1000	
( )	圆括号	parenthesis	例如,5−(2+1)	亦称小括号
[ ]	方括号	square brackets	例如,3[5−(2+1)]	亦称中括号
{ }	花括号	brace	例如,2{3[5−(2+1)]−2}	亦称大括号
——	括线	vinculum	例如,$(\overline{8-2}\times 3)\div 2$,以 8−2 的差乘 3…	相当于小括号
∞	无穷大	infinity	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ 即函数$\frac{1}{x}$当 x 趋近于 0 时无限地增大	亦称无限或无限大
$a\overset{\text{def}}{=}b$	a 以 b 为定义	a is definition equal to b	例如,$a\overset{\text{def}}{=}b^n$ 即用 b^n 代表 a	亦可用 $a\overset{\text{d}}{=}b$ 或 $a:=b$ 表示
d	公差	common difference	等差数列任相邻两项之差(后项减前项)均相等,这个共同的差 d 称为此数列的公差	
q	公比	common ratio	等比数列任相邻两项之比(后项比前项)均相等,这个共同的比 q 称为此数列的公比	
S_n	数列前 n 项和	sum of the first n terms	例如,等差数列 $a,a+d,\cdots,a+(n-1)d,\cdots$,前 n 项之和 $S_n=na+\frac{n(n-1)}{2}d$	
Δ	判别式	discriminant	例如,实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$	利用 Δ 可判别该方程根的状况
$E(x),[x]$	整数部分记号	symbol of integral part	表示不超过 x 的最大整数.例如,$[1.2]=1,[-1.2]=-2$	亦记为 ent(x),来自法文 entier
$\{x\}$	小数部分记号	symbol of decimal part	$\{x\}$只能是 0 或正的纯小数,它满足:$0\leqslant\{x\}<1$,例如,$\{1.2\}=0.2$, $\{-1.2\}=0.8$	亦称分数部分记号,亦记为$\{x\}$
$\sum\limits_{n\leqslant x}$	整数求和号	sign of integers summation	对不超过 x 的正整数 n 求和.例如,$\sum\limits_{n\leqslant 6}n=1+2+3+4+5+6=21$	
$\sum\limits_{n<x}$	整数求和号	sign of integers summation	对小于 x 的正整数 n 求和.例如,$\sum\limits_{n<6}n=1+2+3+4+5=15$	
$\sum\limits_{p\leqslant x}$	素数求和号	sign of prime number summation	对不超过 x 的素数 p 求和.例如,$\sum\limits_{p\leqslant 7}p=2+3+5+7=17$	
$\sum\limits_{p<x}$	素数求和号	sign of prime number summation	对小于 x 的素数 p 求和.例如,$\sum\limits_{p<7}p=2+3+5=10$	
$\sum\limits_{d\mid n}$	除数求和号	sign of divisor summation	对 n 的所有不同因子 d 求和.例如,$\sum\limits_{d\mid 6}d=1+2+3+6=12$	
$\prod\limits_{d\mid n}$	除数求积号	sign of divisor mensuration	对 n 的所有不同因子 d 求积.例如,$\prod\limits_{d\mid 6}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 6=36$	
$\sum\limits_{p\mid n}$	素除数求和号	sign of prime divisor summation	对 n 的所有不同素因子 p 求和.例如,$\sum\limits_{p\mid 6}=2+3=5$	
$\prod\limits_{p\mid n}$	素除数求积号	sign of prime divisor mensuration	对 n 的所有不同素因子 p 求积.例如,$\prod\limits_{p\mid 6}=2\cdot 3=6$	
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	总和号	sign of grand sum	求对 x_i 从 x_1 连加到 x_n 的总和,即 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n$	
$\prod\limits_{i=1}^{n}$	连乘号	sign of continued product	求对 x_i 从 x_1 连乘到 x_n 的积,即 $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1x_2\cdots x_n$	
$a\equiv b(\bmod n)$	模 n 同余	congruence modulo-n	用 n 除 a 及 b 所得余数相同	
$a\not\equiv b(\bmod n)$	模 n 不同余	non-congruence modulo-n	用 n 除 a 及 b 所得余数不同	
$\equiv$ (三线加一)	恒等同余	identity congruence	$f(x)\equiv g(x)(\bmod p)$,即整系数多项式 f 与 g 的对应系数均模 p 同余	亦可记为 $f(x)\equiv_x g(x)(\bmod p)$
$\not\equiv$	不恒等同余	non-identity congruence	$f(x)\not\equiv g(x)(\bmod p)$,即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应系数均模 p 不同余的	亦可记为 $f(x)\not\equiv_x g(x)(\bmod p)$

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$a^{-1}(\mathrm{mod}\,n)$	模 n 的逆	inverse of modulo-n	与 a 相乘后用 n 除余数是 1 的整数. 例如, $2^{-1}(\mathrm{mod}\ 5)=3,\ 3^{-1}(\mathrm{mod}\ 4)=3$	这是一个同余类
$r \bmod n$	模 n 的同余类	congruence class of modulo-n	包含 r 的模 n 的同余类. 例如, $2(\mathrm{mod}\ 5)=\{\cdots,-8,-3,2,7,12,\cdots\}$	亦称剩余类
$\mathbf{Z}_n$	剩余类环	residue class ring	模 n 的全体剩余类对类的加法和乘法组成的环	
$\left(\frac{a}{p}\right)$	勒让德符号	Legendre's symbol	$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1, & p\nmid a,\text{且 } a \text{ 是二次剩余}(\mathrm{mod}\,p)\\ -1, & p\nmid a,\text{且 } a \text{ 是二次非剩余}(\mathrm{mod}\,p)\\ 0, & p\mid a\end{cases}$	p 为奇素数, a 为整数
$\left(\frac{a}{m}\right)$	雅可比符号	Jacobi's symbol	$\left(\frac{a}{m}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a}{p_i}\right)$ $(m=p_1p_2\cdots p_k, p_i$ 为素数, $(m,a)=1)$	当 m 为奇素数时即勒让德符号
$\left(\frac{d}{m}\right)$	克罗内克符号	Kronecker's symbol	$\left(\frac{d}{m}\right)=\prod_{r=1}^{v}\left(\frac{d}{p_r}\right)$ (d 为非平方数, p_r 为素数, $m=\prod_{r=1}^{v}p_r$)	
$d(n)$	除数函数	divisor function	$d(n)$ 表示 n 的正因子的个数. 例如, $d(12)=6$	亦可用 $\tau(n)$ 或 $T(n)$ 表示
$d_k(n)$	广义除数函数	generalized divisor function	$d_k(n)=\sum_{n_1n_2\cdots n_k=n}1=\sum_{m\mid n}d_{k-1}(m)$	
$\sigma(n)$	除数和	sum of divisor	表示正整数 n 的所有正因数的和. 例如, $\sigma(6)=1+2+3+6=12$	亦可用 $S(n)$ 表示
$\sigma_\lambda(n)$	广义除数和	generalized sum of divisor	$\sigma_\lambda(n)=\sum_{d\mid n}d^\lambda$. 例如, $\sigma_3(4)=1^3+2^3+4^3$	$\sigma_0(n)=d(n)$ 为除数函数; $\sigma_1(n)=\sigma(n)$ 为除数和
$P(n)$	正因数之积	product of positive divisors	$P(n)=\prod_{d\mid n}d$. 例如, $P(6)=1\cdot2\cdot3\cdot6=36$	
$\Phi(n)$	欧拉函数	Euler's function	表示小于正整数 n, 且与 n 互素的正整数的个数. 例如, $\Phi(6)=2$	亦可记为 $\varphi(n)$
$\mu(n)$	默比乌斯函数	Möbius function	$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n \text{ 能被素数的平方整除时},\\ (-1)^r, & \text{当 } n \text{ 为 } r \text{ 个相异素数之积时}\end{cases}$	
$\Lambda(n)$	曼戈尔特函数	Von Mangoldt function	$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & n \text{ 为素数 } p \text{ 的正乘方};\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	
$\Lambda_1(n)$	曼戈尔特函数 I	Von Mangoldt function I	$\Lambda_1(n)=\begin{cases}\frac{1}{m}, & \text{若 } n \text{ 是一素数的 } m(>0) \text{ 次乘方},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	
$\omega(n)$	相异素因数个数	different prime factor numbers	例如, $\omega(24)=\omega(2^3\cdot3)=1+1=2$, 即 24 有 2 个不同的素因数	
$\Omega(n)$	素因数个数	prime factor numbers	表示正整数 n 的所有素因数的个数. 例如, $\Omega(24)=\Omega(2^3\cdot3)=3+1=4$	
$\lambda(n)$	刘维尔函数	Liouville's function	$\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$	
$\pi(x)$	素数个数符号	symbol of the prime numbers	表示不超过正实数 x 的素数个数. 例如, $\pi(10)=4$	
$\chi(n)$	特征函数	characteristic function	对模 m 之一特征 $\chi(n)$ 仅在 $(n,m)=1$ 时有定义, 且 $\chi(1)\neq0$; 若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$, 则 $\chi(a)=\chi(b)$; $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$	若 $(n,m)>1$ 时, 则 $\chi(n)=0$
$p(n)$	整数分拆函数	integral partition function	把正整数 n 分成若干个正整数的和, 称为 n 的一种分拆, 以 $p(n)$ 表示分拆的种数. 例如, $p(4)=5$. 若限定分拆中的加数不超过 r, 则这类分拆数以 $p_r(n)$ 表示	
$\overline{U}(n)$	奇分拆	odd partition	$\overline{U}(n)$ 为把 n 分为奇数个互异数之和的分拆数	
$E(n)$	偶分拆	even partition	$E(n)$ 为把 n 分为偶数个互异数之和的分拆数	
$N(\mathfrak{m})$	模 $\mathfrak{m}$ 的矩	moment of module $\mathfrak{m}$	将所有线性型依 $\mathrm{mod}\,\mathfrak{m}$ 分类, 则分类的个数称为模 $\mathfrak{m}$ 的矩. 若模 $\mathfrak{m}$ 对应于方阵 A, 则 $N(\mathfrak{m})=\det A$	
$\vartheta(x)$	切比雪夫函数	Chebyshev function	$\vartheta(x)$ 表示对不大于 x 的素数的对数求和	
$\psi(x)$	切比雪夫函数	Chebyshev function	$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=\sum_{p^m\leqslant x}\ln p$, 而 $\Lambda(n)$ 为曼戈尔特函数	

符 号	中文名称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备 注
$\zeta(s)$	黎曼ζ函数	Riemann ζ-function	$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，其中$s$为实部大于1的复数	
∂°	多项式的次数	degree of a polynomial	$\partial^\circ f=n$，表示多项式$f(x)$的次数为n	亦可表示成$\deg f=n$
max( )	最大数	maximum number	$\max(a,b,\cdots,c)$即$a,b,\cdots,c$中的最大数	
min( )	最小数	minimum number	$\min(a,b,\cdots,c)$即$a,b,\cdots,c$中的最小数	
$\overset{L}{=\!=}$	左结合	left association	$A\overset{L}{=\!=}B$表示存在模方阵U，使$A=UB$，并称方阵B左结合于方阵A	
$[,\cdots,]$	有限连分数	finite continued fraction	$[a_0,a_1,\cdots,a_N]=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_N}$，即有理数化成的连分数	无理数化成的连分数为无限连分数
Δ	判别式	discriminant	$\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$表示$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的判别式； $\Delta=\Delta(R(\theta))$表示代数数域$R(\theta)$的判别式	
ind n	指数	index	如果$n\equiv g^a(\bmod m)$，则称a为n对于模m且以g为底的指数，记为$a=\mathrm{ind}_g n$，简记为ind n	亦可用$\delta_m(a)$表示a对模m的指数
$x^k\equiv n(\bmod p)$	k次剩余	residue of degree-k	$x^k\equiv n(\bmod p)(p\times n)$有解，则$n$称为$p$的$k$次剩余	
$d(A)$	A的密率	density of A	$d(A)=\inf\limits_{n\geqslant1}\frac{A(n)}{n}$，即集$A$的密率为$A(n)/n$(一切$n\geqslant1$)的下确界	$A(n)$表示A中不大于n的正整数的个数
$\delta^*(A)$	A的渐近密率	asymptotic density of A	$\delta^*(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$，即集$A$的渐近密率为$A(n)/n$当$n\to\infty$的极限值	
$\left(\frac{a,b}{m}\right)$	和数符号	sum symbol	设$m>1$，a,b都是整数，令 $\left(\frac{a,b}{m}\right)=\sum_x e^{2\pi i\frac{ax+bx'}{m}}\left(x'\equiv\frac{1}{x}(\bmod m)\right)$， 其中$x$是通过与模$m$简化的剩余系	
$(a,b)=\pm1$	希尔伯特符号	Hilbert symbol	设k^*表示域k的单位群，又$a,b\in k^*$，则 $(a,b)=\begin{cases}1, & 若\ z^2-ax^2-by^2=0\ 在\ k^3\ 中有非零解,\\ -1, & 其他情形\end{cases}$	
$\{a,b,c\}$	二元二次型	2-ary quadratic form	用$\{a,b,c\}$表示二元二次型$ax^2+bxy+cy^2$，其中a,b,c为整数	
$g(k)$	小$g(k)$	small $g(k)$	设k为一固定正整数，对任意正整数n，不定方程$n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$总有解的最小正整数$s$	
$G(k)$	大$G(k)$	large $G(k)$	设k为一固定正整数，对充分大的正整数n，不定方程$n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$总有解的最小正整数$s$	
$S(\alpha)$	α的迹	trace of α	设$R(\theta)$为n次代数数域，$\alpha^{(1)}=\alpha\in R(\theta)$，$\alpha^{(k)}(k=2,3,\cdots,n)$为$\alpha$的共轭数，则$S(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\alpha^{(k)}$称为$\alpha$的迹	
$N(\alpha)$	α的范数	norm of α	$N(\alpha)=\prod_{k=1}^{n}\alpha^{(k)}$为$\alpha$的范数	亦称矩
$N(k)$	等幂和	sum of equal powers	使$x_1+x_2+\cdots+x_s=y_1+y_2+\cdots+y_s,\cdots,x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_s^k$的最小正整数$s$记为$N(k)$，其中$y_1,y_2,\cdots,y_s$不是$x_1,x_2,\cdots,x_s$的重组	
$M(k)$	强等幂和	strong sum of equal powers	使$x_1+x_2+\cdots+x_s=y_1+y_2+\cdots+y_s,\cdots,x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_s^k$，并使$x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_s^{k+1}\neq y_1^{k+1}+y_2^{k+1}+\cdots+y_s^{k+1}$的最小正整数$s$用$M(k)$表示	
$S(a,\chi)$	特征和	character sum	$S(a,\chi)=\sum_{n=1}^{m}\chi(n)e^{2\pi ian/m}$	
$S(n,m)$	高斯和	Gauss sum	$S(n,m)=\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi ix^2n/m}$，其中$(n,m)=1$	
$F(s)$	狄利克雷级数	Dirichlet series	$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$	亦称$F(s)$为$f(n)$的演成函数
M_p	梅森数	Mersenne number	形如2^p-1(p为素数)的素数称为梅森数，记为M_p。例如，$M_2=3$，$M_3=7$	
F_n	费马数	Fermat number	形如$2^{2^n}+1$的数称为费马数，例如，$F_2=17$	F_5不是素数

符 号	中文名称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备　注
$\equiv$	重模同余式	double module congruence expression	$f(x)\equiv g(x)\ (\mathrm{mod}\ p,\varphi(x))$ 表示系数以素数 p 为模，又 $\varphi(x)$ 整除 $f(x)-g(x)$，称为重模同余式	亦称重模为双模
$Q(x)$	无平方因子数	number of noninclusion square divisor	不超过 x 的无平方因子数的个数. 例如，$Q(10)=6$	
$V(n)$	同余式的解数	number of solutions of congruence expression	同余式 $x^2\equiv-1\ (\mathrm{mod}\ n)$ 之解数	
$R(x)$	圆内整点数	number of circle lattice point	表示圆 $u^2+v^2\leqslant x$ 内的整点数	
$F(x)$	朗伯级数	lambert series	$F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)\dfrac{x^n}{1-x^n}$ 称为朗伯级数	
$[\alpha_1,\cdots,\alpha_q]$	理想数	ideal number	$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$ 为 $R(\vartheta)$ 中之整数，$R(\vartheta)$ 中形如 $\eta_1\alpha_1+\eta_2\alpha_2+\cdots+\eta_q\alpha_q$（$\eta_i$ 为 $R(\vartheta)$ 中之整数）的整数所成之集合为理想数	
$[1]$	单位理想数	unit ideal number	表示单扩域 $R(\vartheta)$ 中全体整数组成之集合	
$\tau(n)$	拉马努金函数	Ramanujan function	表示 cus$p$ 型 $F(s)=(2\pi)^{-12}\triangle(Z)$ 的第 n 个系数. 称 $n\mapsto\tau(n)$ 为拉马努金函数	
$L(s,\chi)$	狄利克雷级数	Dirichlet series	表示狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\chi(m)n^{-s}$，其中 $m\geqslant1$ 为整数，χ 为 mod m 特征	
$G_k(\Gamma)$	艾森斯坦级数	Eisenstein series	设 Γ 是 C 格，则称 $G_k(\Gamma)=\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}{}'\dfrac{1}{\gamma^{2k}}$ 为指标是 k 的艾森斯坦级数，其中 $\sum'$ 表示对 Γ 的非零元素求和	
$\theta_\Gamma(Z)$	塞他函数	theta function	$\theta_\Gamma(Z)=\sum\limits_{x\in\Gamma}e^{\pi iZ(x\cdot x)}$ 称为二次模 Γ 的塞他函数	

逻辑与集合(Logic & Sets)

符 号	中 文 名 称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备　注
$\forall$	全称量词	universal quantifier	$\forall x\in A,\ p(x)$，表示命题 $p(x)$ 对于每一个属于 A 的 x 为真	亦可简记为 $\forall x,\ p(x)$
$\exists$	存在量词	existential quantifier	$\exists x\in A,\ p(x)$，表示存在 A 中的元素 x 使 $p(x)$ 为真	$\exists^1$（或 $\exists!$）表示存在一个且只有一个元素使 $p(x)$ 为真
$\wedge$	合取符号	conjunction sign	$p\wedge q$ 即 p 和 q	
$\vee$	析取符号	disjunction sign	$p\vee q$ 即 p 或 q	
$\neg$	否定符号	negation sign	$\neg p$ 即 p 的否定，非 p	
$\rightarrow,\Rightarrow$	推断符号	implication sign	$p\rightarrow q,\ p\Rightarrow q$ 表示：若 p 则 q，p 蕴含 q	亦可用 $q\leftarrow p,\ q\Leftarrow p$
$\leftrightarrow,\Leftrightarrow$	等价符号	equivalence sign	$p\leftrightarrow q,\ p\Leftrightarrow q$ 表示 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，即 p 等价于 q	亦称充分必要条件
$\vDash$	真值符号	truth sign	$\vDash A\rightarrow B$ 表示由命题 A 推出命题 B 为真	
$\dashv\vDash$	可逆真值符号	invertible truth sign	$A\dashv\vDash B$（或 $\vDash A\leftrightarrow B$）表示 $A\vDash B$，且 $B\vDash A$，意即 A 真则 B 真，且 B 真则 A 真	亦即 A，B 具有相同的真值
$\vdash$	断定符号	predicative sign	$p\vdash q$ 表示 q 随 p 来，p 是或从一公理而来，或 p 是同语反复	
$\in$	属于	belongs to	$x\in A$ 表示 x 属于 A，即 x 是集 A 的一个元（素）	集合 A 可简称为集 A
$\not\ni$	不包含	noninclusion	$A\not\ni x$ 表示集合 A 不包含元素 x	
$\overline{\in},\ \notin$	不属于	nonmembership	$y\notin A,\ y\overline{\in}A$ 表示 y 不属于 A，y 不是集 A 的一个元（素）	亦可记为 $A\overline{\ni}y$，或 $A\not\ni y$
$\{,\cdots,\}$	集合号	sign of set	$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示由诸元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成的集	亦可用 $\{x_i,\ i\in I\}$，这里 I 表示指标集
$\{\mid\}$	集合号	sign of set	$\{x\in A\mid p(x)\}$ 即使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元（素）组成的集	亦可用 $\{x\in A:p(x)\}$ 表示集

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\varnothing$	空集	the empty set	$\varnothing$表示没有元(素)的集	$\varnothing$是丹麦文字母，读“欧”
N	非负整数集	nonnegative integers set	$\mathrm{N}=\{0,1,2,\cdots\}$	$\mathrm{N}_t=\{1,2,3,\cdots\}$
Z	整数集	integers set	$\mathrm{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$	Z_+表示正整数集合
Q	有理数集	rational numbers set	由全体有理数组成的集合	Q_+表示正有理数集合
R	实数集	real numbers set	由全体实数组成的集合	R^n 表示 n 维实空间
C	复数集	complex numbers set	由全体复数组成的集合	C^n 表示 n 维复空间
R^+	正实数集	positive real numbers set	由全体正实数组成的集合	R^-表示负实数集
R^*	扩张的实数集	expanding system of the real numbers	把两个理想点$+\infty,-\infty$加进实数系所得的集	亦称扩张的实数系
$\subsetneqq$	真包含于	proper inclusion	$B\subsetneqq A$ 表示 A 的子集 B 真包含于 A	亦可用$\subset$表示
$\subseteq$	包含于	inclusion	$B\subseteq A$ 表示 B 是 A 的子集，即 B 的每一个元素均属于 A	
$\not\subset$	不包含于	noninclusion	$C\not\subset A$ 表示 C 不是 A 的子集	亦可用$\not\subseteq$表示
$\supsetneqq$	真包含	proper inclusion	$A\supsetneqq B$ 表示 A 真包含 B	
$\supseteq$	包含	inclusion	$A\supseteq B$ 表示 B 是 A 的子集	亦可用$\supset$表示
$\not\supset$	不包含	noninclusion	$A\not\supset C$ 表示 A 不包含 C	亦可用$\not\supseteq$表示
$\cup$	并集，和集	union	$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$，称为 A 与 B 的并集，或称为 A 与 B 的和集	
$\bigcup\limits_{i=1}^{n}$	诸并集	unions	$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，即诸集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集	亦可用 $\cup_{i=1}^{n}$，$\bigcup\limits_{i\in I}$ 或 $\cup_{i\in I}$ 等记法，其中 I 表示指标集
$\cap$	交集	intersection	$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$，称为 A 与 B 的交集	
$\bigcap\limits_{i=1}^{n}$	诸交集	intersections	$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，即诸集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集	亦可用 $\cap_{i=1}^{n}$，$\cap_{i\in I}$ 或 $\bigcap\limits_{i\in I}$ 等记法，其中 I 为指标集
$\dotplus$	集合的直和	direct sum of sets	若集合 A 与 B 不相交，则 A 与 B 的并集 $A\cup B$ 称为 A 与 B 的直和，记为 $A\dotplus B$	亦称不交并
$\dot{\sum}$	广义直和	generalized direct sum	若 f 是标号集 A 到集族$\{X\}$ 的一一对应 $(f:a\to X_a)$，且当 $a\neq b$ 时，总有 $X_a\cap X_b=\varnothing$，则记为 $\dot{\sum\limits_{a\in A}}X_a$，并称为集族$\{X\}$ 的广义直和	
$\backslash$	差集	difference	$A\backslash B$ 表示所有属于 A 但不属于 B 的元的集，称为 A 与 B 的差集	
$\triangle$	对称差	symmetric difference	$A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ 称为 A,B 的对称差	亦可记为 $A\dot{-}B$ 或 $A\ominus B$
U	全集	total set	$A=U$ 表示 A 为全集，即全集中所有元素 x 都属于 A	亦可用 IΩV 表示
$\complement$	余集，补集	complementary set	$\complement_U A=\{x\mid x\in U\wedge x\notin A\}$，即全集 U 中子集 A 的余集或补集	亦可用 $\complement A$ 表示．曾用 A^c 表示
$\langle\ ,\ \rangle$	有序偶，偶	ordered pair	$\langle a,b\rangle$表示 a,b 的有序偶	亦可记为(a,b)
$\langle,\cdots,\rangle$	有序元组	elements of ordered	$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$称为有序 n 元组	亦可记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
$\times$	笛卡儿积	Cartesian product	$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$称为 A 与 B 的笛卡儿积或卡氏积，	$\overbrace{A\times A\times A\times\cdots\times A}^{n个}$记为 A^n. 亦称直积
card	基数，势	cardinal number	card(A)表示集 A 中诸元的个数，称为 A 的基数或势	亦可记为 $\overline{\overline{A}}$ 或$\lvert A\rvert$
$\aleph_0$	基数，势	cardinal number	$\aleph_0$ 表示无限可数集的基数	是希伯来文第一个字母，读 Alef
$\sim$	对等	equivalent	$A\sim B$ 表示集 A 与集 B 对等	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\mapsto$	元素间的对应	correspond between to elements	在映射下元素间的对应符号，例如，整数集的映射 $\varphi(x)=x^2$ 可表示成 $\varphi: x\mapsto x^2$	
$\to$	映射	mapping	$f:A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$ 表示 f 是集 A 到集 B 的映射	
f^{-1}	逆映射	inverse mapping	设 f 是集 A 到 B 的一个双射，则用 f^{-1} 表示 B 到 A 的 f 的逆映射. $f^{-1}f$ 是 A 的恒等映射	亦可用 f_l^{-1}, f_r^{-1} 表示左、右逆映射
R	关系	relation	aRb 表示 a 与 b 有关系 R	
$\not R$	无关系	non-relation	$a\not R b$ 表示 a 与 b 没有关系 R	亦称关系补
$\overline{R}$	反关系	anti-relation	对于二元关系 $R\subseteq X\times Y$，称 $\overline{R}=X\times Y-R$ 为 R 的反关系	亦称否定关系、补关系
R^{-1}	逆关系	inverse relation	对于二元关系 $R\subseteq X\times Y$，称 $R^{-1}\subseteq Y\times X$ 为 R 的逆关系	当且仅当 xRy 时有 $yR^{-1}x$
[ ]	等价类	equivalent class	设 R 是集合 A 上的等价关系，$x\in A$，则称 $[x]_R$ 为 R 的等价类，它是由 A 中那些能使 xRy 成立的所有元素 y 组成的子集	
/	商集	quotient set	设 R 为集 A 的一个等价关系，则商集 A/R 即由一切等价类组成的集合	
$\mathscr{P}$ 或 $\mathfrak{P}$	幂集	power set	用 $\mathscr{P}A$ 或 $\mathfrak{P}A$ 表示集 A 的所有子集组成的集，称为 A 的幂集	
$f\|_B$	收缩，限制	restriction	设 f 是集合 A 上的一个映射，$B\subseteq A$，则 f 也可看成 B 上的一个映射称为 f 在 B 上的限制或收缩	
$\circ$	合成，复合	composite	$g\circ f$ 表示映射 f 和 g 的合成或复合	
limsup	上极限	superior limit	limsup A_n 表示序列 A_n 的上极限	亦可记为 $\overline{\lim}$
liminf	下极限	inferior limit	liminf A_n 表示序列 A_n 的下极限	亦可记为 $\underline{\lim}$
lim	极限	limit	limA_n 表示序列 A_n 的极限	
$\varinjlim$	归纳极限	inductive limit	$\varinjlim A_\lambda$ 表示 A_λ 的归纳极限	
$\varprojlim$	射影极限	projective limit	$\varprojlim A_\lambda$ 表示 A_λ 的射影极限	
dom	定义域	domain of definition	若 f 为从 A 到 B 的一个映射，则称 A 为映射 f 的定义域，记为 dom f	亦可记为 D(f)
ran f	值域	range	$f(A)=\mathrm{ran}f$. 若 f 为从 A 到 B 的一个映射，则 $f(A)$ 为映射 f 的值域	亦可记为 R(f) 或记为 ran(f)
fld	关系域	domain of a relation	$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$，即关系 R 的域等于 R 的定义域和值域的并集	
codom	陪域	co-domain	若 f 是从集 A 到集 B 的一个映射，则称集 B 是映射 f 的陪域，记为 $B=\mathrm{codom}f$	亦称上域
Imf	像	image	设 f 是集 A 到集 B 的一个映射，用 Imf 表示 A 中所有元素的像构成的集，称为 f 的像集	
$f^{-1}(\ )$	全原像	all inverse image	设 f 是集 A 到集 B 的一个映射，B 中元素 b 的全体逆像组成的集合 $f^{-1}(b)$，称为 b 的全原像	亦称原像
$\preccurlyeq$	弱序关系	weak order relation	$a\preccurlyeq b$，$a,b\in A$ 即集 A 存在弱序关系	
$\prec$	强序关系	strong order relation	$a\prec b$，$a,b\in A$ 即集 A 存在强序关系	
I_A	恒等映射	identity mapping	表示集 A 的每个元素都对应到自身的映射，称为恒等映射	亦称恒等对应. 亦可记为 e_A 或 id A
$\hookrightarrow$; em	嵌入映射	embedding	$A\hookrightarrow B$ 或 emAB 表示 $A\to B$ 的嵌入映射	
n_R	自然映射	natural mapping	n_R 把 A 的一个元素 a 映射成它的等价类 $[a]_R$	亦称正规映射，典则映射
$ub_R(B)$	B 的上界	upper bound of B	$a=ub_R(B)$ 表示 a 是 B 的上界，B 是半序集的子集	
$Lb_R(B)$	B 的下界	lower bound of B	$a=Lb_R(B)$ 表示 a 是 B 的下界，B 是半序集的子集	
ord	一切序数的类	class of every ordinals	表示一切序数构成的类	
cf	共尾度	cofinality	cf α 表示 α 的共尾度	
$K^{<k}$	强极限基数	strong cardinal number of the limit	$K^{<k}=\lim\limits_{\alpha\to K}K^{\alpha}$，其中 K 为正则的强极限基数	

几何与拓扑(Geometry & Topology)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\overline{AB}$, AB	[直]线段 AB	segment	表示自点 A 到点 B 的直线段	"直"常略去不写
∠	角	angle	∠AOB 表示角 AOB	
∡	有向角	directed angle	∡ AOB 表示有向角 AOB	
°	度	degree	21°表示 21 度	
′	分	minute	21°13′表示 21 度 13 分	
″	秒	second	21°13′23″表示 21 度 13 分 23 秒	
⌢	弧	arc	$\overset{\frown}{AB}$表示弧 AB. 当$\overset{\frown}{AB}$ 为圆弧时,可用$\overset{\frown}{AB}$° 表示圆弧 AB 对应的度数	
rad	弧度	radian	rad1, radπ 分别表示 1 弧度、π 弧度	rad1≈57°17′45″; radπ=180°
⁻	密位	mil	例如,25⁻, 274⁻表示 25 密位,274 密位	常用在军事数学中度量角的单位符号
π	圆周率	ratio of the circumference of a circle to its diameter	π≈3.141 592 6…表示圆周长与直径的比	英文名称亦可简记为 number π
Rt∠	直角	right angle	等于 90°的角称为直角,记为 Rt∠=90°	曾经记为 rt∠或R∠
△	三角形	triangle	△ABC 表示 A,B,C 三点连线构成的三角形	
⊿	直角三角形	right angle triangle	⊿ ABC 表示直角三角形 ABC	亦可记为 Rt△ABC
▱	平行四边形	parallelogram	▱$ABCD$ 表示平行四边形 $ABCD$	
▭	矩形	rectangle	▭$ABCD$ 表示矩形 $ABCD$	
□	正方形	square	□$ABCD$ 表示正方形 $ABCD$	
⏢	四边形	tetragon	⏢ $ABCD$ 表示任意四边形 $ABCD$	任意二字常略去
◇	菱形	rhombus	◇$ABCD$ 表示菱形 $ABCD$	又名 diamond
⊙	圆	circle	⊙O 表示圆 O	
r,R	半径	radius	从圆心到圆周上任一点的线段称圆的半径,常用 r 或 R 表示	
d,D	直径	diameter	过圆心作任意一条直线,圆内部分的线段称该圆的直径,常用 d 或 D 表示	
C	周长	perimeter	若圆的半径为 r,则周长 $C=2\pi r$	
//	平行	parallel	AB//CD 表示线段 AB 平行于 CD	
∦	不平行	non-parallel	AB∦CD 表示直线 AB 与 CD 不平行	
$\underline{\underline{//}}$	平行且相等	parallel and equal	$AB\underline{\underline{//}}CD$ 表示线段 AB 与 CD 平行且相等	
⊥	垂直	perpendicular	AB⊥CD 表示线段 AB 垂直于 CD	
≌	全等	congruence	△ABC≌△DEF 表示△ABC 全等于△DEF	
∽	相似	similar	△ABC∽△DEF 表示△ABC 相似于△DEF	
∵	因为	because	∵代表"因为"二字	
∴	所以	therefore	∴代表"所以"二字	
⊻	等角多边形	equiangular polygon	⊻$AB\cdots E$ 表示等角多边形 $AB\cdots E$	多边两字可被省略
⊥	等边多边形	equilateral polygon	⊥$AB\cdots E$ 表示等边多边形 $AB\cdots E$	多边两字可被省略
α-MN-β	二面角	dihedral angle	平面 α 和平面 β 相交于直线 MN 所成的角	
P-$AB\cdots E$	棱锥	pyramid	顶点是 P、底面多边形是 $AB\cdots E$ 的棱锥	
$AB\cdots E$-$A'B'\cdots E'$	棱柱	prism	上底面是多边形 $AB\cdots E$,下底面是多边形 $A'B'\cdots E'$ 的棱柱	长方体、棱台的记法和此记法类似

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
S	面积	area	$S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积；$S_{球冠}$ 表示某个球冠的面积	
V	体积	volume	$V_{P\text{-}ABC}$ 表示三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积；$V_{拟柱体}$ 表示某个拟柱体的体积	
$\lvert\ \rvert$	距离	distance	$\lvert AB\rvert$ 表示 A,B 两点间的距离或 AB 线段的长	亦可用 AB 或小写的拉丁字母表示
sin	正弦	sine	$\sin x$ 为 x 的正弦函数	
cos	余弦	cosine	$\cos x$ 为 x 的余弦函数	
tan	正切	tangent	$\tan x$ 为 x 的正切函数	亦可用 $\mathrm{tg}\ x$ 表示
cot	余切	cotangent	$\cot x$ 为 x 的余切函数	亦可用 $\mathrm{ctg}\ x$ 表示
sec	正割	secant	$\sec x$ 为 x 的正割函数	
csc	余割	cosecant	$\csc x$ 为 x 的余割函数	曾用 $\mathrm{cosec}\ x$ 表示
vers	正矢	versedsine	$\mathrm{vers}\ x$ 为 x 的正矢函数	$\mathrm{vers}\ x=1-\cos x$，现已不用
covers	余矢	coversedsine, versedcosine	$\mathrm{covers}\ x$ 为 x 的余矢函数	$\mathrm{covers}\ x=1-\sin x$，现已不用
$\sin^m x$	正弦函数的 m 次方	sine function to the m-th power	$\sin^3 x$ 为 $\sin x$ 的立方	其他三角函数和双曲函数的 m 次方的表示法类似
$\arcsin x$	反正弦主值	principal value of inverse sine	$y=\arcsin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arcsin}x$
$\arccos x$	反余弦主值	principal value of inverse cosine	$y=\arccos x\ (0\leqslant y\leqslant\pi)$	一般值表示成 $\mathrm{Arccos}\ x$
$\arctan x$	反正切主值	principal value of inverse tangent	$y=\arctan x\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arctan}x$
$\mathrm{arccot}\ x$	反余切主值	principal value of inverse cotangent	$y=\mathrm{arccot}\ x\ (0<y<\pi)$	一般值表示成 $\mathrm{Arccot}x$
$\mathrm{arcsec}\ x$	反正割主值	principal value of inverse secant	$y=\mathrm{arcsec}\ x\left(0\leqslant y\leqslant\pi，且\ y\neq\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arcsec}x$
$\mathrm{arccsc}\ x$	反余割主值	principal value of inverse cosecant	$y=\mathrm{arccsc}\ x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}，且\ y\neq 0\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arccsc}x$
T	周期	periodic	$f(x+T)=f(x)$，T 为最小正周期．$T=\pi$ 表示以 π 为周期	
x,y,z	笛卡儿坐标	Cartesian coordinates	$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ 与 $\boldsymbol{e}_z$ 及 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 组成范化正交右手坐标系	
ρ,φ,z	圆柱坐标	cylindrical coordinates	圆柱坐标与笛卡儿坐标的关系为 $x=\rho\cos\varphi,y=\rho\sin\varphi,z=z$	
r,θ,φ	球面坐标	spherical coordinates	球面坐标与笛卡儿坐标的关系为 $x=r\sin\theta\cos\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\theta$	
$\boldsymbol{a},\vec{a}$	向量或矢量 $\boldsymbol{a}$	vector $\boldsymbol{a}$	常用 x,y,z 或 x_1,x_2,x_3 表示笛卡儿坐标，则 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，简记为 $\boldsymbol{a}=x_i\boldsymbol{e}_i$	印刷常用黑体 $\boldsymbol{a}$，书写常用 $\vec{a}$ 表示
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	向量的模（绝对值，长度）	module of a vector (absolute value, length)	向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$ 的模依次记为 $\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\rvert$，$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$，$\lvert\vec{a}\rvert$．向量的大小称为向量的模	
$\overrightarrow{AB}$	向量 AB	vector AB	表示始点为 A，终点为 B 的向量或有向线段	
$\boldsymbol{e}_a$	单位向量	unit vector	$\boldsymbol{e}_a=a/\lvert a\rvert$　表示 a 方向的单位向量	亦称幺向量
$\boldsymbol{e}_x，\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$	在笛卡儿坐标轴方向的单位向量	unit vector on the Cartesian axial coordinates	$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 表示直角标架；$[O;\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z]$ 表示仿射标架，其中 O 为坐标原点，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 为基向量	
$\boldsymbol{a}_x，\boldsymbol{a}_y，\boldsymbol{a}_z$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的笛卡儿分量	Cartesian component of a vector $\boldsymbol{a}$	设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z$，其中 $\boldsymbol{a}_x=x\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{a}_y=y\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{a}_z=z\boldsymbol{e}_z$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的笛卡儿分量	
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{ab}$	标量积或数量积、内积、点积	scalar product, inner product, dot product	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i\overset{\text{def}}{=\!=}\sum a_ib_i$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a^2=\lvert\boldsymbol{a}\rvert^2$	亦可表示成 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$a\times b$	向量积、外积、叉积	vector product, exterior product, cross product	$a\times b$ 是垂直于 a,b 所决定平面的向量，且 $\{a,b,a\times b\}$ 三矢量成右手系. $\lvert a\times b\rvert=\lvert a\rvert\lvert b\rvert\sin(\widehat{a,b})$，其中 $(\widehat{a,b})$ 表示 a,b 的夹角	
(a,b,c) $a\cdot(b\times c)$	混合积	mixed product	向量 a,b,c 的混合积定义为由 a,b,c 三向量为邻边组成的平行六面体的有向体积	亦可表示成 $(a\times b)\cdot c$
k	斜率	gradient	直线 $y=kx+b$ 中，k 称为斜率	
e	离心率	eccentricity	在圆锥曲线的极坐标方程中，$r=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$，$e$ 称为离心率	亦称偏心率.
a	半长轴	semimajor axis	椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 中，a 称为半长轴	
b	半短轴	semiminor axis	椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 中，b 称为半短轴	
$V\otimes W$	向量空间的张量积	tensor product of vector spaces	若 V 是 n 维向量空间，W 是 m 维向量空间，则 $V\otimes W$ 是 $n\times m$ 维向量空间的二阶张量	
T^r_s	张量	tensor	设 V 是 n 维向量空间，其对偶空间的二阶张量为 V^*，张量积 $V^r_s=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r个}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s个}$ 的元素称为 (r,s) 型张量	
$V\otimes W$	群的张量积	tensor product of groups	设 V,W 是群，$V\otimes W=F(V,W)/R(V,W)$ 称为 V,W 的张量积	
$T_{xx},T_{xy},\cdots,T_{zz};T_{ij}$	二阶张量 T 的笛卡儿分量	Cartesian component of tensor T	$T=T_{xx}e_xe_x+T_{xy}e_xe_y+\cdots,T_{xx}e_xe_x$ 为分张量，	
$T\otimes S$	二阶张量积或并矢积	tensor product dyadic product	两个二阶张量 T 与 S 的张量积 $T\otimes S$ 是具有分量 $T_{ij}S_{kl}$ 的四阶张量	
$T\cdot S$	两个二阶张量的内积	inner product	$T\cdot S$ 表示两个二阶张量 T 与 S 的内积. 它是具有分量 $(T,S)_{ik}\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_j T_{ij}S_{jk}$ 的二阶张量	
$T\cdot a$	矢量对张量的内积	inner product	$T\cdot a$ 表示二阶张量 T 与矢量 a 的内积. 它是具有分量 $(T\cdot a)_i\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_j T_{ij}a_j$ 的矢量	
$T:S$	标量积	scalar product	$T:S$ 表示两个二阶张量 T 与 S 的标量积. 它具有标量 $(T:S)\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_i\sum\limits_j T_{ij}S_{ji}$	
$\overline{\overline{\wedge}}$	透视对应	perspective correspondence	点列 $s(A,B,C,\cdots)$ 与线束 $S(a,b,c,\cdots)$ 是透视的，记为 $s(A,B,C,\cdots)\overline{\overline{\wedge}}S(a,b,c,\cdots)$	
$\overline{\wedge}$	射影对应	projective correspondence	若 $[\pi]$ 与 $[\pi']$ 是两个一维基本形，则它们之间的射影对应记为 $[\pi]\overline{\wedge}[\pi']$	
$\div$	分离	separation	点 A,B 与点 C,D 是分离的，记为 $A,B\div C,D$	
$\overline{\cdot\cdot}$	不分离	nonseparation	点 A,B 与点 C,D 是不分离的，记为 $A,B\ \overline{\cdot\cdot}\ C,D$	
J，$*$	联	join	设 $s=v_0\cdots v_m$ 是 K 的生成复形，$t=w_0\cdots w_n$ 是 L 的生成复形，令 $s*t=v_0\cdots v_mw_0\cdots w_n$，则所有单形 $s*t$ 和它们的面组成的集合是一个单纯复形，称为 K 和 L 的联，记为 $K*L$	亦可记为 $J(K,L)$ 或 KJL
$r=r(t)$	向量函数	vector function	曲线或曲面的参数方程写成向量的形式.	亦称矢函数
$\dfrac{dr}{dt}$ 或 $r'(t)$	导向量	derived vector	$r'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$ 是向量函数 $r(t)$ 的导向量，有时以弧长 s 为参数的导向量表示成 $\dot{r}(s)$	亦称微商或导矢
dr	微分	differential	设 $r(t)$ 同上，若 $r(t)$ 在 t 处的改变量 $\Delta r=A\Delta t+o(\Delta t)$（$A$ 为固定向量），则称 A 为 $r(t)$ 在 t 点的微分	
$r^{(n)}(t)$	n 阶导向量	n-th derivative	$r^{(n-1)}(t)$ 在 t 点的导向量称为 $r(t)$ 在 t 点的 n 阶导向量	
d^nr	n 阶微分	n-th differential	$d^{n-1}r$ 在 t 点的微分称为 $r(t)$ 在 t 点的 n 阶微分	
$\dfrac{\partial r}{\partial x_i}$	偏导向量	partial derived vector	若 $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，则 $$r_u(u,v)=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u},\dfrac{\partial y}{\partial u},\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$$ 是 $r(u,v)$ 关于 u 的偏导向量	亦称偏导矢

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\boldsymbol{T}(s)$	单位切向量	unit tangent vector	$\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$表示曲线 C 在一点处的单位切向量，其中 s 为曲线 C 的弧长参数	亦可表示成 $\boldsymbol{\alpha}(s)$
$\boldsymbol{N}(s)$	主法向量	principal normal vector	$\boldsymbol{N}(s)=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\lvert\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\rvert}$表示曲线 C 在一点处的主法向量，$\boldsymbol{N}(s)$指向曲线 C 凹入的方向	亦可表示成 $\boldsymbol{\beta}(s)$
$\boldsymbol{B}(s)$	副法向量	binormal vector	$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$表示曲线 C 在一点处的副法向量	亦称从法向量. 表示成 $\gamma(s)$
$\{P;\boldsymbol{T};\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$	活动标架	Frenet frame	$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$ 依次构成右手系，它们构成一个标架，称为曲线 C 在 P 点的活动标架或弗雷内标架	
k	曲率	curvature	曲率 k 是表示曲线弯曲程度的量. 曲率 k 越大，曲线弯曲程度越大，曲率小，曲线弯曲程度小	直线的曲率为 0
τ	挠率	torsion	挠率是表示空间曲线扭翘程度的量. 挠率的绝对值大，曲线扭翘程度大，挠率的绝对值小，曲线扭翘程度小. 平面曲线的挠率为 0	
$k_r(s)$	相对曲率	relative curvature	表示平面曲线弯曲程度和弯曲方向的量	
i_r	旋转指标	rotation index	$i_r=\frac{1}{2\pi}\int_0^l k_r(s)\mathrm{d}s$ 表示平面闭曲线 C 的旋转指标，它是曲线 C 的切线像($r=\boldsymbol{T}(s)$)在单位圆周上环绕的圈数	若 C 是平面简单闭曲线，则 $i_r=\pm1$
$\boldsymbol{n}$	单位法向量	unit normal vector	曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,v)$ 上一点 $P(u,v)$ 处的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\lvert\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\rvert}$	式中各量均在$(\boldsymbol{u},v)$取值. $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}$ 依序构成右手系
E,F,G,g_{ij}	曲面的第一类基本量	fundamental quantities of first kind for surfaces	对曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第一类基本量分别为 $E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v.$ $g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j\quad(i,j=1,2)$	$E>0,\ G>0,$ $EG-F^2>0$
Ⅰ	曲面的第一基本形式	first fundamental form of a surface	$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$	第一基本形式是正定的，它决定曲面的内蕴性质
L,M,N,L_{ij}	曲面的第二类基本量	fundamental quantities of second kind for surfaces	对曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第二类基本量分别为 $L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n},M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n},N=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}.$ $L_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}\ (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1,2)$	
Ⅱ	曲面的第二基本形式	second fundamental form of a surface	$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$	
k_n	法曲率	normal curvature	曲面 S 在 P 点沿方向 $\boldsymbol{a}$ 的法截线曲率可作为曲面在该点的法曲率 k_n	其绝对值相等
K_c	全曲率	total curvature	$K_c=\int_0^l k(s)\mathrm{d}s$ 表示曲线 C 的全曲率	
K_r	相对全曲率	relative total curvature	$K_r=\int_0^l k_r(s)\mathrm{d}s$ 表示曲线 C 的相对全曲率	
K	总曲率	Gaussian curvature	$K=k_1k_2$ 表示曲面 S 在点 P 的弯曲情况. 曲面上的点可按总曲率的符号进行分类. $K>0$ 的点是椭圆点，$K<0$ 的点是双曲点，$K=0$ 的点是抛物点	亦称高斯曲率. 式中 k_1,k_2 为其对应的主曲率
H	平均曲率	mean curvature	表示曲面 S 在点 P 的平均曲率	亦称中曲率
e,f,g	曲面的第三类基本量	fundamental quantities of third kind for surfaces	对曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第三类基本量分别为 $e=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,f=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v,g=\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v$	
Ⅲ	曲面的第三基本形式	third fundamental form of a surface	$\mathrm{III}=\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=e\mathrm{d}u^2+2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g\mathrm{d}v^2$	
$[jk,i]$	第一类克里斯托费尔符号	Christoffel symbol of the 1st kind	$[jk,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$	亦可表示成 Γ_{jki}
$\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}$	第二类克里斯托费尔符号	Christoffel symbol of the 2nd kind	$\left\{\begin{matrix}k\\ ij\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$	亦可表示成 $\Gamma^k_{ij}=g^{kl}\Gamma_{ijl}\Gamma^k_{ij}$，也称为联络系数
k_g	测地曲率	geodesic curvature	曲面 S 上的曲线 C 在某一点 P 的切平面上的投影线的曲率可作为曲线 C 的测地曲率	其绝对值相等
exp	指数映射	exponential map	指数映射 $\exp:T_P\to S$ 是曲面 S 上 P 的切平面 T_P 的切向量与曲面 S 上点的对应关系. 若 $\boldsymbol{v}\in T_P$，过 P 沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向作测地线 C，在 C 上取点 M，使$\overset{\frown}{PM}=\lvert\boldsymbol{v}\rvert$，则 $\exp\boldsymbol{v}=M$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
τ_g	测地挠率	geodesic torsion	在曲面S上过一点P作以单位切向量α为初始方向的测地线$C: u=u(s), v=v(s)$，测地线C在P点的挠率称为曲面S在P点关于α方向的测地挠率	$\tau_g=\left(\alpha, n, \frac{dn}{ds}\right)$
$\mathscr{N}$	高斯映射	Gauss map	以曲面S的单位法向量$\boldsymbol{n}(u,v)$作为向量函数，表示单位球面S^2，高斯映射$\mathscr{N}: S\to S^2$是曲面S与相应的球面S^2之间的对应关系	亦称曲面的球面表示
$\deg \mathscr{N}$	高斯映射度	Gauss mapping degree	$\deg\mathscr{N}=\frac{1}{2}\chi(S)$表示高斯映射度，它由曲面拓扑所决定，其中$\chi(S)$表示欧拉示性数	
$\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$	坐标邻域	coordinate neighborhoods	U_α是微分流形M的开集，φ_α是微分流形U_α到R^n的开子集的同胚	
C^∞	C^∞相容	C^∞ compatible	$U\cap V\neq\varnothing$，$\varphi\circ\psi^{-1}$和$\psi\circ\varphi^{-1}$是R^n的开子集$\varphi(U\cap V)$和$\psi(U\cap V)$的C^∞微分同胚. 称(U,φ)和(V,ψ)是C^∞相容的	
L_XY	李导数	Lie derivative	$(L_XY)_p=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}((\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}-Y_p)$ $=\frac{d}{dt}(\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}\mid_{t=0}$	
R^l_{ijk}	黎曼曲率张量	Riemannian curvature tensor	$R^l_{ijk}=\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{jk}-\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik}+\Gamma^l_{ih}\Gamma^h_{jk}-\Gamma^l_{jh}\Gamma^h_{ik}$和$R_{ijkl}=R^h_{ikl}g_K$均称为黎曼曲率张量	亦称第二类克里斯托费尔符号
Ric	里奇曲率张量	Ricci curvature tensor	$\mathrm{Ric}(X,Y)=\sum\limits_i R(e_i,X,Y,e_i)$，即里奇曲率张量是一个(0,2)型张量场. 由对称性知 $\mathrm{Ric}(X,Y)=\mathrm{Ric}(Y,X)$	
C_{ijkl}	共形曲率张量	conformal curvature tensor	$C_{ijkl}=R_{ijkl}-\frac{1}{n-2}\{R_{ik}g_{il}-R_{il}g_{il}+R_{jl}g_{ik}-R_{jk}g_{il}\}+\frac{s}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{il}-g_{il}g_{jk})$	亦称外尔张量
P^l_{ijk}	射影曲率张量	projective curvature tensor	$P^l_{ijk}=R^l_{ijk}-\frac{1}{n-1}(\delta^l_kR_{ij}-\delta^l_jR_{ik})$称为射影曲率张量	
d	外微分算子	exterior differential operator	对于任意$\omega_1,\omega_2\in A^p(M)$: 1. $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$; 2. $d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2$; 3. 若$f\in A^0(M)$. 则$d(df)=0$	若$f\in A^0(M)$，则df恰是f的微分
$Z^p(M,R)$	光滑p次闭形式空间	space of smooth p-closed differential form	$Z^p(M,R)=\{\omega\mid\omega$是流形$M$上的光滑$p$次闭形式$\}$表示光滑$p$次闭形式空间	
$B^p(M,R)$	光滑p次恰当形式空间	space of smooth p-exact differential form	$B^p(M,R)=\{\omega\mid\omega$是流形$M$上的光滑$p$次恰当形式$\}$表示光滑$p$次恰当形式空间	
$H^p(M,R)$	德·拉姆上同调群	de Rham cohomology group	表示流形M的第p个德·拉姆上同调群. $H^p(M,R)$中的元素称为同调类	亦称第p个德·拉姆上同调空间
$\int_M\omega$	形式积分	integral of forms	$\int_M\omega=\sum\limits_i\int_M f_i\circ\omega$	
∇	仿射联络	affine connection	设M是n维C^∞流形，$\Gamma(TM)$为M上的C^∞向量场空间. M上的仿射联络是指映射$\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$，满足四条公理	
$\nabla_{X_p}Y$	共变导数	covariant derivative	令$P\in M, X_P\in T_P(M)$. Y为M上的C^∞向量场. 定义$\nabla_{X_p}Y=(\nabla_XY)_P$	亦称协变微商
$K(X,Y)$	截面曲率	sectional curvature	对任意两个不共线的切向量$X,Y\in T_PM$, $K(X,Y)=-\frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-[g(X,Y)]^2}$	当$\dim M=2$时，$K(X,Y)$恰好是M在P点的高斯曲率
$R(X,Y)$	曲率算子	curvature operator	$R(X,Y)Z=\nabla_X(\nabla_YZ)-\nabla_Y(\nabla_XZ)-\nabla_{[X,Y]}Z\ (X,Y,Z\in\Gamma(TM))$	
$\triangle$	拉普拉斯-贝尔脱拉米算子	Laplace-Bertrami operator	$\triangle f=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$	
$S_p(2n)$	辛群	symplectic group	设(V,ω)是一个辛空间，(V,ω)的自同构的全体构成群$GL(V)$的一个子群记为$SP(V,\omega)$，特别地，标准辛空间(K^{2n},ω)的自同构群记为$S_p(2n,K)$. 若$K=R$，则把$S_p(2n,K)$简记为$S_p(2n)$，并称为$2n$维辛群	

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$E(f)$	能量	energy	设 M,N 为黎曼流形，$f:M\to N$ 为光滑映射，f 的能量定义为：$E(f)=\frac{1}{2}\int_M \lvert df\rvert^2 *1$，其中 $*1$ 为 M 的体积元	
$e(f)$	能量密度	energy density	符号条件同上，$e(f)=\frac{1}{2}\lvert df\rvert^2$	
∂M	流形的边界	boundary of a manifold	带边流形 M 中全体边界点的集	
T_PM	切空间	tangent space	微分流形 M 在 P 点处的全体切向量的集记为 T_PM，称为 M 在 P 处的切空间	T_PM 是实 $\dim M$ 维向量空间
f_{*P},T_Pf	在一点处的切映射	tangent map at a point	$f:M\to N$ 是可微映射，$f_{*P}:T_PM\to T_{f(P)}N$ 称为可微映射 f 在 $P\in M$ 处的切映射	若 f 是微分同胚，则 $\forall P\in M,f_{*P}$ 是同构
TM	流形的切丛	tangent bundle of manifold	(TM,π,M) 称为微分流形 M 的切丛，简称 TM 为 M 的切丛	
Tf	切映射	tangent map	设 $f:M\to N$ 是流形 M 到 N 的可微映射，$Tf:TM\to TN$ 称为 f 的切映射	若 $f:M\to N$ 是微分同胚，则 $Tf:TM\to TN$ 亦然
$\xi\oplus\eta$	向量丛的惠特尼和	Whitney sum of vector bundles	ξ,η 分别是 n 维，k 维向量丛，$\tilde{\pi}:E(\xi)\oplus E(\eta)\to B$ 为自然投射. $(E(\xi)\oplus E(\eta),\tilde{\pi},B)$ 是 $n+k$ 维向量丛，称为 ξ 与 η 的惠特尼和	亦可看成积丛 $\xi\times\eta$ 由对角映射 $f:B\to B\times B$ 决定的诱导丛
$\chi(\xi)$	欧拉数	Euler number	设 $\xi=(E,\pi,M)$ 是 n 维定向向量丛，则零截面的自交数称为向量丛 ξ 的欧拉数	当 $\xi=TM$ 时，$\chi(\xi)$ 就是 M 的欧拉示性数
$U^{\perp}(t)$	正交分量	orthogonal component	表示分向量场 $U(t)$ 与测地线 γ 正交的分量	
$T_x^{\perp}M$	法空间	normal space	表示 M 在 x 处的法空间，正交于切空间 T_xM	
$\nabla^{\perp}$	法联络	normal connection	若 M 是黎曼流形，则 $\nabla^{\perp}$ 表示 M 上的法联络	
$(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp}$	正交投影	orthogonal projection	表示 $\tilde{R}(X,Y)Z$ 在 M 的法丛 $N(M)$ 上的投影. 式中 $\tilde{R}$ 是 $\tilde{M}$ 的曲率张量	
(X,d)	度量空间	metric space	赋予度量 d 的集合 X 称为度量空间	亦称距离空间
$(X,\mathscr{T})$	拓扑空间	topological space	确定了拓扑 $\mathscr{T}$ 的集合 X 称为拓扑空间	
$\bar{A}$, cl$A$	闭包	closure	包含 A 的所有闭集的交集称为 A 的闭包，它是包含 A 的最小闭集	
$b(A)$，BdA	边界	boundary	A 的全体边界点组成的集合称为 A 的边界	亦可记为 $A^b,\partial A$
Int A,A^i	内部	interior	集 A 的全部内点组成的集合称为 A 的内部	亦可记为 $\mathring{A}$ 或 A°
$U(a,\delta)$	邻域	neighborhood	$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径	
$\mathring{U}(a,\delta)$	去心邻域	deleted neighborhood	$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$ 称为点 a 的去心的 δ 邻域	
$\mathscr{U}(x)$	邻域系	neighborhood system	点 x 的邻域的全体称为 x 的邻域系	
$X\vee Y$	拓扑空间的楔和	wedge sum of topological spaces	设 X,Y 为两个带有基点的拓扑空间. x_0,y_0 分别为 X,Y 的基点. 子空间 $X\times\{y_0\}\cup\{x_0\}\times Y\subset X\times Y$ 称为 X 和 Y 的楔和	
$X\wedge Y$	拓扑空间的碎积	smash product of topological spaces	商空间 $X\times Y/X\vee Y$ 称为 X,Y 的碎积	
$V_{n,k}$	斯蒂弗尔流形	Stiefel manifold	$V_{n,k}=\{(e_1,e_2,\cdots,e_k)\mid e_i\in R^n,e_i\cdot e_j=\delta_{ij}.1\leqslant i,j\leqslant k\}$ 在 $R^n\times\cdots\times R^n$（$k$ 个）的诱导拓扑之下，$V_{n,k}$ 为一个紧致流形，称为斯蒂弗尔流形	
$B_\varepsilon(a)$	开球	open ball	设 (X,d) 为度量空间，$a\in X,\varepsilon>0,B_\varepsilon(a)=\{x\in X\mid d(a,x)<\varepsilon\}$ 称为以 a 为中心的 ε 开球	亦可记为 $B(a,\varepsilon)$
$\bar{B}_\varepsilon(a)$	闭球	closed ball	设 (X,d) 为度量空间，$a\in X,\varepsilon>0,\bar{B}_\varepsilon(a)=\{x\in X\mid d(a,x)\leqslant\varepsilon\}$ 称为以 a 为中心的 ε 闭球	亦可记为 $\bar{B}(a,\varepsilon)$
$\delta(M)$	直径	diameter	设 M 为度量空间 (X,d) 的子集，定义 $\delta(M)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in M\}$，称为集 M 的直径	亦可记为 diam$M$
$A^d,d(A)$	导集	derived set	集 A 的一切聚点的集称为 A 的导集	
A^e，ext(A)	外部	exterior	集 A 的全体外点组成的集合称为 A 的外部，记为 A^e 或 ext(A)	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Ind$X$	大归纳维数	large inductive dimension	这是在正则空间中利用归纳法定义的维数，若空间 X,Y 同胚，则 Ind$X$ = Ind$Y$	亦称布劳威尔-切赫维数
ind X	小归纳维数	small inductive dimension	这是在正则空间中利用归纳法定义的维数，若空间 X,Y 同胚，则 ind$X$ = ind$Y$	亦称门杰-乌雷松维数
$\varprojlim\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,A\}$	逆极限	inverse limit	逆系 $\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,A\}$ 的逆极限	亦可记为 $\varprojlim X_\alpha$
$\varepsilon(A)$	凸包络	convex envelope	X 内所有包含 A 的凸集之交称为 A 的凸包络	
$\simeq$	同伦	homotopy	若 $f,g:X\to Y$ 都是连续映射，$I=[0,1]$，且存在连续映射 $H:X\times I\to Y$，使得对所有 $x\in X$，$H(x,0)=f(x)$，$H(x,1)=g(x)$，则 f,g 称为同伦映射，记为 $f\simeq g:X\to Y$	这里 H 称为从 f 到 g 的一个同伦或伦移
$\approx$	同胚	homeomorphism	$f:X\to Y$ 是连续映射，且 f 的逆映射连续，则称 f 为同胚，亦称空间 X 与 Y 同胚，记为 $X\approx Y$	亦称拓扑映射、拓扑变换
$\\| \\|$	范数	norm	$\\| x\\|$ 表示赋范空间中 x 的范数或实空间中向量 α 的赋值. 记为 $\\|\alpha\\|$	欧氏空间的向量 x 的长度概念的推广
E^n	n 维欧氏空间	n-dimensional Euclidean space	$E^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in \mathrm{R}\}$，规定度量 $d=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$	亦可记为 R^n
P^n	n 维射影空间	n-dimensional projective space	域 F 上的 n 维射影空间常记为 FP^n，简记为 P^n，当 F 是实数域时记为 $\mathrm{R}P^n$；当 F 是复数域时记为 $\mathrm{C}P^n$. 若 F 是四元数域 H. 记为 $\mathrm{H}P^n$	
S^n	n 维球面	n-dimensional sphere	$S^n=\{x\in\mathrm{R}^{n+1}:\|x\|=r\}$	
T^n	n 维环面	n-dimensional torus	圆 S^1 自身的 n 次拓扑乘积. 记为 $T^n=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$	
$C_q(\ ,\ )$	链群	chain group	K 是复形，$C_q(K,Z)$ 称为 K 的 q 维链群	亦可简记为 $C_q(K)$
H_n	n 维同调群	n-dimensional homology group	$H_n(K,A)=Z_n(K,A)/B_n(K,A)$ 表示复形 K 的以 A 为系数群的 n 维同调群	
H^n	n 维上同调群	n-dimensional cohomology group	$H^n(X,A)=Z^n(K,A)/B^n(K,A)$ 表示复形 K 以 A 为系数群的 n 维上同调群	
$\check{H}^n$	n 维切赫上同调群	n-dimensional Čech cohomology group	$\check{H}^n(X)=\varinjlim H^n(N_\lambda)$ 表示 X 的 n 维切赫上同调群	
$\check{H}_n$	n 维切赫同调群	n-dimensional Čech homology group	$\check{H}_n(X)=\varprojlim H_n(N_\lambda)$ 表示 X 的 n 维切赫同调群	
π_n	n 维同伦群	n-dimensional homotopy group	$\pi_n(X)$ 是映射 $(S^n,s_0)\to(X,x_0)$ 的同伦类集合	
$\pi_{n+k}(S^n)$	稳定同伦群	stable homotopy group	悬垂同态 $E:\pi_{n+k}(S^n)\to\pi_{n+k+1}(S^{n+1})$，当 $n>k+1$ 时为同构，称为球面的第 k 个稳定同伦群	悬垂同态亦称同纬像同态
∂	边缘算子	boundary operator	∂c 表示 c 的边缘	
δ	上边缘算子	coboundary operator	δf 表示 f 的上边缘	
sq	斯廷罗德方形运算	Steenrod square	$Sq^i(x,y)=\sum_{j+k=i}Sq^j(x)Sq^k(y)$ 即 x 的斯廷罗德方形运算	
$\mathscr{P}$	斯廷罗德幂运算	Steenrod power	$\mathscr{P}_p^r(xy)=\sum_{i+j=r}\mathscr{P}_p^i(x)\mathscr{P}_p^j(y)$ 即 x 的斯廷罗德 p 次幂运算	亦可记为 St_p^r
$\smile$	上积	cup product	$z_1\smile z_2$ 表示 z_1 和 z_2 的上积	
$\frown$	卡积	cap product	$z_1\frown z_2$ 表示 z_1 和 z_2 的卡积	
$\omega\wedge\eta$	外积	exterior product	表示微分形式 ω,η 的外积. $\omega\wedge\eta=A_{k+l}(\omega\otimes\eta)$. 其中 A_{k+1} 是反对称化算子，ω 是 k 次矢量，η 是 l 次矢量，$\omega\wedge\eta$ 是 $(k+l)$ 次外矢量	
mesh	复形的网径	mesh diameter of a complex	单纯复形 K 中诸单形直径的最大值称为复形的网径，即 $\mathrm{mesh}=\max_{\sigma\in K}\{\\|x-y\\|\mid x,\ y\in\sigma\}$	
deg	映射度	degree of mapping	设 $f:S^n\to S^n$ 是映射，α 是 $H_n(S^n)$ 的生成元，则 $f_*(\alpha)=\rho\alpha$. 其中整数 ρ 称为 f 的映射度. 记为 $\rho=\deg(f)$	亦称拓扑度，又称布劳威尔度
rel	相对于	relative	rel A 表示相对于 A	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
C	连续函数空间	continuous function space	$C[a,b]$表示$[a,b]$上连续函数的全体	
L^p	p次可积函数空间	integrable function space of order p	$L^p(\Omega,\mathscr{B},\mu)(\infty>p\geqslant 1)$是测度空间$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$上可测而且$p$次可积函数的全体	
C^n	C^n类函数空间	C^n class function space	$C^n[a,b](\infty>n\geqslant 1)$是$[a,b]$上$n$阶连续可微函数的全体	
C^∞	C^∞类函数	function of class C^∞	对于所有r,函数f是C^r类的.亦称f是光滑的	
C^∞	C^∞映射	C^∞ mapping	W,N是微分流形,$F:W\to N,\psi\circ F\circ\varphi^{-1}P:\varphi(U)\to\psi(V)$是$C^\infty$的.$U,V$分别是$W,N$的坐标邻域	
L^∞	本性有界可测函数	essentially bounded function space	$L^\infty(\Omega,\mathscr{B},\mu)$表示$\Omega$上(关于$\mu$)本性有界可测函数全体	
T_2	豪斯多夫空间	Hausdorff space	设X为拓扑空间,若X的任意两个不相同的点都有不相交的开邻域则称X为豪斯多夫空间	亦称T_2空间
R^∞	希尔伯特空间	Hilbert space	设$x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots).x,y\in R^\infty$,定义$d=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}$,则$(R^\infty,d)$称为希尔伯特空间	
Y^X	函数空间	functional space	表示所有连续函数$f:X\to Y$的集合	
$N_{K,U}$	紧致开拓扑	compact open topology	$N_{K,U}=\{f:f(K)\subset U\}$,其中$K\subset X$紧致,$U\subset Y$为开集	
e_a^n	n维胞腔	cell of dimension n	e_a^n是空间X的子集	
CW	CW复形	CW-complex	一个空间X中的CW复形是满足闭包有限和诱导弱拓扑两项条件的胞腔复形	
$L(p,q)$	透镜空间	lens spaces	$L(p,q)=s^3/Zp$	
WHE	弱同伦等价公理	weak homotopy equivalence axiom	若$f:X\to Y$是弱同伦等价关系,则$f_*:k_n(X,x_0)\to k_n(Y,f(x_0))$是同构	
$\widetilde{KO}(X)$	$\widetilde{KO}$群	$\widetilde{KO}$-group	表示X上实向量丛的所有稳定等价类集合	
$\widetilde{K}(X)$	$\widetilde{K}$群	$\widetilde{K}$-group	表示X上复向量丛的所有稳定等价类集合	
$\widetilde{KS}_p(X)$	$\widetilde{KS}_p$群	$\widetilde{KS}_p$-group	表示X上四元向量丛的所有稳定等价类集合	
$K(s)$	K群	K-group	表示由半群的同态$\varnothing:S\to K(s)$诱导的abelian群	
$KO(X)$	KO群	KO-group	$KO(X)\cong\widetilde{KO}(X)\oplus KO(\{x_0\})$	
$K(X)$	K群	K-group	$K(X)\cong\widetilde{K}(X)\oplus K(\{x_0\})$	
$KS_p(X)$	KS_p群	KS_p-group	$KS_p(X)\cong\widetilde{KS}_p(X)\oplus KS_p(\{x_0\})$	
$M_1\sim M_2$	流形的协边	cobordism of manifolds	设M_1,M_2都是紧致(无边)微分流形,若存在紧致带边流形W与微分同胚$\partial W\cong M_1\times(0)\cup M_2\times(1)$,则称$M_1$与$M_2$协边	
MSO_n	定向协边群	oriented bordism group	表示所有定向协边类的集合	亦称Thom群
MO_n	非定向协边群	unoriented bordism group	表示所有非定向协边类的集合	亦称Thom群
MSO_*	分次交换环	graded commutative ring	$MSO_*=\sum MSO_n$	
MO_*	分次交换代数	graded commutative algebra	$MO_*=\sum MO_n$	
$MSO_n(X,A)$	定向奇异协边群	oriented singular bordism group	表示(X,A)中定向奇异协边类的集合	
$MSO_*(X,A)$	分次右模	graded right module	$MSO_*(X,A)=\sum MSO_n(X,A)$	
$MSO_n(Pt)$	一点的协边群	bordism group of a point	$MSO_n(Pt)=MSO_n$	
$\widetilde{MSO}_n(X)$	约化群	reduced group	表示增广同态$\varepsilon_*:MSO_n(X)\to MSO_n(pt)$的核	
$MO_n(X,A)$	非定向奇异协边群	unoriented bordism group	表示(X,A)中非定向奇异协边类的集合	
$MO_*(X,A)$	分次模	graded module	$MO_*(X,A)=\sum MO_n(X,A)$	

代数学(Algebra)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
max	最大或极大	maximum	$y_{\max}=a$ 表示 y 的最大(极大)值等于 a	
min	最小或极小	minimum	$y_{\min}=b$ 表示 y 的最小(极小)值等于 b	
!	阶乘	factorial	$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$	规定 $0!=1$
!!	双阶乘	double factorial	$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)$; $(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)$	
$(a)_n$	始于 a 的 n 个实数之积	product of the n-real numbers by the beginning at a	例如, $(\sqrt{2})_4=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+3)$	a 为实数,n 为自然数
C_n^p 或 $\binom{n}{p}$	二项式系数,组合数	binomial coefficient, combinatorial numbers	表示从 n 个元素中每次取出 p 个元素的所有不同组合的总数	
P_m^n 或 A_m^n	选排列	selections permutation	$P_m^n=\dfrac{m!}{(m-n)!}=m(m-1)\cdots(m-n+1)$	
P_m 或 A_m	全排列	all permutation	$P_m=m!$	
H_m^n	重复组合	combination with repetition	$H_m^n=C_{m+n-1}^n=\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$	
$\cup_m^n$	有重复的排列	permutation with repetition	$\cup_m^n=m^n$,即从 m 个相异元素中每次取出 n 个元素允许重复排列的排列总数	亦可记为 $\Pi_m^n=m^n$
R_m^n	环排列	circular permutation	$R_m^n=\dfrac{P_m^n}{n}=C_m^n(n-1)!\ (m\leqslant n)$. 当 $m=n$ 时,$R_m^m=(m-1)!$	亦可用 $R_{m平}^n$ 和 $R_{m立}^n$ 分别表示平面环排列与空间环排列
i	虚数单位	imaginary unit	$\mathrm{i}=\sqrt{-1}\ (\mathrm{i}^2=-1)$	电工技术中常用 j
z	复数记号	symbol of complex number	$z=a+b\mathrm{i}$ 即实部为 a,虚部为 b 的复数	
Re z	z 的实部	real part of z	$z=a+b\mathrm{i}$ (Re $z=a$)	
Im z	z 的虚部	imaginary part of z	$z=a+b\mathrm{i}$ (Im $z=b$)	
$\lvert z\rvert$	z 的模	modulus of z	$z=a+b\mathrm{i}$ ($\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$)	亦可用 mod z 表示
arg z	z 的辐角	argument of z	$\varphi=\arg z$ 即复数 z 的辐角为 φ,$0<\varphi\leqslant2\pi$	
$\bar{z}$	z 的共轭复数	conjugate complex number of z	设 $z=a+b\mathrm{i}$,则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 称为 z 的共轭复数	亦可用 z^* 表示
sgn z	z 的单位模函数	signum z	$\operatorname{sgn} z=\begin{cases}z/\lvert z\rvert & (z\neq0),\\ 0 & (z=0)\end{cases}$	
det A	方阵的行列式	determinant of a square matrix	设 A 为方阵,则 det$A$ 表示 A 的行列式	A 的行列式亦可用 $\lvert A\rvert$ 表示
$\lVert A\rVert$	范数	norm	矩阵 A 的范数为 $\lVert A\rVert=(\mathrm{Tr}(AA^\dagger))^{\frac{1}{2}}$	范数有各种定义
$A_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$	矩阵	matrix	$A_{m\times n}$ 表示一个 m 行 n 列的矩阵,$(a_{ij})_{m\times n}$ 表示 (i,j) 元素是 a_{ij} 的 m 行 n 列矩阵	
diag{…} 或[…]	对角矩阵	diagonal matrix	表示主对角线上元素为 $d_{11},d_{12},\cdots,d_{nn}$,其余元素全为零的方阵	
I 或 E	单位矩阵	unit matrix	表示主对角线上的元素都是 1,其他元素都是零的方阵,用 I 或 E 表示,称为单位矩阵	
A^{-1}	方阵 A 的逆	inverse of the square matrix A	设方阵 A 的行列式 $\lvert A\rvert\neq0$,则 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$,其中 I 为单位方阵	
A^{T} 或 A'	A 的转置矩阵	transposed matrix of A	把矩阵 A 的行换成同序数的列,得到的新矩阵,称为 A 的转置矩阵	亦可表示成 $\tilde{A}$
$A\geqslant0$	非负矩阵	nonnegative matrix	实矩阵 A 中每个元素都是非负的	
$A>0$	正矩阵	positive matrix	实矩阵 A 中每个元素都是正的	
α^*	不增向量	nonincreasing vector	设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是一个实向量. 若 $a_1^*,a_2^*,\cdots,a_n^*$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列且满足 $a_1^*\geqslant a_2^*\geqslant\cdots\geqslant a_n^*$,则称$\alpha\doteq(a_1^*,a_2^*,\cdots,a_n^*)$ 是α 的不增向量	

数 学 符 号 表

符 号	中文名称	英文名称	意 义 或 举 例	备 注
$\prec$	优于	major than	设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是两个非负实向量，如果 $a_1^*\leqslant b_1^*,\cdots,a_1^*+a_2^*+\cdots+a_{n-1}^*\leqslant b_1^*+b_2^*+\cdots+b_{n-1}^*$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，则称 β 优于 α，记为 $\alpha\prec\beta$	
Per A	积和式	formula of sum of products	A 是 $m\times n$ 复矩阵，$m\leqslant n$，$\mathrm{Per}\,A=\sum\limits_{\sigma}\prod\limits_{i=1}^{m}a_i\sigma(i)$ 称为 A 的积和式，其中 $\sum$ 是对 $\{1,2,\cdots,m\}$ 到 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一切映射 σ 求和	
$\sigma(A)$	A 的元素的和	sum of elements of A	表示矩阵 A 的所有元素之和	
$\rho(A)$	谱半径	spectral radius	设 A 为 n 阶复矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为其全部特征根，则 $\rho(A)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\lvert\lambda_i\rvert$ 称为 A 的谱半径	
(i,j)	(i,j) 元素	(i,j) element	表示矩阵或行列式第 i 行第 j 列交叉位置上的元素	亦称 (i,j) 分量
A_{ij}	代数余子式	algebraic complement minor	在一个行列式中，(i,j) 元素的代数余子式	
A^*	伴随矩阵	adjoint matrix	由 n 阶方阵 A 的所有元素的代数余子式 A_{ij} 为元素所构成的 n 阶方阵（A_{ij} 置于第 j 行第 i 列交叉位置上）	亦可用 $\tilde{A}$ 或 adj A 表示
$\bar{A}$	增广矩阵	augmented matrix	在一个线性方程组的系数矩阵中，再在最后增加由常数项构成的列，所得到的矩阵	亦可用 $\tilde{A}$ 表示
E_{ij}	矩阵单位	matrix unit	(i,j) 元素是 1，其余元素全是零的矩阵．其中，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$	多指方阵
TrA	方阵的迹	trace of a square matrix	方阵 A 的主对角线上所有元素之和	亦称追迹
rank (A)	矩阵的秩	rank of matrix	矩阵（不一定是方阵）A 中不等于零的子式的最大阶数称为 A 的秩，零矩阵的秩规定是零	亦可用 $r(A)$、"秩 A"或"A 秩"表示
$M_n(F)$，$F^{n\times n}$ $F_{n\times n}$，F_n	n 阶全阵环	total matrix ring of order n	域 F 上全体 n 阶方阵对方阵的加法和乘法组成的环	更一般地，可把域 F 换成任意环 R
$A\otimes B$	矩阵的直积	direct product of matrices	设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{r\times s}$，则 $mr\times ns$ 矩阵称为 A 与 B 的直积，记为 $A\otimes B$	亦称 Kronecker 积．
$\dotplus$	方阵的直和	direct sum of a square matrix	设 A 为 nk 阶方阵．若 A 中表示成主对角线是 k 个 n 阶方阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，而其余块全为零的分块，则称 A 为 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的直和，记为 $A=A_1\dotplus A_2\dotplus\cdots\dotplus A_k$	
A	A 的复共轭矩阵	complex conjugate matrix of A	将复矩阵 A 的每个元素换成共轭复数所得矩阵记为 $\bar{A}$，称为矩阵 A 的复共轭矩阵	
$\overline{A^+}$，$\overline{A^H}$	埃尔米特共轭矩阵	Hermitian conjugate matrix	矩阵 A 的复共轭矩阵 $\bar{A}$ 的转置矩阵 $\overline{A}'$，称为 A 的埃尔米特共轭矩阵	
A^+，A^H	埃尔米特矩阵	Hermitian matrix	若 n 阶矩阵 A 与它的转置共轭矩阵 $\overline{A}'$ 相等，则 A 称为埃尔米特矩阵	
δ_{ik}	克罗内克 δ	Kronecker's delta	$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & (i=k),\\ 0 & (i\neq k)\end{cases}\quad(i,k=1,2,\cdots,n)$	
$R[x]$	多项式环	polynomial ring	系数属于环 R、未知量（不定元）为 x 的全体多项式，对于多项式的普通加法和乘法组成的环	如果 R 有单位元 1，则规定 $x^0=1$
$R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$	n 元多项式环	n-ary polynomial ring	系数属于环 R，未知量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$（不相关不定元）的全体多项式，对于多元多项式的普通加法和乘法组成的环	如果环 R 有单位元 1，则规定 $x_i^0=1$，且 $x_ix_j=x_jx_i$
deg $f(x)$	多项式的次数	degree of a polynomial	表示多项式 $f(x)\neq 0$ 中系数不为零的项中最高次项的次数	亦可用 $\partial^\circ f(x)$ 表示
$\Phi_n(x)$	分圆多项式	cyclotomic polynomial	$\Phi_n(x)=\prod\limits_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\xi_i)$ 称为 n 次分圆多项式，其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{\varphi(n)}$ 为 n 次原根	
$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$	初等对称多项式	elementary symmetrical polynomials	例如，x_1,x_2,x_3 的初等对称多项式为：$\sigma_1=x_1+x_2+x_3$，$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$，$\sigma_3=x_1x_2x_3$	
$(f_1(x),\cdots,f_n(x))$	最高公因式	highest common factor	首系数为 1 且次数最高的公因式	亦称最大公因式
$[f_1(x),\cdots,f_n(x)]$	最低公倍式	least common multiple	首系数为 1 且次数最低的公倍式	亦称最小公倍式

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(f(x),g(x))=1$	互素	coprime	多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式是 1	
$(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$	两两互素	mutually prime	多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 中每两个都是互素的	
$F(x)$	有理分式域	rational traction field	域 F 上所有有理分式 $f(x)/g(x)(g(x)\neq 0)$ 关于有理分式的加法和乘法所组成的域	
$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	行向量	row vector	分量是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并排成一横行的 n 元向量	
$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$	列向量	column vector	分量是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并排成一纵列的 n 元向量	
$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$	反序数	inverted sequence number	n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中反序个数的总和. 例如 $\tau(231)=2,\tau(321)=3$	亦称逆序数
$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$	k 循环	k-cyclic(permutation)	即将 i_1 变为 i_2,i_2 变为 i_3,$\cdots$,i_k 变为 i_1,而别的元素不动的置换	
$\mathrm{sgn}\ \sigma$	置换的符号数	symbol number of permutation	设 σ 是一个置换,令 $\mathrm{sgn}\sigma=\begin{cases}+1 & (\sigma\text{ 是偶置换}),\\-1 & (\sigma\text{ 是奇置换})\end{cases}$	
(i,j)	对换	transposition	即将数码 i 变为 j,j 变为 i,而别的数码不动的置换	
K^n	向量空间	vector space	以 K 为基域的 n 元向量的集合 K^n. 称为 K 上的向量空间或线性空间	当 $K=R$ 时记为 $\mathbb{R}^n$,当 $K=\mathbb{C}$ 时记为 $\mathbb{C}^n$,有时表示成 V
$\alpha\perp\beta$	正交向量	orthogonal vectors	内积为零的两个向量	
$\alpha\perp W$	向量与子空间正交	a vector cut a subspace orthogonally	欧氏空间中向量 α 与子空间 W 中每个向量都正交	亦可表示成 $(\alpha,W)=0$
$V_1\perp V_2$	正交子空间	orthogonal subspaces	V_1 与 V_2 是欧氏空间的两个子空间,若 V_1 中每个向量与 V_2 中每个向量都正交,则称 V_1 与 V_2 为正交子空间	
$W^{\perp}$	正交补	orthogonal complement	W 是欧氏空间 V 的一个子空间,$W^{\perp}$ 表示 V 中与 W 正交的一切向量所构成的子空间	
$\varphi\|W$	诱导变换	induced transformation	φ 是线性空间 V 的一个线性变换,子空间 W 对 φ 不变,则 φ 在 W 上的限制称为 φ 在 W 中的诱导变换	
$\leqslant$	子群	subgroup	$H\leqslant G$ 即 H 是群 G 的子群	亦可用 $<$ 表示子群或真子群
$\trianglelefteq$	正规子群	normal subgroup	$N\trianglelefteq G$ 即 N 是群 G 的正规子群	亦可用 $\triangleleft$ 表示正规子群或正规真子群
$\exp(G)$	有限群的指数	exponent of a finite group	设 G 是有限群,使 $a^n=1\ (\forall\ a\in G)$ 的最小正整数 n,称为 G 的方次数	
$O_p(G)$	极大正规 p 子群	maximal normal p-subgroup	群 G 的极大正规子群且为 p 子群	
M^G	正规闭包	normal closure	群 G 的包含子集 M 的最小正规子群	
M_G	子集的核	core of subset	设 M 是群 G 的子集,则 G 的包含在 M 中的所有正规子群生成的子群称为 M 的核	
$H\mathrm{char}G$	特征子群	characteristic subgroup	群 G 的在 G 的任意自同构下不变的子群	
$\mathrm{Syl}_p(G)$	西洛 p 子群	sylow p-subgroup	表示有限群 G 的一个西洛 p 子群,其中 p 是素数	
$S(G)$	基座	socle	群 G 的所有极小正规子群之积	
$\mathrm{Fit}(G)$	菲廷子群	Fitting subgroup	群 G 的所有幂零正规子群之积	
$R_u(G)$	幂幺根基	unipotent radical	代数群 G 的最大连通正规幂幺子群	
$R(G)$	代数群的根基	radical of an algebraic group	代数群 G 的最大连通正规可解子群	
$\otimes,\times$	群的直积	direct product of groups	$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 或 $G=G_1\otimes G_2\otimes\cdots\otimes G_n$ 表示群 G 是群 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 的直积	群的直积有内外之分. 但在同构意义下可互相转化
$[X,Y]$	李括号	Lie bracket	$[X,Y]_p(f)=X_p(Yf)-Y_p(Xf)$	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$H \ltimes K$	半直积	semidirect product	$G/\overline{N} \cong F$，其中 $\overline{N}$ 是与 N 同构的正规子群，$G=\overline{F}\overline{N}$，其中 $\overline{F}$ 是与 F 同构的子群．$\overline{F} \cap \overline{N} = \{e\}$ 此时 G 称为 N 与 F 的半直积	
$\mathrm{N}_G(H)$	正规化子	normalizer	群 G 中所有可与子群 H 交换的元素组成的集合	定义子集 S 的正规化子为 $\mathrm{N}_G(S)$
$\mathrm{C}_G(H)$	中心化子	centralizer	群 G 中所有与子群 H 的每个元素可交换的元素组成的集合	亦可表成 $\mathrm{Z}_G(H)$
C_a	元素的中心化子	centralizer of an element	设 a 是群 G 的一个元素，则 G 中所有与 a 可交换的元素组成的集合	亦可记为 $\mathrm{C}(a)$
$C(G)$	群的中心	center of a group	群 G 中与 G 的每个元素都可换的元素组成的集合	$C(G)$ 即 $\mathrm{C}_G(G)$．亦可用 $Z(G)$ 表示
$[a,b]$	换位子	commutator	群 G 中二元素 a 与 b 的换位子是指 G 中元素 $a^{-1}b^{-1}ab$，即 $[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$	换位子亦可定义为 $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$
$G',(G,G)$	换位子群	commutator group	由群 G 的一切换位子所生成的子群	亦称 G 的导出群或导群，并记为 $D(G)$
$[A,B]$	A 与 B 的换位子群	commutator subgroup of A and B	A,B 是群 G 的两个子集．由所有换位子 $[a,b]$（$a\in A$，$b\in B$）所生成的子群	
$(G:H)$，$[G:H]$ 或 $\|G:H\|$	子群的指数	index of a subgroup	子群 H 在群 G 中左（或右）陪集的个数．例如，$H=\{(1),(12)\}\subset S_3$，$(S_3:H)=3$	$(G:H)$ 可能有限，也可能无限
$\Phi(G)$	弗拉蒂尼子群	Frattini subgroup	群 G 的所有极大子群的交	
$S(M),S_M$	对称群	symmetric group	集合 M 的全体双射变换对变换乘法所组成的群，M 可以是无限集	亦可表成 $\mathrm{sym}(M)$
S_n	n 次对称群	symmetric group of degree n	设 $\|M\|=n$，则 M 上的对称群即 M 的全体双射变换对变换乘法组成的群，称为 n 次对称群	一般取 $M=\{1,2,\cdots,n\}$
A_n	交错群	alternating group	n 次对称群 S_n 中全体偶置换组成的群，称为 n 次交错群，简称交错群	亦称交代群
p^∞	p^∞ 型群	group of p^∞-type	$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，其中 G_n 为所有 p^n（p 是素数）次单位根对乘法组成的群．凡与 G 同构的群均称为 p^∞ 型群	亦称半循环群
$C(p^\infty)$	普吕费尔加群	prùfer additive group	设 p 是一固定素数，则所有形如 a/p^n（n 为任意正整数，a 为任意整数）的有理数组成加群，它对于其子群 $\mathbf{Z}$（整数加群）的商群（或称差群）称为普吕费尔加群	
$\|a\|$	元素的阶	order of the element	设 a 是群的元素．使 $a^n=e$ 的最小正整数 n，称为 a 的阶或周期．若这样的 n 不存在，则称 a 的阶是 ∞ 或 0	亦可用 $\circ(a)$ 表示
$\|G\|$	群的阶	order of a group	群 G 中所包含的元素的个数．例如，$\|S_3\|=6$；整数加群 $\mathbf{Z}$ 的阶为 ∞，即 $\|\mathbf{Z}\|=\infty$	群 G 的阶也可记为 $\mathrm{Ord}(G)$，而有限群 G 的阶也记为 $[G:1]$
$\langle S\rangle$	由 S 生成的子群	generated subgroup by S	$\langle S\rangle$ 是群 G 中包含子集 S 的最小的子群，亦即 G 中包含 S 的所有子群的交．亦用 (S) 表示	当 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 时，常记为 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$ 或 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
$\mathrm{Tor}G$	扭子群	torsion subgroup	群 G 的所有有限阶元素组成的子群，称为 G 的扭子群	亦称周期子群或挠子群
$\langle a\rangle$	循环群	cyclic group	由一个元素生成的群称为循环群．即 $\langle a\rangle=\{\cdots a^{-2},a^{-1},e,a,a^2,\cdots\}$	亦可用 (a) 表示循环群
C_n	n 阶循环群	cyclic group of order n	由一个阶为 n 的元素生成的循环群	
C_∞	无限循环群	infinite cyclic group	由一个阶为无限的元素生成的循环群记为 C_∞	
$\rightarrowtail$	单同态	monomorphism	若 φ 是模 A 到 B 同态映射，而且又是单射时，记为 $A\overset{\varphi}{\rightarrowtail}B$ 或 $\varphi:A\rightarrowtail B$	多用在同调代数中模的同态上
$\twoheadrightarrow$	满同态	surjective homomorphism	若 φ 是模 A 到 B 的同态映射，而且又是满射时，记为 $A\overset{\varphi}{\twoheadrightarrow}B$ 或 $\varphi:A\twoheadrightarrow B$	多用在同调代数中模的同态上
$\leftrightarrow,\rightleftharpoons$	双射	bijection	表示集合 M 与 $\overline{M}$ 间一个双射．例如，设 $M=\{1,2,3,\cdots\}$，$\overline{M}=\{2,4,6,\cdots\}$，则 $\varphi:n\leftrightarrow 2n$ 是双射	
$\simeq$	同态	homomorphism	$G\overset{\varphi}{\simeq}\overline{G}$ 表示 φ 是群 G 到群 $\overline{G}$ 的一个同态．有时也简记为 $G\simeq\overline{G}$	在环或其他代数系也有类似说法

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\cong$	同构	isomorphism	$G\cong\overline{G}$,表示群 G 与群 $\overline{G}$ 同构,即群 G 到群 $\overline{G}$ 存在一个保持运算的双射	对环、域、模等代数系的同构,亦用符号 $\cong$,$\backsimeq$ 或 $\simeq$ 表示同构
a^{φ}	元素的像	image of an element	φ 是集合 A 到 B 的一个映射,$a\in A$. 元素 a 在映射 φ 之下的像,一般用 $\varphi(a)$ 表示. 亦用 a^{φ} 或 $a\varphi$ 表示	
G_a	稳定子群	stable subgroup	设 G 是 n 元集 $\Omega=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 上的置换群,$\alpha\in\Omega$,则 $G_\alpha=\{g\mid g\in G,\alpha^g=\alpha\}$,即 G 中一切使 α 不动的置换组成的集合	G_α 是群 G 的一个子群
α^G	像的集合	set of image	设 G 是 n 元集 $\Omega=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 上的置换群,$\alpha\in\Omega$,则 $\alpha^G=\{\alpha^g\mid g\in G\}$	α^G 是 Ω 的一个子集,且 $\lvert G\rvert=\lvert G_\alpha\rvert\cdot\lvert\alpha^G\rvert$
End G	自同态半群	endomorphism semi-group	群 G 的全体自同态对变换的乘法组成的半群	亦可记为 $E(G)$
Aut G	自同构群	automorphism group	群 G 的全体自同构对变换乘法组成的群	亦可简记为 $A(G)$
Inn$G$	内自同构群	inner automorphism group	G 是群,$a\in G,\tau_a:x\to axa^{-1}$ 是 G 的一个内自同构. G 的全体内自同构组成一个群,称为 G 的内自同构群	亦可简记为 $I(G)$. 也把 axa^{-1} 写成 $a^{-1}xa$
Out(G)	外自同构群	group of outer automorphisms	群 G 的自同构群 Aut(G) 对于 G 的内自同构群 Inn(G) 的商群,称为 G 的外自同构群	
$R(G)$	右正则表示	right regular representation	G 为群,G 上一切置换 $\tau_g=\begin{pmatrix}x\\xg\end{pmatrix}$ $(g\in G)$ 组成的集合,称为群 G 的右正则表示	$R(G)$ 是 G 上对称群的子群
Hol$G$	全形	holomorph	$S(G)$ 为群 G 上的对称群,$R(G)$ 为 G 的右正则表示,$R(G)$ 在 $S(G)$ 中的正规化子称为群 G 的全形	
GL$_n(F)$, GL(n,F)	一般线性群	general linear group	域 F 上全体 n 阶可逆方阵对乘法组成的群,称为域 F 上的一般线性群,它与域 F 上的 n 维空间 V 的全体可逆线性变换组成的乘群 GL(V) 同构,故 GL(V) 亦称一般线性群	
PGL$_n(F)$	射影一般线性群	projective general linear group	域 F 上 n 次一般线性群 GL$_n(F)$ 关于其中心所得的商群,称为 F 上射影一般线性群	
SL$_n(F)$, SL(n,F)	特殊线性群	special linear group	表示域 F 上行列式等于 1 的全体 n 阶方阵对乘法组成的群	SL$_n(F)$ 是 GL$_n(F)$ 的正规子群
PSL$_n(F)$	射影特殊线性群	projective special linear group	特殊线性群 SL$_n(F)$ 关于其中心所得的商群,称为域 F 上的射影特殊线性群	
$O_n(F,S)$	正交群	orthogonal group	F 是特征不为 2 的域,S 是 F 上任意一个固定的 n 阶可逆对称矩阵,$O_n(F,S)=\{A\mid A\in F_{n\times n}$ 且 $A'SA=S\}$ 是一个群,称为 F 上(由 S 定义的)n 次正交群	
$O(n),O_n$	实正交群	real orthogonal	由实数域上所有 n 阶正交方阵$(A'=A^{-1})$对乘法组成的群,称为 n 次实正交群	
SO(n)	旋转群	rotation group	由实数域上所有行列式等于 1 的 n 阶正交方阵对乘法组成的群,称为 n 次旋转群	
PO$_n(F,S)$	射影正交群	projective orthogonal group	正交群 $O_n(F,S)$ 关于其中心的商群	
SP$_{2n}(F,J)$	辛群	symplectic group	J 是域 F 上 $2n$ 阶可逆交错矩阵 $F_{2n\times 2n}$ 中满足 $A'JA=J$ 的一切 A 组成的群,称为 F 上的 $2n$ 次辛群	
PSP$_{2n}(F,J)$	射影辛群	projective symplectic group	辛群 SP$_{2n}(F,J)$ 关于其中心的商群	
$U_n(F,K)$	酉群	unitary group	元素为复数的 n 阶酉矩阵的全体关于矩阵的乘法组成群,称为 n 维酉群	
SU	特殊酉群	special unitary group	$U(u)$ 中行列式等于 1 的所有矩阵形成 $U(u)$ 的正规子群,称为特殊酉群	
Spin	旋量群	spinor group	与 SO(n) 局部同构的单连通李群称为旋量群	
$\langle R,+,\cdot\rangle$	环	ring	非空集合 R 关于运算"+"与"·"组成的环记为$\langle R,+\cdot\rangle$,也常简记为 R	
$\leqslant$	子环	subring	$S\leqslant R$ 表示 S 是环 R 的子环	亦可用 $<$ 表示子环或真子环
Char R	特征(数)	character	R 为任意环. 使 $na=0(\forall\ a\in R)$ 的最小正整数 n,称为 R 的特征. 若这样的 n 不存在,称 R 的特征为 ∞ 或 0,例如,Char$Z_n=n$, Char$Z=\infty$	亦称特征数,环 R 的特征亦用 ch$R$ 表示

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$U(R), R^{*}$	单位群	unit group	R 是有单位元的环，R 的全体单位(即可逆元)对 R 的乘法组成群，称为 R 的单位群. 例如，整数环 $\mathbf{Z}$ 的单位群为 $U(\mathbf{Z}) = \{1, -1\}$	R 的单位群亦称 R 的乘群
R^{0}	逆环	inverse ring	R 为环. 如果保持 R 的加法不变，而乘法改为 $a \circ b = ba$，则 R 对于原加法和新乘法 $\circ$ 也组成环，称为 R 的逆环	亦称反环，并记为 R^{op}
$\mathbf{Z}[i]$	高斯整环	Gaussian integral domain	由一切复数 $a + bi$ $(a, b \in \mathbf{Z})$ 所组成的数环	
$R[G]$	群环	group ring	设 R 是有单位元的环，G 为群，一切有限和 $\sum a_i x_i (a_i \in R, x_i \in G)$ 关于其(类似于多项式的)加法与乘法组成的环	亦可记为 $R(G)$，RG 或 GR
$F(G)$	群代数	group algebra	域 F 和群 G 构成的群环 $F[G]$，再加上 F 中元素与有限和 $\sum a_i x_i (a_i \in F, x_i \in G)$ 的乘法而得到的 F 上的代数	
$J(R)$	雅各布森根	Jacobson radical	环 R 的所有本原理想的交，称为 R 的雅各布森根. 当 R 无本原理想时，规定：$J(R) = R$	亦简称 J 根，有多种定义方法
$\trianglelefteq$	理想	ideal	$I \trianglelefteq R$ 表示 I 是环 R 的理想	亦可用 $\triangle$ 表示理想或真理想
$\langle a \rangle$	主理想	principal ideal	环中包含元素 a 的最小理想	亦可用 (a) 表示
$\oplus$ 或 $\dotplus$	环的直和	direct sum of rings	$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_n$ 或 $R = R_1 \dotplus R_2 \dotplus \cdots \dotplus R_n$. 即环 R 是 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 的直和	对于加群的直积也常称为直和；又子空间的直积，都常用 $\oplus$ 或 $\dotplus$ 表示
$\sqrt{A}$	理想的根	radical of an ideal	A 为交换环 R 的理想. $\sqrt{A} = \{a \mid a \in R, \exists\, n$ 使 $a^n \in A\}$ (n 与 a 有关)，称为理想 A 的根	亦称理想 A 的根基
$\langle S \rangle$	由 S 生成的理想	generated ideal by S	S 是环 R 的一个子集，$\langle S \rangle$ 是 R 中包含 S 的最小理想，亦即 R 中包含 S 的所有理想的交	当 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 时，常记为 $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$ 或 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$
AB	理想的积	product of ideals	A, B 是环 R 的理想，则一切有限和 $\sum a_i b_i (a_i \in A, b_i \in B)$ 组成 R 的一个理想，称为理想 A 与 B 的积	AB 是由一切元素 $ab (a \in A, b \in B)$ 生成的理想
$A : B$	理想的商	quotient of ideals	设 A, B 是交换环 R 的理想，则 R 中满足 $xB \subseteq A$ 的一切元素 x 组成 R 的理想，称为 A 与 B 的商	
$O : B$	零化理想	annihilating ideal	设 B 是交换环 R 的理想，则 R 中满足 $xB = 0$ 的一切元素 x 组成的理想，称为 B 的零化理想	当 R 为非交换时，$O : B$ 是 R 的左理想
$l(S)$, ann S_l	左零化子	left annihilator	环 R 中使 $rS = 0$ 的一切 r 组成的集合	$l(S)$ 是 R 的左理想
$r(S)$, ann S_r	右零化子	right annihilator	环 R 中使 $Sr = 0$ 的一切 r 组成的集合	$r(S)$ 是 R 的右理想
N_K	克德根	Köthe radical	环 R 的最大幂零元理想，称为 R 的克德根，简称 K 根	
N_Q	近似诣零根	quasi-nil radical	环 R 的全部近似诣零单边理想之和，称为 R 的近似诣零根	
N_L	林文茨基根	Livitzki radical	环 R 的惟一最大局部幂零理想称为 R 的林文茨基根	
N_{BM}	布朗-麦柯根	Brown-Mccoy radical	环 R 的最大 g 正则理想，称为 R 的布朗 - 麦柯根	
$F(\alpha)$	单扩张	simple extension	包含域 F 和元素 α 的最小扩域	亦称单扩域
$F(S)$	域的扩张	extension of a field	E 是域 F 的扩域，S 是 E 的一个子集，E 中包含 F 和 S 的最小域记为 $F(S)$，它是域 F 的扩张	当 $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 时，则 $F(S)$ 记为 $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$
$(E : F)$, $[E : F]$	扩域次数	degree of an extended field	E 是域 F 的扩域，则 E 是域 F 上的向量空间. E 在 F 上的维数称为扩域的次数或扩张次数	$(E : F)$ 可能有限，也可能无限
$A(E \mid F)$	E 在 F 上的伽罗瓦群	Galois group of E over F	F 是域 E 的子域，$A(E \mid F)$ 是 E 的使 F 的每个元素不动的全体自同构组成的群	
$E(G_1)$	子群 G_1 所属的域	field belong to subgroup	E 是域 F 的扩域，又 $G = A(E \mid F) \geqslant G_1$，$E$ 中所有对于 G_1 中任一元都不动的元是 E 的子域，称为子群 G_1 所属的域	$F \subseteq E(G_1) \leqslant E$
$G(E_1)$	子域 E_1 所属的群	group belong to subfield	假设同上，又 E_1 是 E 的子域且 $F \subseteq E_1 \subseteq E$. 则 G 中所有不使 E_1 中任意元变动的元素之集是 G 的子群，称为子域 E_1 所属的群	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
F_q, GF(q)	有限域	finite field	F_q 或 GF(q)表示元素个数为 q 的有限域	元素个数相同的有限域都同构
$\mathbf{Q}_p$	p 进数域	p-adic number field	表示有理数域在 p 进赋值下的完备化域	p 为素数
$\mathbf{Z}_p$	p 进整数环	ring of p-adic integers	全体 p 进整数组成的环,称为 p 进整数环	p 为素数
$K[[\ \ ]]$	形式幂级数环	formal power series ring	$K[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$表示系数在域 K 中的形式幂级数环	亦可表示成 $R\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$
$G_rU(A)$	分次单位群	graded unit group	G 为群,$U(A)$ 是 G 分次代数 $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ 的单位群. A 的一切分次单位组成 $U(A)$ 的一个子群	
GS(V)	半线性变换群	semilinear transformation group	V 是域 F 上的向量空间,V 的一切非奇异半线性变换组成群,称为半线性变换群	
$J_G(M)$	雅各布森分次根	Jacobson graded radical	R 为 G 分次环,M 为分次 R 模. M 的一切分次极大模的交,称为 M 的雅各布森分次根	
δ	导子	derivation	环 R 的导子,即 R 的满足 $\delta(a+b)=\delta a+\delta b$ 与 $\delta(ab) = (\delta a)b + a(\delta b)$ 的变换 δ	
$D(A)$	A 上微分算子环	ring of differential operators over A	称 $\bigcup_{i=0}^{\infty} D^i(A)$ 为 A 上线性微分算子环	
deg A	代数 A 的次数	degree of algebra A	设 A 是域 F 上中心单代数,且$(A : F) = m^2$,则称 m 为 A 的次数	
Ind$A$	舒尔指数	Schur index	A 是域 F 上有限维中心单代数,且 $A \cong M_n(D)$,其中 D 是 F 上可除代数,称 deg$D$ 为 A 的舒尔指数	
Bsi$A$	次理想	subideal	设 B 是代数 A 的一个子代数,若有 $B = B_0 \subseteq \cdots \subseteq B_n = A$,其中 B_i 是 B_{i+1} 的理想,则称 B 是 A 的次理想	
$\triangle_T$	T 理想	T-ideal	设 I 是代数 A 的一个理想. 如果对 A 的每个自同态 φ 均有 $\varphi(I) \subseteq I$,则称 I 为 A 的 T 理想	
$S^{-1}R$	分式环	ring of fractions	设 R 是有单位元的交换环,S 是 R 的乘闭子集. 则一切 $a/s(\forall a \in R, s \in S)$ 关于分式的加法和乘法组成环,称为 R 关于 S 的分式环	
$P^{(n)}$	符号幂	symbolic power	设 P 是有单位元的交换环 R 的素理想,$S_P = R\backslash P$. 称 $S_P^{-1}P^n$ 在 R 中的收缩理想为 P 的 n 次符号幂	
(x,y,z)	结合子	associator	称 $(xy)z - x(yz)$ 为非结合代数中三个元素 x,y,z 的结合子	
Der(R)	导子李环	Lie ring of derivations	结合环 R 的导子在加法与乘法$[\delta_1,\delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$ 之下组成的李环,称为导子李环	
Corad(C)	余代数的余根	coradical of coalgebra	余代数 C 的所有单子余代数的和,称为 C 的余根	
$l(K\|F)$	F 共轭映射数	number of F-conjugate mapping	设 Ω 是域 F 的扩域 K 的代数闭包,则 K 到 Ω 的一切 F 共轭映射的个数记为 $l(K\|F)$	
tr. deg$_F K$	超越次数	transcendence degree	域 F 的扩域 K 的超越基的基数称为 K 在 F 上的超越次数	
$N_F^K(\alpha)$	α 的范	norm of α	K 是域 F 的有限次扩域,Ω 是 F 的含 K 的代数闭包;又 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$ 为 K 到 Ω 的一切互异的 F 共轭映射,则 $N_F^K(\alpha) = (\prod_{j=1}^{m} \sigma_j(\alpha))^{[K:F]_i}$ 称为 K 中元 α 的范	
$T_F^K(\alpha)$	α 的迹	trace of α	K 是域 F 的有限次扩域,Ω 是 F 的含 K 的代数闭包;又 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$ 为 K 到 Ω 的一切互异的 F 共轭映射,则 $T_F^K(\alpha) = [K : F]_i \cdot \sum_{j=1}^{m} \sigma_j(\alpha)$ 称为 K 中元 α 的迹	
X_F	正锥集	set of positive cone	X_F 表示实域 F 的全部正锥组成的集合	
$X_F(T)$	序空间	space of orderings	T 是实域 F 的一个亚正锥,$X_F(T)$ 表示 F 上所有包含 T 的正锥所组成的集合,称为亚序域(F,T)的序空间	
$H(F)$	实全纯环	real holomorphic ring	实域 F 的所有实赋值环的交是 F 的一个子环,称为 F 的实全纯环	
(F,φ)	赋值域	valued field	带有赋值 φ 的域 F,称为赋值域	带有赋值环 B 的域 F 记为(F,B)
M_R	右 R 模	right R-module	R 是有单位元的环,M_R 是右 R 模,即作用乘法为 $ar(a \in M, r \in R)$	类似地有左 R 模$_RM$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\hookrightarrow$	子模	submodule	$A \hookrightarrow M$ 表示 A 是模 M 的一个子模	
$\hookrightarrow$	小子模	small submodule	设 A 是模 M 的一个子模. 如果对 M 的任意子模 Z 有 $A+Z=M$ 必有 $Z=M$,则称 A 为 M 的小子模,记为 $A \hookrightarrow M$	即只有 M 才使 $A+M=M$ 的子模 A 称为小子模
$\overset{*}{\hookrightarrow}$	大子模	large submodule	设 A 为模 M 的子模,若对 M 的任意子模 Z 有 $A \cap Z=0$ 必有 $Z=0$,则称 A 为 M 的大子模,记为 $A \overset{*}{\hookrightarrow} M$	即只有 $\{0\}$ 使 $A \cap \{0\}=0$ 的子模 A 称为大子模
$\mathrm{Si}(M)$	奇异子模	singular submodule	设 M 为右 R 模,M 中所有使 $r_r(m) \overset{*}{\hookrightarrow} R_R$ 的 m 组成的集是 M 的子模,称为奇异子模,其中 $r_R(m)=\{r \mid r \in R, mr=0\}$	
$\mathrm{ann}_R\, x$	阶理想	order ideal	设 R 是有1环,M 是左 R 模,$x \in M$,记 $\mathrm{ann}_R x=\{a \in R \mid ax=0\}$,称为 x 在 R 中的阶理想	亦称为 x 在 R 中的零化子. 记为 $(0:x)$
M^+	特征模	character module	M 是左 R 模,$M^+=\mathrm{Hom}_Z(M,Q/Z)$ 对于 $(f \circ r)(x)=f(rx)(f \in M^+, r \in R, x \in M)$ 组成右 R 模,称为 M 的特征模	
$\mathrm{G.dim}(M)$	戈迪维数	Goldie dimension	若 R 模 M 有子模 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 使 $\sum_{i=1}^{n} U_i$ 为直和且为 M 的本质子模,则称 n 为 M 的戈迪维数	
R-Mod	R 模范畴	category of R-modules	所有左 R 模构成的范畴,称为左 R 模范畴	
$H^n(X)$	上同调模	cohomology modules	令 $X: \cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \cdots$ 是环 R 上的复形,$H^n(X)=\ker d^n/\mathrm{Im} d^{n-1}$,称为 X 的上同调模	
$\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$	函子 Ext	functor Ext	设 M 是右 R 模,用 $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 表示 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 的右导出函子	
$\mathrm{Tor}_n^R(M,-)$	函子 Tor	functor Tor	设 M 是右 R 模,用 $\mathrm{Tor}_n^R(M,-)$ 表示 $M \otimes_R -$ 的左导出函子	
$\mathrm{l \cdot Pd}_R M$	左投射维数	left projective dimension	表示 M 为左 R 模,M 的左投射维数	亦称左同调维数,记为 $\mathrm{l \cdot dh}_R N$
$\mathrm{r \cdot pd}_R N$	右投射维数	right projective dimension	表示 N 为右 R 模,N 的右投射维数	亦称右同调维数,记为 $\mathrm{r.dh}_R N$
$\mathrm{l.gl.dim}\, R$	左整体维数	left global dimension	环 R 的左整体维数 $\mathrm{l.gl.dim}\, R=\sup\{\mathrm{l.pd}_R M \mid M \in \mu_R\}$	
$\mathrm{r.gl.dim}\, R$	右整体维数	right global dimension	环 R 的右整体维数 $\mathrm{r.gl.dim}\, R=\sup\{\mathrm{r.pd}_R M \mid M \in \mu_R\}$	
$\mathrm{l.Id}_R M$	左内射维数	left injective dimension	表示左 R 模 M 的左内射维数	
$\mathrm{r.Id}_R N$	右内射维数	right injective dimension	表示右 R 模 N 的右内射维数	
$\mathrm{l.Fd}_R M$	左平坦维数	left flat dimension	表示左 R 模 $M \neq 0$ 的左平坦维数	亦称弱左同调维数,记为 $\mathrm{w.l.dh}_R M$
$\mathrm{r.Fd}_r N$	右平坦维数	right flat dimension	表示右 R 模 $N \neq 0$ 的右平坦维数	亦称弱右同调维数记为 $\mathrm{w.r.dh}_R N$
$M_1 * M_2 * \cdots * M_n$	双积	biproduct	设 M 及 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 为 R 模. 若有模同态 $\sigma_i: M_i \to M$ 与 $\pi_j: M \to M_j$ 满足 $\pi_j \sigma_i=\delta_{ji}$ 与 $\sum \sigma_i \pi_i=1_M$,则称 $\pi_j M$ 是模 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的双积	
$\mathrm{Obj}(K)$	对象类	class of objects	K 是一个范畴,K 的所有对象构成的类称为 K 的对象类	
$\mathrm{Mor}_K(A,B)$	(态)射集	set of morphisms	A,B 是范畴 K 的两个对象. 由 A 与 B 所决定的一个集合称为 A 与 B 的(态)射集	亦称为由 A 到 B 的射或态射
$\mathrm{Dom}(\alpha)$	(态)射的域	domain of a morphism	表示在范畴中,设 $\alpha \in \mathrm{Mor}_K(A,B)$,则称 A 为(态)射 α 的域	
$\mathrm{Cod}(\alpha)$	(态)射的上域	codomain of a morphism	在范畴中,当 $\alpha \in \mathrm{Mor}_K(A,B)$ 时,称 B 为(态)射 α 的上域	
$\mathrm{rad}(M)$	模的根	radical of a module	表示模 M 的所有极大子模的交	亦即 M 的所有小子模的和
$Soc\,(M)$	模的基座	socle of module	表示模 M 的所有极小子模的和	亦即 M 的所有大子模的交
$\ker \varphi$	核	kernel	φ 是环 R 模 A 到 B 的一个同态映射,称 B 中零元素的全体逆象 $\varphi^{-1}(0)$ 为 φ 的核	对群、环等代数系也有类似概念

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Coker φ	上核	cokernel	φ是环 R 模 A 到 B 的一个同态映射，商模 $B/\mathrm{Im}\varphi$称为φ的上核	亦称余核
Coim φ	上象	coimage	φ是环 R 模 A 到 B 的一个同态映射，商模 $A/\mathrm{Ker}\,\varphi$称为 φ 的上像	亦称余像
M/N	商空间	quotient space	表示两代数系 M,N 的商空间	
dim V	维数	dimension	表示线性空间 V 的维数	
V^*	对偶空间	dual space	域 F 上线性空间 V 的所有线性函数组成 F 上的线性空间，称为 V 的对偶空间	V^* 即 $\mathrm{Hom}_F(V,F)$
$W(A)$	矩阵的数值域	numerical range of a matrix	$A \in C^{n\times n}$，称 $W(A)=\{x^*Ax \mid x\in C^n, x^*x=1\}$ 为 A 的数值域	
$r(A)$	矩阵的数值半径	numerical radius of a matrix	$A\in C^{n\times n}$，称 $\max\limits_{Z\in W(A)}\lvert Z\rvert$ 为 A 的数值半径	
V_{λ_0}	特征子空间	characteristic subspace	设 σ 是线性空间 V 的一个线性变换，λ_0 是 σ 的一个特征值，则对应于 λ_0 的全体特征向量和零向量组成的子空间称为特征子空间	
$T(G,x)$	对称化算子	symmetrization operator	张量空间 $T_0^p(E)$ 或 $T_p^0(E)$ 的线性变换 $S_p=\sum\limits_{\sigma\in G_p}\sigma$ 称为对称化算子，其中 G_p 为置换群	
$V_x(G)$	张量对称类	symmetric class of tensors	设 $\overset{m}{\otimes}V$ 是张量空间，x 是群 G 的不可约特征标，$T(G,x)$ 是对称化算子，则称 $\mathrm{Im}T(G,x)$ 为关于 G 和 x 的张量对称类	
Inex $V_\chi(G)$	张量对称类的指标	index of symmetric class of tensor	表示张量对 称类 $V_\chi(G)$ 的指标	
$d_G^\chi(A)$	广义矩阵函数	generalized matrix function	设 $A=(a_{ij})$ 为 m 阶复方阵，G 为 S_m 的子群，f 是 G 到 C 的任一函数，则称 $d_G^\chi(A)=\sum\limits_{\sigma\in G}f(\sigma)\prod\limits_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)}$ 为广义矩阵函数	
$E(V)$	外代数	exterior algebra	设 V 为域 $K(\mathrm{char}K\neq 2)$ 上向量空间，$\overset{m}{\wedge}V$ 为 K 上的格拉斯曼空间，则直和 $\overset{0}{\wedge}V\oplus\overset{1}{\wedge}V\oplus\cdots\oplus\overset{n}{\wedge}V$ 可组成 K 上代数，称为 V 上的外代数	亦称格拉斯曼代数
$\vee E$	对称代数	symmetric algebra	设 E 是域 $K(\mathrm{chark}=0)$ 上的向量空间，$\vee^p$ 是 E 的 p 次对称幂，则 $\vee E=\bigoplus\limits_{p=0}^{\infty}\vee^pE$ 可组成 K 上交换代数，称为 E 上的对称代数	
S_V	对合 S_V	involution S_V	设 V 是域 K 上向量空间，则包含映射 $j:V\to C\mathcal{G}^P$ 在 $C_V\to C\mathcal{G}^P$ 的代数开拓是一个对合，其中 $C\mathcal{G}^P$ 是 V 的克利福德代数 C_V 的反代数	
$\widehat{\oplus}$	正交直和	orthogonal direct sum	设 $U_1,U_2,\cdots,U_m$ 是 V 的向量子空间，若它们两两正交且 V 为其直和，则记为 $V=U_1\ \widehat{\oplus}\ \cdots\ \widehat{\oplus}\ U_m$，称 V 为 U_i 的正交直和	
$\uplus$	格-并	lattice-union	$A\uplus B$ 表示两个理想 A,B 的格-并	
$\boldsymbol{C}^0$	对偶范畴	dual category	由范畴 $\boldsymbol{C}$ 作出的新范畴 $\boldsymbol{C}^0$：$\boldsymbol{C}^0$ 的对象类即 $\boldsymbol{C}$ 的对象类，定义 $\mathrm{Hom}_{C^0}(A^0B^0)=\mathrm{Hom}_C(B,A)$，并规定 $f^0g^0=(gf)^0$，称 $\boldsymbol{C}^0$ 为 $\boldsymbol{C}$ 之对偶范畴	
Set	集范畴	category of sets	以一切集合为对象，以集合映射为态射的范畴	
Top	拓扑空间范畴	category of topological spaces	以一切拓扑空间为对象，以连续映射为态射的范畴	亦可表示成 $\mathscr{T}$
Group	群范畴	category of groups	以一切群作对象，以群同态作态射的范畴	亦可表示成 $\mathscr{G}$
AG	阿贝尔群范畴	category of Abelian groups	以一切阿贝尔群作对象，以阿贝尔群同态作态射的范畴	
Ring	环范畴	category of rings	以一切环作对象，以环同态作态射的范畴	亦可表示成 μ_R
$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\boldsymbol{C}_\lambda$	积范畴	product category	$\{\boldsymbol{C}_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 为一个范畴集合. 由它们所作出的新范畴 $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\boldsymbol{C}_\lambda$ 为 $\{\boldsymbol{C}_\lambda\}$ 的积范畴	
$\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$	上积	coproduct	$\{A_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 为范畴 $\boldsymbol{C}$ 的一个对象集. 若对象 $B\in\boldsymbol{C}$ 与一态射集具有泛性质，则称 B 为 $\{A_\lambda\}$ 的上积	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
IBN	IBN 环	IBN ring	R 为环. 如果每个有限生成的 R 模的任二基中元素个数必相等,则称 R 为 IBN 环	
$(\mathscr{C},\perp)$	带积范畴	category with product	规定映射 $\perp:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 的范畴 $\mathscr{C}$ 称为带积范畴	
ΦF	纤维范畴	fibre category	$(\mathscr{C},\perp)$与$(\mathscr{D},T)$为带积范畴,$F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为保积函子. 由此定义的新范畴 ΦF(对象类为$\{(M,N,\alpha)\mid M,N\in\mathscr{C},\alpha:F(M)\cong F(N)\}$称为 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 的纤维范畴)	
$\mathrm{gl}(V)$	一般线性李代数	general linear lie algebra	$\mathrm{gl}(V)$ 表示域上 n 维空间 V 的所有线性变换在运算 $[A,B]=AB-BA$ 下组成的 n^2 维李代数,称为一般线性李代数	
$n(P)$	偏序集的阶	order of poset	偏序集 P 的基数称为 P 的阶	
$l(P)$	偏序集的长	length of poset	偏序集 P 中链的长的最小上界称为 P 的长	
$\mathrm{Sup}\ X$	上确界	supremum	偏序集的子集 X 的上确界	亦称最小上界. 记为 $\vee X$ 或 l. u. b. X
$\inf X$	下确界	infimum	偏序集的子集 X 的下确界	亦称最大下界. 记为 $\wedge X$ 或 g. l. b. X
$(L;\leqslant)$	格	lattice	若偏序集 L 的任二元素均有上确界和下确界,则称 L 为格	
$\Phi(L)$	弗拉梯尼子格	Frattini sublattice	表示格 L 的弗拉梯尼子格	
a^+	a 的正部	positive part of a	a 是格群的一个元素,$a^+=a\vee 0$ 称为 a 的正部	
a^-	a 的负部	negative part of a	a 是格群的一个元素,$a^-=(-a)\vee 0$ 称为 a 的负部	
$X^\perp$	极	polar	X 是格群 G 的子集,$X^\perp=\{y\in G\mid \lvert y\rvert\wedge\lvert x\rvert=0,\forall x\in X\}$,称为 X 的极	
$J\perp K$	独立 l 理想	independent l-ideal	格序群的 l 理想 J,K 若有 $J\wedge K=0$,则称 J 和 K 是独立的	
$R(G)$	康莱德根	Conrad radical	格序群 G 的一切本质性值的交是一个 l 理想,称为 G 的康莱德根	
R^+	偏序环的序	order of po-ring	R 是偏序环,$R^+=\{r\in R\mid r\geqslant 0\}$,称为 R 的序	亦称 R 的正锥
BCK	BCK 代数	BCK-algebra	一种有序代数系统	
BCI	BCI 代数	BCI-algebra	一种较 BCK 代数广泛的代数结构	
$\langle X;*,0\rangle$	双 B 代数	two B-algebra	表示 BCK 代数或 BCI 代数,二者合称双 B 代数	
A^*	稳定子	stabilizer	A 是 BCK 代数 X 的子集,$A^*=\{x\in X\mid x*a=x$ 且 $a*x=a,\forall a\in A\}$,称为 A 的稳定子	
(X,O_X)	环式空间	ringed space	带有一个环层 O_X 的拓扑空间 X,称为环式空间	
$\chi(O_X)$	欧拉-庞加莱特征标	Euler-Poincaré characteristic	n 维完备簇 X 的欧拉 - 庞加莱的特征标定义为 $\chi(O_X)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim_k H^i(X,O_Z)$	
$K(X)$	小平维数	Kodaira dimension	X 是 n 维完备代数簇. 在 X 利用归纳法定义的维数 $K(X)$ 称为小平维数	
$R(X)$	典范环	canonical ring	X 为光滑射影族,ω_E 为其典范层,X 的典范环为 $R(X)=\bigoplus_{n\geqslant 0}H^0(X,\omega_X^{\otimes n})$	
$\mathrm{Pic}(X)$	皮卡群	Picard group	环式空间(X,O_X)的可逆层的同构类组成的群(运算由可逆层的张量积所诱导),称为 X 的皮卡群	
$\mathrm{Pic}^0(X)$	皮卡簇	Picard variety	X 是代数闭域 K 上的射影光滑代数簇,$\mathrm{Pic}(X)$ 中包含 O 的分支是一个射影概形,它的既约结构是一个阿贝尔族,称为 X 的皮卡簇	
$\mathrm{Alb}(Z)$	阿尔班尼斯簇	Albanese variety	X 是射影光滑代数簇. X 的皮卡簇的对偶阿贝尔簇称为 X 的阿尔班尼斯簇	
$G_{n,m}$	格拉斯曼簇	Grassmannian variety	一个 n 维线性空间的所有 m 维线性子空间的集合称为一个格拉斯曼簇	亦称格拉斯曼流形或格拉斯曼空间
$\mathrm{Flag}(n_1,n_2,\cdots,n_r)$	旗簇	flag variety	V 是 n 维向量空间,$n=n_1>n_2>\cdots>n_r>0$. 则 V 的所有由子空间组成的指标为$(n_1,n_2,\cdots,n_r)$的旗的集合,称为一个旗簇	
$\veebar$	叉积	cross product	a,b 的叉积等于 a,b 的对称差的补运算,即 $a\veebar b=(a\triangle b)'$	这里 $a,b\in B$,B 称为布尔集

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
c	胞腔度	cellularity	cA=sup{|x||x是其中的一个两两不相交的族}.称为布尔代数A的胞腔度	
sat A	浸润度	saturation	sat$A$=min{u|u是基数且对A的每个两两不相交的族x有|x|<u}表示A的浸润度,它是一个正则基数,式中|x|表示x的基数	
π	稠密度	density	πB=min{|x||$x\subseteq B$在B中稠密}表示X在布尔代数B中的稠密度	
Id	理想	ideal	Id(B)表示布尔代数B中的全体理想	布尔代数B中的每个理想记为I,有限集的理想记为fin
Sub	子代数	subalgebra	Sub$A$表示无限布尔代数A的一切子代数所构成的集合	sub(B)表示布尔代数B的子代数所构成的格
Ult	超滤子	ultrafilter	Ult$A$表示无限布尔代数A的超滤子的全体	
Filt	滤子	filter	Filt$A$表示无限布尔代数A的一切滤子所构成的集合	
$\sum$	最小上界	least upper bound	$\sum^B M$表示M在布尔代数B中的最小上界,其中M是B的子集	
clop	闭开代数	clopen algebra	拓扑空间X的所有闭开集,用clop$X$表示,构成X上的集合代数称为X的闭开代数	
RO(　)	正则开代数	regular open algebra	RO(x)={u|$u\subseteq X$且$r(u)=u$}, 其中$r(u)$=int(cl(u))是u的正则化	
Bai	贝尔代数	Baire algebra	Bai$X$={$a\subseteq X$|a有贝尔性质},其中a是拓扑空间X的子集,存在X的一个开集u,使对称差$a\triangle u$是贫集	
A↾a	相对代数	relative algebra	$A\upharpoonright a$={x|$x\in A$且$x\leqslant a$}表示A关于a的相对代数.式中A是布尔代数,且$a\in A$	亦称因子代数
pred(t)	前趋集合	predecessor set	偏序集(T,$\leqslant_T$)是一棵树,且所有的$t\in T$,集合pred(t)是由$<_T$决定的一个良序集合	
Tor	挠积	torsion product	$Tor_n(M,N)$是M和N的挠积	
Ext	扩张	extension	$Ext^n(M,N)$是M,N的扩张	

分析学(analysis)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
(a,b)	开区间	open interval	表示a与b之间(不包括端点a与端点b)的一切实数组成的集合	亦可用$]a,b[$表示
$[a,b]$	闭区间	closed interval	表示a与b之间(包括端点a与端点b)的一切实数组成的集合	
$(a,b]$	左半开区间	left half open interval	表示a与b之间(不包括端点a但包括端点b)的一切实数组成的集合	亦可用$]a,b]$表示
$[a,b)$	右半开区间	right half open interval	表示a与b之间(包括端点a但不包括端点b)的一切实数组成的集合	亦可用$[a,b[$表示
e^x或exp x	指数函数	exponential function	表示以e为底,以x为指数的函数,可写成$y=e^x$或$y=\exp x$	在同一场合中,只用其中一种符号
e	超越数	transcendental number	$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718\ 281\ 828\ 459\cdots$	通常作为自然对数的底
$\log_a x$	对数函数	logarithmic function	表示以a为底,自变量为x的对数函数,可写成$y=\log_a x$	
ln x	自然对数	natural logarithm	表示以e为底,自变量为x的对数函数	
lg x	常用对数	common logarithm	表示以10为底,自变量为x的对数函数	
lb x	2为底的对数	logarithm to the base 2	表示以2为底,自变量为x的对数函数	亦可记为$\log_2 x$
sh x 或sinh x	双曲正弦	hyperbolic sine	$\text{sh}\ x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
ch x 或 cosh x	双曲余弦	hyperbolic cosine	$\text{ch } x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	
th x 或 tanh x	双曲正切	hyperbolic tangent	$\text{th } x=\frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	
coth x	双曲余切	hyperbolic cotangent	$\text{coth } x=\frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$	
sech x	双曲正割	hyperbolic secant	$\text{sech } x=\frac{1}{\text{ch } x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$	
csch x 或 cosech x	双曲余割	hyperbolic cosecant	$\text{csch } x=\frac{1}{\text{sh } x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$	
arsh x	反双曲正弦	inverse hyperbolic sine	$\text{arsh } x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-\infty<x<+\infty)$	亦可用 arsinh$x$ 表示
arch x	反双曲余弦	inverse hyperbolic cosine	$\text{arch } x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1)$	亦可用 arcosh x 表示
arth x	反双曲正切	inverse hyperbolic tangent	$\text{arth } x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)$	亦可用 artanh x 表示
arcoth x	反双曲余切	inverse hyperbolic cotangent	$\text{arcoth } x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\ (\|x\|>1)$	
arsech x	反双曲正割	inverse hyperbolic secant	$\text{arsech } x=\ln(1\pm\sqrt{1-x^2})-\ln x(0<x\leqslant 1)$	
arcsch x	反双曲余割	inverse hyperbolic cosecant	$\text{arcsch } x=\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\ln x$	亦可用 arcosech x 表示
$f(x)$	函数	function	如 $y=f(x)$ 表示以 x 为自变量的一元函数	
$f(x_1,\cdots,x_n)$	n 元函数	n-ary function	表示以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量的 n 元函数	
Grf	图像	graph	表示函数 f 的图像	
$f(x)\|_{x=a}$	函数值	function value	表示函数 $f(x)$ 在点 a 处的函数值，即 $f(x)\|_{x=a}=f(a)$	
$f(x)\|_a^b$ 或 $[f(x)]_a^b$	函数值的差	difference of the function value	表示函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$端点处函数值的差，即 $f(x)\|_a^b=f(b)-f(a)$ 或$[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$	这种表示法常用于定积分的计算
const	常值函数	constant function	若 $f(x)=c$，则称 $f(x)$是常值函数，记为 const$f$	亦简记为 $f(x)=c$
$I(x)$	恒等函数	identity function	表示对 D 中一切 x 都有 $I(x)=x$	
$g\circ f$	复合函数	composite function	表示由函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 复合而成的函数，即 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$	亦称合成函数
$\rightarrow$	趋于或收敛于	converges to	$x\rightarrow a$ 表示 x 无限接近 a；$x_n\rightarrow a$ 表示序列$\{x_n\}$收敛于 a	$x\not\rightarrow a$ 表示 x 不趋于 a，$x_n\not\rightarrow a$ 表示序列$\{x_n\}$不收敛于 a
$\rightrightarrows$	一致收敛	uniformly convergent	$f_n\rightrightarrows f$ 表示 f_n 在 D 内一致收敛于 f，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}\|f_n(x)-f(x)\|=0$	
$\downarrow$，$\searrow$	单调递减	monotone decreasing	随自变量 x 的增加，函数值 $f(x)$ 逐渐减少	
$\uparrow$，$\nearrow$	单调增加	monotone increasing	随自变量 x 的增加，函数值 $f(x)$ 逐渐增加	
$\simeq$	渐近等于	asymptotically equal to	在某极限过程中，值可以无限接近的两个函数. 如当 $x\rightarrow a$ 时，$\frac{1}{\sin(x-a)}\simeq\frac{1}{x-a}$	在无穷小量比较时，表示等价无穷小，记为 $\sim$
$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	极限	limit	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 表示当 x 趋于 a 时，$f(x)$无限接近于 b. 右极限和左极限分别记为：$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$	亦可记为：当 $x\rightarrow a$ 时，$f(x)\rightarrow b$
$O(g(x))$	兰道记号	Landau's notation	$f(x)=O(g(x))$意为$\|f(x)/g(x)\|$在行文所述的极限中有上界	比较无穷小量时，表示同阶无穷小
$o(g(x))$	兰道记号	Landau's notation	$f(x)=o(g(x))$表示在行文所述的极限中 $f(x)/g(x)\rightarrow 0$	比较无穷小量时，表示高阶无穷小
Δx	增量	increment	$\Delta x=x-x_0$ 表示自变量 x 的增量	亦称 x 的改变量

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\frac{df}{dx}$	导函数或微商	derived function	函数 f 的改变量与自变量 x 的改变量之比，当自变量改变量 Δx 趋于零时的极限表示为 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{df}{dx}$ 或 $\frac{df}{dx}$	亦可用 f' 或 Df 来表示．简称导数
$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$	导函数值	value of derived function	函数 $f(x)$ 在某点 a 的导数值．记为 $\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=a}$ 或 $\left(\frac{df'}{dx}\right)_{x=a}$	亦可用 $f'(a)$ 或 $Df(a)$ 来表示
$\frac{d^nf}{dx^n}$	n 阶导数	derivative of n-order	对 $f(x)$ 连续求 n 次一阶导数．记为 $\frac{d^nf}{dx^n}$ 或 $f^{(n)}$．当 $n=2,3$ 时，常用 f''，f''' 来代替，称为2阶、3阶导数．如自变量是时间 t，常用 $f''(t)$ 来代替 $\frac{d^2f}{dt^2}$	亦可用 $f^{(n)}$ 或 D^nf 来表示
$\frac{\partial f}{\partial x}$ 或 $\partial_x f$	偏导数或偏微商	partial derivative	对多元函数的其中一个自变量 x 求导数，其他变量暂视为常数所得的结果	亦可用 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,\cdots}$ 或 f_x 表示
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 或 f_{xy}	混合偏导数	mixed partial derivative	先对 x 求导，再对 y 求导，即 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$，	
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 或 f_{xx}	二阶偏导数	partial derivative of 2-order	对 x 连续求二阶导数，其他变量视为常数	
$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n\partial y^m}$	$m+n$ 阶偏微商	partial derivative of $(m+n)$-order	函数 f 先对 x 求 n 次偏微商，再对 y 求 m 次偏微商	
$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$	函数行列式	functional determinant	表示 u,v,w 对 x,y,z 的函数行列式，其中 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$，$w(x,y,z)$ 都是多元函数	亦称雅可比行列式（Jacobian 行列式）
df	全微分	total differential	$df(x_2,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$	
$^*R$ 或 R^*	扩张的实数系	extended real number system	把 $+\infty$ 与 $-\infty$ 加到实数系所得的数系	亦可记为 $[-\infty,+\infty]$
$\{a_n\}$	数列	sequence of number	表示数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots$	
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	无穷级数	infinite series	无穷数列的各项用加号连结而成的表达式	
$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$	叠级数	iterated series	各项均为级数的级数，其中 $\{a_{mn}\}$ 称为二重序列	亦称累级数
$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$	二重级数	double series	把二重序列的项 a_{mn} 按任意次序排列并用加号连结得到的表达式	
$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$	无穷乘积	infinite product	把无穷序列 $u_1,u_2,\cdots,u_n\cdots$ 的各项连乘	
$f(a-0)$	左极限	left limit	$f(a-0)=\lim_{x\to a-0} f(x)$	
$f(a+0)$	右极限	right limit	$f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)$	
$f'_-(x)$	左导数	left derivative	$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	
$f'_+(x)$	右导数	right derivative	$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	
$\overline{\int_a^b} f(x)dx$	黎曼上积分	Riemann upper integral	$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\sup_{P\in\mathscr{P}} S_P(f)$	
$\underline{\int_a^b} f(x)dx$	黎曼下积分	Riemann lower integral	$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\inf_{P\in\mathscr{P}} S_P(f)$	
$\int_{D\subset R^n} f(x)dx$	n 重积分	n-fold integral	$\int_{D\subset R^n} f(x)dx=\iiint\cdots\int_D f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$	
Vf	变分	variation	$Vf=f_1(x)-f(x)$	
V 或 Var	变差	variation	V_a^bf 或 $\mathrm{Var}_{[a,b]}f$ 表示函数 f 在 $[a,b]$ 上的全变差，当 $a=b$ 时，定义 $V_a^af=0$；当 $V_a^bf<\infty$ 时，称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数	
δJ	泛函 J 的变分	variation of the functional J	泛函 $J[Y]$ 的一阶变分 $\delta J=\left(\frac{\partial J[Y]}{\partial\epsilon}\right)_{\epsilon=0}\cdot\epsilon$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Lip 或 lip	李普希茨条件	Lipschitz condition	$f\in \mathrm{lip}\alpha$ 或 $f\in \mathrm{Lip}\alpha$ 表示函数 f 满足 α 阶李普希茨条件	
Δf	一阶向前差分	forward difference of first-order	$\Delta f(x_i)=f(x_i+h)-f(x_i)$	
$\Delta^2 f$	二阶向前差分	forward difference of second-order	$\Delta^2 f(x_i)=\Delta f(x_i+h)-\Delta f(x_i)$	
$\Delta^n f$	n 阶向前差分	forward difference of n-order	$\Delta^n f(x_i)=\Delta^{n-1}f(x_i+h)-\Delta^{n-1}f(x_i)$	
∇f	一阶向后差分	backward difference of first-order	$\nabla f(x_i)=f(x_i)-f(x_i-h)$	
$\nabla^2 f$	二阶向后差分	backward difference of second-order	$\nabla^2 f(x_i)=\nabla f(x_i)-\nabla f(x_i-h)$	
$\nabla^n f$	n 阶向后差分	backward difference of n-order	$\nabla^n f(x_i)=\nabla^{n-1}f(x_i)-\nabla^{n-1}f(x_i-h)$	
δf	一阶中心差分	centered difference of first-order	$\delta f(x_i)=f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_i-\frac{h}{2}\right)$	
$\delta^2 f$	二阶中心差分	centered difference of second-order	$\delta^2 f(x_i)=\delta f(x_i+\frac{h}{2})-\delta f(x_i-\frac{h}{2})$	
$\delta^n f$	n 阶中心差分	centered difference of n-order	$\delta^n f(x_i)=\delta^{n-1}f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-\delta^{n-1}f\left(x_i-\frac{h}{2}\right)$	
$\int f(x)\mathrm{d}x$	不定积分	indefinite integral	$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，C 是任意常数	
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	定积分	definite integral	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，其中 $\lambda=\max\limits_i\{\Delta x_i\}$	
$\mathrm{P.V.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	柯西主值	Cauchy principal value	$P.V.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$ 或 $P.V.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}f(x)\mathrm{d}x$	
$\int_C,\int_S,\int_V,\oint$	积分号	sign of integration	$\int_C,\int_S,\int_V,\oint$ 分别表示沿曲线 C，沿曲面 S，沿体积 V 以及沿闭曲线或闭曲面的积分	
$C(z),S(z)$	菲涅耳积分	Fresnel integral	$C(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$，$S(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$	
$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	二重积分	double integral	二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上的积分	
$\mathrm{Li}(x)$ 或 $\mathrm{li}(x)$	对数积分	logarithmic integral	$\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}$，高斯用函数 $\frac{1}{\log t}$ 表示在大整数 t 附近的素数分布的平均密度	
$\mathrm{Ei}(x)$	指数积分	exponential integral	$\mathrm{Ei}(x)=\int_x^\infty\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$，当 $x<0$ 时，在 $t=0$ 处取积分主值	在量子力学中有重要应用
$\mathrm{Si}(x)$	正弦积分	sine integral	$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$	在通信工程中有重要应用
$\mathrm{Ci}(x)$	余弦积分	cosine integral	$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$	在通信工程中有重要应用
$\mathrm{sgn}\,x$	符号函数	sign function	当 $x\in\mathbb{R}$ 时，$\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -1 & (x<0);\end{cases}$ 当 $x\in\mathbb{C}$ 时，$\mathrm{sgn}\,x=\begin{cases}\frac{x}{\lvert x\rvert} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$	亦称克罗内克函数
ε_{ijk}	列维-齐维塔符号	Levi-Civita symbol	$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{(若 } ijk \text{ 为 1,2,3 的偶排列)},\\ -1 & \text{(若 } ijk \text{ 为 1,2,3 的奇排列)},\\ 0 & \text{(若 } ijk \text{ 为 1,2,3 的真重复排列)}\end{cases}$	
$\varepsilon(x)$	单位阶跃函数或称赫维赛德函数	unit step function or Heaviside function	$\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ 视作广义函数时的定义为 $\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x<0)\end{cases}$	亦可用 $\mathrm{H}(x)$ 表示

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$f*g$	f 与 g 的卷积	convolution of f and g	$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$，式中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 内的绝对可积函数	
sn x cn x dn x	雅可比椭圆函数	Jacobi elliptic function	$\mathrm{sn}\,x=\sqrt{e_1-e_3}\dfrac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}$；$\mathrm{cn}\,x=\dfrac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}$； $\mathrm{dn}\,x=\dfrac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}$，其中 $x=u\sqrt{e_1-e_3}$	
$\wp(x)$	外尔斯特拉斯椭圆函数	Weierstrass's elliptic function	$\wp(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sum\limits_{\omega\neq 0}\left(\dfrac{1}{(x-\omega)^2}-\dfrac{1}{\omega^2}\right)$	
B_n 或 b_n	伯努利数	Bernoulli's numbers	解析函数 $(\mathrm{e}^z-1)^{-1}$ 在 $z=0$ 附近的罗朗级数展开式 $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{(2n)!}z^{2n-1}$， 则称式中系数 B_n 为伯努利数	
supp f 或 spt f	函数的支集	support of function	若 Ω 是局部紧空间，则 Ω 上函数 f 的支集是 Ω 中的集合 $\{x\mid f(x)\neq 0\}$ 的闭包，表示成 supp$f$	
$\delta(x)$	狄拉克函数	Dirac δ-function	质量分布在区域 Ω 的总量为 $\iiint\limits_{\Omega}\delta_{M_0}(M)\mathrm{d}M=\begin{cases}1 & (M_0\in\Omega),\\0 & (M_0\overline{\in}\Omega),\end{cases}$ 称这样的函数为 $\delta(x)$ 函数，它在每一点的值 $\delta_{M_0}(M)=\begin{cases}0 & (M_0\neq M),\\\infty & (M_0=M)\end{cases}$	亦称 δ 函数
am x	振幅函数	amplitude function	在形如 $I_\varphi(au)=\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$ 的振荡积分中，$a(x,\theta)$ 称为振幅函数	
$\Gamma(x)$	伽马函数	gamma function	$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\ (x>0)$， $\Gamma(n+1)=n!\ (n=0,1,2,\cdots)$	亦称 Γ 函数
$\gamma(x)$	不完全伽马函数	incomplete gamma function	$\gamma(x)=\int_0^{\lambda}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$；$\gamma(x)=\int_{\lambda}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$，其中 x>0	在统计学和分子结构论中常用
$B(x,y)$	贝塔函数	beta function	$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$，$(x,y\in\mathsf{R};x>0,y>0)$；$B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$	亦称 β 函数
$\Psi(x)$	普西函数	psi function	$\Psi(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln\Gamma(x))$ 是函数方程 $\Psi(x+1)-\Psi(x)=\dfrac{1}{x}$，$\Psi(1)=-c$，$\lim\limits_{n\to\infty}(\Psi(x+n)-\Psi(1+n))=0$ 的解	亦称 Ψ 函数
$F(k,\varphi)$	第一类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the first kind	$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$E(k,\varphi)$	第二类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the second kind	$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$	
$\Pi(n,k,\varphi)$	第三类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the third kind	$\Pi(n,k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$K(k)$	第一类完全椭圆积分	complete elliptic integral of the first kind	$K(k)=F(k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$E(k)$	第二类完全椭圆积分	complete elliptic integral of the second kind	$E(k)=E(k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$	
$\Pi(n,k,\pi/2)$	第三类完全椭圆积分	complete elliptic inlegral of the third kind	$\Pi(n,k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$P_l(x)$	勒让德多项式	Legendre polynomial	方程 $(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$ 的特解， $P_l(x)=\sum\limits_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\dfrac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r}$	

数 学 符 号 表

符 号	中文名称	英文名称	意 义 或 举 例	备 注
$P_l^m(x)$	关联勒让德函数	associated Legendre function	方程 $(1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$ 的特解，$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\ (l,m=0,1,2,\cdots;m\leqslant l)$	
$T_n(x)$	第一类切比雪夫多项式	Chebyshev polynomial of the 1st kind	方程 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ 的特解，$T_n(x)=\cos(n\arccos x)\ (n=0,1,2,\cdots)$	
$U_n(x)$	第二类切比雪夫多项式	Chebyshev polynomial of the 2nd kind	方程 $(1-x^2)y''-3xy'+n(n+2)y=0$ 的特解，$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}(n=0,1,2,\cdots)$	
$L_n(x)$	拉盖尔多项式	Laguerre polynomial	方程 $xy''+(1-x)y'+ny=0$ 的特解，$L_n(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})\ (n=0,1,2,\cdots)$	
$H_n(x)$	埃尔米特多项式	Hermite polynomial	方程 $y''-2xy'+2ny=0$ 的特解，$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}(n=0,1,2,\cdots)$	
H_c	超平面	hyperplane	$H_c=\{x\in\mathrm{R}^n:\langle a,x\rangle=c\}$，式中 c 为实数，a 为 R^n 中的非零元	
$F(a;b;c;x)$	超几何函数	hypergeometric function	方程 $x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$ 的特解，$F(a;b;c;x)=1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2+\cdots$	亦称超比函数
$F(a;c;x)$	合流超几何函数	hypergeometric function of confluent type	方程 $xy''+(c-x)y'-ay=0$ 的特解，$F(a;c;x)=1+\frac{a}{c}x+\frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}x^2+\cdots$	亦称汇合型超几何函数或库默尔函数
$J_l(x)$	第一类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 1st kind	方程 $x^2y''+xy'+(x^2-l^2)y=0$ 的特解，$J_l(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{l+2k}}{k!\Gamma(l+k+1)}$	
$N_l(x)$	第二类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 2nd kind	$N_l(x)=\lim_{k\to l}\frac{J_k(x)\cos k\pi-J_{-k}(x)}{\sin k\pi}$. 它是贝塞尔方程的第二解，可由第一类柱贝塞尔函数定义	亦称柱汉克尔函数
$H_l^{(1)}(x)$ $H_l^{(2)}(x)$	第三类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 3rd kind or cylindrical Hankel function	$H_l^{(1)}(x)=J_l(x)+\mathrm{i}N_l(x)$，$H_l^{(2)}(x)=J_l(x)-\mathrm{i}N_l(x)$. 它们是第一类和第二类柱贝塞尔的线性组合，是贝塞尔方程的两个线性无关解	亦称柱汉克尔函数
$I_l(x)$ $K_l(x)$	修正的柱贝塞尔函数	modified cylindrical Bessel function	方程 $x^2y''+xy'-(x^2+l^2)y=0$ 的特解，$I_l(x)=\mathrm{i}^{-l}J_l(\mathrm{i}x)$，$K_l(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}^{l+1}[J_l(\mathrm{i}x)+\mathrm{i}N_l(\mathrm{i}x)]$	亦称变形的柱贝塞尔函数
$j_l(x)$	第一类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 1st kind	方程 $x^2y''+2xy'+[x^2-l(l+1)]y=0$ 的特解，$j_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$	
$n_l(x)$	第二类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 2nd kind	$n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}N_{l+\frac{1}{2}}(x)$	亦称球诺伊曼函数，也记为 $y_l(x)$
$h_l^{(1)}(x)$ $h_l^{(2)}(x)$	第三类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 3rd kind	$h_l^{(1)}(x)=j_l(x)+\mathrm{i}n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$，$h_l^{(2)}(x)=j_l(x)-\mathrm{i}n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$	修正的球贝塞尔函数，分别记为 $i_l(x)$ 与 $k_l(x)$
∇	矢量微分算子	operator of vector differentiation	$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$	亦称哈密顿算子
grad，∇	梯度	gradient	若 $f:D(\subseteq\mathrm{R}^n)\to\mathrm{R}$，则 f 在 $\boldsymbol{a}\in D$ 的梯度为 $\mathrm{grad}f(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$	
div，$\nabla\cdot$	散度	divergence	若向量函数 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(P,Q,R)$ 连续可微，则向量场的散度为 $\mathrm{div}\boldsymbol{f}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$	
rot，$\nabla\times$	旋度	rotation	$\boldsymbol{f}=(P,Q,R)$ 是三维向量函数，$\boldsymbol{f}$ 的旋度为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Δ, ∇^2	拉普拉斯算子	Laplacian operator	$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	亦称调和算子
$\square$	达朗贝尔算子	d'Alembertain operator	$\square=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	c 为电磁波在真空中的传播速度
D	微分算子	differential operator	即 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=Df(t)$, $\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}=D^2f(t)$, …, $\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}=D^nf(t)$	
Λ	拓扑双曲不变集	topological hyperbolic set	$f:M\to M$ 是微分同胚. f 的不变闭子集 $\Lambda\subset M$ 称为拓扑双曲不变集	
Diff′	微分同胚空间	differential homeomorphic space	Diff′(M)表示 M 全体微分同胚构成的空间	
Homeo	同胚空间	homeomorphic space	Homeo(M)表示 M 的全体同胚构成的空间	
Proj	射影基向量	base vector of projective	Proj$k$ 表示 P—标架的第 k 个基向量	
Ob	阻碍集	obstruction sets	Ob(S)表示向量场 S 的阻碍集	
Log$z$	对数函数	logarithmic function	$w=\mathrm{Log}z=\log\|z\|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, z 为复数	
sin z	复变正弦函数	sine function of a complex variable	$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$, 式中 z 为复变数. 当 z 为实数时与数学分析中的正弦函数的定义一致	
cos z	复变余弦函数	cosine function of a complex variable	$\cos z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$, 式中 z 为复变数. 当 z 为实数时与数学分析中的余弦函数的定义一致	
tan z	复变正切函数	tangent function of a complex variable	$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$	
Arc sin z	复变反正弦函数	inverse sine function of a complex variable	$\mathrm{Arc}\sin z=-\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2})$, 式中 z 为复变数, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}$	
Arc cos z	复变反余弦函数	inverse cosine function of a complex variable	$\mathrm{Arc}\cos z=-\mathrm{i}\log(z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2})$, 式中 z 为复变数	
Arc tan$z$	复变反正切函数	inverse tangent function of a complex variable	$\mathrm{Arc}\tan z=\frac{1}{2i}\log\frac{i-z}{i+z}$, 式中 z 为复变数	
L(z)	分式线性变换	fractional linear transformation	$\mathrm{L}(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, 式中 a,b,c,d 都是复常数, 且 $ad-bc\neq0$	若 a,b,c,d 都是实数, 且 $ad-bc>0$ 称此为富克斯变换
(a,b,c,d)	交比	cross ratio	$(a,b,c,d)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}$, 式中 a,b,c,d 是任意四个互异的复数	亦称非调和比
$n(\gamma;a)$	环绕数	winding number	点 a 关于 γ 的环绕数, $n(\gamma;a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-a}$, 式中 γ 是一条可求长的闭路径, a 点不在 γ 上	亦称指示数或卷绕数
Resf(z)	留数	residue	在 $f(z)$ 的孤立奇点 a 的去心邻域内的罗朗级数展开式中, $1/(z-a)$ 项的系数为 c_{-1}, 即 $\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=a}f(z)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\substack{\|z-a\|=\rho\\(0<\rho<R)}}f(z)\mathrm{d}z$	亦称残数
$L(s)$	拉普拉斯变换	Laplace transform	$f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $L(s)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$	
$F(\xi)$	傅里叶变换	Fourier transform	$f(x)$ 的傅里叶变换为 $F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x$	
$F_c(\xi)$	傅里叶余弦变换	Fourier cosine transform	$f(x)$ 的傅里叶余弦变换为 $F_c(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\xi x\mathrm{d}x$	
$F_s(\xi)$	傅里叶正弦变换	Fourier sine transform	$f(x)$ 的傅里叶正弦变换为 $F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\xi x\mathrm{d}x$	
$M(z)$	梅林变换	Mellin transform	$f(x)$ 的梅林变换为 $M(z)=\int_0^\infty f(x)x^{z-1}\mathrm{d}x$	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$H(\xi)$	汉克尔变换	Hankel transform	$f(x)$ 的 v 阶汉克尔变换为 $H(\xi)=\int_0^{\infty}xf(x)J_v(\xi x)\mathrm{d}x$	
$G(n)$	勒让德变换	Legendre transform	$f(x)$ 的勒让德变换为 $G(n)=\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x$	
$\mathrm{erf}(z)$	概率积分	probability integral	$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}\mathrm{d}u$	
$\mathrm{erfc}(z)$	余概率积分	complement probability in- tegral	$\mathrm{erfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u$	
$\Phi c(z)$	正态概率积分	normal probability inte-gral	$\Phi_c(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{2}{u}}\mathrm{d}u$	
${}_pF_q$	超几何级数	hypergeometric series	超几何级数的一般形式是 ${}_pF_q(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_nz^n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_q)_nn!}$	
E_n 或 γ	欧拉常数	Euler constant	$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ $\approx 0.577215664901532860606512 09\cdots$	
$\{f,D\}$	解析函数元素	holomorphic function el-ement	复平面上的区域 D 连同在其内全纯的一个函数 $f(z)$,合成为解析函数元素	简称函数元素
$k(z)$	克贝函数	Koebe function	$k(z)=z(1-z)^{-2}$,$k_\theta(z)=e^{i\theta}k(e^{i\theta}z)$,$\beta=\lim_{n\to\infty}\|a_n\|/n\leqslant 1$. 其中 $k(z)$是 S 类上许多泛函极值问题的极值函数,称 $k_\theta(z)$为克贝函数的旋转	
$I_p(r)$	哈代凸性函数	Hardy's convexity func-tion	$I_p(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(re^{i\theta})\|^p\mathrm{d}\theta\quad(0<r<R)$	
B	布洛赫常数	Bloch's constant	$B=\inf\{\beta(f)\|f\in\mathscr{F}\}$,式中 $\beta(f)=\sup\{r\|r$ 是 $f(\triangle)$ 所包含的单叶圆的半径$\}$	已经证明 $\sqrt{3}/4\leqslant B\leqslant 0.47$
L	兰道常数	Landau's constant	$L=\inf\{\lambda(f),f\in\mathscr{F}\}$,式中 $\lambda(f)=\sup\{r\|r$ 是 $f(\triangle)$ 所包含圆的半径,$f\in\mathscr{F}\}$	已经证明 $0.5\leqslant L\leqslant 0.54326$
$M(\Gamma)$	曲线族 Γ 的模	module of a family of curves Γ	$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in p(\Gamma)}\int_D\rho^2\|\mathrm{d}z\|$,其中 Γ 是平面区域 D 上的若尔当曲线族,ρ 是定义在 D 上的非负波莱尔函数	
$M(f(\Gamma))$	拟共形映射	quasiconformal mapping	f 满足 Beltrami 微分方程 $f_{\bar z}=\mu f_z$,称 f 为 μ 共形映射,如 $\\|\mu\\|_\infty<1$,则称 f 为拟共形映射	亦称拟保角映射
$w(z,\alpha,D)$	调和测度	harmonic measure	α 关于区域 D 的调和测度 $w(z,\alpha,D)$ 是 z 对 (a,b) 的视角. $w(z,\alpha,D)=\frac{1}{\pi}\arg\frac{b-z}{a-z}$	$0\leqslant w(z,x,d)\leqslant 1$
$g(z,a)$ 或 $G(z,a)$	格林函数	Green's function	函数 $g(z,a)$ 在 D 内奇点 a 的格林函数 $g(z,a)=\log\left\|\frac{z-\bar a}{z-a}\right\|$	
$E(z,p)$	外尔斯特拉斯基本因式	Weierstrass basis factor	$E(z,p)=(1-z)\exp\left\{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right\}$	
$T(r,f)$	奈望林纳特征函数	Nevanlinna's character-istic function	满足 $\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,f)}{(\log r)^2}=\infty$ 的 $T(r,f)$ 是 $f(z)$ 的奈望林纳特征函数	亦称奈望林纳记号,可记为 $T(r)$
$n(r,a)$	a 点个数	number of a-point	$n(r,a)$是方程 $f(x)=a$ 在 $\|z\|\leqslant r$ 内解的个数(包括计算重数)	
$\delta(a)$	亏量	defect	$w(z)$ 关于 a 的亏量 $\delta(a)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,a)}{T(r,w)}$	亦称亏值
$\mathring{T}(r,w)$	球面特征函数	spherical characteristic function	$\mathring{T}(r,w)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{A(t,w)}{t}\mathrm{d}t$,式中 $w(z)$为代数体函数	
$M(r,f)$	整函数的最大模	maximum modulus of entire function	$f(z)$ 的最大模$M(r,f)=\max_{\|z\|\leqslant r}\|f(z)\|$;$f(z)$ 的 p 次整函数的模 $M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(re^{i\theta})\|d\theta\right)^{1/p}(0<p<+\infty)$;超越整函数 $f(z)$ 的最大模 $M_\infty(r,f)=\max_{\|z\|=r}\|f(z)\|_{p=+\infty}$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$B(z)$	布拉施克乘积	Blaschke product	$B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lvert a_n\rvert}{a_n}\left(\frac{a_n-a}{1-\bar{a}_n z}\right)$，式中 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 是复数序列，$0<a_n<1$	
H^p	哈代空间	Hardy space	所有哈代函数构成的空间，即 $H^p(D)=\{f\mid f(z)$ 在 D 内解析，$\sup_{0\leqslant r<1}\left(\int_0^{2\pi}\lvert f(re^{i\theta})\rvert^p d\theta\right)^{1/p}<+\infty\}$，其中 $D=\{z\mid \lvert z\rvert<1\}$	H^p 是由哈代于 1915 年提出的
$S(z)$	奇异内函数	singular inner function	$S(z)=\exp\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\}$，式中 $\mu(t)$ 是非减的有界变差函数，其导数几乎处处等于零	
$F(z)$	外函数	outer function	$F(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\lvert f(e^{it})\rvert dt\right\}$	
BMOA	有界平均振荡解析函数类	analysis function class of the bounded mean oscillating	$\mathrm{BMOA}(D)=\{f\mid f(z)$ 是单位圆周 T 上的可积函数，$u(e^{i\theta})$ 的积分 $\sup_{T\subset I}\frac{1}{\lvert I\rvert}\int_I f(u-u_I)d\theta<+\infty\}$，式中 u 为单圆周 T 上的可积函数，I 是 T 的子弧，$\lvert I\rvert$ 是 I 的长度	
B_n	$\mathbb{C}^n$ 中单位球	unit ball in a $\mathbb{C}^n$	$B_n=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid \lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2+\cdots+\lvert z_n\rvert^2<1\}$	
$\mathrm{Aut}(D)$	域的全纯自同构群	holomorphic automorphism group of a domain	表示域 D 的全纯自同构的全体组成的群. 它是 D 上的拓扑变换群	
∂D	域的边界	boundary of a domain	域 D 和它的闭包 $\bar{D}$ 的差集，即 $\partial D=\bar{D}\backslash \dot{D}$	
$\mathrm{Hol}(D)$	全纯复线性空间	holomorphic complex linear space	表示 D 上所有全纯函数构成的复线性空间	
$\bar{\partial}$	$\bar{\partial}$ 算子	$\bar{\partial}$-operator	$\bar{\partial}:C^1(D)\to L^2_{\mathfrak{D}},u\mapsto\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ 称为 $\bar{\partial}$ 算子	
$H(z,\bar{z})$	正定埃尔米特方阵	positive definite Hermitian matrix	$H(z,\bar{z})=\begin{pmatrix}h_{11}(z,\bar{z})&\cdots&h_{1n}(z,\bar{z})\\ \vdots&&\vdots\\ h_{n1}(z,\bar{z})&\cdots&h_{nn}(z,\bar{z})\end{pmatrix}$，式中 $h_{jk}(z,\bar{z})$ 在拓扑积 $\varphi_a(U_r)\times\overline{\varphi_a(U_a)}$ 上全纯	互逆正定埃尔米特方阵记为 $\tilde{H}(z,z)$
$B^2_\mu(M)$	可测复线性空间	measurable complex linear space	$B^2_\mu(M)=\mathrm{Hol}(M)\cap L^2_\mu(M)$，其中 M 为 n 维复流形，$\mu$ 为 M 上任给的测度	
$N(\Omega)$	奈望林纳函数类	Nevanlinna function class	Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的对称域，b 是特征边界，若 $\Omega\to\mathbb{C}f$ 在 Ω 中全纯，且满足 $\sup_{0<r<1}\int_b\log^+\lvert f(r,\zeta)\rvert d\sigma(\zeta)<+\infty$，则 f 属于奈望林纳函数类	
$\beta(\Omega)$	布洛赫空间	Bloch space	Ω 上全体布洛赫函数的集合，称为布洛赫空间. Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中齐线性有界域	
$\rho(\ ,\ )$	点集的距离	distance between two point sets	$\rho(A,B)=\inf_{x\in A, y\in B}\{\rho(x,y)\}$	
F_σ	F_σ 型集	set of type F_σ	表示可数个闭集的并集	F_σ 是波莱尔集
G_δ	G_δ 型集	set of type G_δ	表示可数个开集的交集	G_δ 是波莱尔集
$mE;\lvert E\rvert$	勒贝格测度	Lebesgue measure	若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为勒贝格可测集，则 E 的勒贝格外测度称为勒贝格测度	
$m^*(E)$; $\lvert E\rvert_e$	勒贝格外测度	Lebesgue outer measure	$m^*(E)=\inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}}\lvert I_i\rvert\mid\{I_i\}$ 为覆盖 E 的可数个开集$\}$	
$m_*(E)$; $\lvert E\rvert_i$	勒贝格内测度	Lebesgue inner measure	$m_*(E)=\sup\{m(F)\mid F$ 为闭集，且 $F\subset E\}$	
$\aleph_0$	可列集的势	cardinal number of countable set	每一个无穷集的势都是某个阿列夫，自然数集的势是 $\aleph_0$	
$\aleph$ 或 C	连续集的势	cardinal number of continuous set	与区间 $[0,1]$ 对等的集的势记为 N 或 C. 连续集的势 $C=2^{\aleph_0}$	亦称基数
CH	连续统假设	continuum hypothesis	康托尔猜测：实数集的一切无穷子集或者与自然数集等势或者与连续统等势	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
GCH	广义连续统假设	generalized continuum hypothesis	假设：1. 对任一序数 $\alpha, 2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$； 2. 对任二无穷势 κ,λ，若 $\kappa\leqslant\lambda\leqslant 2^{\aleph}$，则 $\lambda=\kappa$ 或者 $\lambda=2^{\aleph}$	
$H_\alpha(E)$	豪斯多夫测度	Hausdorff measure	$H_\alpha(E)=\lim\limits_{E\to 0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\sup\limits_{\varepsilon>0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)$，其中，$H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\inf\sum\limits_k\delta(E_k)^\alpha$，且 $\delta(E_k)$ 为 R^n 的子集 E_k 的直径	
$\psi(x)$	狄利克雷函数	Dirichlet function	$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理点},\\ 0, & x\text{ 为无理点}\end{cases}$	亦可用 $D(x)$ 表示
$\chi(n)$或 $\chi_q(n)$或 $\chi(n)\bmod q$	狄利克雷特征	Dirichlet character	整数集上的函数 $\chi(n)=\begin{cases}\exp\left[2\pi\left(\dfrac{mr}{c}+\dfrac{m_0r_0}{c_0}+\dfrac{m_1r_1}{c_1}+\cdots+\dfrac{m_sr_s}{c_s}\right)\right] & ((n,q)=1)\\ 0 & ((n,p)>1)\end{cases}$	亦称 q 的特征
$\{A,B\}$	泊松符号	Poisson symbol	$\{A,B\}=\sum\limits_{j=1}^n\left(\dfrac{\partial A}{\partial\xi_j}\dfrac{\partial B}{\partial x_j}-\dfrac{\partial B}{\partial\xi_j}\dfrac{\partial A}{\partial x_j}\right)$	亦称泊松括号
$\lvert I\rvert$	I 区间的体积	volume of I-interval	E 为 R^n 中的有界点集，I 为包含 E 的任何有界区间，则以 $\lvert I\rvert$ 表示区间 I 的体积	
a. e. p. p.	几乎处处	almost everywhere	若命题 $P(x)$ 与集合 $E\subset\mathrm{R}^n$ 有关，且零集 $E_0\subset E$，对于任意 $x\in E\setminus E_0$，$P(x)$ 均成立，则称 $P(x)$ 在 E 上几乎处处成立，记为 $P(x)$a. e. 或 $P(x)$p. p.	a. e. 是英文 almost everywhere 的首字母；p. p. 是法文 presque partout 的首字母
$M(x)$	上极限函数	upper limit function	$M(x)=\lim\limits_{\delta\to 0}M(x,\delta)$，其中 $M(x,\delta)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 的 δ 邻域上取值的上确界	
$m(x)$	下极限函数	lower limit function	$m(x)=\lim\limits_{\delta\to 0}m(x,\delta)$，其中 $m(x,\delta)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 的 δ 邻域上取值的下确界	
$\chi_A(x)$	集合的特征函数	characteristic function of a set	$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A),\\ 0 & (x\notin A)\end{cases}$	
ap $\overline{\lim}$	近似上极限	approximate upper limit	ap $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=\inf\limits_E\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}{}_E f(x)$	
ap $\underline{\lim}$	近似下极限	approximate lower limit	ap $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=(\sup\limits_E\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}{}_E f(x))$	
ap lim	近似极限	approximate limit	ap $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 表示 ap $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=$ ap $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)$	
$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$	勒贝格积分	Lebesgue integral	若 $f(x)$ 是可测集 $E\subset\mathrm{R}^n$ 上的 (L) 可测函数，则称 $(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 为勒贝格积分	简称 L 积分
$D^-f(x_0)$	左上导数	left upper derivative	$D^-f(x_0)=\overline{\lim\limits_{\xi\to x_0^-}}\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D_-f(x_0)$	左下导数	left lower derivative	$D_-f(x_0)=\underline{\lim\limits_{\xi\to x_0^-}}\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D^+f(x_0)$	右上导数	right upper derivative	$D^+f(x_0)=\overline{\lim\limits_{\xi\to x_0^+}}\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D_+f(x_0)$	右下导数	right lower derivative	$D_+f(x_0)=\underline{\lim\limits_{\xi\to x_0^+}}\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$\ll$	绝对连续	absolute continuity	$\gamma\ll\mu$ 表示广义测度 γ 关于 μ 是绝对连续的. 即当 $\lvert\mu\rvert(A)=0$ 时有 $\gamma(A)=0$，其中 $\lvert\mu\rvert$ 是 μ 的全变差	
$\perp$	相互奇异	mutually singular	$\gamma\perp\mu$ 表示 γ 与 μ 是相互奇异的，即存在两个不相交的可测集 A 与 B 使得 $\Omega=A\cup B$，且对任意可测集 E，有 $\lvert\mu\rvert(A\cup E)=\lvert\gamma\rvert(B\cap E)=0$，其中 $\lvert\gamma\rvert,\lvert\mu\rvert$ 分别是 γ 和 μ 的全变差	
$(\Gamma)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	盖尔范德积分	Gelfand integral	设 $x(t)$ 为 Ω 到巴拿赫空间 X 的向量函数，若对 $\forall f\in X^*$，当 $f(x(t))$ 在 Ω 上可积时必存在 $x^{**}\in X$ 使 $x^{**}=\int_\Omega f(x(t))\mathrm{d}\mu$，则称 x^{**} 为盖尔范德积分	亦称盖尔范德意义下的弱* 积分

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(P)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu$	佩蒂斯积分	Pettis integral	若$\int_A f(x(t))\mathrm{d}\mu = f(x_A)$，则$(P)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu = x_A$	亦称弱积分
$(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	博赫纳积分	Borchner integral	1. 若 $x(t)$ 是 Ω 上可测函数，则 $(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\mu(A_K)$； 2. 对于一般的强可测函数 $x(t)$，则 $(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}(B)\int_\Omega x_n(t)\mathrm{d}\mu$.	
$(BK)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	伯克霍夫积分	Birkhoff integral	$(BK)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \bigcap_\Delta J(x,\Delta)$，其中 $J(x,\Delta)$ 是 $\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)x(t_i)\mid t_i\in A_i\}$ 的凸闭包	
$\mathscr{U}_g^*(E)$	$(L\text{-}S)$外测度	$(L-S)$outer measure	$\mathscr{U}_g^*(E) = \inf\{\sum_{K\geq 1}\mathscr{U}_g(I_k)\mid\{I_k\}$ 为可数个覆盖 E 的左开右闭区间$\}$	
$\mathscr{U}_g(E)$	$(L\text{-}S)$测度	$(L-S)$measure	当任意点集 T 能分解成 E 内部分 $T\cap E^i$ 和 E 外部分 $T\cap E^c$ 时，相应的$(L\text{-}S)$外测度具有可加性，则 E 称为 $g(x)$的$(L\text{-}S)$可测集，此时外测度 $\mathscr{U}_g^*(E)$就称为 E 的由分布函数$g(x)$引出的$(L\text{-}S)$测度	
$(L\text{-}S)\int_E$	$(L\text{-}S)$积分	$(L\text{-}S)$integral	$\int_E f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_E f^+(x)\mathrm{d}g(x) - \int_E f^-(x)\mathrm{d}g(x)$，其中 $f^+(x)$，$f^-(x)$分别为 $f(x)$正部和负部，且至少有一个有极限	$(L\text{-}S)$积分是勒贝格-斯蒂尔切斯积分的简称
$D(*)\int_a^b$	狭义当茹瓦积分	Denjoy integral in the restricted sense	$(D(*))\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$，其中 $F(x)$ 是狭义一般绝对连续函数，且在$[a,b]$上 $F'(x) = f(x)$ $a.e.$	狭义当茹瓦积分是勒贝格积分和黎曼积分的一种推广
$D_{\mathrm{ap}}f(x_0)$	近似导数	approximate derivative	$D_{\mathrm{ap}}f(x_0) = \mathrm{ap}\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
$\underline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0)$	近似下导数	approximate lower derivative	$\underline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0) = \mathrm{ap}\varliminf_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
$\overline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0)$	近似上导数	approximate upper derivative	$\overline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0) = \mathrm{ap}\varlimsup_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
Π_K	庞特里亚金空间	Pontrjagin space	设 $H = H_-\oplus H_+$ 是正则分解，$\dim H_\pm = k < +\infty$，称$(H,[\cdot,\cdot])$为具有正(负)指标的庞特里亚金空间	
π	克莱因空间	Klein space	设 $H = H_-\oplus H_+$ 是正则分解，$\dim H_\pm = +\infty$，称$(H,[\cdot,\cdot])$为克莱因空间	
$\rho(T)$	正则集	Regular set	设 T 是空间 X 的线性算子，如果 $\lambda I - T$ 是正则算子，那么称 λ 为 T 的正则点. 复平面上正则点全体称为正则集	亦称豫解集
$\sigma(T)$或$\mathrm{sp}(T)$	谱集	spectrum	$\rho(T)$ 的余集 $C\backslash\rho(T)$. $\sigma_P(T)$，$\sigma_a(T)$，$\sigma_r(T)$，$\sigma_c(T)$ 分别表示点谱、近似点谱、剩余谱、连续谱	
$\deg(T,\Omega,P)$	拓扑度	topological degree	映射T在区域Ω上关于P点的拓扑度是一个整数，它是方程 $T(x) = P$ 在 Ω 中解的"代数个数"的某种稳定的度量	
$F((x))$	形式幂级数域	domain of formal power series	由 F 上关于X的形式幂级数 $\alpha(x) = q_r x^r + q_{r+1}x^{r+1} + \cdots$ $(q_r\neq 0, r\in Z)$ 按照通常加、乘运算组成一个域	
$\delta(x)$	狄拉克 δ 函数	Dirac δ-function	$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & (x=0), \\ 0 & (x\neq 0). \end{cases}$	
$e\subset(A)$	平衡包	equilibrium hull	包含 A 的最小平衡集称为 A 的平衡包	
$(P)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	佩龙积分	Perron integral	$(P)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \inf\{U(b)\} = \sup\{V(b)\}$，其中 $U(x)$ 和 $V(x)$ 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的上函数和下函数	$f(x)$ 在$[a,b]$上的佩龙积分值和勒贝格积分值相等
$(W)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	瓦尔德积分	Wald integral	$(W)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup_G(G(b)) - (G(a)) = \inf(H(b) - H(a))$，其中 $H(x)$，$G(x)$ 各为 $f(x)$ 的瓦尔德上、下函数	瓦尔德积分与佩龙积分等价

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(H)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	亨斯托克积分	Henstock integral	一种定积分，亨斯托克积分包括(R)积分，也包括(L)积分	
$(M)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	马克仙积分	Mcshane integral	一种定积分，马克仙积分与勒贝格积分等价	
$f_n \xrightarrow{L^p} f$	L^p的强收敛	strong convergence in L^p	若$f_n(x),f(x)\in L^p(E),(1\leqslant p<+\infty,n=1,2,\cdots,)$，且存在$\Vert f_n-f\Vert_p\to 0(n\to\infty)$，则称$\{f_n(x)\}$强收敛于$f(x)$	亦称按L^p范数收敛于$f(x)$
$f_n \xrightarrow{W} f$	L^p的弱收敛	weak convergence in L^p	若$f_n(x),f(x)\in L^p(E),g(x)\in L^q(E),(1<p,q<+\infty,n=1,2,\cdots,)$且$1/p+1/q=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$成立，则称$\{f_n(x)\}$弱收敛于$f(x)$	
l^p	l^p空间	l^p space	所有满足$\Vert x\Vert_p=(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\vert x_k\vert^p)^{1/p}<+\infty$的数列$x$组成之集	
l^∞	l^∞空间	l^∞ space	满足$\vert x_n\vert\leqslant M<+\infty(n=1,2,\cdots,)$的所有数列之集．$x$的范数由$\Vert x\Vert_\infty=\sup\limits_n\{\vert x_n\vert\}$定义	
$\Lambda(\psi)$	洛伦茨空间	Lorentz space	$\Lambda(\psi)=\{f\in S[0,1]\mid\Vert f\Vert<+\infty\}$称为洛伦茨空间	
L_Φ	奥尔里奇空间	Orlicz space	所有使得$\Vert f\Vert=\inf\left\{\lambda>0\mid\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\lambda^{-1}\vert f(t)\vert)\mathrm{d}t\leqslant 1\right\}<+\infty$成立的$\mathbb{R}$上的可测函数$f$之集	
ent	拓扑熵	toplogical entropy	这是用于拓扑动力学中的一个概念	
$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	雅可比多项式	Jacobi polynomials	$[-1,1]$上关于权$\omega(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$的正交多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\dfrac{1}{n!2^n\omega(x)\mathrm{d}x^n}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n\omega(x)]$ $(n=1,2,\cdots)$	
$r_n(x)$	拉德马赫尔函数	Rademacher functions	$r_n(x)=\mathrm{sig}\ n\sin 2^{n+1}x\quad(0\leqslant x\leqslant 1,n=1,2,\cdots)$	
$W_n(x)$	沃尔什函数	Walsh functions	$W_n=r_{k_1}(x)r_{k_2}(x)\cdots r_{k_p}(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$	
$B_n(f,x)$	伯恩施坦多项式	Bernstein polynomial	$B_n(f,x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^x(1-x)^{n-k}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$	亦称伯恩施坦算子
$H_\varepsilon(A)$	度量熵	metric entropy	设A是巴拿赫空间X的紧子集，A的ε覆盖$\{U_k\}_{k=1}^n$，令$N_\varepsilon(A)=\min n$，则$H_\varepsilon(A)=\log N_\varepsilon(A)$	
$H_\varepsilon^X(A)$	A关于X的熵	entropy of A with respect to X	设A是巴拿赫空间X的紧子集，A的ε网$\{x_k\}_{k=1}^p$，令$P_\varepsilon(A)=\min P$，则$H_\varepsilon^X(A)=\log P_\varepsilon(A)$	
$C_\varepsilon(A)$	容量	capacity	设A是巴拿赫空间X的紧子集，A的$\varepsilon\gamma$分离$\{y_k\}_{k=1}^m$，令$M_\varepsilon(A)=\max m$，则$H_\varepsilon(A)=\log M_\varepsilon(A)$	
L_n	勒贝格常数	Lebesgue constant	$L_n=\dfrac{4}{\pi^2}\log(n+1)+o(1)$	
$\deg(\pi)$	分歧阶	ramification order	使π在A_k恒为1的最小整数k	
PX	X的子集簇	subsets of X	集合X的一切子集组成的集合	亦称幂集合
Δ	对称差	symmetric difference	$A\Delta B$的对称差指属于A但不属于B，或属于B但不属于A的一切元素组成的集合	
$P\cdot P\cdot P$	近乎处处	approximately everywhere	设$P=P(x)$是一个与x无关的性质，如果使P不成立的点全体所成之集A为零内容集，则称P是近乎处处成立的	
$q\cdot P\cdot$	拟乎处处	quasi-everywhere	设$P=P(x)$是一个与x无关的性质，如果A为零外容集，则称P是拟乎处处成立的	
$\mathrm{cap}(G)$	χ容量	χ-capacity	对于相对紧的开集G，记$\mathrm{cap}(G)=\int\mathrm{d}\sigma_G$，其中$\sigma_G$是由$R_{\omega x}^G=\chi^*\sigma_G$所确定的惟一测度	
U_K^μ	位势	potential	测度μ的K位势为 $U_K^\mu=\int_\Theta K(x,y)d\mu(y)\quad(x\in\Omega)$	
U_α^μ	里斯位势	Riesz potential	对于位势U_K^μ，当$\Omega=R^n(n\geqslant 3),0<\alpha<n,\kappa(x,y)=\vert x-y\vert^{\alpha-n}$时，称为里斯位势	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
U_2^g	牛顿位势	Newtonian potential	对于里斯位势 $\alpha=2$ 时，称为牛顿位势	
(f,g)	内积	inter product	$(f,g)=\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}u(x)$	
σ	舒伯特符号	Schubert symbol	$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 表示 n 个整数组成的一个序列，其中 $1\leqslant\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_n\leqslant m$	
Lin E	线性包	linear hull	$\mathrm{Lin}E=\{x\mid x=\sum_{y\in E}\lambda_y y,\lambda_y\in R$，有限个不为零$\}$	$\mathrm{Lin}E$ 亦表示凸集 E 的支撑子空间
affE	仿射包	affine hull	$\mathrm{affe}E=\{x\mid x=\sum_{y\in E}\lambda_y y,\lambda_y\in R$，有限个不为零，$\sum_{y\in E}\lambda_y=1\}$	
coneE	锥包	cone hull	$\mathrm{cone}E=\{x\mid x=\lambda y,y\in E,\lambda>0\}=\bigcup_{\lambda>0}\lambda E$	
coE	凸包(凸集)	covex hull	$\mathrm{co}E=\{x\mid x=\sum_{y\in E}\lambda_y y,\lambda_y\in[0,1]$，有限个不为零，$\sum_{y\in E}\lambda_y=1\}$	
clcoE	闭凸包	closed convex hull	以 C 为内集的全体闭包凸集的交	
epif	上图	epigraph	$\mathrm{epi}f=\{(x,a)\in X\times R\mid f(x)\leqslant a\}$	
K	核	kernel	$C\subset R^n,\forall\ y\in C,0\leqslant\lambda\leqslant1$，满足 $(1-\lambda)x+\lambda y\in C$ 的全体 $x\in C$ 的集合称为 C 的核	
exp C	暴露点集	exposing point set	C 的全体暴露点的集合	
ext C	极点集	extreme point set	C 的全体极点的集合	
$f'(x:y)$	单边方向导数	one-side directional derivative	$f'(x:y)=\lim_{\lambda\downarrow0}\dfrac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}$	
$\partial f(x)$	次微分	subdifferential	$f(x)$ 在 X 的次梯度的全体	
$I_V(M)$	奇点的指标	index of critical points	V 的孤立奇点 M 沿曲线 C_r 的旋转数	
u. a. p.	一致概周期函数	uniformly almost periodic functions	设 $f(t,x)\in C(\mathrm{R}\times D,E^n)$，$S$ 是 D 的紧集，若对任给序列 $\{a'_n\}$，存在子序列 $\{a_n\}\subset\{a'_n\}$，使 $T_af(t,x)=\lim_{n\to\infty}f(t+a_n,x)$ 在 $R\times S$ 上一致地成立，则称 $f(t,x)$ 是一致概周期函数，$x\in D$	
a. a. p.	渐进概周期函数	asymptotically almost periodic functions	如果 $\varphi(t)$ 有分解式 $\varphi(t)=p(t)+q(t)$，其中 $p(t)$ 是 R 上的概周期函数，$q(t)$ 是定义在 R^+ (或 R^-) 上的连续函数，当 $t\to+\infty$ 或 $(t\to-\infty)$ 时有 $q(t)\to0$，则称 $\varphi(t)$ 是 R^+ (或 R^-) 上的渐进概周期函数	
RFDE(f)	滞后型泛函微分方程	retarded function differential equation	$\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,x(t),x(t-h_1),\cdots,x(t-h_m))$. $(h_1,h_2,\cdots,h_m$ 是正定数，$h_1<h_2<\cdots<h_m)$	RFDE 是英文名中四个单词的第一个字母
H. S.	哈密顿系统	Hamilton's system	指形如 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\partial H}{\partial q},\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial H}{\partial p}$，$H=H(p,q,t)$ 的一阶偏微分方程	亦称典型系统或正则系统
$\int^x a(s)\mathrm{d}s$	反导数	antiderivative	表示 $a(x)$ 的反导数	

概率统计(Probability & Statistics)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
P, P_r	概率	probability	$P(E)$表示事件 E 的概率，$P_r(\xi)$表示事件 ξ 的概率	$P_{n;m}$ 表示在 n 次独立实验中出现 m 次事件的概率
$P(\mid)$	条件概率	conditional probability	$P(A\mid B)$表示发生了事件 B 的条件下，事件 A 的概率	
E,M	期望(或均值)	expectation (or mean)	$E\xi,M\xi$ 表示随机变量 ξ 的期望(或均值)	亦可记为 $E(\xi)$, $M(\xi)$
D, σ^2	方差	variance	$D\xi$, $\sigma^2\xi$ 表示随机变量 ξ 的方差	亦可记为 $D(\xi)$, $\sigma^2(\xi)$, $\mathrm{Var}\xi$

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
cov	协方差	covariance	$\mathrm{cov}(\xi,\eta)$表示随机变量ξ和η的协方差	或记为$\sigma_{\xi,\eta}$
$E(\|)$、$M(\|)$	条件期望（或条件均值）	conditional expectation or conditional mean	$E(\xi\|y)$，$M(\xi\|y)$表示随机变量ξ关于条件y的条件期望（或均值）	
ρ，r	相关系数	correlation coefficient	$\rho(\xi,\eta)$，$\rho_{\xi,\eta}$，$r(\xi,\eta)$表示随机变量ξ和η的相关系数	在不致误会时，亦可记为ρ或r
Ω	基本事件空间	elementary event space	Ω是由n个基本事件$\omega_i(i\in\mathbf{N})$构成的基本事件空间，即$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$	
$F_n(\ )$	频率	frequency	频率$F_n(A)$等于频数$f_n(A)$与试验总次数n之比，即 $F_n(A)=\frac{f_n(A)}{n}$	
$F(\|)$	条件分布函数	conditional distribution function	ξ和η为随机变量，则称$F(y\|x)$为在$\xi=x$条件下η的条件分布函数	
ν_k	k阶原点矩	origin moment of the k-th order	ξ的k阶原点矩$\nu_k=E(\xi^k)$	
μ_k	k阶中心矩	central moment of the k-th order	ξ的k阶中心矩$\mu_k=E(\xi-E\xi)^k$	
α_k	k阶原点绝对矩	origin absolute moment of the$k$-th order	ξ的k阶原点绝对矩$\alpha_k=E\|\xi\|^k$	
β_k	k阶中心绝对矩	central absolute moment of the k-th order	ξ的k阶中心绝对矩$\beta_k=E\|\xi-E\xi\|^k$	
$E(\ )$	混合矩	mixed moment	若$E\|\xi^k\eta^l\|<\infty$，$k,l\in\mathbf{N}$，则称$E(\xi^k\eta^l)$为ξ和η的$k+l$阶混合矩	
$E[\ ]$	中心混合矩	central mixed moment	若$E(\|\xi-E\xi\|^k\|\eta-E\eta\|^l)<\infty$，且$k,l\in\mathbf{N}$，则称$E[(\xi-E\xi)^k(\eta-E\eta)^l]$为$\xi$和$\eta$的$k+l$阶中心混合矩	
$B(n,p)$	二项分布	binomial distribution	分布列为$b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ $(0<p<1,q=1-p,k=0,1,2,\cdots,n)$	
$NB(m,p)$	负二项分布	negative binomial distribution	密度函数为$p_x=\Gamma(m+x)[\Gamma(m)x!]^{-1}p^mq^x$（$m$为整数，$0<p<1$，$q=1-p,x=0,1,2,\cdots$）	
$G(p)$ 或 $g(k;p)$	几何分布	geometric distribution	密度函数为 $p_x=pq^x(0<p<1,q=1-p,x=0,1,2,\cdots)$	
$H(N,n,p)$	超几何分布	hypergeometric distribution	密度函数为$p_x=\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}\Big/\binom{N}{n}$（$x$为整数，$N,Np$，$n$为正整数，$N\geqslant n$，$0\leqslant x\leqslant Np$，$0\leqslant n-x\leqslant Nq$，$0<p<1$，$q=1-p$）	
$M(n;p_1,\cdots,p_{k+1})$	多维超几何分布	multiple hypergeometric distribution	密度函数为$p_{x_i}=\binom{Np_1}{x_1}\cdots\binom{Np_{k+1}}{x_{k+1}}\Big/\binom{N}{n}$ （$i=1,2,\cdots,k+1$），$x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$是整数，$N,Np_1,\cdots,Np_{k+1},n$是正整数，$x_{k+1}=n-(x_1+\cdots+x_k)$，$p_1+p_2+\cdots+p_{k+1}>0$）	
$P(\lambda)$ 或 $P(k;\lambda)$	泊松分布	Poisson distribution	分布列为$p(k;\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda>0,k=0,1,2,\cdots)$	
$U(a,b)$ 或 $U[a,b]$	均匀分布	uniform distribution	密度函数为$p(x)=\begin{cases}1/(b-a) & (a\leqslant x\leqslant b),\\ 0 & (其他),\end{cases}$ 其中$a<b$为常数	
$N(\mu,\sigma^2)$	正态分布	normal distribution	密度函数为$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$，$(-\infty<x<+\infty,\sigma>0,\mu$为常数）	亦称高斯分布
$C(\lambda,\mu)$	柯西分布	Cauchy distribution	密度函数为$p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$，其中$x$为实数，$\lambda>0$，$\mu$为常数	
$\Gamma(\lambda,r)$	伽马分布	gamma distribution	密度函数为$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中$r>0,\lambda>0$为常数	亦可记为$G(\lambda,r)$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$e(\lambda)$	指数分布	exponential distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0),\end{cases}$ 其中 λ 为常数	亦可记为 $e(\mu,\sigma)$
$W(\lambda,\alpha)$	韦布尔分布	Weibull's distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\alpha\lambda x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^{\alpha}) & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$，$\alpha>0$ 为常数	
$\chi^2(n)$	χ^2 分布	Chi-square distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{(n-2)/2}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n 为正整数	
$\mathrm{Ln}(\mu,\sigma^2)$	对数正态分布	logarithmic normal distribution	密度函数为 $P(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln x-a)^2/2\sigma^2} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 $a,\sigma>0$ 为常数	
$t(n)$	学生分布	Student's distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, 其中 n 为正整数	亦称 t 分布
$F(n_1,n_2)$	F 分布	F-distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{B\left(\dfrac{n_1}{2},\dfrac{n_2}{2}\right)}n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}(n_2+n_1x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n_1,n_2 为正整数	
$E(\alpha,\beta)$	极值分布	extremal distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\beta}\exp\left\{\exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right\}$, 其中 x,α 均为实数，β 为常数	
$\chi^2(n,\lambda)$	非中心 χ^2 分布	non-central chi-square distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{\exp\left\{-\left(\dfrac{x+\lambda}{2}\right)\right\}}{2^{n/2}}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{x^{\frac{n}{2}+j-1}\lambda^j}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+j\right)2^{2j}j!} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n 为自由度；$\lambda>0$ 为非中心参数	
$t(n,\delta)$	非中心 t 分布	non-central t-distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{n^{n/2}\exp(-\delta^2/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)(n+x^2)^{(n+1)/2}}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\Gamma\left(\dfrac{n+m-1}{2}\right)\left(\dfrac{\delta^m}{m!}\right)\left(\dfrac{2x^2}{2+x^2}\right)^{\frac{n}{2}}$, 其中 n 为自由度，δ 为实数，且是非中心参数	
$F(m,n;\lambda)$	非中心 F 分布	non-central F-distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}e^{-\frac{\lambda}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(\dfrac{\lambda mx}{2}\right)^k\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+k\right)k!(mx+n)^{\frac{m+n}{2}+k}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 m,n 为二自由度，λ 为非中心参数	
$X_1^{(n)}$	最小顺序统计量	smallest order statistics	$X_1^{(n)}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 表示样本观察值中最小者	
$X_n^{(n)}$	最大顺序统计量	largest order statistics	$X_n^{(n)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 表示样本观察值中最大者	
$\bar{x}$	样本均值	sample mean	$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F_n(x)$	
s^2	样本方差	sample variance	$s^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2\mathrm{d}F_n(x)$	
a_k	样本 k 阶原点矩	sample origin moment of the k-th order	$a_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\mathrm{d}F_n(x)\quad(k=2,3,\cdots)$	

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
b_k	样本 k 阶中心矩	sample central moment of the k-th order	$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^k dF_n(x)$ $(k=2,3,\cdots)$	
μ	总体均值	population mean	$\mu=E(X)$	
σ^2	总体方差	population variance	$\sigma^2=D(X)=E(X-\mu)^2$	
α_k	总体 k 阶原点矩	population origin moment of the k-th order	$\alpha_k=E(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k dF(x)$	
μ_k	总体 k 阶中心矩	population central moment of the k-th order	$\mu_k=E(X-\mu)^k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^k dF(x)$	
Md	样本中位数	sample median	$\mathrm{Md}X=\begin{cases}X_{k+1}, & 若\ n=2k+1,\\ (X_k+X_{k+1})/2, & 若\ n=2k\end{cases}$	亦可用 $\tilde{X}$ 表示
Sk	样本偏度	sample skewness	样本三阶中心矩除以样本二阶中心矩的3/2次幂的商，即 $\mathrm{Sk}=\frac{b_3}{(b_2)^{3/2}}$	亦称样本偏态或偏态系数
Kur	样本峰度	sample kurtosis	样本四阶中心矩除以样本二阶中心矩的平方再减去3，即 $\mathrm{Kur}=\frac{b_4}{(b_2)^2}-3$	亦称样本峭度
df，f	自由度	degree of freedom	df_A，f_A 表示因素 A 的自由度	
$E_x(s)$	特征函数	characteristic	函数 e^{isX} 的数学期望，即 $E_x(s)=M[e^{isX}]$	
$H[x]$	熵	entorpy	离散型随机变量 x 的熵 $H[x]=-\sum_{i=1}^{n}P_i\log_a P_i$；连续型随机变量 x 的熵 $H[x]=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\log_a f(x)dx$	
$f(k;r,p)$	帕斯卡分布式	Pascal distribution	分布函数为 $f(k;r,p)=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{r-1}\quad(k=r,r+1,\cdots)$	
$P_{i.}$ 或 $P_{.j}$	边缘概率	boundary probability	离散型随机变量的边缘概率分布式为 $P_{i.}=\sum_j P_{ij}$，$P_{.j}=\sum_i P_{ij}$	
$N(\mu,\Sigma)$ 或 $N_n(\mu,\Sigma)$	多维正态分布	normal distribution	N 维正态分布的密度函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\lvert\Sigma\rvert}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)\}(x\in\mathrm{R}^n)$	
S_n^*	S_n 的标准化	standardization of S	$S_n^*=\sum_{k=1}^{n}(X_k-a_k)/S_n$	
ω	样本点	sample point	随机试验的每一个可能的结果	亦称基本事件
ϕ	不可能事件	non-probability event	随机试验不可能发生的结果	
E^n	伯努利试验	Bernoulli trials	随机试验 E 只有两个可能的结果，并且其概率为 p，q，其中 $q=1-p$，把 E 独立地重复 n 次试验构成了一个试验	亦称伯努利概型
$\sigma\xi$	标准差	root-mean square deviation	方差的平方根	亦称根方差
CL	中线	middle line	表示控制图中中线	
UCL	上控制线	upper control linear	表示控制图中上控制线	
LCL	下控制线	lower control linear	表示控制图中下控制线	
$(n\mid C)$	抽检方案	sampling inspection plan	表示子样的容量为 n 和允许的不合格数为 C	
T	寿命	longevity	对任一特定个体(产品或生命体)，从某个标准时间起在规定时间 t 内失效(或死亡)	
$R(t)$	可靠度	reliability	产品在规定的条件下，规定的时间内，完成规定功能的概率	
ρ_r	可靠寿命	reliability life	使可靠度等于给定值 r 的时间	$\rho_{0.5}$称为中位寿命
$\lambda(t)$	失效率	failure rate	产品工作到 t 时刻后单位时间内发生失效的概率	
MTBF	平均无故障工作时间	mean time between failures	平均寿命对可修复产品	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
MTTF	失效前的平均工作时间	worked mean time before failure	平均寿命对不可修复产品	
PDF	概率分布函数	probability distribution function	$F(x)=P(\xi(\omega)<x), x\in(-\infty,+\infty)$	简称分布函数
MLE	极大似然估计	maximum likelihood estimate	使似然函数 $L(p)$ 达到极大值的参数 P	
$\hat{\theta}$	估计量	estimator	当区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 以某一指定的概率包含 θ 时，称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为函数 θ 的区间估计	
R	样本极差	sample range	$R=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}-\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示取样本中最大值与最小值之差	亦称样本范围，又称样本全距
H_0	原假设	null hypothesis	假设检验中，对有关总体需要作出判断的待检验的命题的假设	亦称零假设
H_1,H_a	备择假设	alternative hypothesis	假设检验中，异于原假设的另一假设	亦称择一假设
u,λ,t	临界值	critical value	u_a，λ_a，t_a 表示置信度为 α 的临界值	
Q	离差平方和	sum of squares of deviations	总离差平方和 $Q=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})^2$； 组内离差平方和 $Q_1=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$； 组间离差平方和 $Q_2=n\sum_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-\bar{x})^2$； 因素 A 的离差平方和 $Q_A=n\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2$； 误差平方和 $Q_E=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2$	
*	显著性标记	significance marked	* 表示作用显著．* * 表示作用高度显著	
×	交互作用	interaction	$A\times B$ 表示因素 A，B 的交互作用	
$L(\ )$	正交表示标记	orthogonal layout marked	$L_4(2^3)$ 表示二水平三因素，需作四次试验的正交表示	
vec	列拉直算子	operator of according to columns draw line	将矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 中的元按列依次拉直排序，即 $\mathrm{vec}(A)=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2},\cdots,a_{nm})$	
ran	行拉直算子	operator of according to rowsdraw line	将矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 中的元按行依次拉直排序，即 $\mathrm{ran}(A)=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1m},a_{21},a_{22},\cdots,a_{2m},\cdots,a_{nm})$	

应用数学（Applied mathematics）

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\underset{\sim}{A}$	模糊子集	fuzzy subset	$\underset{\sim}{A}=\{x,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mid x\in X\}$，其中集 X 为论域，$\forall\ x\in X$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\in[0,1]$ 是模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数	亦称模糊集、弗晰集、不分明集、乏晰集等
$\vee$	模糊子集的上确界	supremum of fuzzy subset	若 $\{a_t\mid t\in T\}$ 是实数集，则 $\bigvee_{t\in T}a_t=\sup\{a_t\mid t\in T\}$	
$\wedge$	模糊子集的下确界	infimum of fuzzy subset	若 $\{a_t\mid t\in T\}$ 是实数集，则 $\bigwedge_{t\in T}a_t=\inf\{a_t\mid t\in T\}$	
$\overset{\wedge}{+}$	代数和	algebraic sum	$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\overset{\wedge}{+}\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ $=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$	
•	代数积	algebraic product	$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$	
$\oplus$	有界和	bounded sum	$a\oplus b=\min(a+b,1)$，式中 $a,b\in[0,1]$	$\gamma\geqslant0,p>0$
$\otimes$	有界积	bounded product	$a\otimes b=\max(a+b-1,0)$，式中 $a,b\in[0,1]$	$\gamma\geqslant0,p>0$
$\overset{+}{\varepsilon}$	爱因斯坦和	Einstein's sum	$a\overset{+}{\varepsilon}b=\dfrac{ab}{1+ab}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0,p>0$
$\dot{\varepsilon}$	爱因斯坦积	Einstein's product	$a\dot{\varepsilon}b=\dfrac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0,p>0$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\overset{+}{\gamma}$	伽玛和	gamma sum	$a\overset{+}{\gamma}b=\dfrac{a\overset{\wedge}{+}b-(1-\gamma)ab}{\gamma-(1-\gamma)(1-ab)}$	式中 $a,b\in[0,1]$, $\gamma\geqslant 0,p>0$
$\dot{\gamma}$	伽玛积	gamma product	$a\dot{\gamma}b=\dfrac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a\overset{\wedge}{+}b)}$	式中 $a,b\in[0,1]$, $\gamma\geqslant 0,p>0$
$\overset{\vee}{P}$	雅格和	Yager sum	$a\overset{\vee}{P}b=\min(1,(a^p+b^p)^{1/p})$	式中 $a,b\in[0,1]$, $\gamma\geqslant 0,p>0$
$\hat{P}$	雅格积	Yager product	$a\hat{P}b=1-\min(1,((1-a)^p+(1-b)^p)^{1/p})$	式中 $a,b\in[0,1]$, $\gamma\geqslant 0,p>0$
$\sqcup$	取大运算	operation of fetch large	$\underset{\sim}{m}\sqcup\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{n}}(y)/x\vee y$,$\underset{\sim}{m}$,$\underset{\sim}{n}$分别表示模糊数,即 $\underset{\sim}{m}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)/x$, $\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{n}}(x)/y$	
$\sqcap$	取小运算	operation of fetch small	$\underset{\sim}{m}\sqcap\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{n}}(y)/x\wedge y$	
$\neg$	减法运算	operation of subtraction	$\neg\underset{\sim}{m}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)/(1-x)$	
$\rightsquigarrow$	模糊映射	fuzzy mapping	$f:X\rightsquigarrow Y$ 表示从 X 到 Y 的模糊函数	不同的场合中,模糊函数常有不同的定义
$\ominus$	有界差	bounded difference	$(A\ominus B)(x)=\max\{0,A(x)-B(x)\}$	
$\underset{\sim}{\leqslant}$	小于等于的放宽	relax restrictions of less or equal	$Ax\underset{\sim}{\leqslant}b$ $(x\geqslant 0)$表示约束条件 $Ax\leqslant b,x\geqslant 0$ 的软化	
D_{fix}	不动度	fixed degree	$D_{\mathrm{fix}}(x,F)=\alpha$,表示 x 关于模糊映射 $F:X\rightsquigarrow\mathscr{F}(X)$ 的不动度为 α,$\mathscr{F}(X)$ 表示 X 上所有模糊集组成的集	
e^*	绝对误差	absolute error	$e^*=x^*-x$,式中 x 表示精确值,x^* 为 x 的近似值	常简称误差
ε^*	误差限	limit of approximate value	$\lvert x^*\rvert<\varepsilon^*$,式中 x^* 为 x 的近似值,ε^* 为近似值 x^* 的误差限	
e_r^*	相对误差	relative error	$e_r^*=\dfrac{e^*}{x^*}$,式中 x 表示精确值,e^* 表示 x 的绝对误差,e_r^* 表示相对误差,它表示误差 e^* 关于近似值 x^* 的近似程度	
ε_r^*	相对误差限	limit of relative error	$\lvert e_r^*\rvert<\varepsilon_r^*$,式中 e_r^* 表示相对误差	
δ	最大相对误差	maximal relation error	$\lvert e_r^*\rvert=\dfrac{\lvert e^*\rvert}{\lvert x^*\rvert}\leqslant\delta$,式中 x^* 表示近似值,e^* 和 e_r^* 分别表示绝对误差和相对误差,取不等式成立的最小数 δ 为最大相对误差	
σ	标准误差	standard error	$\sigma=\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}{n}}$,式中 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x)^2$ 为误差平方和	
η	平均误差	mean error	$\eta=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lvert x_i-\bar{x}\rvert}{n}$,式中 $\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 是算术平均值	
v_i	离差	dispersion	$v_i=x_i-\bar{x}\quad(i=1,2,\cdots,n)$	
ν	概率误差	probabilistic error	$P(\lvert\alpha\rvert\leqslant\nu)=1/2$ 表示数 α 的绝对值大于它的误差和小于它的误差出现的可能性一样大	
PS	多项式组	polynomial set	PS 表示由有限个非零多项式构成的集合	
Zero(·)	多项式的公共零点集	zero points set of polynomials	Zero (PS)表示多项式组 PS 中的多项式的公共零点集	
Res	结式	resultant	$\mathrm{Res}(p,q,x)=a_n^k b_k^n\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{k}(\alpha_i-\beta_j)$. 式中 α_i,β_j 分别是多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的根,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 分别为 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\bar{\cup}$	合一运算	unification	$a\bar{\cup}b=a$，式中 a,b 均为原子，当且仅当 $a=b$ 时成立，否则 $a\bar{\cup}b$ 为空，集合论中的并运算是合一运算的特殊情况.	当原子不可分解时，合一的结果等于并集
R	羡余度	redundancy	$R=1-\frac{H_\infty}{H_0}$，式中 R 表示语言的羡余度，H_∞ 是极限熵，H_0 是语言成分等概率不相关时的熵	亦称冗余度
$E_t^{(p)}$	p 次指数平滑值	exponential smoothing value of pth	$E_t^{(1)}=\alpha\sum(1-\alpha)^iE_{t-i}^{p-1}$ $(p=2,3,\cdots)$，其中 $\alpha(1-\alpha)^i$ $(i=0,1,2,\cdots)$ 为当期序列值的影响权数，α 的一般范围在区间[0.1,0.5]内，适当选取 α 的值是保证预测的关键	当 $p=1$ 时即为一次指数平滑值 $E_t^{(1)}$
$\omega_t^{(p)}$	p 次加权平滑值	weight smoothing value of pth	$w_t^{(p)}=\alpha_0\sum_{i=1}^{\infty}d_iw_{t-i}^{p-1}$ $(t=\cdots,-1,0,1,\cdots,T)$，其中 α_i $(i=0,1,2,\cdots)$ 为当期序列值的影响权数，$\alpha\in$[0.1,0.5]	当 $p=1$ 时为一次加权平滑值
VIF	协方差扩大因子	amplification factor of covariance	$\mathrm{VIF}(\hat{\beta}_i)=\frac{1}{1-R^2}$，式中 $\hat{\beta}_i$ 为线性回归模型 $y=X\beta+\varepsilon$ 中 X 的第 i 个消费者预算参数 β_i 的估计值，R 为 X 的多重相关系数	
$r_u(x)$	风险厌恶度量	risk aversion measure	$r_u(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}$，式中 u 为消费者的效用函数，自变量 x 可理解为收入	亦称 Arrow-Pratt 风险厌恶度量
S	价格单纯形	price simplex	$S=\{\boldsymbol{p}\in\mathrm{R}^l\mid p_k\geqslant 0,\sum_{k=1}^{l}p_k=1\}$，式中 R^l 是商品空间，$\boldsymbol{p}$ 表示价格向量	
β_i	预算映射	budget mapping	$\beta_i(p)=\{x\in X_i\mid p\cdot x\leqslant p\cdot e_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}\pi_j(p)\}$，式中 $\beta_i(p)$ 和 X_i 分别表示第 i 个消费者的预算映射和消费集，π_j 是第 j 个生产者的利润函数	
a_{ij}	直接消耗系数	direct consumption coefficient	$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，x_{ij} 表示第 i,j 两个部门的流量，x_j 表示第 j 个部门的总产品量	
b_{ij}	完全消耗系数	total consumption coefficient	$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{is}a_{sk}a_{kj}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{it}a_{ts}a_{sk}a_{kj}+\cdots(i,j=1,2,\cdots,n)$，式中 a_{ij} 是直接消耗系数，b_{ij} 表示第 j 个产品部门对第 i 种产品的完全消耗系数	
c_{ij}	完全需求系数	total demand coefficient	$c_{ii}=1+b_{ij}c_{ij}-b_{ij}(i\neq j)$，表示产品部门提供单位最终产品对所有产品部门产品的需求量，b_{ij} 表示第 i,j 两个产品部门之间的完全消耗系数，c_{ij} 表示第 j 个产品部门产出单位最终产品对第 i 个产品部门的需求量	
d_{ij}	投资系数	investment coefficient	动态投入产出模型中常用的统计指标，$d_{ij}=\frac{k_{ij}^t}{x_j^{t+1}-x_j^t}$，表示在 $t+1$ 时第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 部门增加单位产品需要第 i 投资部门在时间 t 供给第 j 部门产品的数量. k_{ij}^t 表示 t 时 i 投资部门供给 j 部门产品总量，x_j^t 表示 j 部门 t 时的产品总量	
$L_{项}$	时滞	time lag	$L_{项}=[\alpha_1(n-0.5)+\alpha_2(n-1.5)+\cdots+\alpha_n 0.5]/100$ 为项目投资时滞，其中 α_i 为第 i 年投资占总投资的比重，n 为建设周期	
$L_{年}$	时滞	time lag	$L_{年}=\sum_{i=1}^{n}I_in_i\Big/\sum_{i=1}^{n}I_i$ 为全年总投资时滞，式中 I_i 分配到 i 部门的投资. n_i 为 i 部门以外为单位的时滞	
$\boldsymbol{\varepsilon}$	应变张量	strain tensor	$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ $(i,j=1,2,3)$，x_i,x_j 表示应变张量分量，u_i,u_j 表示位移分量	
k	高斯常数	Gauss constant	k≈0.017 202 098 95	
$\triangleq$	专用等号	symbol for special use	$a\oplus b\triangleq\max\{a,b\}$；$a\otimes b\triangleq a+b$ 表示极大代数中加法和乘法的定义	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Tayl	尾部	tail	$f=J^kf+\text{Tayl}\,f$,式中J^kf是f在原点的泰勒展开式中保留k阶以下的多项式部分,截去的部分称为f的尾部,记为Tayl f	
#()	袋	bag	$\#(x,B)$表示元素x在袋B中出现的次数.$\forall x\in B$,$0\leqslant\#(x,B)\leqslant1$时,袋$B$就蜕化为普通集合$B$	
$W(s)$	传递函数	transfer function	$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Q(s)}{P(s)}$,式中$Y(s)$,$U(s)$分别为输出量和输入量的拉普拉斯变换式,$Q(s)$,$P(s)$分别为$W(s)$的分子、分母多项式	
cond	条件数	condition number	称 cond $G=\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}\geqslant1$为矩阵$G$的条件数,cond G越大,矩阵G越趋于欠秩	
diag	对角元	diagonal element	设$S=\text{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_p)$,则称$\sigma_i(i=1,2,\cdots,p)$为对角矩阵$S$的对角元	
blockdiag	块对角元	block diagonal element	设 X = block diag $(\Delta_1,\cdots,\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_2,\cdots,\Delta_r,\cdots,\Delta_r)$,其中$\Delta_i$为$k_i$阶方阵,则称$\Delta_i$为块对角矩阵的块对角元	
arg(·)	相角	phase angle	arg $(g(j\omega))$称为相角,其中$g(j\omega)$为$m\times n$阶复阵函数,j为虚数单位	
conv(·)	凸包	convex hull	conv $f(j\omega,\Gamma)$=conv $f(j\omega,\Gamma_0)$,式中conv(·)表示R^2上的凸包,$\omega\in R$,j为虚数单位,$\Gamma_0\triangleq\{\nu\|\nu_i=0,1;i=1,2,\cdots,m\}$为$\nu_i(i=1,2,\cdots,m)$中的多仿射函数	
$\asymp$	等序关系	equals order relation	若z_1,z_2为两个非零复数,且$\frac{z_2}{z_1}\neq0$,则记为$z_1\asymp z_2$	
ess sup	本质上确界	essential supremum	ess $\sup\limits_{\omega}\sigma(G(j\omega))$表示$m\times n$阶复矩阵值函数$G(j\omega)$的本质上确界,即除去$\omega$的一个零测子集后的上确界	
s.t	约束条件	constraint condition	$\max f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$, $\text{s.t}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m),\\ x_j\geqslant0 & (j=1,2,\cdots,n),\end{cases}\quad(*).$ 目标函数 max f 必须满足(*)中的条件	
$\overset{L}{>}$	字典序	lexicographicall order	$V\overset{L}{>}0$表示字典式为正的;$V\overset{L}{<}0$表示字典式为负的;Lex min 表示字典式最小	$V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$是n维向量空间的向量
$\underline{\delta}_B$	下特征数	low characteristic number	$\underline{\delta}_B=\begin{cases}\max\left\{-\frac{\lambda_i}{\lambda_j^*}\middle\|\lambda_j^*<0\right\} & (\exists\,\lambda_j^*<0),\\ -\infty & (\bar{\exists}\,\lambda_j^*<0),\end{cases}$ $\underline{\delta}_B$称为基B的下特征数λ_j,λ_j^*为检验数	
$\overline{\delta}_B$	上特征数	above characteristic number	$\overline{\delta}_B=\begin{cases}\min\left\{-\frac{\lambda_i}{\lambda_j^*}\|\lambda_j^*>0\right\}, & \exists\,\lambda_j^*>0,\\ +\infty, & \bar{\exists}\,\lambda_j^*>0,\end{cases}$ $\overline{\delta}_B$称为基B的上特征数,λ_i,λ_j^*为检验数	
$\ggg$	等级标志关系	relation of order mark	$p_i\ggg p_j$表示在一个单目标函数 min $f=p_1f_1+p_2f_2+\cdots+p_lf_l$中,$p_1,p_2,\cdots,p_l$为等级标志关系	
$P(\cdot)$	策略	policy	P表示最优策略.$P_{k,n}^*(x_k)$表示最优子策略,是初始状态为x_k的后部子过程所有子策略中最优者	
opt	最优值	optimum value	opt $v_{k,n}[x_k,P_{k,n}(x_k)]$表示指标函数$v_{k,n}$的最优值,$P_{k,n}$表示子策略是从第$k$段开始到终点过程的策略	
pos	正线性组合集	set of positive linear combination	pos$A=\{\alpha\|\alpha\in R^m,\ \alpha=\sum_{j=1}^{n}\beta_jA_j,\ \beta_j\geqslant0,j=1,2,\cdots,n\}$表示由矩阵$A$的各列的正线性组合组成的集合	
epi	上图	epigraph	epi $f=\{(x,\alpha)\|\alpha\geqslant f(x)\}$表示函数$f(x)(x\in R^n)$的上图,若给定epi f,则$f(x)=\min\{x\|(x,\alpha)\in\text{epi}\,f\}$	
/	排队记法	queueing notation	$X/Y/Z/C$为排队记法,其中X,Y,Z,C的意义依次为:1. 相继到达间隔时间的分布;2. 服务时间的分布;3. 服务台的数目;4. 允许的顾客容量	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Ls	队长期望值	team length expected value	$Ls=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ 表示标准的 $M/M/1$ 模型的队长期望值，ρ 为服务强度，即服务台平均利用率	
Lq	队列长期望值	queueing length expected value	$Lq=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=Ls-P=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}$ 表示标准的 $M/M/1$ 模型的队列长期望值，ρ 为服务强度，即服务台平均利用率	
Ws	逗留时间期望值	expected value of staying time	$Ws=E[W]=\frac{1}{\mu-\lambda}$ 表示标准的 $M/M/1$ 模型的逗留时间期望值	
Wq	等待时间期望值	expected value of waiting time	$Wq=Ws-\frac{1}{\mu}=\frac{\rho}{\mu-\lambda}$ 表示标准的 $M/M/1$ 模型的等待时间期望值	
G	对策	games	对策 $G=(S_1,S_2,A)$，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 表示局中人Ⅰ的纯策略集合，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 表示局中人Ⅱ的纯策略集合. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 表示支付（赢得）矩阵	
V_G	对策值	games value	$V_G=\max\limits_i\min\limits_j a_{ij}=\min\limits_j\max\limits_i a_{ij}$ 称为对策 $G=\{S_1,S_2,A\}$ 的值	
Te	噪声温度	noise temperature	$Te=\frac{N}{kB}(k)$，其中 N 为噪声功率，k 为玻耳兹曼常数，B 为频带宽度(Hz)	
γ	传播常数	propagation constant	$\gamma=\alpha+j\beta=\sqrt{Z_1r_1}$，其中 α 表示衰减常数(Np/m，dB/M)，β 表示相移常数(rad/m)	
Lt	传输损耗	loss of transmission	$Lt=32.45+20\lg f+20\lg d+A-G_t-G_r$，式中 f 为工作频率(MHz)，d 为传输距离(km)，A 为电路衰减(dB)，G_t、G_r 分别为发射天线与接收天线的增益(dB)	
C	信道容量	channel capacity	$C=\max\limits_{P(x)}I(x;y)$，其中 $P(x)$ 为输入符号概率(或概率密度)，$I(x;y)$ 为互信息量	
$R(D^*)$	信源率失真函数	source rate distortional function	$R(D^*)=\min\{I(u;v)\}$，$P(v_j\|u_i)\in B_D$，其中 D^* 为信源的允许平均失真度，$I(u;v)$ 为平均互信息量	
I_A	自信息量	self-information	$I_A=\log\frac{1}{P(A)}=-\log P(A)$，式中 $P(A)$ 为随机事件 A 发生的概率，I_A 表示 A 的自信息量	
$I(x;y)$	互信息量	mutual information	$I(x;y)=\log\frac{P(x\|y)}{P(y)}$，式中 y 表示收到的消息，x 表示收到消息的某事件的信息量	
$I(X;Y)$	平均互信息量	average mutual information	$I(X;Y)=H(X)-H(X\|Y)$，其中 $H(X)$ 代表接收到输出符号集 Y 以前关于输入符号集 X 的平均不确定性；$H(X\|Y)$ 代表接收到输出符号集 Y 后关于输入符号集 X 的平均不确定性	
$\oplus$	逻辑导式运算符号	operational symbol of logical derived rule	$D(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\oplus\beta_i)$，式中 α_i、β_j 表示长度为 n 的二进制序列码元，$\alpha_i\oplus\beta_i$ 是二进制码元相加. $D(\alpha,\beta)$ 表示 α、β 对应位置上码元取值不同的个数	
$\circledast$	周期卷积	periodic convolution	$\tilde{x}_1(n)\circledast\tilde{x}_2(n)$，式中 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 表示周期长度	
Ⓝ	循环卷积	circular convolution	$\tilde{x}_1(n)$Ⓝ$\tilde{x}_2(n)$	

撰　稿　王怀安　刘宝康　杨子胥　杨德平
　　　　段　方　郝拉娣　阎崇正
审　定　李志深　陈惠津　阎崇正

条目笔画索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出释文的全部条目及其参见条目，提供读者按汉字笔画方式检索使用。

2. 以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按一（横）、丨（竖）、丿（撇）、丶（点）、乛（折）五种笔形顺序排列，其中，㇀（提）归为一（横），亅（竖钩）归为丨（竖），㇏（捺）归为丶（点），各种笔形带钩或曲折的笔画（除竖钩"亅"外）归为乛（折）。第一个字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 凡第一个字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在汉字起首条目标题的最后。以西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画顺序排列。

一　画

二　画

三 画

四　画

五 画

五　画

六　画

七　画

条目笔画索引

八　画

九　画

十 画

条目笔画索引

十 一 画

十二画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

十 八 画

十 九 画

其 他

其　　他

条目音序索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出释文的全部条目及其参见条目，提供读者按汉语拼音方式检索使用。

2. 以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一个字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

3. 凡第一个字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在汉字起首条目标题的最后。以西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的拼音字母顺序排列。

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

其　　他

条目西文索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出西文标题的全部条目，提供读者按西文检索使用.

2. 条目标题按起首西文字母的顺序排列（同一字母先大写，后小写）；条目标题的西文缩写，按一个词排列。其他文种亦按此原则编排。

3. 凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。

4. 若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。

A

B

C

条目西文索引

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

Y

Z

其　他

中外人名译名对照表

A

阿贝尔(Abel,N.H.)
阿比黎(Apery,R.)
阿达马(Hadamard J.(-S.))
阿蒂亚(Atiyah,M.F.)
阿尔福斯(Ahlfors,L.V.)
阿尔冈(Argand,J.R.)
阿尔佩尔(Альпер,С.Я.)
阿尔特曼(Altman,M.)
阿尔泽拉(Arzelà,C.)
阿哈罗尼(Aharoni,I.)
阿基米德(Archimedes)
阿劳格鲁(Alaoglu,L.)
阿龙扎扬(Aronszajn,N.)
阿曼(Amann,H.)
阿梅留(Amerio)
阿姆布罗塞蒂(Ambrosetti,A.)
阿南达姆(Anandam,V.)
阿诺尔德(Арнольд,В.И.)
阿佩尔(Appell,P.-É.)
阿廷(Artin,E.)
埃伯莱因(Eberlein,F.)
埃恩苏(Earnshaw,E.)
埃尔米特(Hermite,C.)
埃加勒(Ecalle,J.)
埃文斯(Evans,G.C.)
艾弗森(Iversen,F.)
艾克兰德(Ekeland,I.)
爱德勒(Adler,Roy L.)
爱弗罗斯(Effros,E.)
爱克曼(Eckmann,J.P.)
爱因斯坦(Einstein,A.)
安德罗诺夫(Андронов,А.А.)
安德森(Anderson,A.)
安格尔(Anger,C.T.)
奥邦(Aubin,J.P.)
奥恩斯坦(Ornstein,D.)
奥尔利奇(Orlicz ,W.)
奥玛(Ozawa,M.)
奥斯古德(Osgood,W.F.)
奥斯特罗格拉茨基(Остроградский,М.В.)
奥斯特洛夫斯基(Ostrowski,A.M.)
奥谢列杰茨((Осследед,В.И.))

B

巴布(Burbu,V.)
巴恩斯(Barnes,E.W.)
巴赫列维奇(Базилевиц)
巴里(Бари,Н.К.)
巴拿赫(Banach,S.)
白罗索夫斯基(Brosowski,B.)
柏拉图(Plato)
柏森(Pesin,Ya.B.)
班勒卫(Painlevé,P.)
邦尼(Bony,J.M.)
包克(Bock,H.)
鲍恩(Bowen,R.)
鲍尔(Bauer,H.)
鲍金(Bautin,N.N.)
鲍克麦尔(Boulkhemair,A.)
贝尔(Baire,R.L.)
贝尔曼(Bellman,R.)
贝克(Baker,I.N.)
贝克-库塔斯(Kotus,J.)
贝萨伽(Bessaga,C.)
贝塞尔(Bessel,F.W.)
贝斯尔科里奇(Besrkolyqu,A.S.)
本迪克松(Bendixson,I.O.)
比伯巴赫(Bieberbach,L.)
比林斯利(Billingsley,P.)
波波夫(Popov,V.A.)
波波克(Boboc,N.)
波哥纳(Bogner,J.)
波赫哈默尔(Pochhammer,L.)
波拉克托克(Plactock,R.)
波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)
波里索维奇(Борисович,Ю.Г.)
波利特诺(Bliedtner,J.)
波利亚(Polya,G.)
波默伦克(Pommerenke,C.M.W.)
波嫩拉斯特(Bohnenlust,H.)
波伊亚(Pólya,G.)
波兹蒂斯基(Przytycki,F.)
玻尔(Bohr,H.)
伯恩施坦(Bernstein,A.R.)
伯恩斯坦(Бернштейн,С.Н.)
伯格维诺(Bergweiler,W.)
伯克霍夫(Birkhoff G.D.)
伯斯(Bers,L.)
伯西柯维奇(Besicovitch,A.S.)
伯雅查基-夏皮罗(Piatetski-Shapiro)
泊金斯(Perkins,E.)

泊松(Poisson,S.-D.)
博尔查(Bolza,O.)
博赫纳(Bochner,S.)
博克桑(Bocsan,G.)
博灵(Beurling,A.)
博内(Bonnet ,P.-O.)
博苏克(Borsuk,K.)
博特(Bott,R.)
布尔巴基(Bourbaki,N.)
布凯(Bouquet,J.-C.)
布莱顿(Brayton,R.)
布朗(Brown,S.)
布朗基(Branges,L. de)
布劳德(Browder,F. E.)
布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)
布雷洛(Brélot,M. E.)
布雷默尔曼(Bremermann,H. J.)
布里奥(Briot,C. A. A.)
布里冈(Bouligand,G. L.)
布利冈(Bouligand,G. L.)
布林(Brin,M.)
布鲁姆(Brjumo,A. D.)
布伦特(Brent,R. P.)
布洛赫(Bloch,A.)
布什(Buchar,Gh)
布斯布里基(Buisbridge,I. W.)
布特鲁(Boutroux,P. L.)

C

查瑞(Cherry,T. M.-F.)
柴肯(Chacon,R. V. S.)
陈兰荪(Chen Lansun)
陈难先(Chen Nanxian)
陈省身(Chern Shiing-Shen)
陈翔炎(Chen Xiangyan)
茨仑克(Salenk)
崔可(Tricot,C.)

D

达伯(Darbo,G.)
达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)
达维德(David,G.)
戴尼(Deny,J.)
戴维斯(Davis,M. D.)
丹姆灵(Deimling,K. D)
丹尼尔(Daniell,P. J.)
丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)
当儒瓦(Denjoy,A.)
道格拉斯(Douglas,J.)
德·弗里斯(de Vries,G.)
德·吉奥基(De Giogi,E.)
德巴杰斯(DeBaggis,H. F.)
德布鲁因(de Bruijn,N. G.)
德芙(Duff,G. D. F.)
德拉姆(de Rham,G.-W.)
德洛内(Delaunay,C. E.)
德马尔(de Marr,R.)
德瓦内(Devaney ,R. L.)
邓福德(Dunford,N.)
狄喇克(Dirac,P. A. M.)
狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)
迪厄多内(Dieudonné,J.)
迪拉克(Dulac,H.)
笛卡儿(Descartes,R.)
蒂茨(Tietze,H.)
蒂奇马什(Titchmarsh,E,Ch.)
棣莫弗(de Moivre,A.)
杜·布瓦-雷蒙(Du Bois-Reymond,P. D. G.)
杜阿梅尔(Duhamel,J. M. C.)
杜布(Doob,J. L.)
杜俊基(Dugundji,J.)
杜瓦地(Douady,A.)

E

恩夫洛(Enflo,P.)
恩龙(Hénon,M.)

F

伐拉丹(Varadlhan,S. R. S.)
法图(Fatou,P. J. L.)
法托里尼(Fattorini,H. O.)
法瓦尔(Favard,J. A.)
樊墛(Ky Fan)
菲茨杰尔德(Fitzgerald,C. H.)
菲尔兹(Fields,J. C.)
菲利普斯(Phillips,R. S.)
菲舍尔(Fischer,E. S.)
费伯(Faber,G.)
费德雷尔(Federer,H.)
费弗曼(Fefferman,C.)
费克特(Fekete,M.)
费勒斯(Ferrers,N. M.)
费马(Fermat,P. de)
费耶尔(Fejer,L.)
芬克(Fink,A. M.)
芬切尔(Fenchel,W.)
芬斯勒(Finsler,P.)
冯(Phong,D. H.)
冯·诺伊曼(von Neumann,J.)
弗拉格曼(Phragmen,L. E.)
弗朗科斯卡(Frankowska,H.)
弗雷德霍姆(Fredholm,(E.)I.)
弗雷歇(Fréchet,M.-R.)
弗里德里希斯(Friedrichs,K. O.)
弗里克(Fricke,R.)
弗列克梭-申腾内克(Flexor-Sentenac)
弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)
弗罗斯特曼(Frostman,O.)
弗洛伊德(Freud,G.)
伏尔泰(Voltaire)

福洛依德(Floyd,E. E.)
傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)
富比尼(Fubini,G.)
富仓光宏(Shishikura,M.)
富克斯(Fuchs,I. L.)
富兰克林(Franklin,P.)
富兰克斯(Franks,J.)
富山(Fukushima,M.)

G

伽德纳(Gardner,C. S.)
伽利略(Galilei,G.)
盖尔范德(Гельфанд,И. М.)
盖尔丰德(Гелъфонд,А. О.)
冈洁(Oka,K.)
高念祖克(Корнейчук,Н. П.)
高斯(Gauss,C. F.)
戈卢津(Голузин,Г. М.)
哥本高斯(Гопенгауз,Л. Е.)
哥德尔(Gödel,K.)
哥德曼(Godement,R.)
哥尔德斯坦(Goldstein,R.)
哥尔丁(Garding,L.)
哥赫别格(Гохберг,И. Ц.)
歌德(Gohde,D.)
格拉斯曼(Grassmann,H. G.)
格朗沃尔(Gronwall,T. H.)
格劳尔特(Grauert,H.)
格勒奇(Grötzsch,H.)
格雷夫斯(Graves,L.)
格林(Green,G.)
格隆斯基(Grunsky,H.)
格罗莫尔(Gromoll,D.)
格罗斯(Gross,F.)
格罗斯伯格(Grosberg,J.)
格罗腾迪克(Grothendieck,A.)
葛林(Gehring,F. W.)
古尔萨(Goursat,É.-J.-B.)
古肯亥默(Guckenheimer,J.)
国田宽(Hiroshi Kunita)
果尔尼维茨(Gorniewicz,L.)

H

哈代(Hardy,G. H.)
哈恩(Hahn,H.)
哈尔(Haar,A.)
哈尔(Hale,T. K.)
哈尔莫斯(Halmos,P. R.)
哈克(Hake,H.)
哈里什·钱德拉(Harish-Chandra)
哈密顿(Hamilton,W. R.)
哈默尔(Hamel,G. K. W.)
哈默斯坦(Hammerstein,H.)
哈纳克(Harnack,C. G. A.)
哈钦生(Hutchinson,J. E.)
哈斯诺(Häseler,F.)
哈托格斯(Hartogs,F. M.)
哈亚西(Hayashi,S.)
海德伯兰特(Hidebrandt,T.)
海尔士(Hirsch,M. W.)
海伦(Heron,(A))
海曼(Hayman,W. K.)
亥尔斯(Hyers,D. H.)
亥姆霍兹(Helmholtz,H. von)
汉克尔(Hankel,H.)
汉森(Hansen,W.)
豪斯多夫(Hausdorff,F.)
好志峰(Hao Zhifeng)
赫茨(Herz,C. S.)
赫尔曼德尔(Hörmander,L.)
赫尔曼德尔(Hörmander,L. V.)
黑德波格(Hedberg,L. I.)
黑利(Helly,E.)
亨内(Henle,J. M.)
亨内费尔德(Hennefeld,J.)
亨斯托克(Henstock,R.)
亨特(Hunt,G. A.)
亨特(Hunt,R. A.)
胡巴特(Hubbard,J. H.)
胡巴特(Hubbard,J. M.)
胡尔维茨(Hurwitz,A.)
华罗庚(Hua Loo-Keng)
华歆厚(Hua Xinhou)
惠更斯(Huygens,C.)
惠特尼(Whitney,H.)
霍布森(Hobson,E. W.)
霍恩(Horn,J.)
霍尔(Hall,J.)
霍夫尔(Hofer,H.)
霍普夫(Hopf,E.)
霍普夫(Hopf,H.)
霍奇(Hodge,W. V. D.)

J

基尔霍夫(Kirchhoff,G. R.)
基赫曼(Гихман,И. И.)
吉布斯(Gibbs,J. W.)
吉洪诺夫(Тихонов,А. Н.)
吉田耕作(Yosida,K.)
季曼(Тиман,А. Ф.)
加伯(Garber,V.)
加拉贝迪安(Garabedian,P. R.)
加廖尔金(Галёркин,Б. Г.)
加藤敏夫(Koto,T.)
加藤顺二(Kato,J.)
加托(Gâteaux,R.)
嘉当(Cartan,È)
嘉当(Cartan,H.)
贾德克(Дзядык,В. К.)
角谷静夫(Kakutani,S.)

杰克森(Jackson,D.)
金曼(Kingman,J. F. C.)

K

卡茨(Kac,M.)
卡尔达诺(Cardano,G.)
卡尔林(Karlins,S.)
卡尔松(Carleson,L.)
卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)
卡里斯梯(Caristi,J.)
卡舍茨(Кадец,М. И.)
卡托克(Katok,A. B.)
开尔文(Kelvin,B.)
开斯勒(Keisler,H. J.)
凯得森(Kadison,R. V.)
凯洛格(Kellogg,O. D.)
坎托罗维奇(Канторович,Л. В.)
康比尼(Cambini,A.)
康黑姆(Konheim,A. G.)
康纳(Conner,P. E.)
康斯坦丁斯库(Constantinescu,C.)
康托尔(Cantor,G. (F. P.))
康托尔(Cantor,M. B.)
考尔德伦(Calderón,A. -P.)
考特曼(Kottman,C. A.)
柯尔获希(Keldysh,M. V.)
柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А. Н.)
柯尼(Cornea,A.)
柯西(Cauchy,A. —L.)
科恩(Cohen,A.)
科恩(Kohn,J. J.)
科尔泰韦赫(Korteweg,D. J.)
科克(Koch,H. von)
科罗夫金(Коровкин,П. П.)
科普卡(Kupka,I.)
科伊夫曼(Coifman,R. R.)
克贝(Koebe,P.)
克尔德什(Келдыш,М. В.)
克尔克(Kirk,W. A.)
克拉克(Clarke,F. H.)
克拉克松(Clarkson,J. A.)
克拉斯诺塞尔斯基(Красноселвский,М. А.)
克拉索夫斯基 00(Красовский,Н. Н.)
克莱特(Collet,P.)
克莱因(Klein,(C.)F.)
克莱因伯尔格(Kleinberg,E. M.)
克勒(Kähler,E.)
克里洛夫(Krylov,N. V.)
克利(Klee,V. L.)
克利福德(Clifford,A.)
克列因(Крейн,М. Г.)
克列因(Крейн. С. Г.)
克鲁木(Crum,M. M.)
克鲁兹(Cruz,M. A.)
克那斯特(Knaster,B.)
克纳塞(Kneser,A.)
克内特(Kriete,H.)
孔德拉绍夫(Кондрашов,В. И.)
库法列夫(Куфарев,К.)
库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)
库塔斯(Kotus,J.)
库辛(Cousin,P.)
奎泊尔(Kuiper,C.)
魁特(Köthe,G.)

L

拉比诺维茨(Rabinowitz,P. H.)
拉波波尔特(Рапопорт,И. М.)
拉德马赫(Rademacher,H.)
拉东(Radon,J.)
拉夫连季耶夫(Лаврентьев,М. А.)
拉盖尔(Laguerre,M.)
拉格朗日(Lagrange,J. -L.)
拉克希米卡萨姆(Lakshmikantham,V.)
拉列斯库-皮卡(Lalescu-Picard)
拉梅(Lamé,G.)
拉姆森(Lamson,K.)
拉普拉斯(Laplace,P. -S.)
拉普泼特(Раппорт,И. М.)
拉萨尔(Lasalle,J. P.)
拉沙塔(Lasota,A.)
拉扎尔(Lazard,M.)
拉兹密辛(Razumikhin,B.)
莱布尼茨(Leibinz,G. W.)
莱夫谢茨(Lefschetz,S.)
赖尔-纳尔德泽夫斯基(Ryll-Nardzewski,C.)
兰道(Landau,E. G. H.)
兰德柯夫(Landkof,N. S.)
兰士(Lance,E. C.)
郎之万(Langevin,P.)
劳(Low,K.)
劳勃(Loeb,P.)
劳顿(Lawton,W.)
劳赫(Lorch,E. R.)
勒贝格(Lebesgue,H. L.)
勒达拉(Lehtola,P.)
勒夫纳(Loewner,C.)
勒雷(Leray,J.)
勒让德(Legendre,A. -M.)
雷加维(Radjavi,H.)
雷利希(Rellich,R.)
雷蒙多斯(Rémoundos,G.)
雷特(Later,R. H.)
黎曼(Riemann,(G. F.)B.)
李特尔伍德(Littlewood,J. E.)
李天岩(Li Tianyan)
李亚普诺夫(Ляпунов,А. М.)
李忠(Li Zhong)
里得(Read,C. J.)
里奇(Ricci,F.)

纽曼(Neuman,D. J.)
诺盖(Norguet,F.)
诺特(Noether,(A.)E.)
诺特(Noether,F.)
诺伊曼(Neumann,C. G.)

O

欧几里得(Euclid)
欧拉(Euler,L.)

P

帕德(Padé,H.)
帕莱斯(Palais,R. S.)
帕塞瓦尔(Parseval,C. M. -A.)
庞加莱(Poincaré,(J. -)H.)
庞特里亚金(Понтрягин,Л. С.)
陪尔钦斯基(Pelczyński,A.)
培根(Bacon,R.)
佩出里逊(Petryshyn,W. V.)
佩德森(Pederson,R.)
佩蒂斯(Pettis,P. B. J.)
佩克索托(Peixoto,M.)
佩利(Paley,R. E. A. C.)
佩龙(Perron,O.)
佩亚诺(Peano,G.)
皮卡(Picard,(C. -)É.)
皮锐(Peetre,J.)
皮特里(Peetre,J.)
皮特森(Petersen,K.)
皮尤夫(Pugh,C.)
普拉托(Plateau,J. A. F.)
普朗克(Planck,M.)
普李斯(Plis,A.)
普罗科波维奇(Prokopovich,G. S.)
普塔克(Ptak,V.)

Q

齐平(Zippin,M.)
恰普雷金(Чаплыгин,С. А.)
切比雪夫(Чебышев,П. Л.)
秦元勋(Qin Yuanxun)
琼斯(Jones,P.)

R

韧格罗斯(Ringrose,J. R.)
茹科夫斯基(Жуковский,Н. Е.)
茹利亚(Julia,G. M.)
儒尔内(Journé,J. L.)
若尔当(Jordan,M. E. C.)

S

撒布(Shub,M.)
萨多夫斯基(Sadovskii,B. N.)
萨弗诺夫(Safonov,M. V.)
萨克斯(Saks,S.)
萨廖(Sario,L. R.)
萨鲁斯(Sarrus,P. F.)
塞尔(Serre,J. P.)
塞尔伯格(Selberg,A.)
塞弗特(Seifert,G.)
塞戈尔-巴鲁查-拉德(Sehgal,V. M. Bharucha,A. T. -Reid)
赛格(Szegö,G.)
桑德拉塞卡尔(Chandrasekher,S.)
瑟斯顿(Thurston,W.)
沙可夫斯基(Sarkovskii,A. N.)
沙利文(Sullivan,D. P.)
绍德尔(Schauder,J. P.)
绍凯(Choquet,G.)
施蒂费尔(Stiefel,E. L.)
施密特(Schmidt,E.)
施耐尔(Schreier)
施尼雷尔曼(Шнирельман,Л. Г.)
施泰因梅茨(Steinmetz,N.)
施坦(Stein,E. M.)
施坦豪斯(Steinhaus,H. D.)
施托尔茨(Stolz,O.)
施瓦兹(Schwarz,A. J.)
施瓦兹(Schwarz,H. A.)
施瓦兹(Schwarz,L.)
施瓦克(Švarc,A. S.)
施维则(Schweizer,B.)
施依佛(Scheeffer,L.)
史密斯(Smith,K. T.)
史松龄(Shi Songling)
斯各洛霍特(Скороход,А. В.)
斯捷奇金(Стечкин,С. Б.)
斯克拉(Sklar,A.)
斯来辛格(Shlesinger,M. F.)
斯梅尔(Smale,S.)
斯米尔诺夫(Смирнов,В. И.)
斯穆良(Šmulian,V.)
斯特凡(Stefan,P.)
斯特林(Stirling,J.)
斯特鲁克(Stroock,D. W.)
斯廷罗德(Steenrod,N. E.)
斯通(Stone,M. H.)
斯图鲁弗(Struve,K. H.)
斯图姆(Sturm,J. C. -F.)
斯托克斯(Stokes,G. G.)
斯托拉德(Stallard,G. M.)
苏斯林(Суслин,М. Я.)
索伯列夫(Соболев,С. Л.)

T

塔尔斯基(Tarski,A.)
泰勒(Taylor,J. C.)
泰希米勒(Teichmüller,O.)
汤姆森(Thomson,W.)
陶茨(Tautz,G.)
特雷夫茨(Trefftz,E. I.)

后　记

十八载坎坷跋涉，千余人魂牵梦萦，这部涵盖现代数学科学体系的大型工具书——《数学辞海》终于杀青付梓了，释负之余感慨良多。

上世纪80年代中期，随着国家改革开放的深入，华夏盛世初显，我们这些数学工作者深感教学与科研急需，且人过中年应有所建树以无愧人生，于是决意编纂一部大型数学工具书，以振兴祖国数学事业，为中华民族争光。当《数学辞海》的选题一经提出，便在国内外数学界赢得热烈反响，特别是得到了前辈名家的亲切关怀和积极支持。又经广泛调研、民主磋商和反复论证，一部集古今中外数学成就于一体的《数学辞海》总体设计方案被确定下来，我们从此踏上了始料不及的艰难历程。

立意之初，我们考虑到国家百业待兴，财力紧缺，准备不靠国家拨款，自筹资金完成这项系统工程，闯一条民间编纂大型工具书的新路。为搞好编纂工作，特地组成了民间机构——数学辞海编辑委员会及其常设联络办事机构：数学辞海编辑部，并得到国家教育部、山西省教育厅、山西省新闻出版局和山西省教育学院（现与山西大学师范学院、太原师专合并为太原师范学院）等有关部门的认可。撰稿初期，由于有200余所院校及科研单位几代数学工作者的热情支持和积极参与，进展尚属顺利，但随着工程的进展，要在全国范围内(包括港、台地区)的1500多名专家、教授之间联系落实撰稿、统稿、审稿、改稿、编辑、校对等工作，再加上绝大多数的专家、教授是利用业余时间完成以上工作的，缺乏资金来源和专业的工作人员等困难，使之民间组织的数学辞海编辑部实在不堪重负。为解决编辑活动经费，编辑部的一些人几度成为当代“武训”，四处奔走，多方求助。就这样，编辑部仍经常处在邮资、通讯和差旅费难以支付的境地。

在经历了“九九八十一难”之后，在《数学辞海》终于诞生的今天，我们深深感谢社会各界及国内外有识之士给予的慷慨捐助，特别是山西省人民政府的资助；深深感谢山西教育出版社、东南大学出版社、中国科学技术出版社和北京大学出版社给予的关键性支持。我们也不能忘记那些给我们送来100元、500元、1000元……的捐助者，当然更要告诉读者的是：如果您感到此书对您稍有帮助的话，请不要忘记这1000多名数学工作者是不计报酬、不讲条件地编纂这部工具书的，他们当中还有很多人把自己的工资捐献给编辑部，以确保数学辞海编辑部的工作不致中断。还有一些专家、教授，历经数年，甚至十几年苦心修典，往往一天伏案十五六个小时，终于积劳成疾，竟然没有亲眼看到《数学辞海》面世，就不无遗憾地离开了我们。听着他们临终遗言：“一定要尽快出版中国的《数学辞海》”，更增添了我们的一份紧迫感和责任感。

具有悠久历史的中华民族，对世界数学发展的杰出贡献，长期为世人瞩目，虽经中落，但中国当代数学科学又有了重大的进步。我们相信：在国家“科教兴国”方针指引下，中国必将再度成为数学大国，深望《数学辞海》能为实现这一宏伟目标略尽微薄之力。

《数学辞海》第一版即将面世之时，一种不名的恐惧萦绕心头，它的质量能获得读者的认可吗？能达到立意之初衷吗？希望广大读者在发现此书的种种问题时，不吝赐教。待我们稍稍喘息之后，将再邀请一批专家、教授对其进行修订，使之进一步充实提高，以期终臻完善。

数学辞海编辑部
2002年7月8日

《数学辞海》编辑部

图书在版编目(CIP)数据

数学辞海.第3卷/《数学辞海》编辑委员会编.
南京:东南大学出版社,2002.8
ISBN 7-81050-612-9

Ⅰ.数… Ⅱ.数… Ⅲ.数学—词典
Ⅳ.O1-61

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第050444号

书　　名:数学辞海(第三卷)
著作责任者:《数学辞海》编辑委员会
责 任 编 辑:徐启平
书 名 题 字:启　功
装 帧 设 计:林胜利　王春声
标 准 书 号:ISBN 7-81050-612-9/O·56
出　版　者:东 南 大 学 出 版 社
　　　　　　中国科学技术出版社
　　　　　　山 西 教 育 出 版 社
印　装　者:山西新华印业有限公司新华印刷分公司
发　行　者:东南大学出版社　中国科学技术出版社　山西教育出版社
经　销　者:新华书店
规　　格:880mm×1230mm　1/16　56印张　2048千字
出 版 日 期:2002年8月第1版　2002年8月第1次印刷
本 卷 定 价:280.00元　(全套定价:1800.00元)